arXiv:2303.09415v1 [econ.TH] 16 Mar 2023

# 信号传递匹配市场中的最优委托*

Seungjin Han† Alex Sam‡ Youngki Shin§

2023年3月14日

**摘要**

本文研究规划者面临的委托问题：规划者希望规范带信号传递的接收者与发送者匹配市场中的接收者反应选择。我们对规划者的授权意愿以及最优（反应）区间委托的设计提出了新颖见解，将其作为解决规划者一般机制设计问题的方法。在匹配效率与信号成本之间存在权衡的情况下，接收者类型的相对异质性以及发送者信号的生产率，是推导最优区间委托的关键因素。

关键词：竞争性信号均衡、完全实施、最优委托、稳定匹配、更强单调均衡

JEL分类代码：D82、D86

*本文扩展了我们论文《设计竞争性单调信号传递均衡》的第二部分。我们非常感谢 Marzena Rostek（编辑）和两位匿名审稿人对原论文提出的意见和建议，这些意见和建议使我们得以大幅提升本文的质量。我们还要感谢 Maxim Ivanov、Shuo Liu、Gabor Virag，以及在2022年计量经济学会澳大拉西亚会议和第17届欧洲博弈论会议上参与研讨的与会者对原论文提出的意见。Han 和 Shin 分别感谢加拿大社会科学与人文研究委员会的资助。

†加拿大麦克马斯特大学经济系。电子邮件：hansj@mcmaster.ca
‡加拿大麦克马斯特大学经济系。电子邮件：sama1@mcmaster.ca§加拿大麦克马斯特大学经济系。电子邮件：shiny11@mcmaster.ca

# 1 引言

在委托人缺乏信息、而代理人掌握信息但存在偏见的模型中，学界已广泛研究委托人如何设计决策规则。（例如，监管者如何监管垄断者收取的价格，而垄断者的成本结构属于其私人信息；美国众议院应如何监管常设委员会起草法案；组织如何将决策选择权委托给下属，等等。）

Holmstrom（1977，1984）指出，寻找最优决策规则的问题可以归结为一个委托问题：委托人只需确定一组决策，然后允许代理人从授权集合中作出任何决策。他在多个例子中刻画了最优授权集合。Melumad 和 Shibano（1991）以及 Alonzo 和 Matouschek（2008）则在更一般的环境中全面刻画了最优授权集合。近年来，委托研究扩展到了委托人与代理人构成的动态环境，并纳入了学习因素（Escobar 和 Zhang（2021）、Guo（2016）、Lipnowski 和 Ramos（2020））。

本文提出了规划者的一个委托问题：规划者希望规制带信号传递的匹配市场中接收者的反应选择。在这些市场中，发送者和接收者由不同类型构成，且各自形成连续统（例如卖方和买方、工人和企业，以及企业家和投资者）。每位参与者的类型都是其私人信息。

例如，在进入劳动力市场之前，工人（发送者）通常会接受教育（行动），而教育会对其类型产生信号效应。信号传递会在匹配市场中带来一种权衡：它能提高发送者与接收者之间的匹配效率，因为分离会促成分类匹配。另一方面，信号传递也有成本：发送者需要选择效率低下的高水平均衡行动，才能将自己区分开来。鉴于这种权衡，如果规划者对接收者的反应选择（企业的工资）加以规制，阻止分离均衡从一开始就出现，或许能够提高效率。

研究希望最大化这些市场中均衡总净剩余的规划者的最优授权问题，我们探讨以下问题：即使规划者可以使用任何机制，将关注点放在反应区间上是否也不失一般性？[1] 在什么情况下，对所有接收者施加同一个反应，比不对反应施加任何限制的完全授权更好？在什么情况下，规划者对所有接收者施加其最佳单一反应，比将反应

[1]我们用女性代词指代规划者和发送者，用男性代词指代接收者。

选择权委托给接收者更优？规划者在委托反应选择时，何时会给予接收者更大的自由裁量权？

为回答这些问题，我们需要一种新的方法，因为最优委托文献中发展出的那些技术和工具，在很大程度上并不适用于分析带信号传递的匹配市场中的最优委托。本文第一部分将构建一种方法。与大多数委托文献一样，我们的模型假设规划者无法向接收者支付转移支付。

在我们的模型中，规划者首先行动，公开宣布一种机制，该机制规定接收者如何根据其发送给规划者的消息作出反应。观察到该机制后，发送者采取行动。根据已宣布的机制和发送者采取的行动，市场上的发送者与接收者进行一对一匹配。匹配发生时，接收者向规划者发送消息，并根据机制按照该消息确定的方式作出反应。

机制设计的关键在于接收者沟通的时机。在进入市场并寻找潜在伴侣之前，接收者并不了解市场上发送者选择的行动。因此，尽管机制是在发送者和接收者进入市场之前宣布的，规划者仍允许接收者在观察到发送者行动分布后，于匹配阶段向她发送消息。在已宣布的机制和发送者行动分布给定时，如果不存在一对发送者与接收者能够通过建立新的匹配而严格改善各自处境，且接收者向规划者发送替代消息以选择其反应，那么匹配及接收者的沟通策略构成一个稳定匹配结果。

以企业（接收者）和工人（发送者）为例，企业的反应是工资，工人的行动是教育。在规划者公布一种机制后，工人和企业会对市场上任意工人选择某一教育水平后可获得的工资产生预期。这种预期由市场反应函数刻画。在均衡中，这种预期关键取决于接收者根据发送者的行动对其类型形成的信念。给定市场反应函数，每位工人都会选择自己的教育。接收者的均衡沟通策略和匹配会在竞争性信号均衡（CSE）中证实这一预期。

我们首先在效用函数相对于接收者的反应呈准线性的条件下确立区间委托原理：对于任何可由某种机制诱导的 CSE，都存在一个相应的（闭）反应区间，使得

当规划者允许接收者无需沟通、直接从该区间中选择其偏好的反应时，同一个 CSE 也会出现。因此，即使任何复杂机制都可行，规划者宣布一个反应区间也不失一般性。原则上，当规划者希望通过沟通来获取接收者的信息时，她可能需要要求接收者报告的不仅是其私人类型，还包括发送者行动的整个分布，因为接收者进入市场后会观察发送者的行动。从这个意义上说，区间委托原理使规划者的机制设计问题变得易于处理，尤其是在匹配市场中。

对于配置的实施，我们采用我们另一篇论文 Han, Sam, and Shin（HSS, 2023）提出的更强单调CSE概念（见第3.2节）。借用机制设计文献中关于实施的术语，我们称：若存在一个反应区间，使得所有更强单调CSE都能由该区间诱导出某一配置，则该配置可在更强单调CSE中完全实施。HSS（2023）表明，当效用函数是准线性时，给定任意反应区间，更强单调CSE都是唯一的且良态的，因此可以在更强单调CSE中实现完全实施。

给定一个反应区间，一个“良态”均衡由两个发送者类型阈值刻画。较低阈值发送者类型规定了进入市场的最低发送者类型，而高于上阈值发送者类型的发送者都会对其行动进行混同。处于两个阈值类型之间的发送者则彼此分离。如果两个阈值类型相同，该均衡就成为混同均衡。如果上阈值类型是发送者类型的上确界，且高于较低阈值发送者类型，该均衡就成为分离均衡。如果上阈值类型低于发送者类型的上确界，但高于较低阈值发送者类型，则分离与混同并存，此时该均衡称为严格良态。在均衡的分离部分，匹配根据发送者行动和接收者类型（因此也根据发送者类型和接收者类型）呈同类相配；而在混同部分，匹配则是随机的。

尽管区间委托原理使机制设计问题变得易于处理，但它并未说明如何推导出最优反应区间。总净剩余是唯一的更强单调CSE中两个发送者类型阈值的函数。我们进一步表明，规划者的最优委托问题——即如何最优地选择反应区间——归结为选择这两个发送者类型阈值。原因在于，选择这两个发送者类型阈值（$z_\ell$ 和 $z_h$）等同于

选择反应区间的下界和上界，因为我们可以根据任意给定的两个发送者类型阈值，唯一地确定反应区间的上界和下界 $t_\ell$ 和 $t_h$。如果区间的两个边界相同，那么该区间就收缩为单例 $\{t^*\}$。此时，规划者只是对市场中的所有接收者施加单一反应 $t^*$，而不是授权其自行决定反应，从而形成混同均衡。如果区间上界足够低但高于下界，良态均衡会同时包含分离和混同。随着上界增大，顶部的混同部分会缩小。当上界足够高时，良态均衡就是分离均衡。

对于每一种发送者类型 $z$，令 $n(z)$ 表示与 $z$ 处于相同百分位数的接收者类型。给定任意发送者类型分布，$n(\cdot)$ 刻画接收者类型分布。为求解最优授权问题，我们采用参数化模型，提出一种用两个参数近似接收者类型分布的方法，这两个参数称为“尺度”（$k$）和“相对间距”（$q$），使得$n(z) = kz^q$。如果 $q = 0$，所有接收者的类型都相同。类型为 $x$ 的接收者与类型为 $z$、采取行动 $s$ 的发送者之间的总匹配剩余为 $v(x, s, z) = Axs^a z$，其中 $a$ 可解释为发送者行动的生产率参数。如果 $a = 0$，发送者的行动仅具有纯信号效应。

我们首先证明，当相对间距参数（$q$）和发送者行动的生产率参数（$a$）较小时，与在不限制反应的情况下将反应选择完全授权给接收者相比，规划者对所有接收者施加单一反应、从而诱导混同 CSE 更为高效。无论发送者类型分布如何，该结果都成立。

在数值分析中，我们为发送者类型选取了多种基准分布，其支撑集为 $[0, 3],$，这些分布由贝塔分布乘以 3 得到，并采用不同的形状参数。我们展示了改变各种底层参数时的比较静态结果。在所有情况下，最优反应区间的下界为 $t_\ell = 0$，因此最优策略是不将任何人排除在市场之外。

在设计1中，我们选择 $k = q = 1$，使市场双方具有相同的类型分布。我们改变类型支持集的上界。无论该上界取何值，规划者都会以一种方式选择最优反应区间 $t_h$ 的上界，从而诱导出一种严格良态的更强单调CSE，且其顶部包含一个混同部分。这表明，与混同

部分中随机匹配所导致的低效相比，阈值类型上方的发送者类型所选择的行动（$z_h$）带来的成本节约更大。随着类型支持集上界增大，规划者赋予接收者更大的自由裁量权，使得 $t_h$随 $z_h$增大。尽管 $z_h$ 也随类型支持集上界增大， $z_h$ 的百分位数却与类型支持集上界无关。

在设计2中，对于每种发送者类型分布，我们选择 $q = 1$ ，并改变 $k$。随着$k$变化，每种接收者类型都会按相同比例变化。无论$k$的值如何，规划者都会再次选择 $t_h$ ，使其诱导出一个严格良态、顶部带有混同部分的 CSE。当$t_h$ 随 $k.$ 增加时，规划者会赋予接收者更多自由裁量权。然而，上阈值类型（$z_h$）独立于 $k,$ 因此，受与 $k$相关的尺度效应影响，其百分位数相对于 $k$ 保持不变。在设计3中，对于每种发送者类型分布，我们固定 $k = 1$ 并改变 $q$ 。 $q$ 的变化会使每种接收者类型按相同比例变化。随着 $q$ 增加，规划者也会提高 $t_h$ ，以提高 $z_h$ ，使 $z_h$ 的百分位数上升；由于与 $q$相关的间距效应，顶部的混同部分因此缩小。

设计2和设计3反映了 Poschke (2018) 的实证发现：富裕国家的企业规模分布均值和方差更大，而且美国企业的这两项指标随时间推移有所上升。在我们的数值分析中，增加 $k$ 或 $q$ ，都会使接收者类型分布的均值和方差上升。设计2和设计3的结果表明，随着企业规模分布的均值和方差上升，规划者会赋予接收者更多自由裁量权。不过，当接收者类型分布的均值和方差因 $q$ 增加而上升时，规划者赋予接收者的自由裁量权远多于因 $k$增加而上升时。原因在于， $q$ 增加会提高开始选择混同行动的阈值发送者类型的百分位数，而该百分位数独立于 $k$。由于非线性变换将更多权重转移到较高类型上，这使得 $t_h$ 相对于 $q$ 更加凸。

在前三种设计中，我们在发送者行动的生产率参数 $a$ 取固定值的情况下，给出比较静态。在设计4中，我们改变 $a$的值，同时也改变 $q.$ 的值。值得注意的是，当发送者的行动只有纯信号效应（$a = 0$），且 $q$ 较小时，规划者最优的做法是对所有接收者施加其最佳单一反应[2] 并诱导出混同 CSE，而不是将反应选择授权给接收者。然而，对于任意给定的正值 $a$ 以及任意给定的

[2]Alonso和Matouschek（2007）将这种授权形式称为“集中化”。

$q$，授权优于施加单一反应，因为最优严格单调CSE是严格良态的。随着 $a$ 增加， $t_h$ 和 $z_h$ 都会增加。

给定类型分布，效用无差异条件（13）和（14）在确定 $t_h$ （或等价地 $z_h$）方面发挥着关键作用。由于整个类型分布会通过无差异条件，以非平凡的方式影响 $t_h$（$z_h$）的确定，因此我们无法总是清晰地说明基础类型分布的变化会如何改变规划者的授权决策。例如，假设市场双方具有相同的类型分布。当我们将类型分布变为一阶随机占优的分布时，我们可能会预期，规划者最优的做法是赋予接收者自由裁量权（更高的 $t_h$），以提高 $z_h$。然而，这种关系并非总是单调的（见表 1）。

## 1.1 相关文献

授权问题已在多个领域得到研究，例如关税上限（Amador 和 Bagwell（2013））、授权项目选择（Armstrong 和 Vickers（2010））、消费—储蓄问题（Amador、Ivan、Angeletos（2006））、极小极大最优机制（Frankel（2014））、货币政策（Athey、Atkeson、Kehoe（2005））、基于否决权的授权（Mylovanov（2008））以及动态授权（Escobar 和 Zhang（2021）、Grenadier、Malenko 和 Malenko（2016）、Guo（2016）、Lipnowski 和 Ramos（2020））。

大多数关于最优委托的研究都聚焦于单个委托人和单个代理人。从 Holmstrom（1977，1984）的开创性论文开始，他探讨了委托人应如何将决策权最优地授予一位掌握信息但存在偏见的代理人。他通过多个例子刻画了最优授权集合，其中大多假设只允许采用区间授权。

Melumad 和 Shinabo（1991）分别考察了两种情形：（i）Holmstrom（1977，1984）的框架，在该框架中，委托人承诺采用某一决策规则；（ii）Crawford 和 Sobel（1982）的廉价交谈框架，在该框架中，委托人没有承诺能力。他们在不对授权集合施加任何限制的情况下，刻画了最优授权集合。他们的模型采用二次损失函数，其中，偏好的决策是代理人私人类型的线性函数，而该类型服从均匀分布。Alonso 和 Matouschek（2007）还全面刻画了任意承诺能力下的最优决策规则，并指出了最优决策规则呈现区间委托及其他形式委托的条件。

Alonso 和 Matouschek（2008）在 Melumad 和 Shinabo（1991）的模型基础上进行了扩展，允许代理人的私人信息服从一般分布，并采用更一般的效用函数。与上述所有研究一样，他们的模型中委托人与代理人之间不存在转移支付。他们给出了委托人能够从将决策委托给代理人中获益的充要条件。他们进一步表明，当代理人的偏好与委托人的偏好更加一致时，区间（阈值）委托是最优的。与他们类似，我们也对委托人将决策委托给代理人的意愿，以及区间委托达到最优的条件进行比较静态分析。与 Holmstrom（1977，1984）及大多数后续论文不同的是，我们的研究中，市场双方都存在连续统代理人。

据我们所知，本文首次将委托问题引入带信号传递的匹配市场。为此，我们对规划者进行授权的意愿以及最优委托提供了一个新颖的见解。

我们的方法是全新的。当然，文献已将通过匹配前投资竞争来匹配更优伙伴，视为解决不可契约化匹配前投资所引发的敲竹杠问题的一种潜在办法；当匹配被单独考察时，这一问题尤为突出（例如，Grossman 和 Hart（1986），以及 Williamson（1986））。Cole、梅拉斯和波斯特尔韦特（1995），Rege（2008），以及 Hoppe、莫尔多瓦努和塞拉（2009）研究了不完全信息下的匹配前投资，以及不存在货币转移支付的非可转移效用情形（即接收者没有反应选择）。因此，发送者—接收者框架并不适用。霍普金斯（2012）研究的不完全信息下的匹配前投资涵盖了可转移效用情形，但对转移支付（即反应）没有任何限制。他们关注的是分离均衡。此外，在匹配前投资竞争模型中，最优委托问题尚未得到研究。

尽管已有文献研究了单调均衡并探讨行动与类型之间的互补性，但其主要关注同时行动且没有信号传递的博弈（Athey（2001年）、McAdams（2003）、Reny 和 Zamir（2004）、Reny（2011年）、Van Zandt 和 Vives（2007））。对于带信号传递的匹配市场中的最优委托，我们采用更强单调CSE（HSS（2023））这一解概念，并假设规划者选择了一个反应区间。在该均衡中，市场反应函数、发送者行动函数、匹配函数和信念函数在更强集合序下均为单调（Shannon（1995））。[3] 鉴于存在唯一的

[3]We 允许信念和匹配采用集值函数。更多详情请参见第3.2节 ls.

