arXiv:2303.09439v1 [math.RT] 16 Mar 2023

关于幂零李代数上同调的一点注记

Grigory Papayanov

摘要 我们证明，余幂零李余代数的上同调代数作为一个 A_∞-代数由次数 1 的元素生成。对偶化后，有限维幂零李代数的上同调也具有同样性质。在此过程中，我们给出了对偶庞加莱-伯克霍夫-维特定理的余幂零版本的证明。

1 引言

本文源于计算自由幂零李代数的上同调的愿望$L^{\leq n}(V) := L(V)/L^{>n}(V)$。这里， V是一个向量空间， $L(V)$是由 V生成的自由李代数，并按对易子长度自然分次： $L(V) = \oplus_{n\geq 1} L^n(V)$；而 $L^{\leq n}(V)$和$L^{>n}(V)$分别是与此分次相关的商代数和理想。由于自由幂零李代数是一个非常自然的对象，其上同调似乎也应当是一个非常自然的对象，因此，对其结构的任何理解都可能颇有价值。事实上，即便在最简单的非平凡情形下，Józefiak-Weyman（[6]）和 Sigg（[18]）所作的表示 $H(L^{\leq 2}(\mathbb{R}^m))$的 $GL(\mathbb{R}^m)$-特征计算，也给出了著名 Littlewood恒等式的一种范畴化：

$$\prod_{i=1}^{m}(1-x_i)\prod_{1\leq i<j\leq m}(1-x_ix_j)=\sum_{\lambda}(-1)^{\frac{1}{2}(|\lambda|+r(\lambda))}s_\lambda(x).$$

这里，右侧部分的和是所有自共轭杨图对应的舒尔多项式之和。 $|\lambda|$ 表示图中的方格总数， r（λ）表示对角方格的数量。

因此，了解更高幂零次数的自由幂零李代数的上同调，或许能为其他数学问题带来一些启发——至少，它将成为对称函数新恒等式的来源。不过，目前只有一些部分结果，且大多是通过直接计算得到的，参见例如 [20]。

通常，额外结构的存在有助于缩小计算范围，从而简化计算。在上同调计算中，这样一种额外结构就是乘法。此外，上同调上的乘法属于一种更丰富的结构——C_∞ 结构（[8]），它由一系列多线性运算组成，并以某种方式细化马西积。对于半单 $\mathfrak{g}$，代数 $H(\mathfrak{g})$关于 $\mathfrak{g}$ 本身所提供的信息很少——它只是由一些可从Dynkin图中读出的生成元生成的外代数。在这种情况下，不存在非平凡的 C_∞结构。幂零代数

则恰恰相反：知道 C_∞结构，就能据此重构原李代数，且在同构意义下唯一。利用 Sigg、Dubois-Violette和Popov的计算， [4] 证明，作为 C_∞代数，上同调代数 $H(L^{\leq 2}(V))$由 H^1 生成，且只有 m_2 和 m_3 运算。

由于自由幂零李代数有如此简洁的描述（四个词！），且它们的上同调代数与之密切相关，人们不禁会想，也许 C_∞-代数 $H(L^{\leq n}(V))$ 也有简短的描述。由本文的结果可知，作为一个 C_∞-代数，它由其次数为 1 的分量生成。然而，关于其关系，我们所知甚少。计算 H^2 并不难——事实上，正合列

$$0 \longrightarrow L^{n+1}(V) \longrightarrow L^{\leq n+1}(V) \longrightarrow L^{\leq n}(V) \longrightarrow 0$$

是 $L^{\leq n}(V)$ 的泛中心扩张，因此 $H^2(L^{\leq n}(V)) = (L^{n+1}(V))^\vee$。$C_\infty$-运算 m_i：$H^1 = L^i(V^\vee) \longrightarrow (L^{n+1}(V))^\vee$ 在 $i \neq n+1$ 时为零，在 $i = n+1$ 时则是自然同构。然而，高次数时的情形仍不明朗。若想了解尝试用生成元和关系生成无穷代数时会遇到哪些复杂情况，读者可参阅 [9]。

