arXiv:2303.09356v2 [math.DS] 5 Aug 2023

含阻尼器刚体的稳定性与长期行为

Evan Arsenault[1†] 和 Giusy Mazzone[2*]

[1]爱德华·S·罗杰斯高级电气与计算机工程系，多伦多大学，金斯学院路 10 号，多伦多，M5S 3G4，安大略省，加拿大。[2] 数学与统计学系，女王大学，大学大道 48 号，金斯顿，K7L 3N6，安大略省，加拿大。

*通讯作者。电子邮箱：giusy.mazzone@queensu.ca；贡献作者：evan.arsenault@mail.utoronto.ca；

†本文作者对本研究贡献相同。

摘要

本文全面分析了由两个刚体构成、并由一层薄润滑剂隔开的耦合系统的稳定性和长期行为。我们证明，当且仅当旋转轴是外体转动惯量最大的惯性主轴时，整个系统的永久旋转（此时两个固体相对静止）才是指数稳定的。所有其他平衡态均为正规双曲，因此不稳定。此外，我们证明，无论选择何种初始条件，控制方程的所有解都会收敛到某个平衡构型。文中还给出了支持上述结果的数值证据，以及确保稳定构型可达的条件。对于稳定性分析，我们采用了适用于具有中心流形的动力系统的线性化原理。通过仔细分析支配该耦合系统运动的部分耗散方程组，我们刻画了其长期行为。

关键词：刚体动力学、自由旋转、部分耗散系统、通常稳定平衡态、通常双曲平衡态、长期行为、稳定化

MSC 分类：70K25 , 70E17 , 70E50 , 34A34 , 34D05 , 34D20

声明

资金支持

Evan Arsenault 衷心感谢加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）通过 NSERC 本科生研究奖 “ 带阻尼器刚体的长期动力学 ” 提供的支持。

Giusy Mazzone 衷心感谢加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）通过 NSERC发现基金“应用于流固相互作用问题的部分耗散系统”提供的支持。

利益冲突

The 作者没有需要披露的相关经济利益或非经济利益。

数据和材料的可用性

不适用。

代码可用性

不适用。

作者贡献

所有作者均参与了本文所报告的研究。论文初稿由 Evan Arsenault 撰写，所有作者均对论文的先前版本提出了意见。所有作者均已阅读并批准最终稿。

致谢

不适用。

1 引言

考虑由两个刚体组成的系统 $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$，其中 $\mathcal{B}_2$ （严格地）容纳在 $\mathcal{B}_1$内部的球形空腔中。两个固体之间仅由一层薄薄的球形润滑剂层隔开[1] ，该润滑剂层完全填满两个固体之间的间隙（见图1）。此外，我们假设内侧固体 $\mathcal{B}_2$ 是一个半径为 $a \gg h$的均质球形刚体，其中 h 表示 $\mathcal{B}_2$ 与其内部空腔表面之间的间隙厚度（常数）$\mathcal{B}_1$。

PSfrag 替换

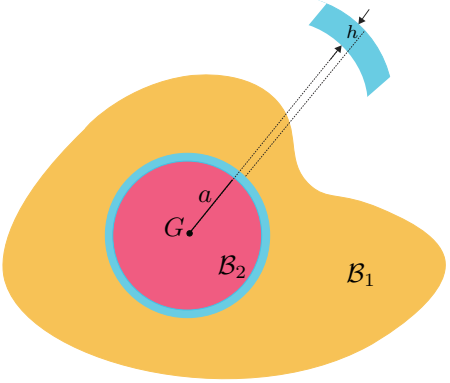


图 1 含阻尼器的刚体

本文研究整个系统绕质心的自由旋转，其中 G $\mathcal{B}_1$；也就是说，我们假设作用于系统的外力为零，且 G是一个固定点（见方程（2））。此外，我们忽略 $\mathcal{B}_2$ 在空腔内的任何平动，并假设其中心[2]C $\mathcal{B}_2$ 与 G[3]重合。我们还假设，两个固体之间的表面力（因存在润滑剂而产生的一种内力）会产生一个力矩，该力矩与 $\mathcal{B}_2$ 相对于 $\mathcal{B}_1$的速度成正比（见方程（3））。

值得注意的是，如果固体之间没有润滑剂，那么这两个刚体的运动将完全解耦（因此也就毫无趣味）。此外，如果空腔内没有内侧固体，那么外部刚体 $\mathcal{B}_1$ 的一般运动将是 泊松型运动。例如，视初始条件而定， $\mathcal{B}_1$ 可能会进行规则进动。本研究旨在说明，内侧固体 $\mathcal{B}_2$在受到上述类型的力矩（由润滑剂产生）作用时，会 稳定 外部固体的运动，并使整个系统达到一种状态（事实上是一种平衡构型，见定理 6）：固体相对静止，且

[1]润滑剂是一种黏性不可压缩流体。[2]几何中心 C $\mathcal{B}_2$ 同时也是其质心，因为我们假设 $\mathcal{B}_2$ 是均质刚体。[3] 根据[3], , 这一假设也可以替换为：假设 $\mathcal{B}_2$的全部质量集中于 C处。

整个系统以恒定角速度绕 $\mathcal{B}_1$的一条惯性主轴旋转。从这个意义上说（也受到 [2] 的启发），我们将 $\mathcal{B}_2$ 称为 “ 阻尼器 ”，并将整个系统称为 “ 带球形阻尼器的刚体”。

根据 [2] （另见 [3, 第 7 节4] 及其中的参考文献），M. A. Lavrentyev 将这个问题视为一个集中质量参数系统，用以近似描述含有充满黏性流体的空腔的刚体运动。Chernous’ko（例如参见 [2, 3]）得出了物理量（如流体密度和黏度）的条件，在这些条件下，描述带球形阻尼器刚体运动的方程（6）也可以描述带有充满不可压缩黏性流体的球形空腔的刚体运动（低雷诺数下）。对充满流体的刚体运动的研究，涉及地球物理应用中寻找地磁场源、结构工程中设计调谐液体阻尼器，以及航天工程中航天器的稳定化（参见 [9] 及其中的参考文献）。

在 [2, 3], 中，作者推导出了系统作为一个整体刚体绕外部刚体的一条惯性主轴永久旋转时稳定的充要条件[4] 。更准确地说，考虑如下平衡构型： $\mathcal{B}_2$ 相对于 $\mathcal{B}_1$处于相对静止状态，而由带阻尼器的刚体构成的整个系统则以恒定角速度 Ω^* 绕 $\mathcal{B}_1$的一条主轴旋转。令 A 表示 $\mathcal{B}_1$相应的主转动惯量，并以 B 和 C 表示其余转动惯量。Chernous’ko 等人通过谱稳定性论证表明，Ω^* 稳定（按李雅普诺夫意义）的必要条件是 $A \geq B, C$。在同一系列研究中，他们还利用经典的李雅普诺夫方法得到了充分条件。由此发现，当 $A > B, C$时，Ω^* 稳定。这些非线性稳定性结果并未说明平衡态的渐近稳定性，也未涉及一般运动的长期行为。例如，目前尚不清楚从足够接近 Ω^* 的位置出发的轨线是否最终（当时间趋于无穷时）会收敛到某个平衡态；如果会，其收敛速率又如何。

本文表明，条件 $A \geq B$， C 是 Ω 稳定性的充要条件* (见定理11)，并且证明了无论如何选择初始条件，运动方程解所对应的所有轨线都将以指数速率收敛到一个平衡构型(见定理13)。稳定性结果是通过针对具有正规稳定和/或正规双曲平衡态的常微分方程自治系统的线性化稳定性原理得到的（见定义1以及定理2 和3）。对运动方程（6）进行谱分析表明，平衡态确实要么是正规稳定的，要么是正规双曲的（见定理10）。长期行为

[4]永久旋转是以恒定角速度发生的刚体旋转。

一般运动 $z(t;\ z_0)$[5] 可通过证明相应的 ω- 极限集 $\omega(z_0)$ 非空、紧致且连通，并且其仅由正规稳定平衡态或仅由正规双曲平衡态构成，从而得到，且

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{d}(z(t;\ z_0), \omega(z_0)) = 0.$$

根据定理，收敛到平衡点是正规稳定和正规双曲平衡点的渐近稳定性质所带来的结果2 & 3。

本文还给出了稳定平衡构型具有可达性的充分条件。此外，我们还展示了关于方程（6）解的数值近似的一些结果。这些结果进一步揭示了稳定性条件以及平衡态可达性的相关性质。

除具有新颖性外，考虑到运动方程仅部分耗散，本文的结果也颇具挑战性。事实上，即使整个系统的总动能沿轨线递减，两个固体仍必须在始终保持总角动量守恒的同时运动（见命题4）。特别是，动能平衡（8）和 [2, 3] 中构造的李雅普诺夫函数[6]都无法直接给出固体相对速度的衰减速率。我们证明，系统经过“一段时间”的运动后，固体的相对速度会呈指数衰减，见定理 13 以及图3 & 4中的数值结果。另一个值得关注之处是，我们证明平衡态谱稳定性的方法不同于 [2, 3], 中的方法，且更具几何意味，因为它展示了改变 $\mathcal{B}_1$ 的转动惯量排序时，线性化系统的谱如何移动（见定理10的证明）。我们认为，这种全面而严谨的解析处理有助于分析刚体动力学中涉及阻尼机制设计的类似问题。

最后，本文与第二作者及其合作者近期关于刚体稳定化的工作（[6, 10–12]）一脉相承。具体而言，在 [10], 中，本文第二作者研究了解的存在性，并对更完整的流固相互作用问题中一般轨线的长期行为进行了初步分析。该问题研究的是由充满黏性不可压缩流体（满足纳维-斯托克斯方程）的间隙隔开的刚体。从这一角度看，当前工作或可为研究 [10] 中所考虑物理系统的稳定性和长期行为提供一些启示。

本文结构安排如下。我们从第 2 节开始，介绍一些符号以及我们将在物理问题中使用的自治系统的一般稳定性定理。第 3节推导带阻尼器刚体运动的控制方程，并给出初步

[5] $z\ (t;\ \ z_0)\ =\ (\Omega\ (t)\ ,\ \Omega_1\ (t)\ )^{\ T}$ 是与初始数据$z_0 = (\Omega_0, \Omega_{10})^{\ T} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$相对应的（唯一）解，满足方程（6）。[6]例如，可以通过 Gronwall 型引理得出。

性质及其解（如整体存在性、唯一性和能量平衡）。第 4节对平衡态进行线性与非线性稳定性分析。第 5节将全面刻画一般轨线的长期行为。第 6节将提供上述结果的数值证据。