更强单调CSE，我们证明，选择一个反应区间等价于在该区间所诱导的唯一更强单调均衡中确定两个发送者类型阈值。

Liu 和 Pei（2020）考察了一个发送者和一个接收者参与的博弈，其中行动、反应和类型都是有限的。他们证明，当接收者只有两种可行反应时，发送者效用满足单调超模条件，足以保证发送者的混合策略具有单调性。HSS（2023）证明，无论行动、反应和类型是否有限，在一个由单个发送者和单个接收者参与的博弈中，发送者效用满足单调超模条件，事实上足以保证纯策略均衡具有更强的单调性。这一结果很重要，因为大多数涉及连续行动、反应和类型的应用都聚焦于纯策略均衡。

Mensch（2020）沿用 Athey（2001）、McAdams（2003）和 Reny（2011）的方法，证明了在有多个委托人的两期博弈中单调信号传递均衡的存在性。一个问题是，与非均衡路径行动相关的问题可能导致信念函数不连续。他采用的一种技巧是扰动信念，以确保所有行动都以正概率发生。令扰动趋于零，便可得到原博弈中的完美贝叶斯均衡。这种方法的一个副产品是，它唯一确定了一个更强单调信念。HSS（2023）证明，更强单调性等价于D1准则（Cho 和 Kreps（1987年）以及 Banks 和 Sobel（1987年））。信念的更强单调性与D1准则之间的等价关系，对于在给定任意反应区间时推导出唯一的更强单调CSE至关重要，即使该区间无法导出分离型完全分离均衡也是如此。[4]

# 2 预备知识

发送者和接收者构成一个连续统。规划者希望规制接收者的反应选择。发送者和接收者可以分别理解为卖方和买方、工人和企业，或企业家和投资者。规划者可以理解为政府或政策制定者。接收者和发送者的类型各不相同。发送者的类型集为 $Z = [z, z] \subset \mathbb{R}$，接收者的类型集为 $X = [x, \bar{x}] \subset \mathbb{R}$.。

[4]对于反应不加限制时，我们只需要 Cho-Sobel单调性（D1准则的一个部分推论），即可证明分离均衡是唯一的均衡（见第3.2节）。

接收者的可行反应集合为 $\mathbb{R}_+$，而发送者的可行动作集合为 $S = \mathbb{R}_+$。

当类型为 $z$ 的发送者选择行动 $s$ ，并与类型为$x$ 且采取反应 $t$、的接收者匹配时，发送者的效用为 $u(t,\ s,\ z)$，接收者的效用为$g(t,\ s,\ z,\ x)$。类型、行动和反应的含义取决于所讨论的例子。在企业（接收者）和工人（发送者）的例子中，发送者的行动是教育，接收者的反应是工资。我们假设以下准线性效用函数:

$$\begin{aligned} u(t,s,z) &= t - c(s,z), \\ g(t,s,z,x) &= v(s,z,x) - t, \end{aligned}$$

其中，$c(s,\ z)$是类型为 $z$ 的发送者在选择行动$s$ 时承担的效用成本，而 $v(s,\ z,\ x)$ 可以理解为类型为$x$ 的接收者与采取行动 $s$的类型为 $z$ 的发送者之间产生的匹配剩余。

假设发送者和接收者的测度分别为1。令 $G(z)$和 $H(x)$分别表示发送者类型和接收者类型的累积分布函数（CDF）。 $G$ 和 $H$ 是公共信息，但每个人的类型都是其自身的私人信息。发送者（接收者）采取零行动（反应）0，以退出市场。

规划者希望规范接收者的反应选择。规划者宣布一个机制$\psi:\ R \to \mathbb{R}_+$ 该机制将接收者的反应 $t \in \mathbb{R}_+$ 规定为其消息$r \in R.$ 的函数。我们假设 $range(\psi) := \{\psi(r): r \in R\}$ 是闭集。令 $\Psi$ 为所有可行机制的集合。

时间顺序如下。

1. 发送者和接收者分别观察到从 $G$ 和 $H$中抽取的自身类型。

2. 规划者公开宣布一个机制 $\psi:\ R \to \mathbb{R}_+.$

3. 每位发送者同时选择自己的行动。

4. 接收者观察市场上发送者所选择行动的整体分布。当市场中进行发送者与接收者的一对一匹配时，每位接收者都会向规划者发送一条消息 $r$ 。随后，其反应由 $\psi(r)$ 决定。

消息空间 $R$ 不受任何限制。接收者在匹配时向规划者发送消息。因此，消息可以相当复杂，因为接收者掌握的信息不仅包括自己的类型，还包括市场上发送者所选择行动的分布。

如后文所述，给定一个机制和发送者的行动，一对一匹配以及接收者与规划者之间的沟通被表述为合作博弈中的稳定讨价还价结果。在稳定匹配中，不存在一对发送者和接收者能够通过建立新的匹配而改善自身处境。

# 3 通过区间委托实现完全实施

固定一个机制 $\psi: R \to \mathbb{R}_+$。令 $\sigma(z)$ 为类型为 $z$ 的发送者所选择的最优行动。给定 $\sigma: Z \to S$，令 $range(\sigma) := \{\sigma(z): z \in Z\}$ 且 $S^* := range(\sigma)\backslash\{0\}$。因此，$S^*$ 表示进入市场的发送者所选择的行动集合。

令 $co(A)$ 为某个集合 $A$ 中 $A$ 的凸包。发送者进行行动选择时，会根据行动 $s \in S^*$.，对可能与其匹配的接收者所选择的反应持有信念。接收者也会根据与其匹配的发送者的行动，对自己应采取的反应持有信念。这一信念由市场行动函数 $\tau: S^* \to co(range(\psi))$。接收者的沟通策略 $\rho: S^* \times X \to \Delta(R)$ 指定了在给定其类型 $x$ 以及其希望与之匹配的发送者的行动 $s \in S^*$ 时，他向规划者发送消息的概率分布。令 $\mathbb{E}_{\rho(s,x)}[\cdot]$ 为关于给定 $\rho(s,x) \in \triangle(R)$ 时的 $R$ 的期望算子。

**定义1** 接收者的沟通策略 $\rho: S^* \times X \to \Delta(R)$ 是一致的，如果

$$\mathbb{E}_{\rho(s,x)}[\psi(r)] = \tau(s) \ \forall (s,x) \in S^* \times X.$$

令 $\mu: S \to \Delta(Z)$ 表示接收者在给定其行动的条件下，对发送者类型的信念，即一个概率分布。接收者的匹配问题可表述如下:

$$\max_{s \in S^*} \mathbb{E}_{\mu(s)}[v(s,z,x)] - \tau(s) \text{ s.t. } \mathbb{E}_{\mu(s)}[v(s,z,x)] - \tau(s) \geq 0, \tag{1}$$

其中 $\mathbb{E}_{\mu(s)}[\cdot]$ 是给定 $\mu(s) \in \triangle(Z)$ 时关于 $Z$ 的期望算子。

令 $\xi(x)$ 表示接收者类型为 $x$ 的接收者最优选择作为其匹配对象的发送者行动。如果式（1）对 $x \in X$ 有解，则 $\xi(x)$ 是该解。否则，$\xi(x) = 0$. 令 $X^*$ 表示使 $\xi(x)$ 成为式（1）的解的接收者类型集合。那么， $X^*$ 就是进入市场的接收者类型集合。

考虑一个发送者的行动选择问题。若类型为 $z$ 的发送者满足以下条件，则 $\sigma(z) \in S^*$ 是其最优行动：(i) 它解决以下问题，

$$\max_{s \in S^*} \tau(s) - c(s,z) \text{ s.t. } \tau(s) - c(s,z) \geq 0, \tag{2}$$

且 (ii) 不存在有利可图的发送者偏离，即偏离至某个非均衡路径行动 $s' \notin range(\sigma)$（见下文定义 2 ）。注意， $\sigma(z) = 0$ 会成为类型为 $z$ 的发送者的最优行动，条件是 (2) 无解，且不存在有利可图的发送者偏离，即偏离至某个非均衡路径行动 $s' \notin range(\sigma)$。

下文的定义 2、3 和 4分别定义了不存在有利可图的发送者偏离至非均衡路径行动、稳定匹配和竞争性信号均衡（CSE）的概念。这些定义与 HSS（2023）中的相应定义相似，但纳入了接收者在匹配时与规划者进行沟通的策略。

对于所有 $s \in S^*$，令 $m(s) \in B(X^*)$ 表示与具有 $s$ 的发送者匹配的接收者类型集合，其中 $B(X^*)$ 是 $X^*$ 上的博雷尔σ代数。因此， $m$:$S^* \to B(X^*)$ 是一个集值匹配函数。对于所有 $x \in X^*$， $m^{-1}(x) \in S^*$ 表示与类型为 $x$ 的接收者匹配的发送者所选择的行动，即 $x \in m(m^{-1}(x))$。

**定义2** 给定 $\{\sigma, \mu, \tau, m\}$，如果存在 $z$ ，使得存在一个行动 $s' \notin range(\sigma)$ 和一个消息分布 $\rho' \in \triangle(R)$ ，并且对于某个 $x'$，发送者可以通过偏离至某个非均衡路径行动获利，

$$(a)\ \mathbb{E}_{\mu(s')}\left[v(s', z', x')\right] - \mathbb{E}_{\rho'}\left[\psi(r)\right] > \mathbb{E}_{\mu(m^{-1}(x'))}\left[v(m^{-1}(x'), z', x')\right] - \tau\left(m^{-1}(x')\right) \ \ and \tag{3}$$

$$(b)\quad \begin{array}{c} \mathbb{E}_{\rho'}\left[\psi(r)\right] - c(s', z) > \tau(\sigma(z)) - c(\sigma(z), z) \ \ if\ \sigma(z) \in S^*, \\ \mathbb{E}_{\rho'}\left[\psi(r)\right] - c(s', z) > 0 \ \ otherwise. \end{array} \tag{4}$$

注意， $z'$ 在（3）的两侧分别是由 $\mu$（$s'$）和$\mu$（$m^{-1}$（$x'$）） 支配的随机变量。如果（3）和（4）不成立，则发送者没有有利可图的偏离，无法采取非均衡路径行动

到非均衡路径行动。原因在于，这些正是发送者$z$ 通过与市场上的接收者建立匹配来获得更高效用的条件。令 $B(S^*)$表示 $S^*$上的博雷尔σ代数。

**定义 3** 给定 $\{\sigma, \mu\}$， $\{\rho, \tau, m\}$ 是稳定匹配结果，如果

*(i)* $\rho$ 是一致的，

*(ii)* $\tau$ 使市场出清：

$$H\left(\{x|x \in m(\xi(x)),\, \xi(x) \in A\}\right) = G\left(\{z|\sigma\left(z\right) \in A\}\right) \quad \forall A \in B(S^*),$$

*(iii)* $m$ 是稳定的：不存在一对由采取行动 $s \in S^*$ 的发送者和类型为$x \notin m(s)$ 的接收者组成的组合，使得对于某个 $\rho' \in \triangle(R)$ 以及某个 $z \in$ ，满足 $\sigma(z) = s$

$$\begin{aligned} (a)\ \mathbb{E}_{\mu(s)}\left[v(s, z', x)\right] - \mathbb{E}_{\rho'}\left[\psi(r)\right] &> \mathbb{E}_{\mu(m^{-1}(x))}\left[v(m^{-1}(x'), z', x)\right] - \tau(s) \\ (b)\ \mathbb{E}_{\rho'}\left[\psi(r)\right] - c(s, z) &> \tau(s) - c(s, z) \end{aligned}$$

定义 3。(iii) 意味着诱导出的 $m$ 是稳定的，即在所有发送者都选择了自己的行动之后，不存在两个代理人愿意通过重新匹配来改善自身处境，从而阻止该结果。

**定义 4** 固定规划者的机制 $\psi$。$\{\sigma, \mu, \rho, \tau, m\}$ 构成一个竞争性信号均衡 *(CSE)*，如果

*1.* 对所有 $z \in Z$、 $\sigma(z)$ ，均为最优

*2.* $\mu$是一致的：

*(a)* 若 $s \in range(\sigma)$ 满足 $G(\{z|\sigma(z) = s\}) > 0$，则 $\mu(s)$ 根据贝叶斯法则由 $G$ 和 $\sigma$确定。*(b)* 若 $s \in range(\sigma)$，但 $G(\{z|\sigma(z) = s\}) = 0$，则 $\mu(s)$ 是任意满足 $supp(\mu(s)) = cl\ \{z|\sigma(z) = s\}$ 的概率分布。*(c)* 若 $s \notin range(\sigma)$，则 $\mu(s)$ 不受限制。

*3.* 给定 $\{\sigma, \mu\}$， $\{\rho, \tau, m\}$ 是一个稳定匹配结果。

## 3.1 区间委托

区间菜单是一种特殊机制，其消息空间为 $R = \mathbb{R}_+$。令$T = [t_\ell, t_h]$ 为 $\mathbb{R}_+$. 中的一个闭连通区间。令 $\mathcal{T}$为所有可能的闭连通区间构成的集合。对于某个 $T \in \mathcal{T}$，令 $\psi$：若 $\mathbb{R}_+ \to T$，则称其为区间菜单 $\overline{\psi}$

$$\overline{\psi}(t) = \begin{cases} t & \text{if } t \in T \\ t^\circ & \text{otherwise} \end{cases},$$

其中， $t^\circ$ 是 $T$中的任意一种反应。令 $\Psi$ 为所有可能的区间菜单的集合。

固定一个区间菜单 $\overline{\psi}$： $\mathbb{R}_+ \to T$. 给定一个市场反应函数 $\tau$： $S^* \to T$，若接收者的沟通 $\rho$： $S^* \times X \to \mathbb{R}_+$ 是纯符合性的，则

$$\overline{\rho}(s, x) = \tau(s) \ \ \forall (s, x) \in S^* \times X.$$

**命题1（区间委托原理）**设 $\{\sigma, \mu, \rho, \tau, m\}$ 是给定机制 $\psi$： $R \to \mathbb{R}_+$（由规划者宣布）时的一个 *CSE*。则，给定区间菜单$\psi$： $\mathbb{R}_+ \to T$（值域为 $T = co(\overline{\psi})$）时，$\{\sigma, \mu, \rho, \tau, m\}$ 是一个 $\overline{CSE}$。

**证明**。给定机制 $\psi : R \to \mathbb{R}_+$，我们有

$$\{\mathbb{E}_{\rho'}[\psi(r)] \in \mathbb{R}_+ : \rho' \in \triangle(R)\} = co(\text{range } \psi). \tag{5}$$

假设规划者宣布一个区间菜单 $\psi$： $\mathbb{R}_+ \to T$，其 $T = \overline{co}$(值域为$\psi$)。由于 $\{\sigma, \mu, \rho, \tau, m\}$ 是给定 $\psi$： $R \to \mathbb{R}_+$时的一个 *CSE*，(5)意味着不存在有利可图的发送者偏离，即转向非均衡路径行动（给定 $\{\sigma, \mu, \tau, m\}$），也就是说，不存在发送者类型 $z$，使得存在行动 $s' \notin$ 值域 $\sigma$ 以及 $t' \in T$，满足对于某个 $x'$，

$$\text{(a) } \mathbb{E}_{\mu(s')}\left[v(s', z', x')\right] - t' > \mathbb{E}_{\mu(m^{-1}(x'))}\left[v\left(m^{-1}(x'), z', x'\right)\right] - \tau\left(m^{-1}(x')\right),$$

$$\text{(b) } \begin{cases} t' - c(s', z) > \tau(\sigma(z)) - c(\sigma(z), z) & \text{if } \sigma(z) \in S^*, \\ t' - c(s', z) > 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

此外，(5) 意味着给定 $(\sigma, \mu)$ $\{\rho, \tau, m\}$ 是一个稳定匹配结果，因为 (i) $\rho$ 是（纯）一致的，(ii) $\tau$ 使市场出清，即对于所有满足 $H(\{x | x \in m(\xi(x)), \xi(x) \in A\}) = G(\{z | \sigma(z) \in A\})$ 的 $A \in P(S^*)$，(iii) $m$ 是稳定的，即不存在一对发送者（其行动为 $s$）和类型为 $x \notin m(s)$ 的接收者，使得对于某个

$t' \in T$，某个满足 $\sigma(z) = s \in S^*$ 的 $z$，

$$\begin{aligned}&\text{(a) } \mathbb{E}_{\mu(s)}\left[v(s, z', x)\right] - t' > \mathbb{E}_{\mu(m^{-1}(x))}\left[v(m^{-1}(x), z', x)\right] - \tau(s),\\&\text{(b) } t' - c(s, z) > \tau(s) - c(s, z).\end{aligned}$$

因此，$\{\sigma, \mu, \rho, \tau, m\}$ 是给定区间菜单 $\psi$ 的 CSE：$\mathbb{R}_+ \to T$，其中 $T = co$（值域为 $\psi$）。 ■

原则上，当规划者希望通过沟通获取接收者的信息时，她可能需要要求接收者不仅报告其私人类型，还要报告发送者行动的完整分布，因为接收者进入市场后会观察发送者的行动。从这个意义上说，命题1中的区间委托原理使规划者的机制设计问题变得易于处理，尤其是在匹配市场中。

从现在起，我们将区间 $T$ 和区间菜单 $\psi : \mathbb{R}_+ \to T$ 互换使用。此外，提及 CSE 时，我们省略纯顺应性沟通策略 $\rho$。给定区间 $T$，如果规划者宣布 $T \subset \mathcal{T}$，接收者直接从 $T$ 中选择其反应，则 $\{\sigma, \mu, \tau, m\}$ 是一个 CSE。若 $T \supset T'$ 且 $T \neq T'$，我们称 $T$ 赋予接收者的自由裁量权更大。

## 3.2 完全实施

给定一个CSE，配置为 $\{\sigma, \tau, m\}$。借用机制设计文献中关于实施的术语，我们称配置 $\{\sigma, \tau, m\}$ 在更强单调CSE中得到完全实施，如果给定某个 $T \in \mathcal{T}$ 的每个更强单调CSE都会导出 $\{\sigma, \tau, m\}$。

HSS（2023）提出了一种更强单调CSE。考虑格 $Y$ 上的幂集 $P(Y)$ 中的两个集合 $A$ 和 $B$，其给定关系为 $\geq$。我们称 $A \leq_c B$ 在更强集合序中“$A$ 完全低于 $B$”，如果对于每个 $a \in A$ 和 $b \in B$，$a \leq b$.

**定义5（更强集合序）**给定一个偏序集 $K$ 及其给定关系 $\geq$，如果 $k' \leq k$ 蕴含 $M(k') \leq_c M(k)$，则集值函数 $M : K \to P(Y)$ 在更强集合序下单调非递减。

固定一个 C SE $\{\sigma, \mu, \tau, m\}$ 给定规划者 $T$ 所选择的反应区间 .

$\mu : S \to \triangle(Z)$ 被称为关于更强集合序非递减，如果 $s' < s$ 意味着 supp $\mu(s') \leq_c$ supp $\mu(s)$ 对所有 $s,\ s' \in \mathbb{R}_+$.