从积极的一面来看，关于 1-生成性的结果并非自由幂零李代数所独有：本文的结果表明，对于任意有限维幂零李代数 $\mathfrak{g}$，上同调代数$H(\mathfrak{g})$ 都是由 $H^1(\mathfrak{g})$ 生成的 C_∞-生成代数。由此还可得，对于有限维幂零李代数的逆极限，其连续上同调的 C_∞-代数 $H_c(\mathfrak{g})$ 由 H^1 生成。这一结果可能为该领域的一些专家所知（尤其是在 $\mathfrak{g}$ 存在正分次的情况下——幂零 $\mathfrak{g}$ 的一般情形似乎鲜为人知）。然而，时不时就会有包含部分结果的论文发表（例如， [12] 讨论了 Witt代数的情形），因此或许有必要发表一篇阐述 1-生成性结果的论文。

我们证明的是余幂零李余代数的结果，而非幂零李代数的结果，因为这种证明方式更自然，也更容易理解。首先，从代数转向余代数这一步，消除了必须具有正分次的要求。其次，这样一来，我们完全不必提及余条构造，而且数学家似乎普遍对条构造更为熟悉。尽管我们的证明只是一般余条-条对偶的一个应用（我们也为一对一般的 Koszul 歌剧表述了一个定理），但我们希望论文基本上能够自成一体——加入关于运算子 Koszul 对偶的讨论，大概会使篇幅增加一倍。这也是我们采用 A_∞-代数而非

非 C_∞-代数的原因：前一种代数为更多数学家所熟悉，而后一种有时会被视为较为陌生。作为我们选择这种方法的附带结果，我们得到了一个证明，说明余幂零李代数的余幂零余包络余代数满足庞加莱-伯克霍夫-维特定理的类似结论。我们并不声称这一证明具有原创性，因为它只是 Positselski 对 PBW 定理的证明（[14]）的对偶化。不过，Positselski 给出的证明具有很强的一般性——适用于 Koszul 代数的非齐次二次变形——因此，以传统表述形式呈现这一证明或许对某些人有所帮助。

我们的证明仅适用于零特征域。特征只在计算 $\mathrm{Ext}^{\Lambda(V)}(\Bbbk,\Bbbk)$时才会涉及，但这一计算对证明至关重要。对 $\mathbb{Z}$上的自由幂零李代数的上同调感兴趣的读者，可能会觉得 [17] 有用。

致谢：作者感谢 Kostya Tolmachov、Sasha Viktorova 和 Sasha Zakharov 对这项工作的关注以及提出的宝贵意见。作者尤其要感谢 Volodya Dotsenko 告知他这一结果值得记录下来。本文是在访问魏茨曼科学研究所期间完成的。我非常感谢该研究所的热情接待。

2 李余代数

定义 2.1：域 $\Bbbk$ 上的李余代数是一个向量空间 L，并配备余乘法运算 Δ：$L \longrightarrow L \otimes L$，满足反对称余交换性和余雅可比关系。反对称余交换性关系意味着 Δ 的像包含于反对称张量子空间 $\Lambda^2 L \subset L \otimes L$ 中。余雅可比关系可以表述如下：设 ξ 是 $L \otimes L \otimes L$上的循环置换运算。那么余雅可比关系说明，以下映射 $L \longrightarrow L \otimes L \otimes L$

$$(\mathrm{Id} + \xi + \xi^2) \circ (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta \tag{1}$$

必须为零。

注 2.2：李余代数 L 的对偶空间 $L^\vee$ 是一个李代数；反过来，原样照搬并不成立，但若将空间 $L^\vee$ 视为带有其自然吉洪诺夫拓扑的拓扑向量空间，则结论成立。与离散向量空间对偶的拓扑向量空间恰好是线性紧空间（参见例如 [3]）；而线性紧向量空间 W 上连续线性泛函构成的空间 $W^\vee$，恰好是以 W 为其对偶的向量空间。因此，李余代数范畴与线性紧李代数范畴反等价。

定义 2.3：李余代数 L 的 Chevalley-Eilenberg 代数 $C(L)$ 是外代数 ΛL，带有分次 $C^k(L) := \Lambda^k L$ 和微分 δ；该微分在生成元空间 L 上等于 Δ。它自然地通过投影到零次分量而成为增广代数。