2 符号说明与有用结果

我们用符号 $\|\cdot\|$ 表示 d维欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$中的欧几里得范数，并用 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 表示 $\mathbb{R}^d$中的标准点积。我们回顾一下，对每个 $u\in\mathbb{R}^d$，都有$\|u\|=\sqrt{\langle u,\ u\rangle}$。此外，对于 $r>0$ 和 $x_0\in\mathbb{R}^d$，$B_r(x_0)$表示以 x_0 为中心、半径为 r的开球，即，

$$B_r(x_0):=\{x\in\mathbb{R}^d:\ \|x-x_0\|<r\}.$$

类似地，

$$\overline{B_r}(x_0):=\{x\in\mathbb{R}^d:\ \|x-x_0\|\le r\}$$

表示以 x_0 为中心、半径为 r的闭球。

在 $\mathbb{C}^d$中，我们考虑（定义在域 $\mathbb{C}$上的）内积

$$\begin{aligned}&\langle z,w\rangle_{\mathbb{C}^d}:=\langle z,\overline{w}\rangle\\&=\langle \mathsf{Re}(z),\mathsf{Re}(w)\rangle+\langle \mathsf{Im}(z),\mathsf{Im}(w)\rangle+i\left(\langle \mathsf{Im}(z),\mathsf{Re}(w)\rangle-\langle \mathsf{Re}(z),\mathsf{Im}(w)\rangle\right),\end{aligned}$$

及其相应的范数 $\|z\|_{\mathbb{C}^d}=\sqrt{\langle z,z\rangle_{\mathbb{C}^d}}=\sqrt{(\mathsf{Re}(z))^2+(\mathsf{Im}(z))^2}$。在上文中，我们分别用 $\mathsf{Re}(\cdot)$ 和 $\mathsf{Im}(\cdot)$ 表示复数的实部和虚部。

对于矩阵 $A\in\mathbb{R}^{d\times d}$, $\sigma(A)$ 表示 A 的谱，即

$$\sigma(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \text{there exists } u\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}\text{ such that }Au=\lambda u\}.$$

A^T 表示 A 的转置。$\mathsf{SO(3)}$ 表示由所有行列式为 1 的正交矩阵构成的特殊正交群。我们回顾一下，对于一个斜对称矩阵 $A\in\mathbb{R}^{d\times d}$（即 $A^T=-A$），存在一个向量 $\alpha\in\mathbb{R}^d$（称为轴向量），使得 $Av=\alpha\times v$ 对每个 $v\in\mathbb{R}^d$ 都成立。

本文将用到以下一些有用的结果，其中第一个是一个修正的 Gronwall 引理。

引理 1 *Suppose that a function $y\in L^\infty(0,\infty)$ $y\ge 0$, satisfies the following inequality for all $t\ge 0$:*

$$\dot{y}(t)\le -Cy(t)+F(t),$$

where $C>0$ is a constant, and $F\in L^q(a,\infty)\cap L^1_{loc}(0,\infty)$ for some $a>0$ and $q\in[1,\infty)$ satisfies $F(t)\ge 0$ for a. a. $t\ge 0$. Then:

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=0$$

If $F\equiv 0$, then:

$$y(t)\le y(0)e^{-Ct},\quad \text{for all } t\ge 0.$$

在上述 $L^q(a,b)$中， $q \in [1,\infty]$表示定义在区间 (a,b)上的实值函数的通常勒贝格空间，其中 $-\infty \le a < b \le +\infty$。上述引理的证明可见 [9]。

接下来，我们还将考虑函数空间 $C^1(D,\mathbb{R}^d)$，它由从开集 $D \subset \mathbb{R}^d$ 到 $\mathbb{R}^d$的所有连续可微函数构成。进行稳定性分析时，我们需要用到 [13, 第 10]章中的以下概念。

定义 1（正规稳定与正规双曲平衡态）设 $D \subset \mathbb{R}^d$ 为开集，且 $f \in C^1(D,\mathbb{R}^d)$。考虑以下常微分方程（ODE）非线性系统

$$\dot{z} = f(z). \tag{1}$$

设 $\mathcal{E} \subset D$ 表示方程（1）的平衡点集合，即 $z \in \mathcal{E}$ 当且仅当f（z） $=0$。对于 $z^* \in \mathcal{E}$，我们假设满足以下条件：

1. 在 z^*附近， $\mathcal{E}$ 构成一个维数为 $0 < m \le d$的 C^1-流形。这意味着存在一个开集 $U \subset \mathbb{R}^m$、 $0 \in U$，且存在一个函数ψ： $U \to \mathbb{R}^d$，使得 $\psi(U) \subset \mathcal{E}$， $\psi(0) = z^*$，并且秩 $\psi'(0) = m$，其中$\psi'(0) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 表示 ψ 在 0 处的雅可比矩阵。

2. $T_{z^*}\mathcal{E} = N(A)$，其中 $T_{z^*}\mathcal{E}$表示 $\mathcal{E}$在 z^*处的切空间， $A := f'(z^*)$ 是 f 在 z^*处的 Fr´echet 导数，而 $N(A)$ 是 A的零空间。我们有时将 A 称为平衡态 z^*附近的线性化。3. $\lambda = 0$ 是 A的半单特征值，即 $N(A^2) = N(A)$。4. $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$。

那么，以下两个定义成立：

i. 若 $\sigma(A) \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}^-$，则称 z^* 为正规稳定，其中 $\mathbb{C}^- := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) < 0\}$。ii. 若 $\sigma(A) \cap \mathbb{C}^- \neq \varnothing$ 且 $\sigma(A) \cap \mathbb{C}^+ \neq \varnothing$，则称 z^* 为正规双曲，其中 $\mathbb{C}^+ := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) > 0\}$。

Remark 1 从几何上看，半单特征值定义中的条件等价于要求特征值 $\lambda = 0$ 的代数重数与几何重数相同。

对于线性系统，我们可以分别将条件 (i) 和 (ii) 作为稳定平衡和不稳定平衡的定义；而对于非线性常微分方程组，我们将采用李雅普诺夫提出的以下更一般的稳定性定义。

定义 2 (李雅普诺夫意义下的稳定性) 设 $t_0 \ge 0$。方程z^* (1) 的一个平衡点 $\varepsilon > 0$称为 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 稳定的（李雅普诺夫意义下） $z_0 \in G$，如果对于每个 $\|z_0 - z^*\| \le \delta$，都存在

$$\dot{z} = f(z), \qquad z(t_0) = z_0$$

对每个 $t \ge t_0$，都满足 $\|z(t) - z^*\| < \varepsilon$。

平衡点 z^* （1）称为不稳定，如果它不是稳定的（按李雅普诺夫意义）。

以下线性化原理成立。

定理 **2** *Consider the nonlinear system of ODEs 1 and assume that z^* is ( ), normally stable. Then the equilibrium z^* is stable (in the sense of Lyapunov) and there exists $\delta > 0$ such that the unique solution to the initial value problem*

$$\dot{z} = f(z), \qquad z(0) = z_0$$

with $z_0 \in B_\delta(z^*)$ exists for all $t \geq 0$. Moreover, there exist $z_\infty \in \mathcal{E}$ and constantsc_1, $c_2 > 0$ such that:

$$\|z(t) - z_\infty\| \leq c_1 e^{-c_2 t}$$

for all $t \geq 0$.

证明参见 [13, 第 10.4 节。1]

定理 **3** *Consider the nonlinear system of ODEs 1 and assume that z^* is ( ) normally hyperbolic. Then the equilibrium z^* is stable and there exists a $\delta \in (0, \rho]$, such that the solution $z(t)$ with initial value $z_0 \in B_\delta(z^*)$ satisfies exactly one of the following two properties:*

- $d(z(t^*), \mathcal{E}) := \inf_{z^* \in \mathcal{E}} \|z(t^*) - z^*\| > \rho$ 对于某个 $t^* > 0$;
- $z(t)$ 对所有 $t \geq 0$均有定义，并且存在 $z_\infty \in \mathcal{E}$ 和常数$c_1, c_2 > 0$，使得：$\|z(t) - z_\infty\| \leq c_1 e^{-c_2 t}$ 对所有 $t \geq 0$均成立。

该定理的证明可见于 [13, Satz 10.5.1]。

Remark 2 上述两个定理将近线性常微分方程组的经典线性化原理推广到了线性化 A 的特征值为零的情形（参见[1, 第 9.3]节）。

3 运动方程

固定惯性参考系 Σ_s 和体参考系 $\Sigma_b := \{G;\ _1$,和$_2$,均为$_3\}$，原点位于 G，且 Σ_b 的坐标轴沿惯性张量 J 相对于 G 的特征向量（标准正交基）方向排列，这些坐标轴称为惯性主轴。我们将 A_1、A_2、A_3 记为 J 的相应（正）特征值（称为 $\mathcal{B}_1$的主惯性矩），并假设 $A_1 \leq A_2 \leq A_3$。内体 $\mathcal{B}_2$ 相对于 G的惯性张量为 $I\mathbf{E_0}$，其中 $\mathbf{E_0}$ 为单位张量。因此，$J_c := J + I\mathbf{E_0}$ 表示由带球形阻尼器的刚体构成的整个系统相对于质心 G的惯性张量。

令 $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 在参考系 Σ_s中的角速度分别为 ω 和 ω_1 。类似地，我们用 Ω 和 Ω_1 分别表示外体和内体在参考系 Σ_b中的角速度。

我们假设固体之间的相互作用由黏性力（由润滑剂的存在引起）描述，这些力产生的总力矩（相对于 G）作用于 $\mathcal{B}_1$，形式为 $T := k(\omega_1 - \omega)$（在 Σ_s 中），其中 k 是一个正的常数，取决于润滑剂密度、黏度和厚度 h 以及阻尼器半径 a （参见 [2, 方程 (8.6)]）。

我们从惯性参考系 Σ_s 中的以下角动量平衡方程开始

$$\frac{dm_{total}}{dt} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{dm_{inner}}{dt} = -k(\omega_1 - \omega). \tag{3}$$

在上述两个方程中，m_{total} 和 m_{inner} 分别是总角动量和内体 $\mathcal{B}_2$ 相对于 G 的角动量。

鉴于体积 $\mathcal{B}_1$ 随时间变化（因此 $\mathcal{B}_1$ 的惯性张量也随之变化），且均在 Σ_s 中，改用运动参考系 Σ_b 重写上述运动方程会更加方便。在这样的参考系中，$J = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$。接着我们注意到，对于某个 $R = R(t)$，$\Omega = R^T\omega$ 且 $\Omega_1 = R^T\omega_1$，对所有 $t \geq 0$ 均有 $\in \mathrm{SO(3)}$，其中$R(0) = \mathrm{E_0}$。注意，Ω 是 $R^T\dot{R}$ 的轴向量，即对于每个 $u \in \mathbb{R}^3$，$R^T\dot{R}u = \Omega \times u$。在体参考系 Σ_b 中，总角动量 M_{total} 为

$$M_{total} := R^T m_{total} = J\Omega + I\Omega_1$$

体参考系中的角动量平衡式 Σ_b 于是变为 s

$$J\dot{\Omega} + \Omega \times (J\Omega) + I\dot{\Omega}_1 + \Omega \times (I\Omega_1) = 0. \tag{4}$$