如果对于任意满足 $s' < s$ 的 $s,\ s' \in \mathbb{R}_+$.，都有 $m(s') \leq_c m(s)$，则称（取值为集合的）匹配函数 $m:\ S^* \to P(X^*)$在更强集合序下是非递减的。注意，如果 $\mu$在更强集合序下单调，那么对于任意满足 $s \neq s'$的 $s$ 和 $s'$，supp $\mu(s')$与supp $\mu(s)$的并集要么为空集，要么是单例。如果 $\sigma$，$\tau$，和 $m$ 在更强集合序下单调，它们也具有同样的性质。

**定义 6（更强单调CSE）**如果*CSE* $\{\sigma, \mu, \tau, m\}$ 中的 $\sigma$、 $\mu$、 $\tau$和 $m$ 在更强集合序下非递减，则称其为更强单调*CSE*。

如果一个更强单调CSE可由两个阈值发送者类型 $z_\ell$ 和 $z_h$ 刻画，使得所有类型低于 $z_\ell$ 的发送者都不进入市场，所有属于 $[z_\ell, z_h)$ 的发送者都通过各自唯一的行动选择来区分自己，而所有属于 $[z_h, z]$ 的发送者都采取相同的行动进行混同，则称其为良态。如果 $z_\ell \lesssim z_h = \bar{z}$，那么良态CSE就是分离的。如果 $z_\ell = z_h$，那么良态CSE就是混同的。如果$z_\ell < z_h < \bar{z}$，那么它就是严格良态的，在均衡中同时包含分离部分和混同部分。

在满足技术性假设的情况下，HSS（2023）证明，对于规划者选定的任意反应区间 $T$，更强单调CSE$\{\sigma, \mu, \tau, m\}$ 都是唯一的且良态的（定理5、6和7）；并且，如果一个良态均衡包含分离部分，那么它是可微的（定理4）。由于对于任意反应区间 $T$，更强单调CSE$\{\sigma, \mu, \tau, m\}$ 都是唯一的，因此规划者可以在给定 $T$ 的情况下完全实现配置 $\{\sigma, \tau, m\}$。

# 4 最优委托

本节根据 HSS（2023）中给定任一反应区间时 CSE 的刻画，提出一种求解规划者最优授权问题的方法。我们从给定反应区间 $\{\tilde{\sigma}, \tilde{\mu}, \tilde{\tau}, \tilde{m}\}$ 的更强单调分离型完全分离均衡 $\{\tilde{\sigma}, \tilde{\mu}, \tilde{\tau}, \tilde{m}\}$ 开始，并假设 $t_h$ 足够高。对于类型 $z$，给定 $x$时的双边有效行动$\zeta(x,\ z)$使 $v(x,\ s,\ z) - c(s,\ z)$ 最大化，并且我们假设

$$v(\underline{x}, \zeta(\underline{x}, \underline{z}), z) - c(\zeta(\underline{x}, \underline{z}), \underline{z}) \geq 0. \tag{6}$$

我们将 $\zeta(x,\ z)$ 规范化为 0。令 $z_\ell$ 为均衡中能够匹配的最低发送者类型，$s_\ell$ 为她的行动。那么，以下两个不等式必须在 $(s_\ell,\ z_\ell)$ 处成立：

$$v\left(n\left(z\right),s,z\right)-t_\ell\geq 0, \tag{7}$$

$$t_\ell-c\left(s,z\right)\geq 0. \tag{8}$$

如果 $z_\ell=z$，那么均衡中所有类型都能匹配，且在类型 $z$ 与类型 $x$之间的底部匹配中不存在信息租金。因此，最低匹配中的均衡行动$s_\ell$ 是双边有效的，且为 $\zeta(x,z)=0$。在这种情况下，我们将 $t_\ell=c(0,z)=0$ 归一化。如果 $t_\ell$ 高到使类型 $x$ 无法在与类型 $z$ 的匹配中获得非负的 $v-t_\ell$，而后者采取的行动成本为 $t_\ell$，那么最低匹配必定发生在类型分布内部的类型 $z_\ell$ 和 $x_\ell$ 之间：$=n(z_\ell)$。(7) 和 (8) 必须在 $(s_\ell,z_\ell)$ 处取等号。

我们将函数 $n$ 定义为 $n\equiv H^{-1}\circ G$，使得对于所有 $z\in[z,\bar{z}]$，$H(n(z))=G(z)$。在分离均衡中，匹配是正向分类的，因此匹配函数$m$ 满足 $m(s)=n(\mu(s))$。发送者和接收者的一阶条件导出关于 $\mu$的一阶常微分方程：

$$v_s(n(\mu(s)),s,\mu(s))+v_z(n(\mu(s)),s,\mu(s))\mu'(s)-c_s(s,\mu(s))=0 \tag{9}$$

且初始条件为 $\mu(s_\ell)=z_\ell$。

一旦我们求得解 $\tilde{\mu}$，便可如下构造由 $\tilde{\mu}$ 所蕴含的函数 $\tilde{\sigma}$、$\tilde{\tau}$，和 $\tilde{m}$。对于所有 $z\in[z_\ell,\bar{z}]$，$\tilde{\sigma}(z)$ 由 $\tilde{\sigma}(z)=\tilde{\mu}^{-1}(z)$ 确定；对于所有 $z\in[z_\ell,\bar{z}]$，其中 $\tilde{\mu}^{-1}(z)$ 是满足以下条件的发送者类型：对所有 $z\in[z_\ell,\bar{z}].$，$z=\tilde{\mu}\left(\tilde{\mu}^{-1}(z)\right)$。对于$s\in[s_\ell,\tilde{\sigma}(\bar{z})]$,，我们可以根据 $\tilde{m}(s)=n(\tilde{\mu}(s))$ 推导出匹配函数 $\tilde{m}$。市场反应函数 $\tilde{\tau}$ 变为

$$\tilde{\tau}(s)=\int_{s_\ell}^{s}\left[v_s(\tilde{m}(y),y,\tilde{\mu}\left(y\right))+v_z(\tilde{m}(y),y,\tilde{\mu}\left(y\right))\tilde{\mu}'\left(y\right)\right]dy+t_\ell. \tag{10}$$

如果 $t_h<\tilde{\tau}(\tilde{\sigma}(\bar{z}))$，那么就不存在分离型完全分离均衡。在这种情况下，存在两种可能的更强单调均衡：(i) 更强单调汇聚型完全分离均衡；(ii) 严格良态的更强单调 CSE，其中包含 $z_\ell<z_h<\bar{z}$ （即同时包含分离部分和混同部分）。

如果 $T$ 是一个 单例（即 $t_\ell=t_h=t^*$），更强单调算子是混同的，具体而言

所有高于 $z^*$ 的发送者类型都会进入市场，并选择混同行动 $s^*$。在 $(z^*, s^*)$ 下满足以下条件：

$$t^* - c(s^*, z^*) \geq 0, \tag{11}$$

$$\mathbb{E}\left[v\left(n\left(z^*\right), s^*, z'\right) | z' \geq z^*\right] - t^* \geq 0, \tag{12}$$

其中，当 $z^* > z.$ 时，每个条件均取等号

当 $t_\ell < t_h < \tilde{\tau}(\tilde{\sigma}(\bar{z}))$ 时，会出现一个同时包含分离部分和混同部分的严格良态的更强单调 CSE。所有高于 $z_h$ 的发送者类型都选择相同的行动 $s_h.$。以下两个方程在 $(s_h, z_h)$ 处成立，是理解匹配分布上尾部跳跃和混同的关键：

$$t_h - c\left(s, z\right) = \tilde{\tau}\left(\tilde{\sigma}\left(z\right)\right) - c\left(\tilde{\sigma}\left(z\right), z\right), \tag{13}$$

$$\mathbb{E}[v(n\left(z\right), s, z') | z' \geq z] - t_h = v\left(n\left(z\right), \tilde{\sigma}\left(z\right), z\right) - \tilde{\tau}\left(\tilde{\sigma}\left(z\right)\right). \tag{14}$$

令 $x_h := n(z_h)$。HSS（2023）中的定理6证明，给定 $T = [t_\ell, t_h]$，存在唯一的良态更强单调 CSE $\{\hat{\sigma}, \hat{\mu}, \hat{\tau}, \hat{m}\}$，且满足 $0 \leq t_\ell < \tilde{\tau}(\tilde{\sigma}(\bar{z})) < t_h$。它是严格良态的。

图 1（取自 HSS（2023））展示了在严格良态的更强单调 CSE 中，均衡发送者行动由三个不同的蓝色部分组成$\{\hat{\sigma}, \hat{\mu}, \hat{\tau}, \hat{m}\}$。[5] 注意，在 CSE 的分离部分，均衡匹配按照发送者行动和接收者类型（因此也按照发送者类型和接收者类型）呈正向匹配；但在 CSE 的混同部分，匹配是随机的。因此，混同部分存在匹配低效，但对于高于 $z_h$ 的发送者选择混同行动所对应的信号成本，可能存在节省空间。

HSS（2023）中的定理5、6和8确立了在可行反应区间的每种类型下唯一的更强单调CSE：(i) 如果 $0 \leq t_\ell < \tilde{\tau}(\tilde{\sigma}(\bar{z})) \leq t_h$，那么唯一的更强单调CSE是良态且分离的；(ii) 如果只有一个可行反应，那么它是混同的；(iii) 如果 $0 \leq t_\ell < t_h < \tilde{\tau}(\tilde{\sigma}(z))$，那么它是严格良态的，同时具有分离和混同特征。

引理 1表明，规划者只需考虑严格良态的更强单调 CSE，因为它也涵盖更强单调分离型 CSE 和更强单调混同 CSE。

[5]注意图 $z \nearrow z_h$ $\hat{\sigma}(z) = \tilde{\sigma}(z_h)$ 中的 lim1。如果 $0 \leq t_\ell < \tilde{\tau}(\tilde{\sigma}(\bar{z})) \leq t_h$，使得良态CSE的分离部分可以延伸至红色部分，那么该良态均衡就是分离的。

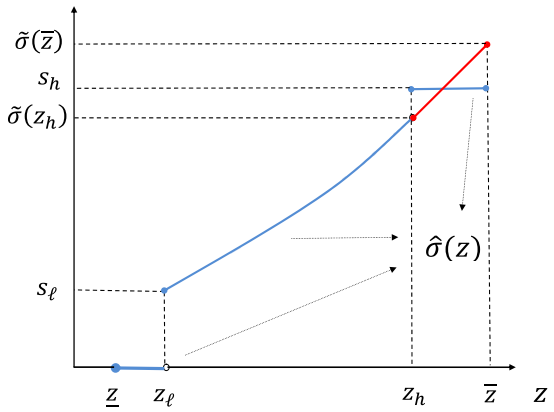



图1：发送者的均衡行动

**引理1** 当 $z_h \to \bar{z}$ 时，严格良态的更强单调 *CSE* $\{\hat{}\sigma、\hat{}\mu、\hat{}\tau、\hat{}m\}$ 收敛到具有相同较低阈值发送者类型 $z_\ell$. 的更强单调分离型 *CSE*。当 $z_h \to z_\ell$ 时，$\{\hat{}\sigma、\hat{}\mu、\hat{}\tau、\hat{}m\}$ 收敛到更强单调混同 *CSE*；在该均衡中，$t_\ell$ 是唯一的可行反应，$z_\ell$ 是市场进入的阈值发送者类型，而 $s_\ell$ 是市场中发送者的混同行动。[6]

结合引理 1，接下来的两个命题将规划者的最优授权问题简化为选择 $z_\ell$ 和 $z_h$，并满足 $z_\ell \in Z$ 和 $z_h \geq z_\ell$，前提是存在唯一的良态更强单调CSE。换言之，对于规划者的最优授权，选择可行反应区间$T$ 的上下界，等同于选择两个发送者类型阈值 $z_\ell$ 和 $z_h$，分别对应市场进入和在顶端混同。

**命题2** ***(i)*** 对于任意给定的 $z_\ell \in [\underline{z}, z)$，方程组存在唯一解 $(s_\ell, t_\ell)$ 满足方程（7）和（8）。***(ii)*** 假设规划者在上面的***(i)***中选择 $t_\ell$，那么 $(z_\ell, s_\ell)$ 满足方程（7）和（8），给定 $t_\ell$，且该解唯一。

注意，如果 $z_\ell = \underline{z}$，那么 $s_\ell = \zeta(x, \underline{z}) = 0$。如果 $z_\ell > \underline{z}$，那么 $s_\ell$ 由 $z_\ell$ 唯一确定，因为它满足

$$v(n(z_\ell), s, z_\ell) - c(s, z_\ell) = 0, \tag{15}$$

它是 (7) 与 (8) 之和，且等号成立。因此，命题 2 意味着，当 $t_\ell$ 时，我们可以从 $(s_\ell, z_\ell)$ 中找回会导出 (7) 的 $z_\ell = \underline{z}$；或者，7) 或

[6]当 $z_h \to z_\ell$，(13) 和 (14) 变为 (11) 和 (12)，且当 $z^* > \underline{z}$ 时等号成立。由 (11) 和 (12)，我们也可以直接推出，对于混同均衡中的每个 $z^*$，有 $(t^*, s^*)$；或者对于每个 $t^*$，有 $(z^*, s^*)$。

(8)，当 $z_\ell > z$时二者各自都满足等号成立。因此，从规划者的角度来看，选择$z_\ell$ 等价于选择 $t_\ell$。

**命题3** ***(i)*** 对于任意给定的 $z_h \in (z_\ell,\ z)$，存在唯一的$(s_h,\ t_h)$，满足（*13*）和（*14*）。***(ii)*** 假设规划者选择了上文***(i)***中的 $t_h$ 。那么，$(z_h,\ s_h)$ 满足（*13*）和（*14*），给定 $t_h$ 时该解唯一。

注意，$s_h$ 仅由 $z_h$ 决定，因为它满足

$$\mathbb{E}[v(n(z_h), s, z')|z' \geq z_h] - c(s, z_h) = v(n(z_h), \tilde{\sigma}(z_h), z_h) - c(\tilde{\sigma}(z_h), z_h), \qquad (16)$$

这等于在 $z_h$处将（13）和（14）相加。因此，命题3 意味着，我们可以从（13）或（14）中求得能够导出（ $t_h$ 的$s_h,\ z_h$）。规划者可以先选择发送者类型阈值 $z_h$ ，并求得在良态均衡中导出 $t_h$ 的可行反应上界 $z_h$ 。

给定一个良态的更强单调CSE $\{\hat{}\sigma,\ \hat{}\mu,\ \hat{}\tau,\ \hat{}m\}$ 以及下阈值发送者类型 $z_\ell$ 和上阈值发送者类型 $z_h$，总净剩余为

$$\begin{aligned}\Pi(z_\ell, z_h) := &\int_{z_\ell}^{z_h} v(n(z), \hat{\sigma}(z), z) dG(z) - \int_{z_\ell}^{z_h} c(\hat{\sigma}(z), z) dG(z) \\ &+ \int_{z_h}^{\bar{z}} \mathbb{E}\left[v(n(z), s_h(z_h), z')|z' \geq z_h\right] dG(z) - \int_{z_h}^{\bar{z}} c(s_h(z_h), z) dG(z),\end{aligned}$$

其中 $s_h(z_h)$ 是所有类型高于 $z_h$ 的发送者所选择的混同行动；由于命题 3(i)，给定任意 $\Pi(z_\ell, z_h)$，该行动都是唯一的。注意，第一行是均衡分离部分中的总净剩余，此时匹配按类型进行正向排序。第二行是均衡混同部分中的总净剩余，此时进行随机匹配，因此该混同部分的匹配效率较低，但由于上述所有发送者选择了混同行动 $z_h$，成本可能有所节省。

**定理1** 假设规划者希望最大化总净剩余。规划者最优授权问题的解，与规划者设计最优更强单调均衡后所得到的问题解相同：

$$\max_{\bar{z} > z_\ell \geq \underline{z}, z_h \geq z_\ell} \Pi(z_\ell, z_h)$$

若 $z_\ell < z_h < \bar{z}$，则更强单调均衡是严格良态的。若$z_\ell < z_h = \bar{z}$，则为分离。若 $z_\ell = z_h < \bar{z}$，则为混同。

如果 $z_\ell = z_h < \bar{z}$，那么规划者只需对所有接收者施加她最佳的未获信息的反应选择$t^*$，从而诱导出一个混同均衡。与完全授权（$T = \mathbb{R}_+$）相比，何时对所有接收者施加同一个反应更好？规划者何时最适合直接对所有接收者施加她的最佳单一反应，而不是将反应选择授权给接收者？换言之，规划者何时能从授权中受益？在授权反应选择时，规划者何时会给予接收者更多自由裁量权？我们将在一个参数化模型中探讨这些问题。

## 4.1 参数化最优授权问题

一般而言，总均衡剩余取决于 $v$， $c$， $G$ 和 $H.$。为设计最优均衡，我们提出一种方法：给定任意发送者类型分布，用“平移”和“相对间距”参数近似接收者类型的分布。考虑一个形式如下的匹配总剩余函数： $v(x,\ s,\ z) = As^a xz$，其中 $0 \leq a < 1.$。对于类型为 $z$ 的发送者，选择行动 的成本为 $(,\ z) = \beta \frac{s^2}{z}$，其中 $\beta > 0$。最低发送者类型为 $z = 0.$

发送者类型服从概率分布 $G$，而接收者类型服从 $H$。回想一下， $n$ 定义为 $H^{-1} \circ G$，使得对于所有 $z.$， $H(n(z)) = G(z)$。我们假设 $n$ 具有以下形式：

$$n(z) = kz^q, \tag{17}$$

其中 $k > 0$ 且 $q \geq 0.$。注意， $k$ 是“尺度”参数， $q$ 是“相对间距”参数。相对间距参数 $q$ 体现了接收者类型相对于发送者类型的异质性。回想一下， $n(z)$表示在更强单调分离均衡中，与类型为 $z$ 的发送者匹配的接收者类型。这种方法具有一般性，因为对于任意的发送者类型分布，它都能用“尺度”和“相对间距”参数来近似接收者类型的分布。

为推导出一个良态强单调均衡，我们首先需要求解满足初始条件（$z_\ell, s_\ell$）的 $\mu$ 对应的一阶微分方程 (9)。 $s_\ell$ 的值仅取决于 $z_\ell.$。如果 $z_\ell = 0$，那么 $s_\ell(z_\ell) = \zeta$ (0,0) $= 0.$。如果 $z_\ell > 0$，那么 $s_\ell(z_\ell)$ 由 (15) 确定，且为 $s_\ell(z_\ell) = \left(\frac{Ak}{\beta} z_\ell^{q+2}\right)^{\frac{1}{2-a}}$。注意， $s_\ell(z_\ell)$ 是连续的

处处成立，包括在 $z_\ell = 0.$ 处

**命题 4** 给定任意初始条件 $(z_\ell, s_\ell(z_\ell))$，一阶微分方程 $\mu'(s) = \phi(s, \mu(s))$ 的解为

$$\tilde{\mu}(s) = \left[ \begin{array}{c} \left(\frac{2\beta(2+q)}{Ak}\right) \frac{s^{2-a}}{2+a+aq} \\ + \left(\frac{s_\ell(z_\ell)}{s}\right)^{a(2+q)} \frac{\left[Ak(2+a+aq)z_\ell^{2+q} - 2\beta(2+q)s_\ell(z_\ell)^{(2-a)}\right]}{Ak(2+a+aq)} \end{array} \right]^{\frac{1}{2+q}}.$$

注意，$\tilde{\sigma}(z)$ 是 $\tilde{\mu}(s$ 的逆函数，其数值解为 $\tilde{\mu}(s)$ 的逆函数不存在闭式解。给定 $z_h$，$s_h(z_h)$ 是唯一的，且满足（16），即

$$Aks_h^a z_h^q \mathbb{E}[z'|z' \geq z_h] - \beta \frac{s_h^2}{z_h} = Ak\tilde{\sigma}(z_h)^a z_h^{1+q} - \beta \frac{\tilde{\sigma}(z_h)^2}{z_h}. \tag{18}$$

由于无法得到闭式解，我们需要数值求出 $s_h(z_h)$。给定 $z_\ell$ 和 $z_h$ 的取值，总净剩余为

$$\begin{aligned} \Pi_w(z_\ell, z_h, q, a, G) &= \int_{z_\ell}^{z_h} \left[v(n(z), \hat{\sigma}(z), z) - c(\hat{\sigma}(z), z)\right] g(z)dz \\ &+ \int_{z_h}^{\bar{z}} \left[\mathbb{E}[v(n(z), s_h(z_h), z')|z' \geq z_h] - c(s_h(z_h), z)\right] g(z)dz \\ &= \int_{z_\ell}^{z_h} \left(Akz^{q+1}\hat{\sigma}(z)^a - \beta\frac{\hat{\sigma}(z)^2}{z}\right) g(z)dz \\ &+ Aks_h(z_h)^a \mathbb{E}[z'|z' \geq z_h] \int_{z_h}^{\bar{z}} z^q g(z)dz - \beta s_h(z_h)^2 \int_{z_h}^{\bar{z}} \frac{1}{z} g(z)dz, \end{aligned}$$

其中，对于 $z \in [z_\ell, z_h]$，$\hat{\sigma}(z) = \tilde{\sigma}(z)$

给定（$a$、$q$、$G$），我们可以通过以下最大化问题找到最优的良态均衡：

$$\begin{aligned} &\max_{(z_\ell, z_h)} \Pi_w(z_\ell, z_h, q, a, G) \\ &\text{subject to } 0 \leq z_\ell \leq z_h \leq \bar{z}. \end{aligned}$$

## 4.2 更高效的非分离均衡

假设规划者将可行反应的下界设定为使得 $z_\ell = 0$，从而 $s_\ell(z_\ell) = 0$ （没有发送者退出市场）。在这种情况下，信念函数 $\tilde{\mu}(s)$允许其逆函数具有闭式表达，该逆函数即分离均衡中的发送者均衡行动函数：

$$\tilde{\sigma}(z) = \left(\frac{Ak}{2\beta}\frac{aq+a+2}{q+2}\right)^{\frac{1}{2-a}} z^{\frac{q+2}{2-a}} \text{ for } z < z_h.$$

总　　良态强单调均衡中的总净剩余是

$$\begin{aligned}\Pi_w(0, z_h, q, a, G) = \\ \left((Ak)^{\frac{2}{2-a}}\left(\frac{aq+a+2}{2\beta\,(q+2)}\right)^{\frac{a}{2-a}} - \beta\left(\frac{Ak}{2\beta}\frac{aq+a+2}{q+2}\right)^{\frac{2}{2-a}}\right)\int_0^{z_h} z^{\frac{2q+2+a}{2-a}} dG(z) \\ + Aks(z_h)^a \mathbb{E}[z|z \geq z_h]\int_{z_h}^{\bar{z}} z^q g(z)dz - \beta s_h(z_h)^2 \int_{z_h}^{\bar{z}} \frac{1}{z} g(z)dz.\end{aligned}$$

当 $z_h$趋近于 $\bar{z}$时， $G$， $\Pi_w(0, z_h, q, a, G)$ 支撑集的上界将变为总净剩余 $\Pi_s(a, q, G) = \Pi_w(0, \bar{z}, q, a, G)$，此时对可行反应不作任何限制（即， $\Pi_s(a, q, G)$ 是基准分离均衡中的总净剩余）。我们证明，当接收者类型的相对异质性（$q$）和发送者行动的生产率（$a$）不太大时，存在一个反应区间，能够诱导出一种严格良态均衡，其效率高于完全授权下的分离均衡（即 $T = \mathbb{R}_+$），无论 $G$.