注 2.4：要从 $L^\vee$ 得到 $C(L)$，必须取 $L^\vee$ 上的连续多线性泛函空间。

例如，$[11]$，中的计算表明 δ^2 为零，因此 $C(L)$ 是一个微分分次代数。

定义 2.5：若余代数 L 的对偶拓扑李代数是有限维幂零李代数的射影极限，则称其为滤过的或余幂零的。换言之，这意味着存在一个由子空间 F_*L 构成的递增上升穷尽滤过，使得 $F_0L = 0$，并且 $\Delta(F_i)$ 包含于 $\sum_{p+q=i} F_p \otimes F_q \subset L \otimes L$。

注 2.6：前述定义也可用于其他类型的余代数，不一定是李余代数。不过请注意，在余增广情形下，可以要求 F_0L 等于余增广的像。本文中，所有余代数都不要求具有余单位或余增广。

余幂零李余代数 L 的张量幂继承了滤过，因此其切瓦利-埃伦伯格代数 $C = C(L)$ 也赋有一个上升穷尽滤过，使得 $F_0C = \Bbbk = C^0$。切瓦利 - 埃伦伯格微分保持此滤过。

对于线性紧李代数 $\mathfrak{g}$，我们将其拓扑泛包络结合代数记为 $U\mathfrak{g}$。它是由 $\mathfrak{g}$ 生成的自由代数（在 $\mathfrak{g}$ 拓扑和张量次数拓扑下均完备化）对由形如 $xy - yx = [x, y]$ 的元素生成的理想之闭包取商所得。这个代数自然带有增广。我们将其增广理想记为 I。

定义 2.7：设 L 是一个李余代数，并令 $\mathfrak{g} := L^\vee$ 为相应的线性紧李代数。考虑余结合余代数

$$UL := \operatorname{colim}_k (U\mathfrak{g}/I^k)^\vee. \tag{2}$$

这个余代数称为 L的余幂零余包络余代数。

与代数的情形相反，存在一些李余代数，其余幂零余包络余代数是平凡的。例如，可以取任意半单李代数的对偶李余代数。不过，对于余幂零李余代数，庞加莱-伯克霍夫-维特定理有一个完全对应的版本。 [2]的附录中给出了该定理的一种证明。我们将给出另一种证明，它基本上与 Positselski（[14]）所给出的通常 PBW 定理的证明相同。

3 A∞代数

定义 3.1：设 A 是一个结合微分分次代数，不一定含幺。它的巴构造是一个余结合微分分次余代数 BA ；作为余代数，它是由 $A[1]$ 生成的张量余代数，其余微分是张量余代数上唯一的余导子，该余导子到 $A[1]$ 的余限制由 A 中的微分和乘法给出。忽略符号，我们有

$$d_{\mathrm{B}}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum \pm a_1 \otimes \ldots da_k \cdots \otimes a_n + \sum \pm a_1 \otimes \ldots a_i a_{i+1} \cdots \otimes a_n. \quad (3)$$

$d_{\mathrm{B}} = 0$ 的条件正是结合微分分次代数的定义方程：乘法满足结合律，微分的平方为零，且满足莱布尼茨法则。巴构造自然地（而且唯一地）通过零次张量的包含映射获得余增广。态射 $f\colon A \longrightarrow B$ 诱导一个微分分次余代数的映射，我们仍用同一字母 f 表示该映射：B$A \longrightarrow$ BB。此映射保持巴构造的余增广。

定义 3.2：A∞代数 A是一个分次向量空间，配备了由 $A[1]$ 生成的张量余代数上的平方为零的余导子 $d_{\mathrm{B}}A$ ，且该余导子保持其唯一的余增广。我们也将所得的微分分次余代数记为 BA 。两个 A_∞代数 A 和 B 之间的态射，按定义是微分分次余代数 B$A \longrightarrow$ BB 之间的态射。它会自动保持余增广。