内体是球形的，因此其关于质心的惯性张量就是 $I\mathrm{E_0}$ Ω $\omega_1 = R\Omega_1$，且与参考系无关，其中 $\omega = R$（常数）。由于 $\omega = R\Omega$ $\omega_1 = R\Omega_1$，前一个方程可改写如下

$$I\dot{\Omega}_1 + \Omega \times (I\Omega_1) = -k(\Omega_1 - \Omega). \tag{5}$$

将 (5) 从 (4) 中相减，并将两式合并，得到描述运动参考系中带阻尼器刚体运动的以下系统方程 Σ_b:

$$J\dot{\Omega} + \Omega \times (J\Omega) = k(\Omega_1 - \Omega),$$
$$I\dot{\Omega}_1 + \Omega \times (I\Omega_1) = -k(\Omega_1 - \Omega).$$

由于 J 是正定张量，我们对 J 求逆，得到以下描述带球形阻尼器刚体 $\mathcal{B}_1$ 运动的微分方程组 $\mathcal{B}_2$

$$\begin{cases} \dot{\Omega} = J^{-1}(k(\Omega_1 - \Omega) - \Omega \times (J\Omega)), \\ \dot{\Omega}_1 = -\dfrac{k}{I}(\Omega_1 - \Omega) - \Omega \times \Omega_1. \end{cases} \tag{6}$$

考虑函数 F： $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ 使得

$$F(\Omega, \Omega_1) := \begin{bmatrix} J^{-1}(k(\Omega_1 - \Omega) - \Omega \times (J\Omega)) \\ -\dfrac{k}{I}(\Omega_1 - \Omega) - \Omega \times \Omega_1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

由于 F 在 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 上连续可微，对于任意初始数据 $(\Omega_0, \Omega_{10}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$，初值问题

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \Omega \\ \Omega_1 \end{bmatrix} = F(\Omega, \Omega_1), \qquad \begin{bmatrix} \Omega(0) \\ \Omega_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_0 \\ \Omega_{10} \end{bmatrix}$$

有唯一解，其定义在最大存在区间 $[0, t_+)$ 上，其中某个 $t_+ = t_+(\Omega_0, \Omega_{10}) > 0$。我们很快会看到 $t_+ = +\infty$。尽管我们无法在所有情况下显式求解 (6)，但我们可以推导出方程 (6) 的解的一些有用性质，例如动能和总角动量的平衡关系。

首先考虑动能，其定义为

$$V(\Omega, \Omega_1) := \frac{1}{2}(\langle \Omega, J\Omega \rangle + I\langle \Omega_1, \Omega_1 \rangle).$$

对 V 求时间导数并利用方程 (6)，得到

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{2}(2\langle \Omega, J\dot{\Omega} \rangle + 2I\langle \Omega_1, \dot{\Omega}_1 \rangle) \\ &= \langle \Omega, k(\Omega_1 - \Omega) - \Omega \times (J\Omega) \rangle + \langle \Omega_1, -k(\Omega_1 - \Omega) - I(\Omega \times \Omega_1) \rangle \\ &= -k \left\| \Omega_1 - \Omega \right\|^2. \end{aligned}$$

因此，沿着方程（6）的解，动能的变化率如下

$$\frac{d}{dt} V(\Omega(t), \Omega_1(t)) = -k \left\| \Omega_1(t) - \Omega(t) \right\|^2. \tag{8}$$

上述方程从物理上表达了整个系统的动能平衡。

另一个重要的平衡是角动量平衡。考虑量 $K^2 = K^2(\Omega, \Omega_1) := \|J\Omega + I\Omega_1\|^2$。对$K^2$ 求时间导数，可得以下方程：

$$\begin{aligned}\frac{dK^2}{dt} &= 2\langle J\Omega + I\Omega_1, J\dot{\Omega} + I\dot{\Omega}_1\rangle \\ &= 2\langle J\Omega + I\Omega_1, k(\Omega_1 - \Omega) - \Omega \times (J\Omega) - k(\Omega_1 - \Omega) - I(\Omega \times \Omega_1)\rangle \\ &= -2\langle J\Omega + I\Omega_1, \Omega \times (J\Omega + I\Omega_1)\rangle \\ &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

因此，沿着方程（ K^2 的解，6）的解，该量为常数。我们在下一个命题中总结上述结果。

命题 **4** *Let* (Ω,Ω_1) *be a solution to the system of ODEs* (6)*. Then,*

i. (Ω,Ω_1) 满足 (8)。

ii. (Ω,Ω_1) 满足 (9)。

由于 J 正定，且 I 是一个正常数，因此由陈述（i）可知，函数$\Omega(t)$、$\Omega_1(t)$对所有$t \geq 0$均一致有界。根据经典的常微分方程延拓定理（参见 [4, 定理4。1]），可得 $t_+ = +\infty$。此外，命题4(ii)允许我们为方程（6）的所有解定义不变集。事实上，给定一个初始条件（Ω_0, Ω_{10}），令 $M = K^2(\Omega_0, \Omega_{10})$，并定义集合 $A(M)$：

$$A(M) = \{(\omega, \omega_1) \in \mathbb{R}^6 : K^2(\omega, \omega_1) = M\}$$

那么，与（6）相对应的解（Ω_0, Ω_{10}）必须始终保持在 A（M）内。此外，由于 K^2 是连续函数，且 A（M）是 $\mathbb{R}^6$ 中紧集的原像，因此具有如下性质。

引理 **5** *The set* A（M） *is compact.*

4 平衡态及其稳定性性质

4.1 平衡态

我们首先通过以下定理刻画（6）的平衡态；该定理最早由 [3] 证明。

定理 **6** *The point* * $^*_1 \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ *is an equilibrium point of* 6 *if and only*$(\Omega ,\Omega) ( ) \Omega \Omega \Omega$ *if* $^* =$ $^*_1$ *and* * *is either the zero vector in* $\mathbb{R}^3$ *or an eigenvector of* J*.*

Proof 假设 $F(\Omega^*, \Omega_1^*) = 0$，则由（6）可得：

$$\begin{cases} \Omega^* \times (J\Omega^*) = k(\Omega_1^* - \Omega^*) \\ \Omega^* \times (I\Omega_1^*) = -k(\Omega_1^* - \Omega^*) \end{cases}$$

对第二个方程两边与 $(\Omega_1^* - \Omega^*)$ 作点积，得 $-k\|\Omega_1^* - \Omega^*\|^2 = 0$，因此必有 $\Omega^* = \Omega_1^*$。将后者代入上述系统的第一个方程，可得 $\Omega^* \times (J\Omega^*) = 0$，当且仅当 Ω^* 是 $\mathbb{R}^3$ 中的零向量或 J的特征向量时，该式成立。

反向推论显然成立。 □

Remark 3 定义 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^6$ 为 $\mathbb{R}^6$的标准基向量。根据我们的假设 $A_1 \le A_2 \le A_3$，平衡态$\mathcal{E}$共有以下四种可能情况：

1. $A_1 < A_2 < A_3 \implies \mathcal{E} = \text{span}\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4\} \cup \text{span}\{\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_5\} \cup \text{span}\{\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_6\}$2.
$A_1 = A_2 < A_3 \implies \mathcal{E} = \text{span}\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_5\} \cup \text{span}\{\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_6\}$3.
$A_1 < A_2 = A_3 \implies \mathcal{E} = \text{span}\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4\} \cup \text{span}\{\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_6\}$4.
$A_1 = A_2 = A_3 \implies \mathcal{E} = \text{span}\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_6\}$

4.2 非线性稳定性

为研究稳定性，我们将使用定理2 和定理3中的线性化原理。首先，围绕一个（非零[7]）平衡态（Ω^*，$\Omega_1^* \equiv \Omega^*$）对方程（6）进行线性化。根据定理6，存在$\lambda^* \in \{A_1, A_2, A_3\}$使得 $(J - \lambda^* \mathbf{E_0})\,\Omega^* = 0$。我们还将特征$J(\lambda^*)$记为对应于特征值 λ^* 的 J特征子空间。

对于每个 $(\Omega, \Omega_1) \in \mathbb{R}^6$，$F$在 $(\Omega^*, \Omega_1^* \equiv \Omega^*)$ 处的盖托导数为

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} F(\Omega^* + t\Omega, \Omega_1^* + t\Omega_1)|_{t=0} \\ &\quad = \begin{bmatrix} J^{-1}(k(\Omega_1 - \Omega) - \Omega^* \times (J - \lambda^* \mathbf{E_0})\Omega) \\ -k/I(\Omega_1 - \Omega) - \Omega^* \times (\Omega_1 - \Omega) \end{bmatrix} = L^* \begin{bmatrix} \Omega \\ \Omega_1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{10}$$

对于某个线性变换 $L^* = L^*(J, k, I, \Omega^*, \Omega_1^*) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$。我们将 L^* 称为平衡态 $(\Omega^*, \Omega_1^* \equiv \Omega^*)$ 处的线性化。

本节其余部分将讨论上述线性变换。我们从以下引理开始，该引理指出，L^* 的零空间由平衡态刻画。

引理 **7** $N(L^*) = \{v = (\Omega, \Omega_1) \in \mathcal{E} : \Omega = \Omega_1 \in \text{特征}J(\lambda^*)\}$.

[7]本文旨在刻画对应于非零初始条件的一般轨迹的长期行为；由于总角动量守恒（见命题 4），因此任何达到的平衡态都必定非零。

Proof 设 $v=(\Omega,\ \Omega_1)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ 满足条件 $L^*v=0$。由（10），条件$L^*v=0$ 等价于以下方程组:

$$\begin{aligned} k(\Omega_1-\Omega)-\Omega^*\times(J-\lambda^*\mathbf{E_0})\Omega=0,\\ -\frac{k}{I}(\Omega_1-\Omega)-\Omega^*\times(\Omega_1-\Omega)=0. \end{aligned} \tag{11}$$

将第二个方程两边点乘 Ω − 1, ‖ − 1‖ = Ω,

我们得到 Ω Ω，因此可知 0 Ω Ω1。于是，上述系统的第一个方程现在写为

$$\Omega^*\times[(J-\lambda^*\mathbf{E_0})\Omega]=0,$$

由此可推知，存在一个标量 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得

$$(J-\lambda^*\mathbf{E_0})\Omega=\bar{\lambda}\Omega^*.$$

Let 让我们将后面显示的方程与 Ω* 作点积，得到 t

$$\bar{\lambda}\left\|\Omega^*\right\|^2=\langle\Omega,J\Omega^*\rangle-\lambda^*\langle\Omega,\Omega^*\rangle=0.$$

因此，$\bar{\lambda}=0$ 由此可得，$(J-\lambda^*\mathbf{E_0})\Omega=0$。

综上，我们已经证明 $v=(\Omega,\ \Omega_1)\in N(L^*)$ 满足 $\Omega=\Omega_1$ 且 $(J-\lambda^*\mathbf{E_0})\Omega=0$。因此，根据定理 6，我们得出结论 $v=(\Omega,\ \Omega_1)\in\mathcal{E}$ 其中 $\Omega=\Omega_1\in$ 特征$J(\lambda^*)$。

反向包含关系可立即验证。 □

由于存在零特征值，我们无法应用近线性系统的经典线性化原理（参见 [1, 第 9 节。3]）。因此，我们尝试改用定理2 和定理3 。本节余下部分将重点验证我们的平衡态是否满足这些定理的条件，首先介绍以下引理。

引理 8 $\sigma(L^*)\cap i\mathbb{R}=\{0\}$.