**定理2** 存在 $\hat{}q$、$\hat{}a > 0$，使得对于任意给定的 $(q, a) \in [0, \hat{}q] \times [0, \hat{}a]$，都存在一个可行反应区间 $[0, \hat{}t]$，它诱导出唯一的严格良态强单调均衡，且该均衡的效率高于完全授权下的强单调分离均衡。给定 $[0, \hat{}t]$，它是唯一的强单调均衡。

**证明**。首先，我们构造一个（唯一的）严格良态的更强单调算子均衡，其 $0 = z_\ell < z_h <$支撑集的上确界为 $G$. 令 $s_h(z_h, a, q)$ 为满足方程（ $s_h$ 18）且对每个 $a$ 和 $q$. 都成立的18中的函数关于 $a$连续

以及 $q$， $s_h(z_h,\ a,\ q)$ 关于 $a$ 和 $q$. 给定（18），我们有

$$\lim_{q,a\to 0}\left(As_h(z_h,q,a)^a k{z_h}^q\mathbb{E}\left[z|z\geq z_h\right]-\beta\frac{s_h(z_h,q,a)^2}{z_h}\right)$$
$$=\lim_{q,a\to 0}\left(Ak\tilde{\sigma}\left(z_h\right)^a {z_h}^{q+1}-\beta\frac{\tilde{\sigma}\left(z_h\right)^2}{z_h}\right).$$

因此，我们有 $\lim_{q,a\to 0} s_h(z_h,q,a) = \sqrt{{z_h}^2 Ak\left(\mathbb{E}\left[z|z\geq z_h\right]-1\right)/\beta}$. 这意味着

$$\lim_{q,a\to 0}\Pi_w(0,z_h,q,a,G)=\int_0^{z_h}\frac{Akz}{2}dG(z)+\int_{z_h}^{\bar{z}}Ak\mathbb{E}\left[z|z\geq z_h\right]dG(z)$$
$$-{z_h}^2 Ak\left(\mathbb{E}\left[z|z\geq z_h\right]-1\right)\int_{z_h}^{\bar{z}}\frac{1}{z}dG(z).$$

对 $\lim_{q,a\to 0}\Pi_w(0,z_h,q,a,G)$ 关于 $z_h$ 取极限，得到

$$\lim_{z_h\to 0}\left[\lim_{q,a\to 0}\Pi_w(0,z_h,q,a,G)\right]=\int_0^{\bar{z}}Akz dG(z)=Ak\mu_z,$$

其中， $\mu_z$ 是发送者类型 $z$.的无条件均值

另一方面，更强单调分离均衡中的总净剩余极限为

$$\lim_{q,a\to 0}\Pi_s(q,a,G)=\int_0^{\bar{z}}Akz dG(z)-\int_0^{\bar{z}}\frac{Akz}{2}dG(z)=\frac{Ak\mu_z}{2}.$$

因此，我们有

$$\lim_{z_h\to 0}\left[\lim_{q,a\to 0}\Pi_w(0,z_h,q,a,G)\right]-\lim_{q,a\to 0}\Pi_s(q,a,G)=\frac{Ak\mu_z}{2}>0. \tag{19}$$

由于 $\Pi_w(0,z_h,q,a,G)$ 和 $\Pi_s(q,a,G)$ 连续，存在 $\hat{}q>0$， 以及 $\hat{}a>0$ 和 $\hat{}z_h(\hat{}q,\hat{}a)\in \text{Int}\ Z$，使得对于每个 $(q,a)\in[0,\hat{}q]\times[0,\hat{}a]$ 以及每个 $z_h\in(0,\hat{}z_h(\hat{}q,\hat{}a)]$，都有 $\Pi_w(0,z_h,q,a,G)>\Pi_s(q,a,G)$。给定 $z_h\in(0,\hat{}z_h(\hat{}q,\hat{}a)]$，我们可以求出 $t_h$。
■

在上文构造的良态更强单调均衡中，类型分布低端的一小部分发送者和接收者遵循更强单调分离均衡中原本会出现的均衡发送者行动、反应和分类匹配

。其余发送者和接收者则随机匹配，因为其余发送者都选择相同的行动。我们还可以证明，当 $a$ 和 $q$ 较小时，不授权优于完全授权。

**定理3** 存在 $\tilde{q}$、$\tilde{a} > 0$，使得对于任意给定的$(q$、$a) \in [0, \tilde{q}] \times [0, \tilde{a}]$，都有$t^* > 0$，使其导出唯一的更强单调混同均衡，且该均衡比完全授权下的更强单调分离均衡更有效率。

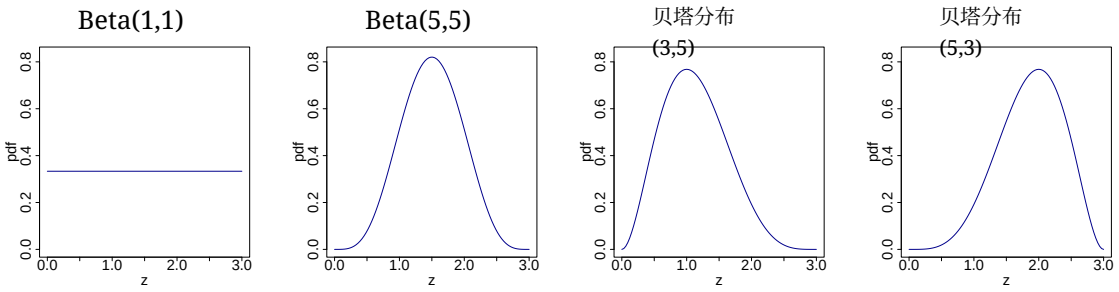
定理背后的直觉3 与定理背后的直觉相同2。一个主要区别是，混同均衡会迫使类型分布低端的一小部分发送者和接收者退出市场，尽管他们能够创造正的净剩余；而在定理2所确定的严格良态均衡中，所有人都能匹配。事实上，定理2 和3 表明，在经典的斯宾塞模型（Spence 1973）中，在不存在接收者异质性的纯信号传递情形下（即 $a = q = 0$），完全授权下的分离均衡并非最优。

# 5 数值分析

现在我们转向数值分析。为了具体说明数值分析，可以把发送者看作工人，把接收者看作企业。发送者的类型可以理解为不可观察技能，其行动可以理解为可观察技能。企业的类型可以理解为企业规模。在实证宏观经济学/发展经济学文献中，企业规模以其雇用的劳动力数量来衡量；在金融学中，如果企业是上市公司，则以其市场价值来衡量。在入门级劳动力市场中，工人的不可观察技能可以是理解分配给自己的任务并想出完成方法的能力。在管理类劳动力市场中，工人的不可观察技能可以是提出新的商业创意或创新的能力。

在数值分析中，我们考虑 $G$ 的特定分布，并采用底层参数的各种组合。在基准设计中，发送者类型 $z$ 的支撑集设为 $[0, 3]$，其分布由贝塔分布乘以 3 得到，形状参数如下：$\{(1，1)$、$(5，5)$、$(3，5)$和$(5，3)\}$. 图2 展示了形状参数取不同值时的概率密度函数。请注意，Beta(1,1) 对应均匀分布，Beta(5,5) 对应对称的钟形分布。Beta(3,5) 和 Beta(5,3) 分别对应右偏和左偏的发送者类型分布。我们将有效零点设为 $10^{-6}$。

图2：贝塔分布的概率密度函数



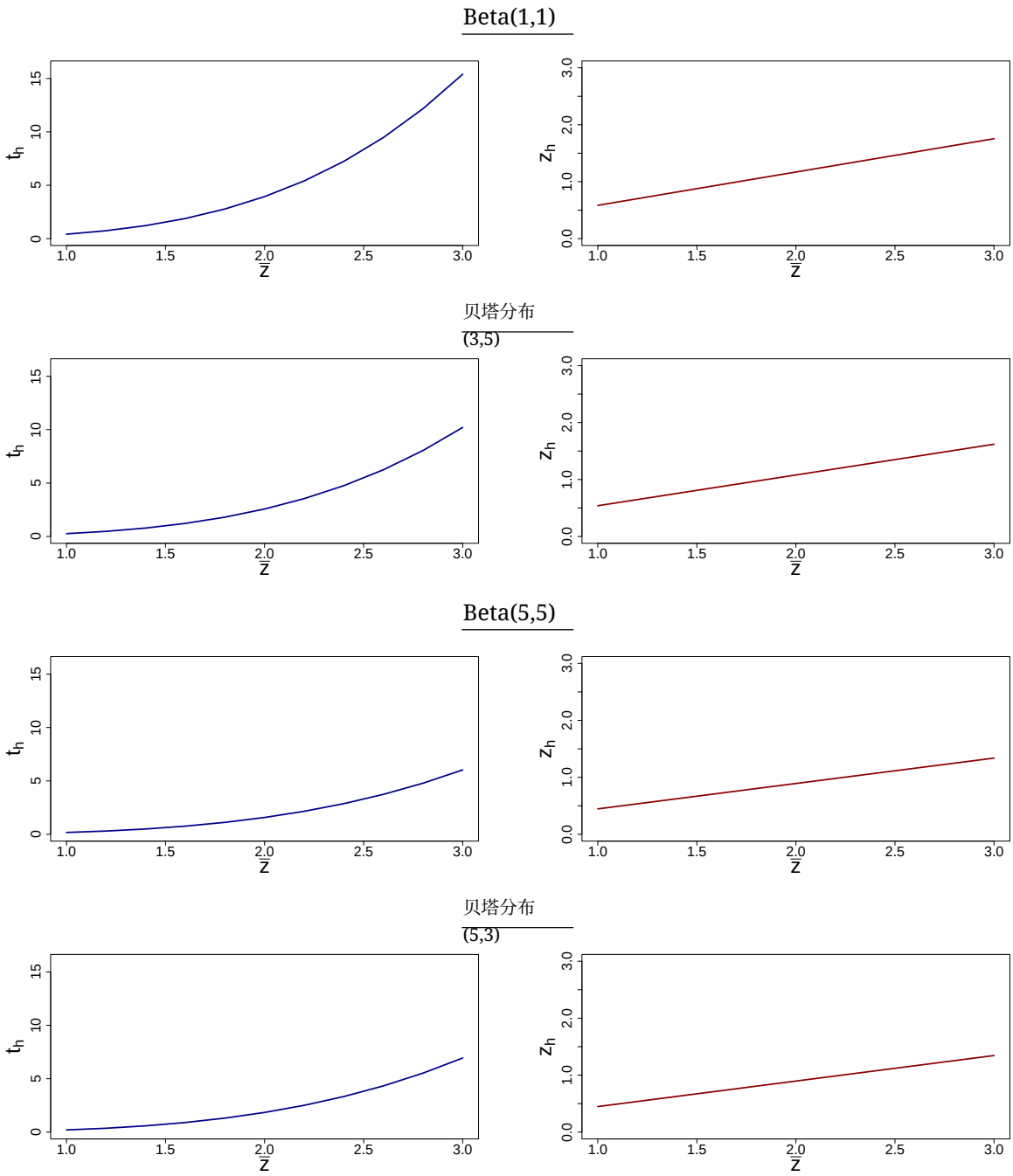

注：发送者类型变量 $z$ 由 $3 \cdot Beta(\cdot,\ \cdot)$。生成。

基准设计中的其他参数设置如下： $A = 1$， $\beta = 0.5$， $a = 0.5$，$k = 1$ 以及 $q = 1$. 请注意，给定 $k = q = 1$，我们有 $n(z) = x$ ，见式（17）。在每种设计中，我们通过改变上述某些参数值，使其偏离基准设计。在设计1中，发送者和接收者具有相同的类型分布（即对称结构），并保持 $k = 1$ 和 $q = 1$不变。不过，我们会改变类型分布的支撑集。具体而言，我们将支撑集的上界在 1 到 3 之间变动。回顾一下，基准设计的上界为 3。随后，我们考察最优反应区间及相应的更强单调均衡。在设计2中，我们将发送者类型分布恢复为基准设计，即 $z \in [0, 3]$ ，并改变尺度参数 $k$。设计3仅改变相对间距参数 $q$，其他条件均保持为基准设计中的设定。最后，设计4改变信号贡献参数 $a$ 以及相对间距参数 $q$。

根据定理1，我们可以先根据类型分布和其他参数值，推导出最优的 $z_\ell$ 和 $z_h$ 。这决定了最优更强单调CSE的类型。接着，我们可以求出相应的 $t_\ell$ 和 $t_h$，即最优授权区间的下界和上界。在所有情况下， $z_\ell$ 结果均为零，因此，最优做法是不将任何人排除在市场之外，从而 $t_\ell = 0.$ 。因此，我们仅在图 $t_h$ 和 $z_h$ 中报告3–6的最优解路径。其他变量（$x_h$ 和 $s_h$）的解路径，以及支撑集边界（$\bar{x}$ 和 $\bar{z}$）也列于2–17 表中，这些表格收录于附录。

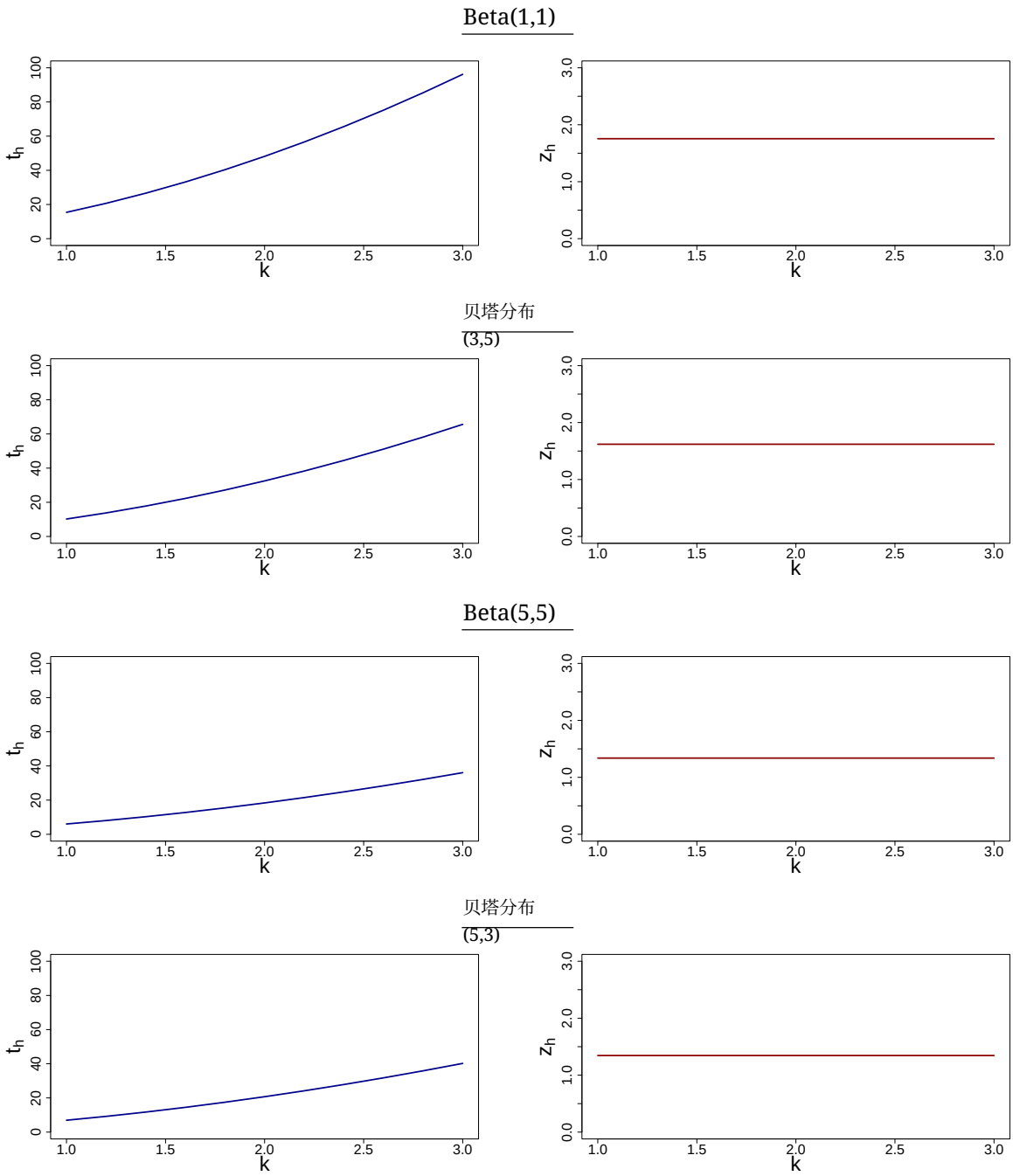
设计1将研究范围限定为发送者类型与接收者类型之间的对称结构，仅改变类型分布支撑集的上界（$\bar{z} = x$）。无论 $\bar{z}$取何值， $z_h$ 都小于 $z$ 且大于$z_\ell = 0.$ 。因此，最优更强单调CSE具有严格良好的性质，顶部包含一个混同部分。¯这表明，节省