由张量余代数的泛性质可知，余微分 d_{B} 由其到 $A[1]$ 的余限制确定，也就是说，由一族映射确定

$$m_i : A[1]^{\otimes i} \longrightarrow A[2], \quad (4)$$

满足与 $d_{\mathrm{B}}^2 = 0$ 相对应的一组二次方程，而一个 A_∞-态射 $f\colon$ B$A \longrightarrow$ BB 由一组映射确定

$$f_i : A[1]^{\otimes i} \longrightarrow B[1], \tag{5}$$

满足一组与 $d_{\mathrm{B}B} f = f d_{\mathrm{B}A}$. 相对应的二次方程。显然，微分分次代数恰好是满足 $m_i = 0$ for $i \neq 1,2$ 的那些 A_∞-代数。然而， A_∞-态射的概念比微分分次代数态射的概念更一般，但两个代数都集中在单一次数 $\neq 1$时除外。我们将把集合 $\{m_i\}$ 和 $\{f_i\}$ 称为由它们定义的对象的泰勒分量。

注意，对于微分分次代数 A ，巴构造 $\mathrm{B}A$ 是一个过滤余代数。滤过由下式给出

$$F_i \mathrm{B}A := \bigoplus_{k=0}^{i} (A[1])^{\otimes k}. \tag{6}$$

如果一个 A_∞-代数 A 由泰勒分量 $(m_1, m_2, \ldots)$ 确定，那么 $\mathrm{gr}_F \mathrm{B}A$ 是 $\oplus_i A[1]^{\otimes i}$ ，其微分为 m_1。特别地， $m_1^2 = 0$，并且它在 A 上定义了一个复形结构。

注意，如果 $f \colon \mathrm{B}A \longrightarrow \mathrm{B}B$ 是一个 A_∞-态射，那么它自动保持这个滤过。如果 f 的泰勒分量为 $(f_1, f_2, \ldots)$，那么 $\mathrm{gr}_F f = f_1$。特别地， $f_1 m_{A,\ 1} = m_{B,\ 1} f_1$。

定义 3.3：如果一个 A_∞-态射 $f \colon \mathrm{B}A \longrightarrow \mathrm{B}B$ 是微分分次余代数之间的过滤拟同构，即 $\mathrm{gr}_F f$ 是一个拟同构，则称其为拟同构。等价地，由于域上的张量积是正合的， f_1 是一个拟同构。

注 3.4：由此可知，若 f 是一个 A_∞-拟同构，则 f 是微分分次余代数之间的拟同构。事实上，由五引理可知，对于任意 k， $f|_{F_k}$ 都是一个拟同构。由于 $\mathrm{B} = \mathrm{colim}_k F_k \mathrm{B}$，结论由直极限的正合性得出。

A_∞-代数的用途可由以下定理说明，该定理通常归功于 Kadeishvili：

定义 3.5：若 $\mathrm{gr}_F \mathrm{B}A$ 的微分为零，则称 A_∞-代数 A 为极小。

定理 3.6：设 $(A, m_1, m_2, \ldots)$ 是一个 A_∞ 代数。设 H 是微分 m_1的上同调。那么 H 具有极小 A_∞-代数结构，并且此结构与 A之间存在一个 A_∞拟同构。此外， H 上的结构在相差一个 A_∞同构的意义下是唯一的。

注 3.7：在 Kadeishvili 之前，有理同伦论学者就已研究过这类定理：例如，参见 [19, 定理 2.2]。然而，Kadeishvili 的实际结果（[7]）比上述定理更一般：例如，他不要求基环是域，只要求 H 是投射模。相关讨论见 [13]。

4 1-生成

设 $(A, m_2, m_3, \dots)$ 是一个极小的 A_∞-代数。我们关注其巴复形 $H(\mathrm{B}A)$ 的上同调。由于 $\mathrm{B}A$ 是一个按张量过滤滤过的复形，其上同调$H(\mathrm{B}A)$ 继承了该滤过。也就是说，$F^k H(\mathrm{B}A)$ 中的类可以由位于 $F^k\mathrm{B}A$ 中的上循环表示。

定义 4.1：如果一个极小的 A_∞-代数 A 是正分次的，且对于 $j \geq 1$， $F^1 H^j(\mathrm{B}A) = 0$，则称其为 1-生成的。