Proof 该证明需要验证，在所有情况下都不可能存在纯虚特征值。根据（10），要证明上述结论，一个等价的做法是证明以下常微分方程线性系统

$$\begin{aligned} J\dot{\Omega}&=k(\Omega_1-\Omega)-\Omega^*\times(J-\lambda^*\mathbf{E_0})\Omega\\ I\dot{\Omega}_1&=-k(\Omega_1-\Omega)-I\Omega^*\times(\Omega_1-\Omega) \end{aligned} \tag{12}$$

除平凡解外不允许存在任何周期解。我们用反证法，假设上述常微分方程组存在一个非平凡周期解 (Ω,Ω_1)，其周期为 $T>0$（即对每个 $t\in\mathbb{R}$，均有 $(\Omega(t),\Omega_1(t))=(\Omega(t+T),\Omega_1(t+T))$）。不失一般性，我们假设

$$\int_0^T\Omega(t)\,dt=0,\qquad\int_0^T\Omega_1(t)\,dt=0. \tag{13}$$

记 $K:=J\Omega+I\Omega_1$。将（12）中的两个方程相加，得到关于 K

$$\dot{K}=-\Omega^*\times K+\Lambda^*\Omega^*\times\Omega \tag{14}$$

其中 $\Lambda^* := \lambda^* + I$。对（12）$_1$ 与 Ω 求点积，得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\langle\Omega, J\Omega\rangle\right) = k\langle\Omega_1 - \Omega, \Omega\rangle + \langle\Omega^* \times \Omega, J\Omega\rangle. \tag{15}$$

同样，对 $(12)_2$ 与 Ω 作点积$_1$, , 得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I}{2}\|\Omega_1\|^2\right) = -k\langle\Omega_1 - \Omega, \Omega_1\rangle + \langle\Omega^* \times \Omega, I\Omega_1\rangle. \tag{16}$$

最后，将 (14) 与 K 作点乘，得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|K\|^2\right) = \Lambda^*\langle\Omega^* \times \Omega, K\rangle. \tag{17}$$

将 (17) 减去 (15) 与 (16) 乘以 Λ^*后的和，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|K\|^2 - \Lambda^*(\langle\Omega, J\Omega\rangle + I\|\Omega_1\|^2)\right] = -k\Lambda^*\|\Omega - \Omega_1\|^2.$$

在一个周期（$t, t+T$）内对后一个显示的方程积分，我们得到 tha　　t

$$\int_t^{t+T} \|\Omega(s) - \Omega_1(s)\|^2 \, ds = 0$$

对所有 $t \in \mathbb{R}$。因此，$\Omega(t) = \Omega_1(t)$，对每个 t 都成立。将后一个结果代入 $(12)_2$, , 得到 $\dot{\Omega}_1 = 0$，因此 $\Omega(t) = \Omega_1(t) \equiv 0$ 根据 (13)。□

引理 **9** *The zero eigenvalue of L^* is semi-simple.*

*Proof*我们只需证明 $N((L^*)^2) \subset N(L^*)$，因为反向包含显然成立。设 $w = (\Omega, \Omega_1) \in N((L^*)^2)$，并令 $v = L^*w$。我们要证明 $v = 0$。由于 $v \in N(L^*)$，根据引理 7，$v = (\tilde{\Omega}\ \tilde{\Omega})$，其中某个 $\tilde{\Omega} \in$特征$J(\lambda^*)$。由（10），可得

$$\begin{aligned} k(\Omega_1 - \Omega) - \Omega^* \times (J - \lambda^*\mathbf{E_0}\Omega) &= \lambda^*\tilde{\Omega}, \\ -k(\Omega_1 - \Omega) - \Omega^* \times I(\Omega_1 - \Omega) &= I\tilde{\Omega}. \end{aligned} \tag{18}$$

将后面显示的方程逐项相加，得到

$$-\Omega^* \times K + \Lambda^*\Omega^* \times \Omega = \Lambda^*\tilde{\Omega}, \tag{19}$$

这里我们回顾一下 $K = J\Omega + I\Omega_1$ 和 $\Lambda^* := \lambda^* + I$。由（19），立即可得

$$\langle\tilde{\Omega}, \Omega^*\rangle = 0. \tag{20}$$

将后者代入（18）$_2$ 与 Ω 点乘*，还可得

$$\langle\Omega_1 - \Omega, \Omega^*\rangle = 0. \tag{21}$$

在（19）的左侧与 Ω 作叉积，得到，可得

$$\Lambda^*\Omega^* \times \tilde{\Omega} = -\Omega^* \times [\Omega^* \times (K - \Lambda^*\Omega)] = -[\Omega^*(K - \Lambda^*\Omega)]\Omega^* + \left\|\Omega^*\right\|^2 (K - \Lambda^*\Omega).$$

˜现在，我们将后一个显示的等式与 Ω 点乘，并结合式（20）以及 $\lambda^*\tilde{\Omega} = J\tilde{\Omega}$ 是 J 对称张量这一事实，得到

$$\begin{aligned} 0 &= \left\|\Omega^*\right\|^2 \langle K - \Lambda^*\Omega, \tilde{\Omega}\rangle = \left\|\Omega^*\right\|^2 \langle J\Omega + I\Omega_1 - \lambda^*\Omega - I\Omega, \tilde{\Omega}\rangle \\ &= \left\|\Omega^*\right\|^2 (\langle\Omega, J\tilde{\Omega}\rangle + I\langle\Omega_1 - \Omega, \tilde{\Omega}\rangle - \langle\Omega, J\tilde{\Omega}\rangle) = \left\|\Omega^*\right\|^2 I\langle\tilde{\Omega}, \Omega_1 - \Omega\rangle. \end{aligned}$$

由此可得

$$\langle\tilde{\Omega}, \Omega_1 - \Omega\rangle = 0. \tag{22}$$

˜我们对（18）$_2$ 两边与 Ω 作点积，并利用三个正交条件（20）、（21）和（22），得到

$$\left\|\tilde{\Omega}\right\| = \left\|\Omega^*\right\| \|\Omega_1 - \Omega\|. \tag{23}$$

剩下要证明的是 $\|\Omega_1 - \Omega\| = 0$。分别对（18）$_1$ 两边与 Ω 作点积，并对（18）$_2$ 两边与 Ω 作点积$_1$„ 可得以下两个方程：

$$k\langle\Omega_1 - \Omega, \Omega\rangle + \langle\Omega^* \times \Omega, J\Omega\rangle = \lambda^*\langle\tilde{\Omega}, \Omega\rangle,$$
$$-k\langle\Omega_1 - \Omega, \Omega_1\rangle + \langle\Omega^* \times \Omega, I\Omega_1\rangle = I\langle\tilde{\Omega}, \Omega_1\rangle.$$

将上述方程逐项相加，得到

$$-k\|\Omega_1 - \Omega\|^2 + \langle\Omega^* \times \Omega, K\rangle = \langle\tilde{\Omega}, K\rangle. \tag{24}$$

另一方面，对（19）与 K 作点乘，可得

$$\Lambda^*\langle\Omega^* \times \Omega, K\rangle = \Lambda^*\langle\tilde{\Omega}, K\rangle. \tag{25}$$

由（24）和（25）可立即推出 $\|\Omega_1 - \Omega\| = 0$，证明至此完成。□

现在我们可以陈述并证明关于平衡态谱稳定性性质的主要结果。

定理 **10** *Let* * $^*_1$ *be an equilibrium point of* 6 *such that* $^* =$ $^*_1$ *is an* (Ω , *eigenvector of* J *corresponding to* $\lambda^* \in \{A_1, A_2, A_3\}$[8]. *Then the equilibrium* * $^*_1$ Ω) ( ) Ω Ω (Ω ,Ω) *is normally stable if* $\lambda^* = A_3$, *otherwise it is normally hyperbolic.*

Proof 由引理 9 可知，0 是一个半单特征值。现在我们验证，对于平衡态 (Ω*,Ω$^*_1$)，该点邻域内的平衡态集合构成一个 C^1 流形，并且该流形在 (Ω^*, Ω^*_1) 处的切空间等于该点处线性化的零空间。

在定理 6 和备注 3中，我们看到，给定的平衡态 (Ω*,Ω$^*_1$) =: z^* 位于一个维数为 1、2 或 3 的子空间上。不失一般性，假设 z^* 位于由以下向量张成的一维子空间上{$\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_6$}。我们定义一个开集 $U = \mathbb{R}$ 和一个 C^1 函数 $\Psi : U \to \mathbb{R}^6$ 如下：

$$\Psi(x) = x(\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_6) + z^*, \quad x \in \mathbb{R}.$$

于是我们可以直接观察到 $\Psi(U) \subset \mathcal{E}, \Psi(0) = z^*$。我们还可以计算出 Ψ 在 0 处的导数为 $\Psi'(0) = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_6,$，因此 $\mathrm{rank}(\Psi'(0)) = 1$。这验证了在 z^*附近，平衡态集合构成一个一维的 C^1 流形。 Ψ 定义了沿该流形的点的参数化，而 z^* 处的切空间就是 Ψ′(0) 的张成空间：

$$T_{z^*}\mathcal{E} = \mathrm{span}\{\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_6\}.$$

由引理 7 可知，上述子空间是在 $z^* \in$ 张成{$\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_6$}处考察时线性化的零空间。类似的构造还可以

[8]回忆一下，我们用 A_1, A_2, A_3 表示 J的特征值，并且假设 $A_1 \le A_2 \le A_3$。

用于验证高维情形中的相同步骤。证明的其余部分则用于刻画 L^* 的谱的位置。

假设 $\lambda^* = A_3$，且令 $\lambda \in \sigma(L^*)$，$\lambda \neq 0$。我们将证明$\mathsf{Re}(\lambda) < 0$。令 $(\Omega,\Omega_1) \in \mathbb{C}^6$ 为 L^* 对应于 λ的特征向量。由（10），λ和 $(\Omega,\Omega_1$满足以下代数方程组

$$\begin{cases} k(\Omega_1 - \Omega) - \Omega^* \times (J - \lambda^* \mathbf{E_0})\Omega = \lambda J\Omega, \\ -k(\Omega_1 - \Omega) - \Omega^* \times I(\Omega_1 - \Omega) = \lambda I\Omega_1. \end{cases} \tag{26}$$

在 $\mathbb{C}^3$ 中对（26）$_2$ 与 Ω_1,取内积，得到

$$-k\langle \Omega_1 - \Omega, \overline{\Omega_1}\rangle + 2iI\langle \mathsf{Re}(\Omega_1) \times \mathsf{Im}(\Omega_1), \Omega^*\rangle + I\langle \Omega \times \overline{\Omega_1}, \Omega^*\rangle = \lambda I \left\|\Omega_1\right\|^2_{\mathbb{C}^3}. \tag{27}$$