图3：设计1。对称分布下的支撑集变化



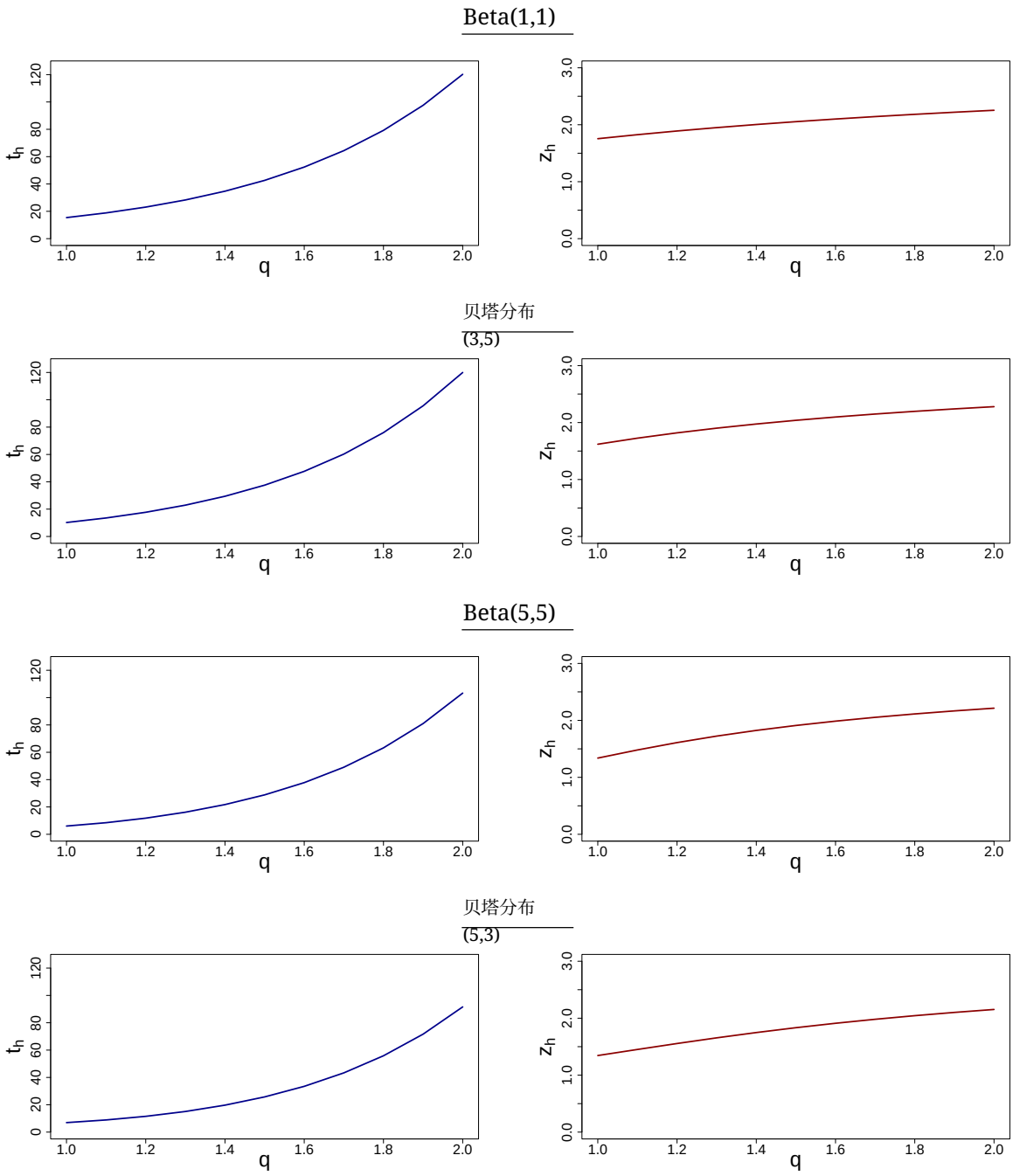

注：此设计对发送者和接收者采用相同的分布。我们改变其支撑集的上界（$\bar{z} = \bar{x}$）。区间委托的下界始终为零（$t_l = 0$）。良态均衡的下界也为零（$z_l = 0$）。

图4：设计2。接收者分布变化（按 $k$）



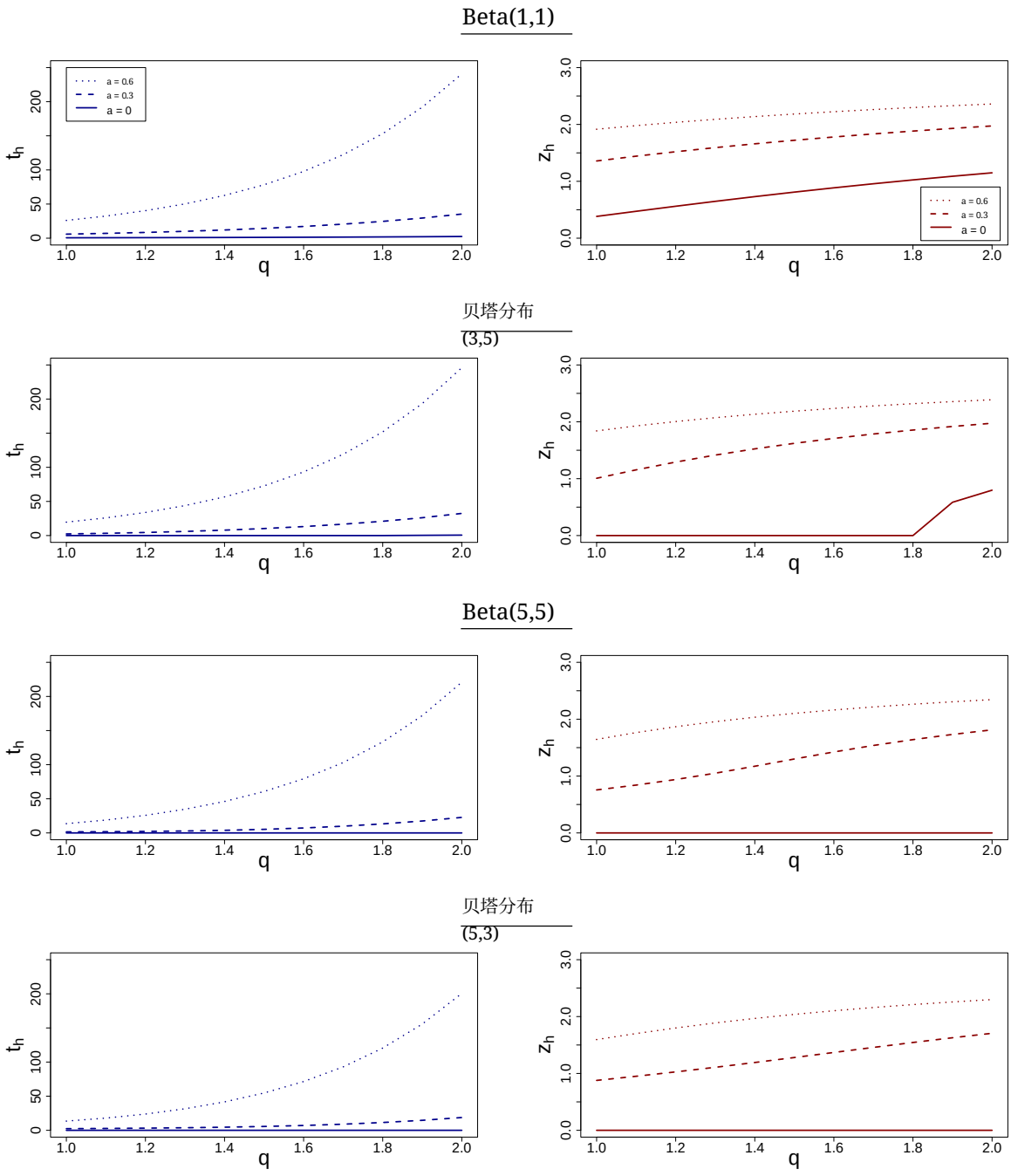

注：此设计通过改变 $k$ 来改变接收者类型（$x$）的分布。回顾匹配函数 $x = kz^q$。发送者类型的分布保持不变。区间委托的下界始终为零（$t_l = 0$）。良态均衡的下界也为零（$z_l = 0$）。

图5：设计3。 $q$导致的接收者分布变化




注：本设计通过改变 $q$ 来改变接收者类型（$x$）的分布。回顾匹配函数 $x = kz^q$。发送者类型的分布保持不变。区间委托的下界始终为零（$t_l = 0$）。良态均衡的下界也为零（$z_l = 0$）。

图6：设计4。信号贡献（$a$）和接收者类型（$q$）




注：此设计同时改变信号贡献参数 $a$ 和接收者类型的分布 $q$。回顾匹配函数 $x = kz^q$ 和匹配剩余函数 $v(x,\ s,\ z) = As^a xz$。发送者类型的分布保持不变。区间委托的下界始终为零 ($t_l = 0$)。良态均衡的下界也为零 ($z_l = 0$)。带有$a = 0.9$ 的图因尺度差异而移至附录。

发送者类型高于上述阈值时所选择的混同行动所关联的成本 $z_h$ 超过了混同部分随机匹配所带来的低效率。随着类型分布支持集从 $[0,1]$ 增至 $[0,3]$, 图3 显示， $t_h$ 和 $z_h$ 均单调递增。因此，随着类型分布支持集的上界增大，规划者会赋予接收者更多自由裁量权，使授权区间的上界更高，并提高混同的阈值发送者类型。请注意， $z_h$与 $\bar{z}$ 呈线性关系，而 $t_h$ 则呈指数增长。事实上，即使 $z_h$ 本身会随着类型分布上界的变化而增大，开始选择混同行动的阈值发送者类型的百分位数 $z_h$ 也不会改变。[7] 这些结果适用于不同的贝塔分布。

设计2通过改变尺度参数 $k \in [1,3]$ ，偏离了 $n(z) = kz^q$中的对称设计。其他所有参数均设为基准值。当 $k$ 从1开始增大时，每种接收者类型 $x$ 都按相同的尺度增大。[8] 无论 $k$取何值，最优严格单调CSE仍然表现得十分规整。请注意， $z_h$不会随不同的 $k$ 取值而变化。由于发送者类型分布固定，这意味着 $z_h$ 的百分位数不会改变（见图4的第二列）。这很合理，因为 $k$ 只会对接收者类型产生缩放效应。然而， $t_h$ 会随着 $k$ 而增大，因为混同的阈值接收者类型 $\bar{x}$ 会随 $k$ 增大（见图4的第一列）。因此，我们确认，尽管尺度参数发生变化，当企业支持集变大时，规划者会赋予接收者更多自由裁量权。

在设计3中，我们固定 $k = 1$ ，并将 $q$ 的值从1开始增大。由于接收者类型的初始支撑集为 $[0,3],$ ，接收者类型的整个分布会发生变化： $[0,1]$ 中的接收者类型减少，而 $[1,3]$ 中的接收者类型则随着 $q$ 增加而按相同的比例增加。这一变化使 $z_h$增加。由于每种情况下的发送者类型分布保持不变，这意味着随着 $q$ 增加， $z_h$的百分位数也会增加。这似乎表明，初始分布中 $[1,3]$ 处接收者类型的扩散效应占主导，而 $[0,1]$ 处接收者类型的收缩效应较弱。因此，规划者通过增加$t_h$，赋予接收者更多自由裁量权。

$k$ 的变化或 $q$ 的变化都会导致 $t_h.$ 增加。然而， $z_h$ 的百分位数在 $k$发生变化时保持不变，而在 $q$发生变化时则会增加。因此，

[7] $z_h$ 的百分位数在 Beta (1,1)、Beta (3,5)、Beta (5,5) 和 Beta (5,1) 中分别为 58.5%、83.4%、36.9% 和 15.1%。[8]假设当 $k = 1.$ 时， $x$ 是接收者类型的第 $y$ %百分位数。那么，对于所有 $y \in [0,100].$，当 $k > 1$ 时，接收者类型的第 $y$ %百分位数就是 $kx$ 。

的增加幅度 $t_h$ 应足够大，以满足效用无差异条件（13）和（14），即当 $q$ 增加时，在更高百分位数的阈值类型上实现混同。图5显示，当 $q$ 增加时， $t_h$ 和 $z_h$ 都单调增加。然而，由于非线性变换将更多权重转移到更高类型上， $t_h$ 的解路径变得更加凸。

设计2和设计3也反映了 Poschke (2018) 的实证发现：富裕国家的企业规模分布（$x$）的均值和方差更大，而且美国企业的这两项指标随时间推移不断上升；企业规模以雇用的工人数衡量。事实上， $k$ 或 $q$ 中的任一项增加，都会使接收者类型分布的均值和方差上升。设计2和设计3的结果表明，随着企业规模分布的均值和方差增加，规划者会赋予接收者更大的自由裁量权。然而，当接收者类型分布的均值和方差上升是由 $q$ 而非 $k$增加所致时，由于 $t_h$ 相对于 $q$的解路径更加凸，规划者会赋予接收者大得多的自由裁量权。

前三种设计考察了在发送者的行动具有正生产率参数（$a = 0.5$）的情况下，底层类型分布变化所带来的比较静态。在设计4中，我们同时改变 $a$ 和 $q$的取值。我们改变$a \in \{0, 0.3, 0.6, 0.9\}$，但由于尺度差异，结果仅报告至 $a \leq 0.6$ 。包含 $a = 0.9$ 在内的完整结果见附录。图6展示了结果。

值得注意的是，当发送者的行动只有纯信号效应（即 $a = 0$），且$q$ 较小时，混同的最优发送者阈值类型为 $z_h = 0$。[9] 这意味着，最优更强单调CSE是没有分离部分的混同。随后，反应的最优上界为零（$t_h = 0$）。因此，规划者最好对所有接收者施加同一个反应（$t_\ell = t_h = 0$），而不是将反应选择委托给接收者。

对于任意给定的正值 $a$ 以及任意给定的 $q$，授权都优于施加单一反应，因为最优严格单调CSE严格良态。随着 $a$ 增加， $t_h$ 和 $z_h$ 都会增加。由于在设计4的每种情形下，我们都固定发送者类型分布，因此 $z_h$ 的增加意味着最优严格单调CSE中混同的阈值类型百分位数增加。

[9]我们在此处和附录中给出 $q \geq 1$ 和 $a \in \{0, 0.3, 0.6, 0.9\}$ 的结果。请注意，在 Beta (1,1) 中，对于 $q$ 和 $a$这些取值，最优更强单调CSE严格良态。然而，在 Beta (0,0) 中，当 $q$ 接近零且 $a = 0$.时，最优更强单调CSE为混同（即 $z_h = t_h = 0$）

混同的阈值类型百分位数。

表 1：设计 5

| $q$ | $k$ | Beta | $\bar{z}$ | $\bar{x}$ | $t_h$ | $z_h$ | $x_h$ | $s_h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | (3,5) | 3 | 3 | 10.211 | 1.620 | 1.620 | 3.367 |
| 1 | 1 | (5,5) | 3 | 3 | 6.030 | 1.338 | 1.338 | 2.686 |
| 1 | 1 | (5,3) | 3 | 3 | 6.940 | 1.344 | 1.344 | 3.089 |

最后，我们指出，最优解路径具有很强的非线性，而且通常与底层参数之间不存在单调关系。例如，我们在表 1 中报告了在满足一阶随机占优关系的分布下的最优委托及其他解。市场双方具有相同的贝塔分布，并根据给定的一阶随机占优关系对其进行变动$A = k = q = 1$ 和 $a = \beta = 0.5$。从图 7 可以看出，表中的 Beta 分布满足一阶随机占优关系：Beta (5,3) 一阶随机占优于 Beta (5,5)，而 Beta (5,5) 一阶随机占优于 Beta (3,5)。当市场双方相同的类型分布转向一阶随机占优的分布时，人们可能会预期 $z_h$ 和 $t_h$ 会增加，因为一阶随机占优的分布中高类型相对更多。然而，根据表1，事实并非如此。效用无差异条件（13）和（14）在确定反应区间的上界方面起着关键作用，但整个类型分布会通过无差异条件以非平凡的方式影响上界的确定。因此，不能说当市场双方的类型分布转向一阶随机占优的分布时，规划者会给予接收者更大的自由裁量权。

# 6 结论

我们对最优委托的研究，为理解委托人授权的意愿以及带信号传递的匹配市场中最优委托的确定提供了崭新的见解。首先，我们提出一种新方法，用于推导能够完全实施更强单调CSE的最优反应区间；这一均衡概念源自 HSS（2023）。选择一个反应区间，等同于选择两个发送者类型阈值，因为我们可以由此确定相应区间的下界和上界。此外，

这两个发送者类型阈值能够精确刻画唯一的更强单调CSE。

接收者类型的相对异质性以及发送者信号的生产率，是在匹配效率与信号传递成本之间存在权衡时推导最优区间的关键因素。本文研究的最优委托假设规划者与接收者之间，以及规划者与发送者之间均不存在转移支付。也可以在存在转移支付的情况下研究最优委托。一个重要的例子是带有征税的委托。探究征税的存在如何改变规划者进行委托的激励以及其最优委托设计，将是一项有趣但或许颇具挑战性的研究。

# 参考文献

[1] Alonso, R. 和 N. Matouschek（2008）：“最优委托”，《经济研究评论》，75，259-292。[2] Amador, M. 和 K. Bagwell（2013）：“最优委托理论及其在关税上限中的应用”，《计量经济学》，81（4）：1541–99。[3] Amador, M.、Iv´an, W. 和 G.-M. Angeletos（2006）：“承诺与灵活性”，《计量经济学》，74（2），365–96。[4] Armstrong, M. 和 J. Vickers（2010）：“授权项目选择模型”，《计量经济学》，78（1），213–44。[5] Athey, S.（2001）：“不完全信息博弈中的单交叉性质与纯策略均衡的存在性”，《计量经济学》，69(4)，861-889。[6] Athey, S.、A. Atkeson 和 P. J. Kehoe（2005）：“货币政策中的最优自由裁量程度”，《计量经济学》，73（5），1431–75。[7] Banks, J. S. 和 J. Sobel（1987）：“信号博弈中的均衡选择”，《计量经济学》，55，647-661。[8] Cho, I.-K. 和 D. M. Kreps（1987）：“信号博弈与稳定均衡”，《经济学季刊》，102，179-221。[9] Cole, H. L.、梅拉斯, G. L. 和波斯特尔韦特, A.（1995）：“将对相对财富的关注纳入经济模型”，《季刊评论》、明尼阿波利斯联邦储备银行，19（3），12-21。[10] Crawford, V. P. 和 J. Sobel（1982）：“策略性信息传递”，《计量经济学》，50（6），1431-1451