注 4.2：请注意，这一概念是良定义的，因为它在A_∞-自同构下保持不变。事实上， A_∞ 的一个自同构定义了微分分次余代数 $\mathrm{B}A$ 的一个滤过自同构。

下面的引理将一个关于分次代数 1-生成性的著名判据推广到了 A_∞ 情形，参见例如 [15]

引理 4.3：正分次的 A_∞ 代数 A 是 1-生成的，当且仅当任意元素$x \in A^k$ 都可以表示为将形如 $\mathrm{Id}^{\otimes i} \otimes m_j \otimes \mathrm{Id}^{\otimes k}$ 的映射作用于 $A^{\otimes n}$中的元素后所得结果的迭代复合的线性组合。

注 4.4：这等价于映射 $FREE(A^1) \longrightarrow A$ 是满射这一事实，其中 $FREE$是自由极小 A_∞-代数的函子（该函子存在，因为极小 A_∞-代数是某个运算子上的代数，参见例如 [10]）。这一性质在 A_∞-同构下保持不变，这一点不如 1-生成性的前一个定义那么显然。

证明：首先回忆，空间 $F^1 H^k(\mathrm{B}A)$ 是 $H^k(\mathrm{B}A)$ 的子空间，它可以由 $F^1(\mathrm{B}A) = A[1] \subset \mathrm{B}(A)$ 中的类表示。由于 A 是极小的，子空间 $A[1]$ 由闭元素构成，因此 $F^1 H^k(\mathrm{B}A)$ 是 A^{k-1} 对 $d_{\mathrm{B}A}$ 的像取商所得。现在我们可以通过归纳证明这两个定义等价。注意，$\mathrm{Im}\, d_{\mathrm{B}A} \cap A^2$ 由箭头 $(A^1)^{\otimes i} \longrightarrow A^2$ 的像张成，而这些像除符号外与运算 m_i 一致。因此，当且仅当 $F^1 H^1(\mathrm{B}A) = 0$ 时， A^2 可由 m_i's 通过 A^1 生成。接下来，假设我们已经证明了所有 A^k 的情形，其中 $k < n$ 对某个

n。那么，空间 Im $d_{\mathrm{B}A} \cap A^n$ 由 m_i's 作用于子空间 $\otimes_{j=2}^{i} A^{p_j}$ 所得的像张成，其中 $\sum p_j = n-i+2$。同样，出于次数方面的原因，所有 p_j's 都小于 n，而 $A^n/\operatorname{Im} d_{\mathrm{B}A}$ 的消失等价于这样的事实： A^n 中的元素可以通过运算 m_i ，经由次数更小的元素表示；因此，根据归纳基，它们可以通过 A^1 中的元素表示。

5 余幂零 PBW 定理

PBW 定理将由以下对余幂零李余代数 L 的 Chevalley-Eilenberg 代数的巴构造的计算得出。记 $C^{>0}(L)$ 为 $C(L)$ 关于余增广映射 $\Bbbk \longrightarrow C(L)$ 的商。

引理 5.1：对于余幂零李余代数 L，$\mathrm{B}C^{>0}(L)$ 的上同调在正次数上消失。余代数 $H^0(\mathrm{B}C^{>0}(L))$ 同构于 $U(L)$，即 L 的余幂零余包络余代数。

证明：在 $\mathrm{B}C^{>0}(L)$ 上有两个自然定义的滤过。 $C^{>0}(L)$ 上由 $G^k = \oplus_{i\geq k} C^i(L)$ 给出的“平凡”滤过延拓为 $\mathrm{B}C^{>0}(L)$ 上的滤过，我们记作 G。由 L 上的余幂零滤过所诱导的滤过记作 N。滤过 G 是下降且非完备的，滤过 N 是上升且穷尽的。