现在，在 $\mathbb{C}^3$ 中对（26）$_2$ 与 Ω 取内积，得到

$$-k\langle \Omega_1 - \Omega, \overline{\Omega}\rangle - 2iI\langle \mathsf{Re}(\Omega) \times \mathsf{Im}(\Omega), \Omega^*\rangle + I\langle \overline{\Omega} \times \Omega_1, \Omega^*\rangle = \lambda I\langle \Omega_1, \overline{\Omega}\rangle. \tag{28}$$

用（28）减去（27），并对所得方程取实部，可得

$$\mathsf{Re}(\lambda)\left\|\Omega_1\right\|^2_{\mathbb{C}^3} - \mathsf{Re}[\lambda\langle \Omega_1, \overline{\Omega}\rangle] = -\frac{k}{I}\left\|\Omega - \Omega_1\right\|^2_{\mathbb{C}^3}. \tag{29}$$

将（26）中的方程两边相加，可得向量 $K = J\Omega + I\Omega_1$满足以下方程

$$\lambda K = -\Omega^* \times K + \Lambda^*\Omega^* \times \Omega, \tag{30}$$

其中 $\Lambda^* = A_3 + I$ 在这种情况下。考虑 $\mathbb{C}^3$ 中（30）式的内积，再乘以 Ω，得到

$$\lambda\langle K, \overline{\Omega}\rangle = \langle \overline{\Omega} \times K, \Omega^*\rangle + \Lambda^*\langle \Omega \times \overline{\Omega}, \Omega^*\rangle. \tag{31}$$

考虑 $\mathbb{C}^3$ 中（30）式的内积，再乘以 K，得到

$$\lambda\left\|K\right\|_{\mathbb{C}^3} = -\langle K \times \overline{K}, \Omega^*\rangle + \Lambda^*\langle \Omega \times \overline{K}, \Omega^*\rangle. \tag{32}$$

现在将（31）式两边乘以 Λ^*，用（32）式减去所得新方程，并对结果取实部，可得以下重要等式

$$\mathsf{Re}(\lambda)\left\|K\right\|_{\mathbb{C}^3} = \Lambda^*\mathsf{Re}(\lambda)\langle J\Omega, \overline{\Omega}\rangle + \Lambda^* I\mathsf{Re}[\lambda\langle \Omega_1, \overline{\Omega}\rangle].$$

在后一个所显示等式的最后一项中使用（29）式，得到

$$\mathsf{Re}(\lambda)[\Lambda^*\langle J\Omega, \overline{\Omega}\rangle + \Lambda^* I\left\|\Omega_1\right\|^2_{\mathbb{C}^3} - \left\|K\right\|_{\mathbb{C}^3}] = -k\Lambda^*\left\|\Omega - \Omega_1\right\|.$$

我们注意到，平方括号中的项是一个实数；接下来只需证明它为正，这也是我们接下来要证明的。记 $\Omega = (p,q,r)^T \in \mathbb{C}^3$ 和 $\Omega_1 = (p_1,q_1,r_1)^T \in \mathbb{C}^3$，则可更明确地写为

$$\begin{aligned} &\Lambda^*\langle J\Omega, \overline{\Omega}\rangle + \Lambda^* I\left\|\Omega_1\right\|^2_{\mathbb{C}^3} - \left\|K\right\|_{\mathbb{C}^3} \\ &\qquad = I\left(A_1\left\|p - p_1\right\|^2_{\mathbb{C}} + A_2\left\|q - q_1\right\|^2_{\mathbb{C}} + A_3\left\|q - q_1\right\|^2_{\mathbb{C}}\right) \\ &\qquad\quad (A_3 - A_1)(A_1 + I)\left\|p\right\|^2_{\mathbb{C}} + (A_3 - A_2)(A_2 + I)\left\|q\right\|^2_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

显然，后一个等式的右侧为正，因为根据假设，$I > 0$ 和 $A_3 \geq A_2 \geq A_1 > 0$。

现在我们来证明，若 $\lambda^* \in \{A_1, A_2\}$，则 $\sigma(L^*) \cap \mathbb{C}^+ \neq \varnothing$。需要注意的是，刻画正规稳定平衡态与正规双曲平衡态的条件（关于谱）并不互斥。特别是，正规双曲平衡态要求线性化的谱同时包含稳定部分和不稳定部分（见定义 1）。实际上，我们将证明比所需内容更多的结论，具体来说，将展示以下两个重要事实：

(F1) 若 $A_1 \le \lambda^* = A_2 < A_3$，则 L^* 仅有一个正特征值。(F2) 若 $\lambda^* = A_1 < A_2 \le A_3$，则 L^* 仅有两个实部为正的特征值。

在证明性质 (F1) 和 (F2) 之前，我们先作一些观察。考虑对角张量 J_μ （在 J 的特征向量构成的基底 a_1, a_2 和 a_3 中）

$$J_\mu := \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix}, \tag{33}$$

满足 $0 < \mu_1 < \mu$， $\mu_3 \in \mathbb{R}$，并假设 $\lambda^* = \mu_3$。将 $L(\mu)$记为方程 (10) 中定义的线性变换，其中 J 替换为 J_μ。根据上述计算、引理 7 和引理 9，可得以下两种情况：

(i) 若 $\mu_1 < \mu < \mu_3$，则 $\lambda = 0$ 是 $L(\mu)$ 的一个特征值，重数为一，对应特征向量为 (Ω^*,Ω^*)，其中 $\Omega^* \in$ 张成 $\{\mathsf{a}_3\}$。$L(\mu)$ 的所有其他特征值均具有负实部。

(ii) 若 $\mu_1 < \mu = \mu_3$，则 $\lambda = 0$ 是 $L(\mu)$ 的一个特征值，重数为二，对应特征向量为 (Ω^*,Ω^*)，其中 $\Omega^* \in$ 张成 $\{\mathsf{a}_2,\mathsf{a}_3\}$。$L(\mu)$ 的所有其他特征值均具有负实部。

上述评论表明， $L(\mu)$ 的一个非零特征值 λ 的实部 $\mathrm{Re}(\lambda)$ 会从 < 0 变为恒等于零（当 $\mu \nearrow \mu_3$ 时）。随后我们将证明， $\sigma(L(\mu))$ 在 $\mu \nearrow \mu_3$ 时以正速度穿过虚轴，因此足以得出结论：当 $\mu_3 < \mu$ 时，存在具有正实部的特征值。

我们先证明性质 (F1)。假设 $\lambda^* = \mu_3$，并令 $\Omega^* = \Omega_1^* = \alpha^* \mathsf{a}_3$ 其中 $\alpha^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$。考虑新变量 $(\lambda(\mu),\Omega(\mu),\Omega_1(\mu))$ 下的特征值问题。该问题由 (26) 中的 J 替换为 J_μ（定义见 (33)）得到：

$$\begin{cases} k(\Omega_1(\mu) - \Omega(\mu)) - \alpha^* \, \mathsf{a}_3 \times (J_\mu - \lambda^* \mathbf{E_0})\Omega(\mu) & = \lambda(\mu) J_\mu \Omega(\mu), \\ -k(\Omega_1(\mu) - \Omega(\mu)) - \alpha^* \, \mathsf{a}_3 \times I(\Omega_1(\mu) - \Omega(\mu)) & = \lambda(\mu) I \Omega_1(\mu). \end{cases} \tag{34}$$

我们可以将上述线性代数系统改写为紧凑形式：

$$(L(\mu) - \lambda(\mu))(\Omega(\mu), \Omega_1(\mu)) = 0_{\mathbb{R}^6}. \tag{35}$$

考虑映射

$$\begin{aligned} &(\mu, (\lambda, \Omega, \Omega_1)) \in (\mu_3 - \delta, \mu_3 + \delta) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \\ &\mapsto G(\mu, (\lambda, \Omega, \Omega_1)) := ((L(\mu) - \lambda)(\Omega, \Omega_1), \langle \Omega, \mathsf{a}_3 \rangle, \|\Omega\|^2 - 1) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{36}$$

注意， G 具有连续偏导数，且 $G(\mu_3, (0, \mathsf{a}_2, \mathsf{a}_2)) = 0_{\mathbb{R}^5}$。我们将证明，若 δ 足够小，则对每个 $\mu \in (\mu_3 - \delta, \mu_3 + \delta)$，都存在唯一的 $(\lambda(\mu), \Omega(\mu), \Omega_1(\mu))$，使得 $G(\mu, (\lambda(\mu), \Omega(\mu), \Omega_1(\mu))) = 0_{\mathbb{R}^5}$。我们将使用隐函数定理。为此，需要证明在 $(\mu_3, (0, \mathsf{a}_2, \mathsf{a}_2))$ 处， G 关于 $h \equiv (\lambda, \Omega, \Omega_1)$ 的弗雷歇导数为

$$D_h G(\mu_3, (0, \mathsf{a}_2, \mathsf{a}_2))[\hat{\lambda}, \hat{\Omega}, \hat{\Omega}_1] = (L(\mu_3)(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}_1) - \hat{\lambda}(\mathsf{a}_2, \mathsf{a}_2), \langle \hat{\Omega}, \mathsf{a}_3 \rangle, 2\langle \hat{\Omega}, \mathsf{a}_2 \rangle),$$

可逆。由于 $D_h G(\mu_3,(0, \mathsf{a}_2,\mathsf{a}_2))$ 本身是一个线性变换，要证明它可逆，只需证明它是单射。假设

$D_h G(\mu_3, (0, \mathsf{a}_2, \mathsf{a}_2))[\hat{\lambda}, \hat{\Omega}, \hat{\Omega}_1] = 0_{\mathbb{R}^5}$，即

$$\begin{aligned} L(\mu_3)\begin{bmatrix}\hat{\Omega}\\ \hat{\Omega}_1\end{bmatrix} &= \hat{\lambda}\begin{bmatrix}\mathsf{a}_2\\ \mathsf{a}_2\end{bmatrix},\\ \langle \hat{\Omega}, \mathsf{a}_3\rangle &= 0\\ \langle \hat{\Omega}, \mathsf{a}_2\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{37}$$

我们将证明 $(\hat{\lambda}, \hat{\Omega}, \hat{\Omega}_1) = (0, 0_{\mathbb{R}^3}, 0_{\mathbb{R}^3})$。注意，由于 $\mu = \mu_3$，根据引理 7，$\hat{\lambda}(\mathsf{a}_2,\mathsf{a}_2) \in N(L(\mu_3)) = \{v = (\Omega, \Omega_1) \in \mathcal{E}:\ \Omega = \Omega_1 \in$ 特征$^{J_{\mu_3}}(\lambda^*) \equiv$张成$\{\mathsf{a}_2, \mathsf{a}_3\}\}$.