[11] Dessein, W.（2002）：“组织中的权威与沟通”，《经济研究评论》，69，811-838。[12] Escobar, J. F. 和 Q. Zhang（2021）：“委托学习”，《理论经济学》，16（2），571-603。[13] Frankel, A.（2014）：“一致委托”，美国经济评论，104（1）：66–83。[14] Grenadier, S. R.、A. Malenko 和 N. Malenko（2016）：“组织中的时机决策：动态环境中的沟通与权威”，美国经济评论，106（9）：2552-81。[15] 格罗斯曼, S. J. 和 O. 哈特（1986）：“所有权的成本与收益：纵向与横向一体化理论”，政治经济学杂志，94（4），691-719。[16] Guo, Y.（2016）：“实验的动态委托”，美国经济评论，106（8），1969-2008。[17] Han, S.、Sam, A. 和 Y. Shin（2023年）：“更强单调的信号均衡”，工作论文，麦克马斯特大学。[18] Holmstr¨om, B.（1977）：“组织中的激励与控制”，博士论文，斯坦福大学。[19]————（1984）：“委托理论”，载于 M. Boyer 和 R. Kihlstrom（编）经济理论中的贝叶斯模型 （纽约：North-Holland），115-141。[20] Huber, J. 和 Shipan, C.（2006）：“政治、委托与官僚制”，载于 B. Weingast 和 D. Wittman（编）政治经济学手册 （牛津：牛津大学出版社），256-272。[21] 霍普金斯, E.（2012）：“相对位置的劳动力市场信号，或贝克尔与斯宾塞的结合”，欧洲经济学会杂志，10（2），290-322。[22] Hoppe, H. C.、B. 莫尔多瓦努和 A. 塞拉（2009）：“基于成本信号的分类匹配理论”，《经济研究评论》，76（1），253-281。[23] Liu, S. 和 H. Pei（2020）：“信号博弈中的单调均衡”，欧洲经济评论，124，103408。[24] Lipnowski, E. 和 J. Ramos（2020）：“重复委托”，《经济理论杂志》，188，105040

[25] McAdams, D.（2003）：“不完全信息博弈中的保序均衡”，《计量经济学》，71(4)，1191-1214。[26] Melumad, N. D. 和 T. Shibano（1991）：“无转移情形下的沟通”，《兰德经济学期刊》，22(2)：173–98。[27] Mensch, J.（2020）：“互补性博弈中单调纯策略完美贝叶斯均衡的存在性”，《经济理论杂志》，187，105026。[28] Mylovanov, T.（2008）：“基于否决权的授权”，《经济理论杂志》，138(1)，297–307。[29] Rege, M.（2008）：“人们为何在意社会地位？”，《经济行为与组织杂志，66(2)，233-242。[30] Reny, P. 和 S. Zamir（2004）：“非对称第一价格拍卖中纯策略单调均衡的存在性”，《计量经济学》，72(4)，1105-1126。[31] Van Zandt, T. 和 X. Vives（2007）：“战略互补性贝叶斯博弈中的单调均衡”，《经济理论杂志》，134，339-360。[32] Williamson, O. E.（1985）：《资本主义的经济制度》，纽约：自由出版社。

# 附录

## 引理证明 1

显然，如果 $z_h \to \bar{z}, \{\hat{\sigma}, \hat{\mu}, \hat{\tau}, \hat{m}\}$，那么随着混同部分消失，它将收敛到具有相同较低阈值发送者类型 $z_\ell$ 的更强单调分离均衡。注意，当 $z_h \to z_\ell$ 时，$\lim_{z_h \to z_\ell} t_h = t_\ell$ 和 $\lim_{z_h \to z_\ell} s_h = \tilde{\sigma}(z_\ell) = s_\ell$，因为只有当 $(t_h, s_h) = (t_\ell, \tilde{\sigma}(z_\ell))$ 时，(13) 和 (14) 才成立。因此，结合 (7)、(8) 与 (13)、(14) 可得

$$\lim_{z_h \to z_\ell} \left[t_h - c\left(s_h, z_h\right)\right] = t_\ell - c\left(s_\ell, z_\ell\right) = 0,$$
$$\lim_{z_h \to z_\ell} \left[\mathbb{E}[v(n\left(z_h\right), s_h, z') | z' \geq z_h] - t_h\right] = \mathbb{E}[v(n\left(z_\ell\right), s_\ell, z') | z' \geq z_\ell] - t_\ell \geq 0,$$

其中，当 $z_\ell > z.$ 时，不等式取等号。第一行的第二个等式和第二行的不等式源自 HSS（2023）中的定理6。这些结果表明，$\{\hat{\sigma}、\hat{\mu}、\hat{\tau}、\hat{m}\}$ 收敛于更强单调混同均衡，其中 $t_\ell$ 是唯一可行反应，$z_\ell$ 是市场进入的阈值发送者类型，而 $s_\ell$ 是市场中发送者的混同行动。注意，当 $z_\ell = z$ 时，根据 HSS（2023）中的定理6，我们有 $s_\ell = 0$ 和 $t_\ell = 0$ 属于 $\{\hat{\sigma}、\hat{\mu}、\hat{\tau}、\hat{m}\}$。

## 命题证明2

当 $z_\ell = z$、$s_\ell = \zeta(x, z) = 0$ 且 $t_\ell = c(\zeta(x, z), z) = 0$ 时。当 $t_\ell = 0$、$z_\ell = z$ 且 $s_\ell = \zeta(x, z) = 0$ 时。现在考虑 $z_\ell \in (z, \bar{z})$ 的情形。先考虑 HSS（2023）中假设7的情形（i）。对于任意给定的 $z_\ell \in (z, \bar{z}]$，式（7）和式（8）导出以下方程：

$$v\left(n\left(z_\ell\right), s, z_\ell\right) - c\left(s, z_\ell\right) = 0. \tag{A1}$$

如果 $s = 0$，那么 (A1) 的左边为正。当 $s \to \infty$ 时，由于 HSS（2023）中的假设4，左边趋近于 $-\infty$。根据 HSS（2023）中的假设7.(i)，$v(n(z_\ell), s, z_\ell)$ 为正，且独立于 $s.$。由于 $c$ 关于 $s$ 连续（HSS（2023）中的假设4），这意味着存在唯一的 $s_\ell$ 满足 ((A1)。给定 $s_\ell$ 和 $z_\ell$，可由 (7) 或 (8) 确定唯一的 $t_\ell$。

现在 con 假设7中 HSS（2023）的情形（ii）。对于任意给定的 $z_\ell \in (z, \bar{z})$，

(A1) 左侧在 $s = 0.$ 处为零。然而，我们不可能有 $s_\ell = 0.$ 若 $s_\ell = 0$，则 $t_\ell$ 必须为零。因此，每个卖方进入市场所获得的效用都为零。这意味着每个发送者都会进入市场，因此 $z_\ell$ 不可能大于 $z$，因为我们假设，若某人对进入市场与留在市场之外无差异，则每个人都会进入市场。

根据 HSS（2023）中的假设4和假设5，$v - c$ 严格凹，且（A1）左侧趋近于 $-\infty$，当 $s \to \infty$时。由于（A1）左侧在 $s = 0$处为零，这意味着存在唯一的正 $s_\ell$ 满足（A1）。然后，给定 $s_\ell$ 和 $z_\ell$，可由（7）或（8）确定唯一的 $t_\ell$。

假设规划者选择 $t_\ell$，这是满足给定 $z_\ell.$ 时求解（7）和（8）的唯一解（$t_\ell$， $s_\ell$）的一部分。那么，$z_\ell$， $s_\ell$）是满足（7）和（8）的唯一解，这是由 HSS（2023）中的引理7可知的。

# C 命题3的证明

首先考虑 HSS（2023）中假设7的情形（i）。对于任意给定的 $z_h \in (z_\ell, z)$, (13) 和 (14) 可得方程：

$$c(s, z_h) - c(\tilde{\sigma}(z_h) \quad z_h) = \mathbb{E}[v(n(z_h) \quad s, z')|z' \geq z_h] - v(n(z_h) \quad \tilde{\sigma}(z_h) \quad z_h)。 \tag{A2}$$

(A2) 的右侧为正，因为对于 $z_h < z.$，它与 $s$、$\tilde{\sigma}(z_h)$ 和 $z' \geq z_h$ 无关。左侧关于 $s$ 连续且递增。由假设1.(i)和4可知，左侧关于 $s$ 递增，且 $\lim_{s \searrow 0} [c(s, z_h) - c(\tilde{\sigma}(z_h) \quad z_h)] < 0$, $\lim_{s \nearrow \infty} [c(s, z_h) - c(\tilde{\sigma}(z_h) \quad z_h)] = \infty.$。因此，存在唯一的 $s_h$ 满足 (A2)。随后可由 (13) 和 (14) 唯一确定 $t_h$。因此，对于任意给定的 $z_h \in (z_\ell, z)$，存在唯一的 $(t_h, s_h)$ 满足 (13) 和 (14)。

–

现在考虑 HSS（2023年）中假设7的情形（ii）。对于任意给定的 $z_h \in (z_\ell, \quad \bar{z})$，(13) 和 (14) 导出以下方程：

$$\mathbb{E}[v(n(z_h), s, z')|z' \geq z_h] - c(s, z_h) = v(n(z_h), \tilde{\sigma}(z_h), z_h) - c(\tilde{\sigma}(z_h), z_h). \tag{A3}$$

(A3) 的右侧为正，因为它是更强的单调分离均衡中发送者类型 $z_h$ 和接收者类型 $n(z_h)$ 对应于 $z_h \in (z_\ell, z)$ 的均衡效用之和，并且在分离均衡中，发送者和接收者的均衡效用都随类型递增

递增。根据 HSS（2023）中的假设4（$c(0,z)=0$对所有 $z$ 均成立）以及假设7（$v(x,0,z)=0$ 对所有 $x$ 和 $z$ 均成立）中的情形（ii），我们有

$$0=\mathbb{E}[v(n(z_h),0,z')|z'\geq z_h]-c(0,z_h)<v(n(z_h),\tilde{\sigma}(z_h),z_h)-c(\tilde{\sigma}(z_h),z_h) \quad \text{(A4)}$$

由于 HSS（2023）中的假设5（对于任意 $x$ 和 $z$，$\lim_{s\to\infty} v_s(x,s,z)=0$，且对于任意 $z$，$\lim_{s\to\infty} c_s(s,z)=\infty$），我们有

$$-\infty=\lim_{s\to\infty}[\mathbb{E}[v(n(z_h),s,z')|z'\geq z_h]-c(s,z_h)]<v(n(z_h),\tilde{\sigma}(z_h),z_h)-c(\tilde{\sigma}(z_h),z_h) \quad \text{(A5)}$$

当 $s=\tilde{\sigma}(z_h)$ 时，我们有

$$\mathbb{E}[v(n(z_h),\tilde{\sigma}(z_h),z')|z'\geq z_h]-c(\tilde{\sigma}(z_h),z_h)>v(n(z_h),\tilde{\sigma}(z_h),z_h)-c(\tilde{\sigma}(z_h),z_h). \quad \text{(A6)}$$

因为 $\mathbb{E}[v(n(z_h)\ \tilde{\sigma}(z_h)\ z')|z'\geq z_h]>v(n(z_h)\ \tilde{\sigma}(z_h)\ z_h)$。

由于 $\mathbb{E}[v(n(z_h)\ s,z')|z'\geq z_h]-c(s,z_h)$ 关于 $s$ 严格凹，HSS（2023）中的假设5、(A4)、(A5) 和 (A6) 表明，存在两个值 $s^0$ 和 $s^1$，使得它们满足 (A3)，且 $s^0<\tilde{\sigma}(z_h)<s^1$。根据 HSS（2023）中的引理13，$\tilde{\sigma}(z_h)<s_h$，因此 $s_h$ 等于 $s^1$。由于 $t_h$ 可由 (13) 和 (14) 中任一方唯一确定，对于任意给定的 $z_h\in(z_\ell,z)$，都存在唯一的 $(t_h,s_h)$ 满足 (13) 和 (14)。因此，在 HSS（2023）假设7的两种情形下，对于任意给定的 $z_h\in(z_\ell,z)$，都存在唯一的 $t_h$ 和唯一的 $s_h$ 满足 (13) 和 (14)。假设规划者选择 $t_h$，即给定 $z_h\in(z_\ell,z)$ 时，满足 (13) 和 (14) 的唯一解 $(t_h,s_h)$ 中的一个部分。根据引理12，$(z_h,s_h)$ 是满足 (13) 和 (14) 的唯一解。

由于（13）和（14）中的所有函数都是连续的（假设3.(ii)、4.(i)、6.(ii)以及 HSS（2023）中的定理4），显然，解（$t_h,s_h$）关于 $z_h$ 连续，而 $z_h$，即解（$z_h,s_h$）的一部分，也关于 $t_h$. 连续。最后，$\lim_{z_h\to z_\ell} t_h=t_\ell$，且 $\lim_{z_h\to z_\ell} s_h=\tilde{\sigma}(z_\ell)$，因为只有当（$t_h,s$）=（$t_\ell,\tilde{\sigma}$（$z_\ell$））时，（13）和（14）才成立，其中 $z_h\to z$。

# D 命题 4 的证明

考虑以下初值问题：

$$\begin{cases} v_s(n(\mu(s)), s, \mu(s)) + v_z(n(\mu(s)), s, \mu(s))\mu'(s) - c_s(s, \mu(s)) = 0 \\ \mu(s_\ell) = z_\ell \end{cases}.$$

给定 $v(x, s, z) = As^a xz$，$c(s, z) = \beta \frac{s^2}{z}$，以及 $n(z) = kz^q$，我们有 $v_z(x, s, z) = As^a x$，$v_s(x, s, z) = aAs^{a-1}xz$，以及 $c_s(s, z) = 2\beta \frac{s}{z}$。因此，上述 IVP 变为

$$aAs^{a-1}k\mu(s)^q\mu(s) + As^a k\mu(s)^q\mu'(s) - \frac{2\beta s}{\mu(s)} = 0. \tag{A7}$$

重写（A7）得

$$\frac{Ak}{2\beta}\mu(s)^{1+q}\mu'(s) + \frac{aAk}{2\beta s}\mu(s)^{2+q} = s^{1-a}. \tag{A8}$$

令 $D =: \frac{Ak}{2\beta}$。因此，（A8）变为

$$D\mu^{1+q}\mu' + \frac{aD}{s}\mu^{2+q} = s^{1-a} \tag{A9}$$

其中，为简便起见，我们记 $\mu =: \mu(s)$。令 $v = \mu^{2+q}$。则 $v' = (2+q)\mu^{1+q}\mu'$，且（A9）变为

$$v' + \frac{a(2+q)}{s}v = \left(\frac{2+q}{D}\right)s^{1-a} \tag{A10}$$

这是一个一阶线性微分方程，其积分因子为 $\mathcal{I}(s) = s^{a(2+q)}$。因此，（A10）等价于 $\frac{d}{ds}\left\{vs^{a(2+q)}\right\} = \binom{2+q}{D} s^{1+a+aq}$，这意味着

$$vs^{a(2+q)} = \left(\frac{2+q}{D}\right)\int s^{1+a+aq}ds + \kappa, \tag{A11}$$

其中 $\kappa$ 是某个积分常数。方程（A11）意味着

$$\mu(s)^{2+q} = \left(\frac{2+q}{D}\right)\left(\frac{s^{2-a}}{2+a+aq}\right) + \frac{\kappa}{s^{a(2+q)}}. \tag{A12}$$

鉴于 $v=\mu^{2+q}$。利用初始条件 $\mu(s_\ell)=z_\ell$，我们计算得出 $\kappa$ 如下：

$$z_\ell^{2+q}=\left(\frac{2+q}{D}\right)\left(\frac{s_\ell^{2-a}}{2+a+aq}\right)+\frac{\kappa}{s_\ell^{a(2+q)}} \tag{A13}$$

由此得到

$$\kappa=\frac{s_\ell^{a(2+q)}\left[D(2+a+aq)z_\ell^{2+q}-(2+q)s_\ell^{(2-a)}\right]}{D(2+a+aq)}. \tag{A14}$$

将（A14）代入（A12）可得

$$\tilde{\mu}(s)=\left[\left(\frac{2\beta(2+q)}{Ak}\right)\frac{s^{2-a}}{2+a+aq}+\left(\frac{s_\ell}{s}\right)^{a(2+q)}\frac{\left[Ak(2+a+aq)z_\ell^{2+q}-2\beta(2+q)s_\ell^{(2-a)}\right]}{Ak(2+a+aq)}\right]^{\frac{1}{2+q}}, \tag{A15}$$

其中 $s_\ell$ 由（15）确定，且 $s_\ell(z_\ell)=\left(\frac{Ak}{\beta}z_\ell^{q+2}\right)^{\frac{1}{2-a}}$.

# E 命题 3 的证明

首先，我们构造一个具有正的单一可行反应 $t^*>0$的（唯一）更强单调混同均衡。由于根据 HSS（2023）中的定理6，(11) 和 (12) 必须取等号，且 $z^*>z$，混同行动 $s^*(z^*,q,a)$ 满足$As^{*a}kz^{*q}\mathbb{E}\left[z|z\geq z^*\right]-\beta s_{z^*}^{*2}=0$，因此我们有 $s^*(z^*,q,a)=\left(\frac{z^{*q+1}Ak\mathbb{E}[z|z\geq z^*]}{\beta}\right)^{2-a}$。因此，我们有 $\lim_{q,a\to 0}s^*(t,q,a)=\sqrt{z^*Ak\mathbb{E}\left[z|z\geq z^*\right]/\beta}$.