考虑复形 $\mathrm{gr}_N \mathrm{B}C^{>0}(L)$。滤过 G 在其上诱导出一个滤过，我们仍记作 G。一个重要事实是， G 在每个 N_i/N_{i-1}上都是有限的。现在考虑复形 $\mathrm{gr}_G \mathrm{gr}_N \mathrm{B}C_{>0}(L)$。我们想证明它的高阶上同调消失。由 F 的有限性和 N 的穷尽性可知，$\mathrm{B}C^{>0}(L)$的高阶上同调也将消失。

注意，双重伴随分次 $\mathrm{gr}_G \mathrm{gr}_N \mathrm{B}C^{>0}(L)$不依赖于 L 上的余括号，而仅取决于底层向量空间。事实上，$\mathrm{B}C^{>0}(L)$自然地构成一个双复形，即 $\mathrm{B}C^{>0}(L) = \oplus_{i,\ j\geq 0} B^{i,\ j}$，其中

$$B^{i,j} = \bigoplus_{n_1+\cdots+n_j=i, n_k>0} C^{n_1} \otimes \cdots \otimes C^{n_j}. \tag{7}$$

因此，一种分次，我们称之为水平分次，只是计算张量因子的数量；另一种分次，我们称之为竖直分次，来自 $C^{>0}(L)$ 上的分次。总分次是两者之差：$(\mathrm{B}C^{>0}(L))^n = \oplus_{i-j=n} B^{i,\ j}$。(3) 中的微分分解为竖直微分与水平微分之和。其中

竖直微分取决于 L 中的余括号，而水平微分只取决于外代数中的乘法。

现在注意，从 $\mathrm{B}C^{>0}(L)$ 转到 $\mathrm{gr}_N\mathrm{B}C^{>0}(L)$ 的运算不会改变水平微分，只会改变垂直微分。接着取 gr_G 的运算也不会改变水平微分，并会消去垂直微分。此外，复形 $\mathrm{gr}_G\,\mathrm{gr}_N\,\mathrm{B}C^{>0}(L)$ 可识别为 $\mathrm{gr}_G\,\mathrm{B}C^{>0}(L)$，后者正是外余代数的条构造。其上同调为 $\mathrm{Tor}^{C(L)}(\Bbbk,\Bbbk)$，接下来可通过 Koszul 分辨 [16] 计算。计算表明，其上同调集中在总次数零，并且同构于 L 的对称余代数。

零次上同调 $H^0(\mathrm{B}C^{>0}(L))$ 可以直接计算。$\mathrm{B}C^{>0}(L)$ 的零链空间是由 $C_1(L) = L$ 生成的张量余代数，也就是直和 $\oplus_{i\geq 0}L^{\otimes i}$。一链空间为 $\oplus_{i,\ j\geq 0}L^{\otimes i}\otimes\Lambda^2 L\otimes L^{\otimes j}$。根据张量余代数的泛性质，微分完全由其到 $\Lambda^2 L\subset(\mathrm{B}C^{>0}(L))^1$ 的余限制确定。该余限制是两个映射 $d_1\colon\ L\longrightarrow\Lambda^2 L$ 和 $d_2\colon\ L\otimes L\longrightarrow\Lambda^2 L$ 之差，其中第一个是 L 中的余括号，第二个是交错映射。

为了让一切更容易理解，最好考虑对偶空间，尤其是因为我们将余幂零余包络余代数定义为在增广理想中完备化后的通常包络代数的拓扑对偶。若 $\mathfrak{g}:=L^\vee$，那么余代数 $H^0(\mathrm{B}C^{>0}(L))$ 与代数 $\prod_i\mathfrak{g}^{\otimes i}$ 除以由形如 $x\otimes y-y\otimes x-[x,y]$ 的元素生成的拓扑理想所得的商代数对偶；也就是说，它就是通常的（完备）泛包络代数。定理得证。