$\hat{}\,\hat{}$ 由于 $N\ L^2\ \mu_3 = N\ L\ \mu_3 = {}_1 \equiv q\ {}_2 + r\ {}_3$，$q\ r \in \mathbb{R}$，$_1 \in$ 是半单特征值（引理），因此我们有 $(\Omega\ \Omega)\ (\ (\ ))\ (\ (\ ))$，这意味着对于某些 $\hat{}$、$\hat{}$，有 $\hat{}\Omega\ \hat{}\Omega\ \hat{}\mathsf{a}\ \hat{}\mathsf{a}$。由 (37) 中的最后两个方程，我们可以得出$\hat{q} = \hat{r} = 0$，进而由 $(37)_1$可知 $\hat{}\ \lambda = 0$ 也成立。根据隐函数定理，存在$\delta > 0$，使得对于每个 $\mu \in (\mu_3 - \delta, \mu_3 + \delta)$，都存在唯一的 $(\lambda(\mu), \Omega(\mu), \Omega_1(\mu))$，满足 $G(\mu, (\lambda(\mu), \Omega(\mu), \Omega_1(\mu))) = 0_{\mathbb{R}^5}$；也就是说，三元组 $(\lambda(\mu), \Omega(\mu), \Omega_1(\mu))$ 满足 (34)，其中 $\Omega(\mu)$ 满足

$$\langle \Omega(\mu), \mathsf{a}_3\rangle = 0, \qquad \|\Omega(\mu)\| = 1. \tag{38}$$

注意，再次由隐函数定理可知，$(\lambda(\mu), \Omega(\mu), \Omega_1(\mu)) = g(\mu)$，其中 $g\colon (\mu_3 - \delta, \mu_3 + \delta) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$是一个连续可微函数，且 $g(\mu_3) = (0, \mathsf{a}_2, \mathsf{a}_2)$。将（34）中的方程逐项相加，可得向量场 $K(\mu) := J_\mu \Omega(\mu) + I\Omega_1(\mu)$ 满足代数方程

$$-\alpha^* \mathsf{a}_3 \times K(\mu) + \alpha^* \Lambda^* \mathsf{a}_3 \times \Omega(\mu) = \lambda(\mu) K(\mu),$$

其中 $\Lambda^* = \lambda^* + I \equiv \mu_3 + I$。对上述方程两边关于 μ 求导，并在 μ_3处取值，可得

$$\alpha^* \mathsf{a}_1 - \alpha^* \mathsf{a}_3 \times (J_{\mu_3} - \mu_3 \mathbf{E}_0)\dot{\Omega}(\mu_3) - \alpha^* \mathsf{a}_3 \times I(\dot{\Omega}_1(\mu_3) - \dot{\Omega}(\mu_3)) = \dot{\lambda}(\mu_3)\Lambda^* \mathsf{a}_2. \tag{39}$$

上式中，点号“$\cdot$”表示对参数μ求导。另请注意，

$$(J_{\mu_3} - \mu_3 \mathbf{E}_0)\dot{\Omega}(\mu_3) = (\mu_1 - \mu_3)\langle \dot{\Omega}(\mu_3), \mathsf{a}_1\rangle \mathsf{a}_1,$$

并回忆 $\{\mathsf{a}_1,\mathsf{a}_2, \mathsf{a}_3\}$ 是 J的特征向量，选取它们构成 $\mathbb{R}^3$的标准正交基。因此，(39)特别意味着

$$\langle \dot{\Omega}_1(\mu_3) - \dot{\Omega}(\mu_3), \mathsf{a}_2\rangle = -I^{-1}. \tag{40}$$

现在，我们对（34）$_2$ 关于 μ 求导，并在 μ_3处对所得方程求值，得到

$$-k(\dot{\Omega}_1(\mu_3) - \dot{\Omega}(\mu_3)) - \alpha^* \mathsf{a}_3 \times I(\dot{\Omega}_1(\mu_3) - \dot{\Omega}(\mu_3)) = \dot{\lambda}(\mu_3) I \mathsf{a}_2. \tag{41}$$

利用（40），可得

$$\langle \dot{\Omega}_1(\mu_3) - \dot{\Omega}(\mu_3), \mathsf{a}_1\rangle = -\frac{\alpha^*}{k},$$

然后

$$\dot{\lambda}(\mu_3) = \frac{k}{I^2} + \frac{(\alpha^*)^2 I}{k} > 0.$$

因此，当 $\mu = \mu_3$ 时，特征值 $\lambda(\mu)$ 沿实轴以正速度穿过虚轴。根据针对简单特征值的标准扰动论证（参见例如 [5, 定理 3.2 和注 3.4]），我们还可推知，对每个 $\mu > \mu_3$，$\lambda(\mu)$ 都存在。此外，得益于本证明的第一部分，$\lambda(\mu)$ 对 $\mu > \mu_3$ 成立。

现在令 $\mu_1 = A_1$、 $\mu_3 = A_2$ 和 $\mu = A_3$。上述论证表明，平衡态 (Ω^*, Ω_1^*)（其中 $\Omega^* = \Omega_1^* \in \text{eigen}_J(\lambda^* \equiv A_2)$）是不稳定的，因为恰有一个正特征值，即 $\lambda(\mu = A_3)$。

现在假设

$$J_\mu := \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix}, \tag{42}$$

其中 $\mu_2 > \mu_3$ 和 $\mu \in (\mu_3 - \delta, \mu_3 + \delta)$。. 考虑平衡态 (Ω^*, Ω_1^*)，其中 $\Omega^* = \Omega_1^* = \alpha \mathsf{a}_3$。根据上文的证明，只要 $\mu < \mu_3$，就可以得出结论： $L(\mu)$ 有一个简单特征值 $\lambda = 0$、一个正特征值，其余特征值的实部均为负。特别要注意，只要 $\mu = \mu_3$， $\lambda = 0$ 就会成为重数为二的特征值。这表明，即使在 $\mu = \mu_3 = A_1 = A_2 < \mu_2 = A_3$ 的情况下， $L(\mu)$ 也恰好有一个正特征值。现在我们可以证明性质 (F2)，即只要 $\mu > \mu_3$， $L(\mu)$[9] 就存在两个实部为正的特征值。事实上，我们可以重新运用隐函数定理进行论证，将 a_2 替换为 a_1,，因为现在映射 G（定义见 (36)）满足 $G(\mu_3, (0, \mathsf{a}_1, \mathsf{a}_1)) = 0_{\mathbb{R}^5}$。因此，由于 $\mu_2 > \mu_3$，对任意 $\mu > \mu_3$，都存在两个实部为正的特征值。

现在取 $\lambda^* = \mu_3 = A_1 < \mu = A_2 < \mu_2 = A_3$。我们刚刚证明， $L(\mu = A_2)$ 将有两个特征值具有正实部。此外， $\lambda = 0$ 是一个单特征值，其余所有特征值均具有负实部。注意，在 $\lambda^* = \mu_3 = A_1 < \mu = \mu_2 = A_2 = A_3$ 的情况下，这一结论仍然成立。对于上述 μ 的取值，由于 $\sigma(L^*) \equiv \sigma(L(\mu))$，证明至此完成。□

借助上述结果和定理 2 & 3，我们立即得到以下关于 (6) 的平衡态的非线性稳定性性质的结果。

定理 **11** *Let* * $^*_1$ *be an equilibrium point of* 6 *such that* $^* =$ $^*_1$ *is an*(*eigenvector of* J *corresponding to* $\lambda^* \in \{A_1, A_2, A_3\}$ *and recall that* $A_1 \le A_2 \le A_3$. Ω, Ω) () Ω Ω,*Then, the equilibrium* (Ω^*, Ω_1^*) *is exponentially stable*[10] *for the nonlinear equation* (6) *if* $\lambda^* = A_3$.

If $\lambda^* \in \{A_1, A_2\}$ *with* $A_1 \le A_2 < A_3$, *then* (Ω^*, Ω_1^*) *is unstable.*

5 解的长期行为

5.1 “保证”收敛

在本节中，我们将（非线性）稳定性结果推广，以得出以下结论：所有（6）的解都收敛到绕外体惯性主轴的永久旋转。令（$\Omega(t)$， $\Omega_1(t)$) 表示对应于“典型”初始条件（Ω_0,Ω_{10}） $\in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$的（6）的一个解。请注意，我们考虑的初始数据不一定接近平衡态。

我们首先将引理 1 应用于动能平衡（8），从而得到相对速度 Ω 的衰减 $-\Omega_1$。

[9]这是式（10）中定义的线性变换，其中 J 在式（42）中被 J_μ 替代。 [10]“指数稳定性”应按照定理 2 的含义理解。

定理 **12** *Assume that* $k>0$. *The relative velocity* $\Omega($ $t-{}_1 t$ *converges to* $0)\,\Omega()$ *as* $t\to\infty$.

Proof 我们首先定义非负函数 $y=-\dot{V}=k\left\|\Omega-\Omega_1\right\|^2$。由（8）可知，$\Omega$ 和 Ω_1 均一致有界，因此 $y\in L^{\infty}(0,\infty)$。我们希望得到如下形式的不等式：

$$\dot{y}(t)\leq -Cy(t)+F(t),\quad t\in[0,\infty),$$

其中 C F $L^q\ 0\ \infty\ \cap$是一个正的常数，$L^1_{loc}\ 0\ \infty$ $q\in[1,\infty$ y 并且是在（,）（,）中的非负函数，对某个）。我们直接利用（8）和（6）计算其时间导数，得到

$$\begin{aligned}\dot{y}=-\ddot{V}&=-2k^2\langle\Omega-\Omega_1,J^{-1}(\Omega-\Omega_1)\rangle-2k^2\langle\Omega-\Omega_1,I^{-1}(\Omega-\Omega_1)\rangle\\&\quad-2k\langle\Omega-\Omega_1,J^{-1}(\Omega\times(J\Omega))\rangle\\&\leq -2k^2\frac{I+A_3}{A_3I}\left\|\Omega-\Omega_1\right\|^2+2k\frac{A_3}{A_1}\left\|\Omega\right\|^2\left\|\Omega-\Omega_1\right\|\\&\leq -2k^2\frac{I+A_3}{A_3I}\left\|\Omega-\Omega_1\right\|^2+M\left\|\Omega-\Omega_1\right\|,\end{aligned}$$

对于某个正的常数 $M=M(\Omega_0,\Omega_{10},J,k)$。以上推导中，我们使用了柯西-施瓦茨不等式、$J$ $A_1\leq A_2\leq$ 是一个特征值为 的对角张量这一事 A_3 $\|\ \|$ 实，以及 Ω 一致有界这一事实。

若定义 $F(t):=M\left\|\Omega-\Omega_1\right\|$ 且 $C:=2k^2\frac{I+A_3}{A_3I}>0$，则可得所需的不等式

$$\dot{y}(t)\leq -Cy(t)+F(t).$$

接下来需要证明 F 满足引理1的要求。事实上，我们有 $F(t)\geq 0$，且由于它是连续的，因此局部可积。根据动能平衡（8），结合微积分基本定理，可得

$$\int_0^{\infty}\left\|\Omega(\tau)-\Omega_1(\tau)\right\|^2d\tau=\lim_{t\to\infty}\frac{V(0)-V(t)}{k}=\frac{V(0)-V_{\infty}}{k}<\infty.$$