更强单调混同均衡中的总净剩余为

$$\Pi_p(z^*,q,a,G):=\int_{z^*}^{\bar{z}}As^*(z^*,q,a)^akz^{*q}\mathbb{E}\left[z|z\geq z^*\right]dG(z)-\beta s^*(z^*,q,a)^2\int_{z^*}^{\bar{z}}\frac{1}{z}dG(z).$$

这意味着

$$\lim_{q,a\to 0}\Pi_p(z^*,q,a,G)=\int_{z^*}^{\bar{z}}Ak\mathbb{E}\left[z|z\geq z^*\right]dG(z)-z^*Ak\mathbb{E}\left[z|z\geq z^*\right]\int_{z^*}^{\bar{z}}\frac{1}{z}dG(z),$$

$$\lim_{z^*\to 0}\left[\lim_{q,a\to 0}\Pi_p(z^*,q,a,G)\right]=\int_0^{\bar{z}}Ak\mu_z dG(z)=Ak\mu_z$$

其中，$\mu_z$是发送者类型 $z$. 的无条件均值。因为 $\lim_{q,a\to 0}\Pi^*(q,a,G)=$

$\frac{Ak\mu_z}{2}$，我们有

$$\lim_{z^*\to 0}\left[\lim_{q,a\to 0}\Pi_p(z^*,q,a,G)\right]-\lim_{q,a\to 0}\Pi_*(q,a,G)=\frac{Ak\mu_z}{2}>0. \tag{A16}$$

由于 $\Pi_p(z^*,q,a,G)$ 和 $\Pi_*(q,a,G)$ 是连续的，因此存在 $\tilde{q}>0$，以及 $\tilde{a}>0$and $z^*(\tilde{q},\tilde{a})\in$Int $Z$，使得对于每个 $(q,a)\in[0,\tilde{q}]\times[0,\tilde{a}]$ 和每个 $z^*\in(0,z^*(\tilde{q},\tilde{a})]$,$\Pi_p(z^*,q,a,G)>\Pi_s(q,a,G)$。给定 $z^*\in(0,z^*(\tilde{q},\tilde{a})]$，我们可以求得 $t^*>0$。

# F 附加图和表

## F.1 图

图 7：累积分布函数

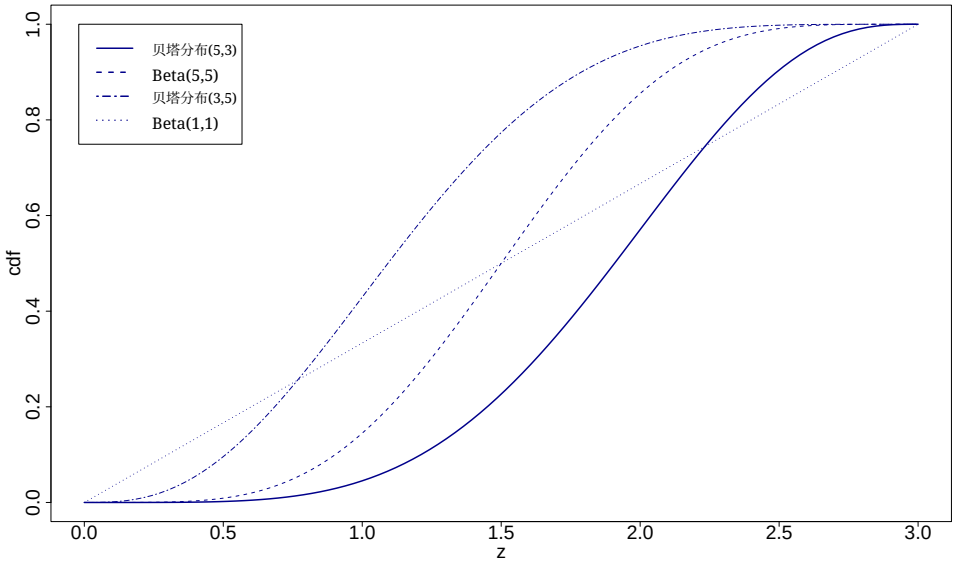
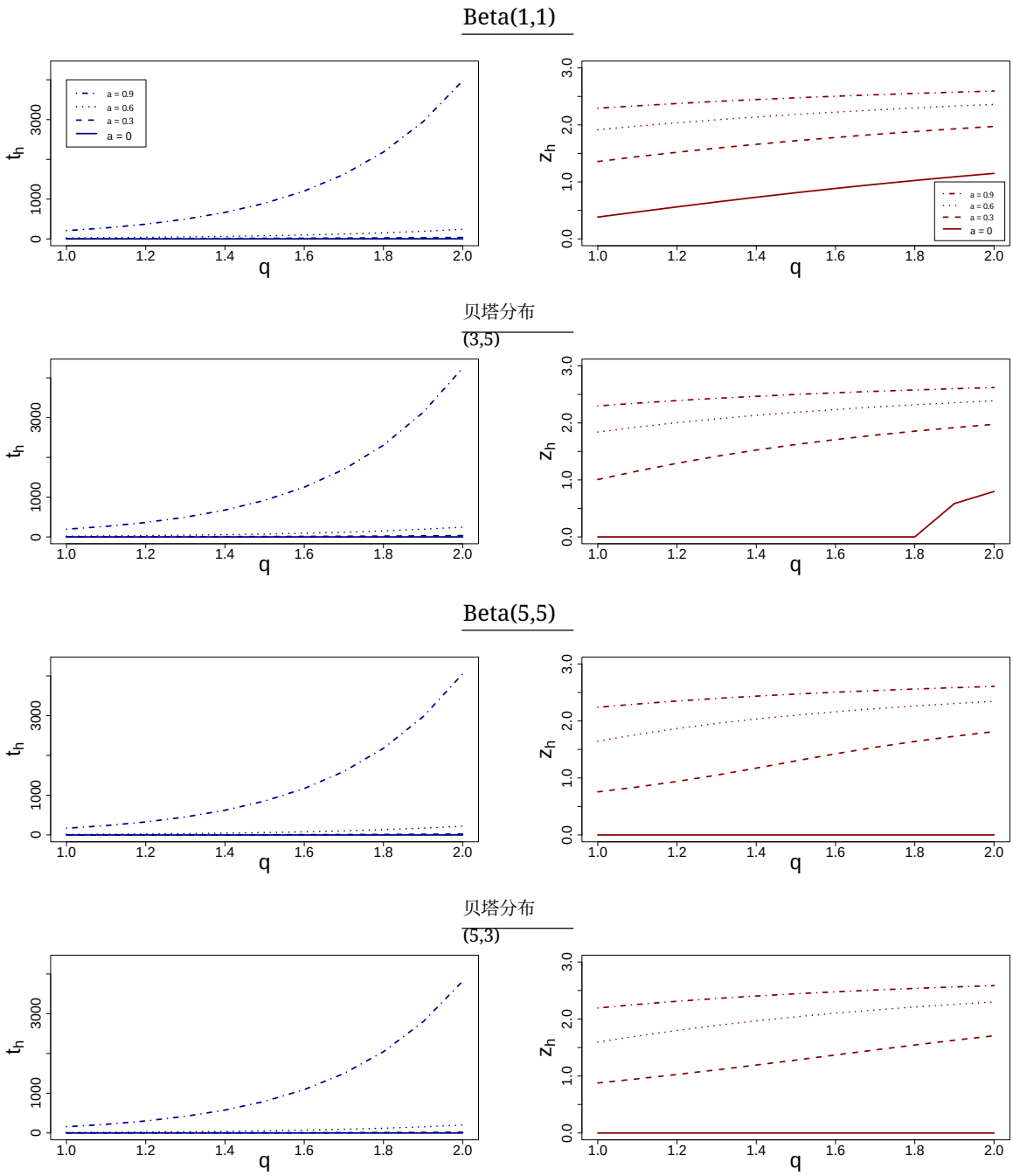


图8：设计4。信号贡献参数（$a$）和接收者类型（$k$）的变化




注：该设计同时改变信号贡献参数 $a$ 和接收者类型的分布，变化量为 $q$。回顾匹配函数 $x = kz^q$ 和匹配剩余函数 $v(x,\ s,\ z) = As^a xz$。发送者类型的分布保持不变。区间委托的下界始终为零（$t_l = 0$）。良态均衡的下界也为零（$z_l = 0$）。

## F.2 表格

表 2：使用 Beta(1,1) 的设计1

| $q$ | $k$ | $\bar{z}$ | $\bar{x}$ | $t_h$ | $z_h$ | $x_h$ | $s_h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.41 | 0.58 | 0.58 | 0.53 |
| 1.00 | 1.00 | 1.20 | 1.20 | 0.74 | 0.70 | 0.70 | 0.76 |
| 1.00 | 1.00 | 1.40 | 1.40 | 1.22 | 0.82 | 0.82 | 1.03 |
| 1.00 | 1.00 | 1.60 | 1.60 | 1.89 | 0.94 | 0.94 | 1.34 |
| 1.00 | 1.00 | 1.80 | 1.80 | 2.78 | 1.05 | 1.05 | 1.70 |
| 1.00 | 1.00 | 2.00 | 2.00 | 3.94 | 1.17 | 1.17 | 2.10 |
| 1.00 | 1.00 | 2.20 | 2.20 | 5.41 | 1.29 | 1.29 | 2.54 |
| 1.00 | 1.00 | 2.40 | 2.40 | 7.24 | 1.40 | 1.40 | 3.03 |
| 1.00 | 1.00 | 2.60 | 2.60 | 9.47 | 1.52 | 1.52 | 3.55 |
| 1.00 | 1.00 | 2.80 | 2.80 | 12.18 | 1.64 | 1.64 | 4.12 |
| 1.00 | 1.00 | 3.00 | 3.00 | 15.40 | 1.75 | 1.75 | 4.73 |

表 3：使用 Beta(5,5) 的设计1

| $q$ | $k$ | $\bar{z}$ | $\bar{x}$ | $t_h$ | $z_h$ | $x_h$ | $s_h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.17 | 0.45 | 0.45 | 0.30 |
| 1.00 | 1.00 | 1.20 | 1.20 | 0.30 | 0.54 | 0.54 | 0.43 |
| 1.00 | 1.00 | 1.40 | 1.40 | 0.50 | 0.62 | 0.62 | 0.58 |
| 1.00 | 1.00 | 1.60 | 1.60 | 0.76 | 0.71 | 0.71 | 0.76 |
| 1.00 | 1.00 | 1.80 | 1.80 | 1.12 | 0.80 | 0.80 | 0.97 |
| 1.00 | 1.00 | 2.00 | 2.00 | 1.58 | 0.89 | 0.89 | 1.19 |
| 1.00 | 1.00 | 2.20 | 2.20 | 2.15 | 0.98 | 0.98 | 1.45 |
| 1.00 | 1.00 | 2.40 | 2.40 | 2.87 | 1.07 | 1.07 | 1.72 |
| 1.00 | 1.00 | 2.60 | 2.60 | 3.74 | 1.16 | 1.16 | 2.02 |
| 1.00 | 1.00 | 2.80 | 2.80 | 4.79 | 1.25 | 1.25 | 2.34 |
| 1.00 | 1.00 | 3.00 | 3.00 | 6.03 | 1.34 | 1.34 | 2.69 |

表4：采用贝塔分布(3,5)的设计1

| $q$ | $k$ | $\bar{z}$ | $\bar{x}$ | $t_h$ | $z_h$ | $x_h$ | $s_h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.27 | 0.54 | 0.54 | 0.37 |
| 1.00 | 1.00 | 1.20 | 1.20 | 0.48 | 0.65 | 0.65 | 0.54 |
| 1.00 | 1.00 | 1.40 | 1.40 | 0.79 | 0.76 | 0.76 | 0.73 |
| 1.00 | 1.00 | 1.60 | 1.60 | 1.22 | 0.86 | 0.86 | 0.96 |
| 1.00 | 1.00 | 1.80 | 1.80 | 1.81 | 0.97 | 0.97 | 1.21 |
| 1.00 | 1.00 | 2.00 | 2.00 | 2.57 | 1.08 | 1.08 | 1.50 |
| 1.00 | 1.00 | 2.20 | 2.20 | 3.54 | 1.19 | 1.19 | 1.81 |
| 1.00 | 1.00 | 2.40 | 2.40 | 4.76 | 1.30 | 1.30 | 2.15 |
| 1.00 | 1.00 | 2.60 | 2.60 | 6.25 | 1.40 | 1.40 | 2.53 |
| 1.00 | 1.00 | 2.80 | 2.80 | 8.05 | 1.51 | 1.51 | 2.93 |
| 1.00 | 1.00 | 3.00 | 3.00 | 10.21 | 1.62 | 1.62 | 3.37 |

表5：采用贝塔分布(5,3)的设计1

| $q$ | $k$ | $\bar{z}$ | $\bar{x}$ | $t_h$ | $z_h$ | $x_h$ | $s_h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.20 | 0.45 | 0.45 | 0.34 |
| 1.00 | 1.00 | 1.20 | 1.20 | 0.36 | 0.54 | 0.54 | 0.49 |
| 1.00 | 1.00 | 1.40 | 1.40 | 0.59 | 0.63 | 0.63 | 0.67 |
| 1.00 | 1.00 | 1.60 | 1.60 | 0.90 | 0.72 | 0.72 | 0.88 |
| 1.00 | 1.00 | 1.80 | 1.80 | 1.31 | 0.81 | 0.81 | 1.11 |
| 1.00 | 1.00 | 2.00 | 2.00 | 1.84 | 0.90 | 0.90 | 1.37 |
| 1.00 | 1.00 | 2.20 | 2.20 | 2.51 | 0.99 | 0.99 | 1.66 |
| 1.00 | 1.00 | 2.40 | 2.40 | 3.33 | 1.08 | 1.08 | 1.98 |
| 1.00 | 1.00 | 2.60 | 2.60 | 4.33 | 1.17 | 1.17 | 2.32 |
| 1.00 | 1.00 | 2.80 | 2.80 | 5.53 | 1.25 | 1.25 | 2.69 |
| 1.00 | 1.00 | 3.00 | 3.00 | 6.94 | 1.34 | 1.34 | 3.09 |

表6：采用Beta(1,1)的设计2

| $q$ | $k$ | $\bar{z}$ | $\bar{x}$ | $t_h$ | $z_h$ | $x_h$ | $s_h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.00 | 1.00 | 3.00 | 3.00 | 15.40 | 1.75 | 1.75 | 4.73 |
| 1.00 | 1.20 | 3.00 | 3.60 | 20.68 | 1.75 | 2.11 | 5.34 |
| 1.00 | 1.40 | 3.00 | 4.20 | 26.61 | 1.75 | 2.46 | 5.92 |
| 1.00 | 1.60 | 3.00 | 4.80 | 33.17 | 1.75 | 2.81 | 6.47 |
| 1.00 | 1.80 | 3.00 | 5.40 | 40.36 | 1.75 | 3.16 | 7.00 |
| 1.00 | 2.00 | 3.00 | 6.00 | 48.16 | 1.75 | 3.51 | 7.51 |
| 1.00 | 2.20 | 3.00 | 6.60 | 56.57 | 1.75 | 3.86 | 8.00 |
| 1.00 | 2.40 | 3.00 | 7.20 | 65.58 | 1.75 | 4.21 | 8.48 |
| 1.00 | 2.60 | 3.00 | 7.80 | 75.19 | 1.75 | 4.56 | 8.94 |
| 1.00 | 2.80 | 3.00 | 8.40 | 85.39 | 1.75 | 4.91 | 9.39 |
| 1.00 | 3.00 | 3.00 | 9.00 | 96.18 | 1.75 | 5.26 | 9.84 |

表7：采用 Beta(5,5) 的设计2

| $q$ | $k$ | $\bar{z}$ | $\bar{x}$ | $t_h$ | $z_h$ | $x_h$ | $s_h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.00 | 1.00 | 3.00 | 3.00 | 6.03 | 1.34 | 1.34 | 2.69 |
| 1.00 | 1.20 | 3.00 | 3.60 | 8.04 | 1.34 | 1.61 | 3.03 |
| 1.00 | 1.40 | 3.00 | 4.20 | 10.29 | 1.34 | 1.87 | 3.36 |
| 1.00 | 1.60 | 3.00 | 4.80 | 12.76 | 1.34 | 2.14 | 3.67 |
| 1.00 | 1.80 | 3.00 | 5.40 | 15.45 | 1.34 | 2.41 | 3.98 |
| 1.00 | 2.00 | 3.00 | 6.00 | 18.36 | 1.34 | 2.68 | 4.26 |
| 1.00 | 2.20 | 3.00 | 6.60 | 21.48 | 1.34 | 2.94 | 4.54 |
| 1.00 | 2.40 | 3.00 | 7.20 | 24.82 | 1.34 | 3.21 | 4.82 |
| 1.00 | 2.60 | 3.00 | 7.80 | 28.36 | 1.34 | 3.48 | 5.08 |
| 1.00 | 2.80 | 3.00 | 8.40 | 32.12 | 1.34 | 3.75 | 5.34 |
| 1.00 | 3.00 | 3.00 | 9.00 | 36.08 | 1.34 | 4.01 | 5.59 |

表8：采用贝塔分布(3,5) 的设计2

| $q$ | $k$ | $\bar{z}$ | $\bar{x}$ | $t_h$ | $z_h$ | $x_h$ | $s_h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.00 | 1.00 | 3.00 | 3.00 | 10.21 | 1.62 | 1.62 | 3.37 |
| 1.00 | 1.20 | 3.00 | 3.60 | 13.78 | 1.62 | 1.94 | 3.80 |
| 1.00 | 1.40 | 3.00 | 4.20 | 17.80 | 1.62 | 2.27 | 4.21 |
| 1.00 | 1.60 | 3.00 | 4.80 | 22.27 | 1.62 | 2.59 | 4.61 |
| 1.00 | 1.80 | 3.00 | 5.40 | 27.18 | 1.62 | 2.92 | 4.98 |
| 1.00 | 2.00 | 3.00 | 6.00 | 32.52 | 1.62 | 3.24 | 5.34 |
| 1.00 | 2.20 | 3.00 | 6.60 | 38.29 | 1.62 | 3.56 | 5.70 |
| 1.00 | 2.40 | 3.00 | 7.20 | 44.49 | 1.62 | 3.89 | 6.04 |
| 1.00 | 2.60 | 3.00 | 7.80 | 51.12 | 1.62 | 4.21 | 6.37 |
| 1.00 | 2.80 | 3.00 | 8.40 | 58.16 | 1.62 | 4.54 | 6.69 |
| 1.00 | 3.00 | 3.00 | 9.00 | 65.62 | 1.62 | 4.86 | 7.00 |

表9：采用贝塔分布(5,3) 的设计2

| $q$ | $k$ | $\bar{z}$ | $\bar{x}$ | $t_h$ | $z_h$ | $x_h$ | $s_h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.00 | 1.00 | 3.00 | 3.00 | 6.94 | 1.34 | 1.34 | 3.09 |
| 1.00 | 1.20 | 3.00 | 3.60 | 9.21 | 1.34 | 1.61 | 3.49 |
| 1.00 | 1.40 | 3.00 | 4.20 | 11.73 | 1.34 | 1.88 | 3.87 |
| 1.00 | 1.60 | 3.00 | 4.80 | 14.49 | 1.34 | 2.15 | 4.22 |
| 1.00 | 1.80 | 3.00 | 5.40 | 17.48 | 1.34 | 2.42 | 4.57 |
| 1.00 | 2.00 | 3.00 | 6.00 | 20.71 | 1.34 | 2.69 | 4.90 |
| 1.00 | 2.20 | 3.00 | 6.60 | 24.17 | 1.34 | 2.96 | 5.22 |
| 1.00 | 2.40 | 3.00 | 7.20 | 27.85 | 1.34 | 3.23 | 5.54 |
| 1.00 | 2.60 | 3.00 | 7.80 | 31.75 | 1.34 | 3.50 | 5.84 |
| 1.00 | 2.80 | 3.00 | 8.40 | 35.87 | 1.34 | 3.76 | 6.14 |
| 1.00 | 3.00 | 3.00 | 9.00 | 40.21 | 1.34 | 4.03 | 6.42 |

表 10：采用 Beta(1,1) 的设计3

| $q$ | $k$ | $\bar{z}$ | $\bar{x}$ | $t_h$ | $z_h$ | $x_h$ | $s_h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.00 | 1.00 | 3.00 | 3.00 | 15.40 | 1.75 | 1.75 | 4.73 |
| 1.10 | 1.00 | 3.00 | 3.35 | 18.85 | 1.83 | 1.94 | 5.16 |
| 1.20 | 1.00 | 3.00 | 3.74 | 23.09 | 1.89 | 2.15 | 5.62 |
| 1.30 | 1.00 | 3.00 | 4.17 | 28.30 | 1.95 | 2.38 | 6.12 |
| 1.40 | 1.00 | 3.00 | 4.66 | 34.72 | 2.00 | 2.65 | 6.65 |
| 1.50 | 1.00 | 3.00 | 5.20 | 42.63 | 2.05 | 2.94 | 7.21 |
| 1.60 | 1.00 | 3.00 | 5.80 | 52.37 | 2.10 | 3.28 | 7.82 |
| 1.70 | 1.00 | 3.00 | 6.47 | 64.39 | 2.14 | 3.65 | 8.47 |
| 1.80 | 1.00 | 3.00 | 7.22 | 79.22 | 2.18 | 4.08 | 9.17 |
| 1.90 | 1.00 | 3.00 | 8.06 | 97.56 | 2.22 | 4.55 | 9.92 |
| 2.00 | 1.00 | 3.00 | 9.00 | 120.23 | 2.25 | 5.08 | 10.72 |