注 5.2：Positselski 对通常的 PBW 定理的证明使用了李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Chevalley-Eilenberg 余代数 $C_*(\mathfrak{g})$。为方便读者，我们在此给出该证明，因为 [14] 中的证明讨论的是更一般的情形。证明如下。首先，考虑余增广版本的余条构造 $\Omega C_*(\mathfrak{g})$。它是一个微分分次代数；正如我们刚才所见，其零次上同调同构于通常的（未完备化的）泛包络代数 $U\mathfrak{g}$。考虑 $\Omega C_*(\mathfrak{g})$ 上由 $C_*(\mathfrak{g})$ 上的“朴素”滤过诱导的滤过，该滤过定义为 $G_iC_*(\mathfrak{g}):=\oplus_{k=-i}^{0}C_k(\mathfrak{g})$。这是 $\Omega C_*(\mathfrak{g})$ 上的正上升穷尽滤过，其伴随分次可识别为 $\Omega C_*(V)$；其中 V 是一个与 $\mathfrak{g}$ 作为向量空间同构的阿贝尔李代数。在此情形下，$C_*(V)$ 只是一个没有微分的外余代数。由于对一个没有微分的余代数C进行余条构造，可以计算 $\mathrm{Ext}_C(\Bbbk,\Bbbk)$，即从平凡 C-余模到其自身的 Ext 代数，因此，上同调代数 $H(\Omega C_*(V))$ 是次数为零的对称代数 $\mathrm{Sym}(V)$，在更高次数上为零；这可由同一个 Koszul 分辨看出。由于滤过 G 是穷尽的，伴随谱序列收敛；此外，基于维数的理由，它在第一页就退化。因此可得

$$\operatorname{gr}_F H^0(\Omega C_*(\mathfrak{g})) = \operatorname{gr}_F U\mathfrak{g} = H^0(\operatorname{gr}_F \Omega C_*(\mathfrak{g})) = \operatorname{Sym} \mathfrak{g}. \tag{8}$$

这就是经典 PBW 定理的陈述。李代数与李余代数的区别在于：由 Chevalley-Eilenberg 余代数上的“朴素”滤过诱导的余条构造上的滤过是上升且穷尽的（换言之，是余完备的），而 Chevalley-Eilenberg 代数的条构造上的相应滤过则是下降且不完备的。为了可靠地从伴随分次复形过渡到原复形，在李余代数的情形下需要额外的滤过，而这由余幂零条件提供。

定理 5.3：设 L 是一个余幂零李余代数。设 $H(L)$ 是一个与 $C(L)$ 拟同构的极小 A_∞-代数。那么 H 是 1-生成的。

证明： $F^1H^{\geq 1}(\mathrm{B}H(L))$ 的消失是显然的，因为它是 $H^{\geq 1}(\mathrm{B}H(L))$ 的子空间；根据注 3.4，后者同构于 $H^{\geq 1}(\mathrm{B}C(L))$，而由引理 5.1 可知该空间为零。

6 C-无穷代数

若 A 是交换微分分次代数，则 $\mathrm{B}A$ 不仅是微分分次余代数，也是微分分次双代数：条微分满足洗牌乘法 $\bullet$ ： $\mathrm{B}A \otimes \mathrm{B}A \longrightarrow \mathrm{B}A$ 的导子法则。若 I 是 $\mathrm{B}A$ 的增广理想，则不可分解元复形 $I/I \bullet I$ 具有微分分次李余代数结构。这个微分分次李余代数称为 A 的 Harrison 复形，记作 $\mathrm{T}A$。根据对偶 Milnor-Moore 定理（见 [1]），微分分次双代数 $\mathrm{B}A$ 是 $\mathrm{T}A$ 的余幂零余包络余代数。

注 6.1：对偶 Milnor-Moore 定理的一个重要推论是，在零特征下，$\mathrm{T}A$ 是 $\mathrm{B}A$ 的直和项。特别地，嵌入 $\mathrm{T}A \longrightarrow \mathrm{B}A$ 在上同调上诱导单射。

定义 6.2：若 $\mathrm{B}A$ 上的余导子 δ 与洗牌乘积 $\bullet$相容，则称 A_∞-代数 A 为 C-无穷代数。另一种说法是， C_∞-代数是一个分次向量空间 A，并赋有由 $A[1]$ 生成的自由李余代数上的平方为零的余导子C_∞。两个 A_∞-代数之间的 A_∞-态射，是一种额外保持洗牌乘法的 A_∞-态射。另一种说法是，它是相应 Harrison 微分分次李余代数之间的态射。