在上式中，V_{∞} 定义为 $\lim_{t\to\infty}V(t)$，其存在是因为动能 $V(t)$ 是一个非负、不增的连续函数。因此 $F\in L^2(0,\infty)\cap L^1_{loc}(0,\infty)$。根据引理 1，最终可得 $y(t)\to 0$ 当 $t\to\infty$时成立，进而推出

$$\lim_{t\to\infty}(\Omega(t)-\Omega_1(t))=0.$$

□

由上述定理可推得以下推论。

推论 12。**1** *Solutions* (Ω,Ω_1) *of* (6) *satisfy*

$$\lim_{t\to\infty}\dot{\Omega}(t)=\lim_{t\to\infty}\dot{\Omega}_1(t)=0.$$

Proof 利用式（6）的第二个方程，并注意到 $\Omega \times \Omega = 0$，可得

$$\dot{\Omega}_1 = \frac{k}{I}(\Omega - \Omega_1) + \Omega \times (\Omega - \Omega_1).$$

根据三角不等式和叉积的性质，我们有

$$\left\|\dot{\Omega}_1\right\| \leq \frac{k}{I}\left\|\Omega - \Omega_1\right\| + \left\|\Omega \times (\Omega - \Omega_1)\right\| \leq \left(\frac{k}{I} + M\right)\left\|\Omega - \Omega_1\right\|,$$

其中 $M \geq 0$ 是 Ω 上的一致有界（取决于初始条件的范数），由式（8）得到。因此我们得到

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\dot{\Omega}_1(t)\right\| \leq \left(\frac{k}{I} + M\right)\lim_{t\to\infty}\left\|\Omega(t) - \Omega_1(t)\right\| = 0,$$

因此我们有 $\lim_{t\to\infty} \dot{\Omega}_1(t) = 0$。我们注意到，向量场 $f(t) : \Omega(t)\ \Omega_1(t)$ 是一致连续函数，因为式（6）右端是利普希茨连续的。此外，根据前面的定理，我们知道存在

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t f(\tau)\, d\tau = \Omega_{10} - \Omega_0.$$

因此，利用向量值函数的 Barb˘alat 引理（例如参见 [7]），我们得到存在

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty}(\dot{\Omega}(t) - \dot{\Omega}_1(t)) = 0.$$

因此，也存在

$$\lim_{t\to\infty}\dot{\Omega}(t) = \lim_{t\to\infty}\dot{\Omega}_1(t) + \lim_{t\to\infty}(\dot{\Omega}(t) - \dot{\Omega}_1(t)) = 0.$$

□

现在，我们可以结合前一节和本节的结果，刻画方程（6）的解的长期行为。

定理 **13** *All solutions to* 6 *must eventually converge to a permanent rotation* ( ) *about one of the principal axes of inertia of* J *with an exponential rate.*

More precisely, for every $(\Omega_0, \Omega_{10}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, *there exist* $t^* \geq 0$ *and* $(\Omega^*, \Omega_1^*) \in \mathcal{E}$ *(see Theorem 6) such that the (unique) solution* $(\Omega(t), \Omega_1(t))$ *of* (6) *corresponding to the initial conditions* (Ω_0, Ω_{10}) *exists for all* $t \geq 0$, *and satisfies the estimate*

$$\left\|\Omega(t) - \Omega^*\right\| + \left\|\Omega_1(t) - \Omega^*\right\| \leq Ce^{-ct} \qquad \text{for all } t \geq t^*,$$

where C *and* c *are positive constants.*

Proof 令 $z(t;\ z_0) := (\Omega(t),\ \Omega_1(t))$ 表示对应于初始条件 $z_0 := (\Omega_0, \Omega_{10}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$的方程（6）的唯一解。正向轨道

$$\gamma^+(z_0) := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 :\ (z_1, z_2) = z(t;\ z_0) \text{ for some } t \geq 0\}$$

由（8）界定。因此， ω极限集

$$\omega(z_0) := \{(u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 :\ \text{there exists } \{t_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ with } t_n \nearrow +\infty \text{ as } n \to \infty,$$
$$\text{such that } \lim_{n\to\infty}\left\|\Omega(t_n) - u\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\Omega_1(t_n) - v\right\| = 0\}$$

非空、紧且连通。此外（例如参见 [8, 第一章，定理 8。1]），

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{d}(z(t;\ z_0), \omega(z_0)) = 0. \tag{43}$$

根据定理 12、推论 12.1和定理 6，我们得到 $\omega(z_0)\ \subset \mathcal{E}$。由于 $\omega(z_0)$ 是连通的，根据定理 10，因此有两种可能：要么$\omega(z_0)$ 仅包含正规稳定平衡点，要么仅包含正规双曲平衡点。

设 $z^* \in \omega(z_0)$ 是一个正规稳定平衡态。则， z^* =(Ω^*,Ω_1^*) 中 $\Omega^* = \Omega_1^* = \alpha^* \mathsf{a}_3$ 是 J 对应于主转动惯量的特征向量 $\lambda^* = A_3$ (见定理 6 和 10，并注意到——不失一般性——$\mathcal{B}_1$ $A_1 \le A_2 \le$ 的主 A_3 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset 0\ \infty\ t_n \nearrow +\infty\ \ n \to \infty$ 转动惯量已按顺序排列为)。存在一个序列 (,)，当 时，使得

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\Omega(t_n) - \Omega^*\right\| = \lim_{n\to\infty} \left\|\Omega_1(t_n) - \Omega^*\right\| = 0.$$

与定理中的 δ 2, $N\ >\ 0$ $\|\ \ t_N\ -\ \ ^*\| +$相对应，$\|\ _1\ t_N\ -\ \ ^*\| < \delta$ $z_N\ =\ \ t_N\ ,\ \ _1\ t_N$ 存在这样的 Ω( ) Ω Ω ( ) Ω。现在，我们将 (Ω( ) Ω ( )) 视为解 $z(t;\ z_N)$ of (6) 的初始条件。根据解的唯一性，

$$z(t;\ z_N) = z(t;\ z(t_N;\ z_0)) = z(t + t_N;\ z_0),$$

再次根据定理 2，存在 $z_\infty \in \mathcal{E}$ 使得 $\|z(t;\ z_N)\ - z_\infty\| \le c_1 e^{-c_2 t}$对所有 $t \ge 0$均成立，即

$$\|z(t;\ z_0) - z_\infty\| \le c_1 e^{-c_2(t-t_N)} \quad \text{for all } t \ge t_N.$$

现在，假设 $\omega(z_0)$ 只包含正规双曲平衡态。固定 $\varepsilon > 0$。根据 (43)，存在 $t^* > 0$ 使得

$$\mathrm{d}(z(t;\ z_0), \mathcal{E}) \le \mathrm{d}(z(t;\ z_0), \omega(z_0)) < \varepsilon \quad \text{for all } t \ge t^*.$$

考虑 $z^* =$(Ω^*,Ω^*) $\in \omega(z_0)$，以及一个序列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$， $t_n \nearrow +\infty$ 当 $n \to \infty$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\Omega(t_n) - \Omega^*\right\| = \lim_{n\to\infty} \left\|\Omega_1(t_n) - \Omega^*\right\| = 0.$$

由定理 3 的第二部分取 δ，其中 $\rho = \varepsilon$。对应于 δ，存在 $N > 0$，使得 $\|\Omega(t_n) - \Omega^*\| + \|\Omega_1(t_n) - \Omega^*\| < \delta$ 对所有 $n > N$ 均成立。现在，固定满足 $t_m \ge t^*$ 的 $m > N$，并将 $z_m :=$ (Ω(t_m), Ω$_1$(t_m)) 作为方程 (6) 的初始条件。则存在一个（唯一的）全局解 $z(t;\ z_m)$，且该解满足

$$\mathrm{d}(z(t;\ z_m), \mathcal{E}) = \mathrm{d}(z(t + t_m;\ z_0), \mathcal{E}) \le \mathrm{d}(z(t + t_m;\ z_0), \omega(z_0)) < \varepsilon \quad \text{for all } t \ge 0.$$

因此，定理 3 的第二部分意味着存在 $z_\infty \in \mathcal{E}$ 使得$\|z(t;\ \ z_m) - z_\infty\| \le c_1 e^{-c_2 t}$ 对所有 $t \ge 0$均成立，即

$$\|z(t;\ z_0) - z_\infty\| \le c_1 e^{-c_2(t-t_m)} \quad \text{for all } t \ge t_m.$$

□

5.2 平衡态的可达性

定理13 并未说明方程（6）的解最终会达到何种平衡构型。从物理角度来说，在赋予 $\mathcal{B}_1$初始角动量后，整个系统 $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 最终会达到平衡状态，即绕某一惯性主轴永久旋转

的 $\mathcal{B}_1$惯性主轴。换言之， $\mathcal{B}_2$ 最终会相对于$\mathcal{B}_1$静止，而整个系统 $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 将绕 $\mathcal{B}_1$的某一惯性主轴旋转（角速度为常数）。然而，事先无法确定（这取决于初始数据）旋转会绕哪条轴发生。根据定理2，我们知道，稳定平衡态仅包括绕转动惯量最大的惯性主轴旋转的情形。本节的目标是给出关于初始条件的充分条件，以确保整个系统最终会绕转动惯量最大的主轴 A_3 永久旋转于 $\mathcal{B}_1$。

首先，回顾 K^2 和 V 的定义（即角动量的平方范数和动能，分别对应这两者），

$$V(\Omega,\Omega_1)=\frac{1}{2}(\langle\Omega,J\Omega\rangle+I\langle\Omega_1,\Omega_1\rangle)$$
$$K^2(\Omega,\Omega_1)=\|J\Omega+I\Omega_1\|^2$$

根据命题4，沿着方程 (6) 的解，以下平衡关系成立：

$$\frac{d}{dt}K^2=0,\quad \frac{d}{dt}V=-k\left\|\Omega_1(t)-\Omega(t)\right\|^2 \tag{44}$$

设 (Ω,Ω_1) 是方程 (6) 的一个解，并定义

$$\bar{\Omega}:=\lim_{t\to\infty}\Omega(t)=\lim_{t\to\infty}\Omega_1(t).$$

注意，根据定理 13，上述极限存在。对方程 (44) 的两个方程在 $[0,\infty)$ 上积分，可知 Ω 必须满足以下两个条件

$$\begin{aligned}\left\|(J+I)\bar{\Omega}\right\|^2&=K^2(0),\\ \frac{1}{2}\langle\bar{\Omega},(J+I)\bar{\Omega}\rangle&=V(0)-\int_0^\infty k\left\|\Omega_1(\tau)-\Omega(\tau)\right\|^2d\tau.\end{aligned} \tag{45}$$

记 $\Omega(t)=p(t)\mathsf{a}_1+q(t)\mathsf{a}_2+r(t)\mathsf{a}_3,$，并记

$$\bar{p}:=\lim_{t\to\infty}p(t),\quad \bar{q}:=\lim_{t\to\infty}q(t),\quad \bar{r}:=\lim_{t\to\infty}r(t).$$

方程 (45) 可以改写如下

$$\begin{aligned}&(A_1+I)^2\bar{p}^2+(A_2+I)^2\bar{q}^2+(A_3+I)^2\bar{r}^2\\ &\quad=A_1^2p^2(0)+A_2^2q^2(0)+A_3^2r^2(0)+I^2\left\|\Omega_1(0)\right\|^2+2\langle J\Omega(0)\ I\Omega_1(0)\rangle,\end{aligned} \tag{46}$$

and

$$(A_1+I)\bar{p}^2+(A_2+I)\bar{q}^2+(A_3+I)\bar{r}^2 = A_1p^2(0)+A_2q^2(0)+A_3r^2(0)+I\left\|\Omega_1(0)\right\|^2-\int_0^\infty k\left\|\Omega_1(\tau)-\Omega(\tau)\right\|^2 d\tau. \tag{47}$$