表 11：采用 Beta(5,5) 的设计3

| $q$ | $k$ | $\bar{z}$ | $\bar{x}$ | $t_h$ | $z_h$ | $x_h$ | $s_h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.00 | 1.00 | 3.00 | 3.00 | 6.03 | 1.34 | 1.34 | 2.69 |
| 1.10 | 1.00 | 3.00 | 3.35 | 8.48 | 1.48 | 1.54 | 3.15 |
| 1.20 | 1.00 | 3.00 | 3.74 | 11.80 | 1.61 | 1.77 | 3.65 |
| 1.30 | 1.00 | 3.00 | 4.17 | 16.16 | 1.72 | 2.03 | 4.18 |
| 1.40 | 1.00 | 3.00 | 4.66 | 21.74 | 1.82 | 2.32 | 4.75 |
| 1.50 | 1.00 | 3.00 | 5.20 | 28.83 | 1.91 | 2.64 | 5.34 |
| 1.60 | 1.00 | 3.00 | 5.80 | 37.78 | 1.99 | 3.00 | 5.96 |
| 1.70 | 1.00 | 3.00 | 6.47 | 49.06 | 2.05 | 3.40 | 6.62 |
| 1.80 | 1.00 | 3.00 | 7.22 | 63.23 | 2.11 | 3.85 | 7.32 |
| 1.90 | 1.00 | 3.00 | 8.06 | 81.00 | 2.17 | 4.34 | 8.06 |
| 2.00 | 1.00 | 3.00 | 9.00 | 103.29 | 2.21 | 4.90 | 8.85 |

表 12：采用贝塔分布(3,5)的设计3

| $q$ | $k$ | $\bar{z}$ | $\bar{x}$ | $t_h$ | $z_h$ | $x_h$ | $s_h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.00 | 1.00 | 3.00 | 3.00 | 10.21 | 1.62 | 1.62 | 3.37 |
| 1.10 | 1.00 | 3.00 | 3.35 | 13.53 | 1.73 | 1.82 | 3.83 |
| 1.20 | 1.00 | 3.00 | 3.74 | 17.70 | 1.82 | 2.05 | 4.31 |
| 1.30 | 1.00 | 3.00 | 4.17 | 22.91 | 1.90 | 2.31 | 4.81 |
| 1.40 | 1.00 | 3.00 | 4.66 | 29.41 | 1.98 | 2.59 | 5.35 |
| 1.50 | 1.00 | 3.00 | 5.20 | 37.53 | 2.04 | 2.91 | 5.91 |
| 1.60 | 1.00 | 3.00 | 5.80 | 47.66 | 2.10 | 3.27 | 6.51 |
| 1.70 | 1.00 | 3.00 | 6.47 | 60.27 | 2.15 | 3.67 | 7.15 |
| 1.80 | 1.00 | 3.00 | 7.22 | 75.99 | 2.20 | 4.12 | 7.83 |
| 1.90 | 1.00 | 3.00 | 8.06 | 95.57 | 2.24 | 4.63 | 8.56 |
| 2.00 | 1.00 | 3.00 | 9.00 | 119.98 | 2.28 | 5.20 | 9.33 |

表13：贝塔分布(5,3)下的设计3

| $q$ | $k$ | $\bar{z}$ | $\bar{x}$ | $t_h$ | $z_h$ | $x_h$ | $s_h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.00 | 1.00 | 3.00 | 3.00 | 6.94 | 1.34 | 1.34 | 3.09 |
| 1.10 | 1.00 | 3.00 | 3.35 | 8.89 | 1.45 | 1.51 | 3.46 |
| 1.20 | 1.00 | 3.00 | 3.74 | 11.54 | 1.55 | 1.70 | 3.89 |
| 1.30 | 1.00 | 3.00 | 4.17 | 15.08 | 1.66 | 1.93 | 4.37 |
| 1.40 | 1.00 | 3.00 | 4.66 | 19.72 | 1.75 | 2.19 | 4.89 |
| 1.50 | 1.00 | 3.00 | 5.20 | 25.74 | 1.83 | 2.48 | 5.45 |
| 1.60 | 1.00 | 3.00 | 5.80 | 33.48 | 1.91 | 2.82 | 6.05 |
| 1.70 | 1.00 | 3.00 | 6.47 | 43.33 | 1.98 | 3.20 | 6.70 |
| 1.80 | 1.00 | 3.00 | 7.22 | 55.84 | 2.04 | 3.62 | 7.39 |
| 1.90 | 1.00 | 3.00 | 8.06 | 71.66 | 2.10 | 4.10 | 8.13 |
| 2.00 | 1.00 | 3.00 | 9.00 | 91.60 | 2.15 | 4.64 | 8.93 |

表14：设计4，采用 Beta(1,1)

| $q$ | $k$ | $a$ | $\bar{z}$ | $\bar{x}$ | $t_h$ | $z_h$ | $x_h$ | $s_h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.00 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 3.00 | 0.57 | 0.38 | 0.38 | 0.65 |
| 1.10 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 3.35 | 0.66 | 0.47 | 0.44 | 0.77 |
| 1.20 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 3.74 | 0.77 | 0.56 | 0.50 | 0.89 |
| 1.30 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 4.17 | 0.89 | 0.65 | 0.57 | 1.01 |
| 1.40 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 4.66 | 1.02 | 0.73 | 0.64 | 1.13 |
| 1.50 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 5.20 | 1.18 | 0.81 | 0.73 | 1.25 |
| 1.60 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 5.80 | 1.36 | 0.89 | 0.82 | 1.38 |
| 1.70 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 6.47 | 1.58 | 0.96 | 0.93 | 1.51 |
| 1.80 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 7.22 | 1.83 | 1.02 | 1.04 | 1.64 |
| 1.90 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 8.06 | 2.12 | 1.09 | 1.18 | 1.78 |
| 2.00 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 9.00 | 2.46 | 1.15 | 1.32 | 1.92 |
| 1.00 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 3.00 | 5.90 | 1.36 | 1.36 | 2.77 |
| 1.10 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 3.35 | 7.04 | 1.44 | 1.50 | 3.01 |
| 1.20 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 3.74 | 8.41 | 1.52 | 1.65 | 3.28 |
| 1.30 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 4.17 | 10.05 | 1.59 | 1.83 | 3.55 |
| 1.40 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 4.66 | 12.01 | 1.66 | 2.03 | 3.85 |
| 1.50 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 5.20 | 14.36 | 1.72 | 2.26 | 4.15 |
| 1.60 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 5.80 | 17.18 | 1.78 | 2.51 | 4.48 |
| 1.70 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 6.47 | 20.56 | 1.83 | 2.80 | 4.82 |
| 1.80 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 7.22 | 24.62 | 1.88 | 3.13 | 5.19 |
| 1.90 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 8.06 | 29.48 | 1.93 | 3.49 | 5.58 |
| 2.00 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 9.00 | 35.33 | 1.97 | 3.90 | 5.99 |
| 1.00 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 3.00 | 26.02 | 1.92 | 1.92 | 6.19 |
| 1.10 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 3.35 | 32.37 | 1.98 | 2.12 | 6.77 |
| 1.20 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 3.74 | 40.31 | 2.04 | 2.35 | 7.40 |
| 1.30 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 4.17 | 50.24 | 2.09 | 2.61 | 8.08 |
| 1.40 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 4.66 | 62.68 | 2.14 | 2.90 | 8.81 |
| 1.50 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 5.20 | 78.26 | 2.18 | 3.23 | 9.60 |
| 1.60 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 5.80 | 97.80 | 2.22 | 3.59 | 10.45 |
| 1.70 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 6.47 | 122.34 | 2.26 | 4.01 | 11.37 |
| 1.80 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 7.22 | 153.17 | 2.30 | 4.47 | 12.36 |
| 1.90 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 8.06 | 191.95 | 2.33 | 4.99 | 13.44 |
| 2.00 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 9.00 | 240.76 | 2.36 | 5.57 | 14.59 |
| 1.00 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 3.00 | 206.64 | 2.29 | 2.29 | 15.92 |
| 1.10 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 3.35 | 276.32 | 2.34 | 2.54 | 17.74 |
| 1.20 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 3.74 | 369.97 | 2.38 | 2.82 | 19.73 |
| 1.30 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 4.17 | 495.99 | 2.41 | 3.14 | 21.94 |
| 1.40 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 4.66 | 665.73 | 2.45 | 3.50 | 24.38 |
| 1.50 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 5.20 | 894.60 | 2.48 | 3.89 | 27.07 |
| 1.60 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 5.80 | 1203.39 | 2.50 | 4.34 | 30.05 |
| 1.70 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 6.47 | 1620.49 | 2.53 | 4.84 | 33.34 |
| 1.80 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 7.22 | 2184.06 | 2.55 | 5.40 | 36.97 |
| 1.90 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 8.06 | 2946.38 | 2.57 | 6.03 | 40.99 |
| 2.00 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 9.00 | 3977.63 | 2.59 | 6.73 | 45.44 |

表15：设计4与Beta(5,5)

| $q$ | $k$ | $a$ | $\bar{z}$ | $\bar{x}$ | $t_h$ | $z_h$ | $x_h$ | $s_h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.00 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 3.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.10 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 3.35 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.20 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 3.74 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.30 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 4.17 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.40 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 4.66 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.50 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 5.20 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.60 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 5.80 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.70 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 6.47 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.80 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 7.22 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.90 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 8.06 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 2.00 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 9.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.00 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 3.00 | 1.51 | 0.76 | 0.76 | 1.21 |
| 1.10 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 3.35 | 1.79 | 0.84 | 0.83 | 1.34 |
| 1.20 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 3.74 | 2.20 | 0.94 | 0.93 | 1.50 |
| 1.30 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 4.17 | 2.85 | 1.05 | 1.07 | 1.71 |
| 1.40 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 4.66 | 3.82 | 1.17 | 1.25 | 1.98 |
| 1.50 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 5.20 | 5.25 | 1.30 | 1.48 | 2.29 |
| 1.60 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 5.80 | 7.24 | 1.42 | 1.76 | 2.65 |
| 1.70 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 6.47 | 9.87 | 1.54 | 2.08 | 3.03 |
| 1.80 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 7.22 | 13.24 | 1.64 | 2.44 | 3.43 |
| 1.90 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 8.06 | 17.48 | 1.73 | 2.84 | 3.86 |
| 2.00 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 9.00 | 22.74 | 1.81 | 3.29 | 4.30 |
| 1.00 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 3.00 | 13.56 | 1.64 | 1.64 | 4.06 |
| 1.10 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 3.35 | 18.87 | 1.76 | 1.87 | 4.69 |
| 1.20 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 3.74 | 25.78 | 1.87 | 2.12 | 5.36 |
| 1.30 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 4.17 | 34.68 | 1.96 | 2.39 | 6.06 |
| 1.40 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 4.66 | 46.10 | 2.03 | 2.70 | 6.80 |
| 1.50 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 5.20 | 60.70 | 2.10 | 3.05 | 7.60 |
| 1.60 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 5.80 | 79.34 | 2.16 | 3.43 | 8.44 |
| 1.70 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 6.47 | 103.09 | 2.22 | 3.87 | 9.34 |
| 1.80 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 7.22 | 133.36 | 2.26 | 4.35 | 10.31 |
| 1.90 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 8.06 | 171.88 | 2.31 | 4.89 | 11.35 |
| 2.00 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 9.00 | 220.90 | 2.34 | 5.50 | 12.46 |
| 1.00 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 3.00 | 169.09 | 2.24 | 2.24 | 12.95 |
| 1.10 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 3.35 | 235.88 | 2.30 | 2.50 | 14.70 |
| 1.20 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 3.74 | 327.14 | 2.35 | 2.79 | 16.62 |
| 1.30 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 4.17 | 451.61 | 2.40 | 3.11 | 18.73 |
| 1.40 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 4.66 | 621.34 | 2.44 | 3.48 | 21.06 |
| 1.50 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 5.20 | 852.53 | 2.47 | 3.89 | 23.62 |
| 1.60 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 5.80 | 1167.55 | 2.50 | 4.34 | 26.45 |
| 1.70 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 6.47 | 1596.11 | 2.53 | 4.86 | 29.57 |
| 1.80 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 7.22 | 2179.49 | 2.56 | 5.43 | 33.02 |
| 1.90 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 8.06 | 2972.88 | 2.58 | 6.07 | 36.83 |
| 2.00 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 9.00 | 4052.01 | 2.61 | 6.79 | 41.04 |

表16：采用贝塔分布(3,5)的设计4

| $q$ | $k$ | $a$ | $\bar{z}$ | $\bar{x}$ | $t_h$ | $z_h$ | $x_h$ | $s_h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.00 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 3.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.10 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 3.35 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.20 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 3.74 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.30 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 4.17 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.40 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 4.66 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.50 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 5.20 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.60 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 5.80 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.70 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 6.47 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.80 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 7.22 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.90 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 8.06 | 0.33 | 0.59 | 0.36 | 0.58 |
| 2.00 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 9.00 | 0.63 | 0.80 | 0.64 | 0.87 |
| 1.00 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 3.00 | 2.37 | 1.01 | 1.01 | 1.49 |
| 1.10 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 3.35 | 3.29 | 1.16 | 1.17 | 1.77 |
| 1.20 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 3.74 | 4.50 | 1.29 | 1.36 | 2.06 |
| 1.30 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 4.17 | 6.03 | 1.42 | 1.57 | 2.37 |
| 1.40 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 4.66 | 7.93 | 1.52 | 1.80 | 2.70 |
| 1.50 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 5.20 | 10.27 | 1.62 | 2.07 | 3.03 |
| 1.60 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 5.80 | 13.15 | 1.71 | 2.36 | 3.37 |
| 1.70 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 6.47 | 16.65 | 1.79 | 2.68 | 3.73 |
| 1.80 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 7.22 | 20.92 | 1.86 | 3.04 | 4.11 |
| 1.90 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 8.06 | 26.12 | 1.92 | 3.45 | 4.50 |
| 2.00 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 9.00 | 32.45 | 1.98 | 3.90 | 4.92 |
| 1.00 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 3.00 | 19.65 | 1.84 | 1.84 | 4.73 |
| 1.10 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 3.35 | 25.90 | 1.93 | 2.06 | 5.33 |
| 1.20 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 3.74 | 33.83 | 2.00 | 2.30 | 5.96 |
| 1.30 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 4.17 | 43.89 | 2.07 | 2.58 | 6.63 |
| 1.40 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 4.66 | 56.64 | 2.13 | 2.89 | 7.36 |
| 1.50 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 5.20 | 72.78 | 2.19 | 3.23 | 8.13 |
| 1.60 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 5.80 | 93.22 | 2.24 | 3.62 | 8.95 |
| 1.70 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 6.47 | 119.11 | 2.28 | 4.06 | 9.84 |
| 1.80 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 7.22 | 151.89 | 2.32 | 4.54 | 10.80 |
| 1.90 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 8.06 | 193.38 | 2.36 | 5.09 | 11.83 |
| 2.00 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 9.00 | 245.96 | 2.39 | 5.70 | 12.93 |
| 1.00 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 3.00 | 193.76 | 2.30 | 2.30 | 13.59 |
| 1.10 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 3.35 | 265.69 | 2.35 | 2.56 | 15.32 |
| 1.20 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 3.74 | 363.34 | 2.39 | 2.85 | 17.23 |
| 1.30 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 4.17 | 495.79 | 2.43 | 3.17 | 19.33 |
| 1.40 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 4.66 | 675.43 | 2.47 | 3.54 | 21.65 |
| 1.50 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 5.20 | 918.77 | 2.50 | 3.95 | 24.21 |
| 1.60 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 5.80 | 1249.77 | 2.53 | 4.41 | 27.04 |
| 1.70 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 6.47 | 1697.94 | 2.55 | 4.93 | 30.16 |
| 1.80 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 7.22 | 2306.10 | 2.58 | 5.50 | 33.61 |
| 1.90 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 8.06 | 3130.75 | 2.60 | 6.15 | 37.43 |
| 2.00 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 9.00 | 4249.73 | 2.62 | 6.87 | 41.65 |

表17：采用贝塔分布(5,3)的设计4

| $q$ | $k$ | $a$ | $\bar{z}$ | $\bar{x}$ | $t_h$ | $z_h$ | $x_h$ | $s_h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.00 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 3.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.10 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 3.35 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.20 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 3.74 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.30 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 4.17 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.40 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 4.66 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.50 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 5.20 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.60 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 5.80 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.70 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 6.47 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.80 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 7.22 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.90 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 8.06 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 2.00 | 1.00 | 0.00 | 3.00 | 9.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.00 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 3.00 | 2.39 | 0.88 | 0.88 | 1.65 |
| 1.10 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 3.35 | 2.72 | 0.95 | 0.95 | 1.78 |
| 1.20 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 3.74 | 3.17 | 1.03 | 1.03 | 1.93 |
| 1.30 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 4.17 | 3.76 | 1.11 | 1.14 | 2.11 |
| 1.40 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 4.66 | 4.55 | 1.19 | 1.28 | 2.32 |
| 1.50 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 5.20 | 5.62 | 1.28 | 1.45 | 2.57 |
| 1.60 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 5.80 | 7.05 | 1.37 | 1.65 | 2.85 |
| 1.70 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 6.47 | 8.94 | 1.46 | 1.90 | 3.16 |
| 1.80 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 7.22 | 11.42 | 1.54 | 2.19 | 3.50 |
| 1.90 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 8.06 | 14.63 | 1.63 | 2.52 | 3.88 |
| 2.00 | 1.00 | 0.30 | 3.00 | 9.00 | 18.72 | 1.71 | 2.91 | 4.29 |
| 1.00 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 3.00 | 13.47 | 1.60 | 1.60 | 4.35 |
| 1.10 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 3.35 | 17.90 | 1.70 | 1.79 | 4.91 |
| 1.20 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 3.74 | 23.80 | 1.80 | 2.02 | 5.54 |
| 1.30 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 4.17 | 31.56 | 1.89 | 2.28 | 6.21 |
| 1.40 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 4.66 | 41.64 | 1.97 | 2.58 | 6.94 |
| 1.50 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 5.20 | 54.67 | 2.04 | 2.91 | 7.72 |
| 1.60 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 5.80 | 71.44 | 2.10 | 3.28 | 8.57 |
| 1.70 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 6.47 | 92.95 | 2.16 | 3.70 | 9.47 |
| 1.80 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 7.22 | 120.49 | 2.21 | 4.17 | 10.44 |
| 1.90 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 8.06 | 155.69 | 2.26 | 4.70 | 11.49 |
| 2.00 | 1.00 | 0.60 | 3.00 | 9.00 | 200.64 | 2.30 | 5.29 | 12.61 |
| 1.00 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 3.00 | 156.12 | 2.19 | 2.19 | 13.24 |
| 1.10 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 3.35 | 217.95 | 2.26 | 2.45 | 15.00 |
| 1.20 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 3.74 | 302.74 | 2.31 | 2.73 | 16.94 |
| 1.30 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 4.17 | 418.87 | 2.36 | 3.05 | 19.08 |
| 1.40 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 4.66 | 577.62 | 2.40 | 3.41 | 21.43 |
| 1.50 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 5.20 | 794.56 | 2.44 | 3.82 | 24.03 |
| 1.60 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 5.80 | 1090.60 | 2.48 | 4.27 | 26.89 |
| 1.70 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 6.47 | 1494.52 | 2.51 | 4.78 | 30.05 |
| 1.80 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 7.22 | 2045.24 | 2.54 | 5.34 | 33.54 |
| 1.90 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 8.06 | 2795.97 | 2.56 | 5.98 | 37.40 |
| 2.00 | 1.00 | 0.90 | 3.00 | 9.00 | 3819.16 | 2.59 | 6.69 | 41.66 |