若 C_∞-代数在作为 A_∞-代数时是极小的，则称其为极小代数。A_∞-代数的极小模型具有 C_∞-结构，并且 C_∞-代数与其极小模型之间的 A_∞-拟同构可以选为 C_∞-拟同构。参见例如 [5]。

引理 5.1 的证明稍作调整后表明，对于余幂零李余代数 C，TC(L) 的上同调在正次数上消失，并且在零次时同构于 C。当然，这只是一个更一般事实；为简洁起见，我们仅在此陈述，其证明与第 5 节中的证明大体相似。关于定义，请参阅 [10]。

定理 6.3：设 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 是一对 Koszul 对偶算子。设 C 是 $\mathcal{P}$ 上的余幂零余代数。那么，其 Koszul 对偶 $\mathcal{Q}$-代数 $\Omega_{\mathcal{P}}C$ 的极小模型是 1-生成的。

参考文献

[1] M. Barr，《Harrison 同调、Hochschild 同调与三元组》，代数杂志 8，314-323（1968）。[2] L. Alexander Betts、Netan Dogra，《幺幂 Kummer 映射与精细 Selmer 概形的局部理论》，arXiv:1909.05734v2[3] Jean Dieudonn´e，《形式群理论导论》，Dekker，纽约，1973。[4] Michel Dubois-Violette 和 Todor Popov，《自由二步幂零李代数上同调上的 C_∞-结构》，PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATH´EMATIQUE 新系列，第 94 卷（108）（2013），99–109。´ Xue Zhi Cheng、Ezra Getzler，《同伦交换代数结构的传递》，J. Pure Appl. Algebra 212（2008），第 11 期，2535-2542。[5] T. J[6] ozefiak、J. Weyman，《D. E. Littlewood 公式的表示论解释》，Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 103（1988），193–196。´Tornike V. Kadeishvili，《纤维空间同调理论》，Uspekhi Mat. Nauk，35(3(213)):183–188，1980。[7]T. Kadeishvili，《Hochschild 与 Harrison 上的 [8] - 代数结构和上同调》，Proc. Tbil. Math. Inst. 91 （ 1988 ），19–27。 A_∞D.-M. Lu、J. H. Palmieri、Q.-S. Wu、J. J. Zhang，《面向环论学者的 [9] -代数》，Algebra Colloquium 11（2004），91–128。 A_∞Jean-Louis Loday 和 Bruno Vallette，《代数算子》，《数学科学基础丛书》第 346 卷。Springer，海德堡，2012。[10] Michaelis、Walter，《李余代数》，Advances in Mathematics，38（1）：1–54[11] D.V. Millionshchikov，《直线上形式向量场的代数与 Buchstaber 猜想》，Funct.Anal. Appl.，43:4，264–278，（2009）。[12] Dan Petersen，《进一步审视 Kadeishvili 定理》，Higher Structures 4(2):211-221，2020。

[14] Leonid Positselski, 《非齐次二次对偶与曲率》, Funktsional. Analiz i ego Prilozhen. 27:3（1993）, 57-66。[15] Leonid Positselski、Alexander Vishik, 《Koszul 对偶与伽罗瓦上同调》, Mathematical Research Letters 2, 771–781（1995）[16] Stewart B. Priddy, 《Koszul 分解》, 美国数学会汇刊, 第 152 卷, 第 1 期（1970 年 11 月）, 第 39-60 页（共 22 页）。[17] V. R. Romanovskii, 《自由幂零李环的同调》, 数学科学杂志, 第 247 卷, 632–639 页（2020）。[18] Stefan Sigg, 《自由二步幂零李代数的拉普拉斯算子与同调》, 代数杂志 185, 144-161（1996）。[19] Dennis Sullivan, 《拓扑学中的无穷小计算》, 高等科学研究所数学出版物, 第 47 卷（1977）, 第 269-331 页。[20] Paulo Tirao, 《关于自由幂零李代数的同调》, 李理论杂志, 第 12 卷（2002）, 309–323。

G.P.: Northwestern University,Evanston, IL,
USAalso:Higher School of Economics,
Moscow, Russia
grigorypapayanov2020@u.northwestern.edu