我们将后一个显示出来的积分记为 D_∞。下面给出关于能否实现绕 $\mathcal{B}_1$ 的最大转动惯量所对应主轴的永久旋转的结果。

定理 **14** *We have the following:*

(a) 假设 $A_1=A_2<A_3$。如果

$$(A_3-I)(A_3-A_1)r^2(0)+2\langle J\Omega(0),I\Omega_1(0)\rangle>A_1I(\left\|\Omega(0)\right\|^2+\left\|\Omega_1(0)\right\|^2),$$

then

$$\lim_{t\to\infty}p(t)=\lim_{t\to\infty}q(t)=0.$$

(b) 假设 $A_1<A_2<A_3$。如果满足以下两个条件

$$(A_2-I)(A_2-A_1)q^2(0)+(A_3-I)(A_3-A_1)r^2(0)+2\langle J\Omega(0),I\Omega_1(0)\rangle > A_1I(\left\|\Omega(0)\right\|^2+\left\|\Omega_1(0)\right\|^2),$$

$$(A_1-I)(A_1-A_2)p^2(0)+(A_3-I)(A_3-A_2)r^2(0)+2\langle J\Omega(0),I\Omega_1(0)\rangle > A_2I(\left\|\Omega(0)\right\|^2+\left\|\Omega_1(0)\right\|^2),$$

then

$$\lim_{t\to\infty}p(t)=\lim_{t\to\infty}q(t)=0.$$

(c) 假设 $A_1<A_2=A_3$。如果

$$(A_3-I)(A_3-A_1)(q^2(0)+r^2(0))+2\langle J\Omega(0),I\Omega_1(0)\rangle > A_1I(\left\|\Omega(0)\right\|^2+\left\|\Omega_1(0)\right\|^2),$$

then

$$\lim_{t\to\infty}p(t)=0.$$

Proof 我们先讨论命题 (a)。我们采用反证法，假设 $\bar{r}=0$。根据定理 13，我们知道 $\bar{p}\neq 0$ 或 $\bar{q}\neq 0$ （或两者都不为零）。于是，方程 (46) 和 (47) 变为

$$(A_1+I)^2(\bar{p}^2+\bar{q}^2)=A_1^2p^2(0)+A_2^2q^2(0)+A_3^2r^2(0)+I^2\left\|\Omega_1(0)\right\|^2+2\langle J\Omega(0),I\Omega_1(0)\rangle,$$

$$(A_1+I)(\bar{p}^2+\bar{q}^2)=A_1p^2(0)+A_2q^2(0)+A_3r^2(0)+I\left\|\Omega_1(0)\right\|^2-D_\infty.$$

将第二个方程的两边乘以 (A_1+I)，再用第一个方程减去所得方程，得到

$$\begin{aligned}-(A_1+I)D_\infty &= A_3^2 r(0)^2 - A_1 I(p^2(0)+q^2(0)) - (A_1+I)A_3 r^2(0) - A_1 I\,\|\Omega_1(0)\|^2 \\ &\quad + 2\langle J\Omega(0), I\Omega_1(0)\rangle \\ &= (A_3-I)(A_3-A_1)r^2(0) - A_1 I(\|\Omega(0)\|^2 + \|\Omega_1(0)\|^2) \\ &\quad + 2\langle J\Omega(0), I\Omega_1(0)\rangle.\end{aligned}$$

由于 $(A_1+I)D_\infty$ 必须非负，我们立即发现这与命题 (a) 的假设矛盾。

对于命题 (b)，分别假设 $\bar{p}\neq 0$ 和 $\bar{q}\neq 0$，并按照与命题 (a) 类似的步骤，可以类似地得到两个充分条件。假设 $\bar{p}\neq 0$ 和 $A_2=A_3$，也可得出命题 (c)。□

在下一节中，我们将提供数值证据，表明上述定理中的条件仅为充分条件。特别是，我们将通过数值计算表明，存在一些对应于不满足定理 14(a) 中条件的初始数据的轨线，仍会收敛到对应于 A_3 的主轴（见图 4）。

我们还想指出，采用与定理 14证明中类似的论证，也可以得到收敛到另一条主轴的充分条件。例如，收敛到对应于 $A_1=A_2$ 的主轴的一个充分条件是：

$$\begin{aligned}&(A_1-A_3)(A_1-I)(\|\Omega(0)\|^2 - r^2(0)) + 2\langle J\Omega(0), I\Omega_1(0)\rangle \\ &\qquad - A_3 I(\|\Omega(0)\|^2 + \|\Omega_1(0)\|^2) > 0.\end{aligned}$$

6 数值实验

本节展示了通过数值求解（6）（使用 Python）并采用不同参数和初始数据得到的数值结果示例。第一组图，即图 2 和 3，展示了初始数据中的微小扰动如何影响长期行为，甚至影响系统是否收敛到不稳定平衡点。参数 $k=I=1$、$A_1=A_2=3$ 和 $A_3=7$ 与以下初始条件配合使用：

$$z_1=\begin{bmatrix}1.5\\3\\0\\-1\\-2\\0\end{bmatrix},\quad z_2=\begin{bmatrix}1.5\\3\\0\\-1\\-2.01\\0\end{bmatrix},$$

分别地。在初始条件 z_1 中，Ω_0 和 Ω_{10} 互为标量倍数，且它们是对应于 $A_1=A_2$ 的特征向量；而初始条件 z_2 与第一个初始条件相同，只是第五个坐标减去 0.01

。对应于各初始条件的轨线如下图所示，见图 2 和图 3。

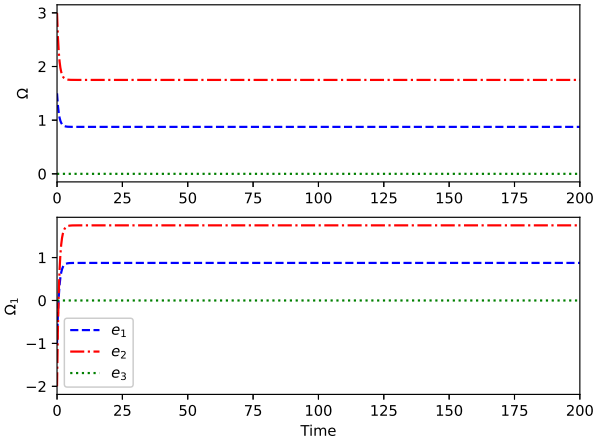


图 2 轨迹收敛到绕对应于 $A_1 = A_2$ 的主轴的永久旋转。

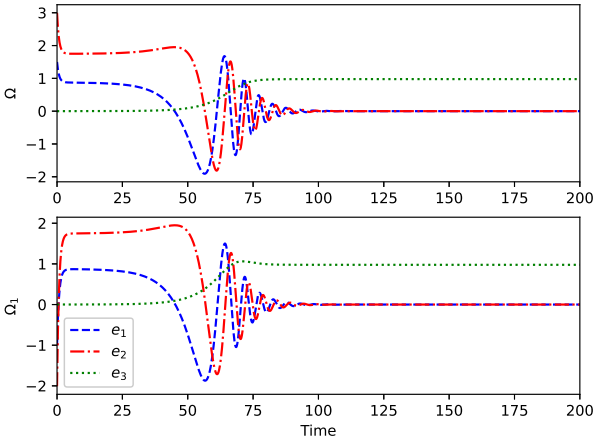


图 3 轨迹收敛到绕对应于 A_3 的主轴的永久旋转。

尽管初始条件“接近”，但从 z_1 和 z_2出发的轨线会收敛到绕不同主轴的永久旋转。

图 4 采用相同的参数，初始条件为 $z = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)^T$。可以验证，这些初始数据不满足定理 14(a) 的条件；不过，我们可以看到，该解仍收敛到对应于最大主惯量的主轴。

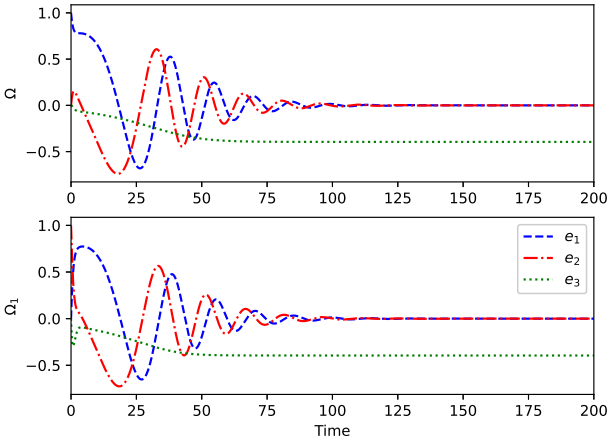


图 4 初始数据不满足定理 14(a)，但仍收敛到 $\bar{r} \neq 0$。

参考文献

[1] Boyce, W. E., DiPrima, R. C., Meade, D. B：《初等微分方程与边值问题》，第 12 版。Wiley，美利坚合众国（2021）[2] Chernous'ko, F. L.：《含有黏性流体空腔的刚体运动》。载于《航天器动力学中的数学方法》，第 665 卷。美国国家航空航天局，美利坚合众国（1972）[3]Chernous'ko, F. L., Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D.：《刚体绕质心运动的演化》。施普林格，Cham（2017）[4]Coddington, E. A., Levinson, N.：《常微分方程理论》。麦格劳-希尔，印度（1987）[5] Crandall, M. G., Rabinowitz, P. H.：分岔、简单特征值的摄动与线性化稳定性。《数学分析与力学档案》52(2), 161–180（1973）

[6] Disser, K., Galdi, G. P., Mazzone, G., Zunino, P.：充满黏性液体空腔的刚体的惯性运动。《数学分析与力学档案》221(1)，487–526（2016）[7] Farkas, B., Wegner, S.-A.：关于 Barb˘alat 引理的变体。《美国数学月刊》123(8)，825–830（2016）[8] Hale, J. K.：《常微分方程》。Dover 出版社，美利坚合众国（2009）[9] Mazzone, G.：关于完全充满黏性液体空腔的刚体动力学。博士论文，匹兹堡大学（2016）[10] Mazzone, G.：关于带充满液体间隙的刚体的自由旋转。《数学分析与应用杂志》496(2)，124826–37（2021）[11] Mazzone, G., Pr¨uss, J., Simonett, G.：采用最大正则性方法研究带有充满流体空腔的刚体运动。《数学流体力学杂志》21(3)，44（2019）[12] Mazzone, G., Pr¨uss, J., Simonett, G.：关于满足 Navier 边界条件的充满流体刚体的运动。《工业与应用数学学会数学分析杂志》51(3)，1582–1606（2019）[13]Pr¨uss, J. W., Wilke, M.：《常微分方程与动力系统》，第 2 版。Birkh¨auser，Cham（德文）（2019）