关于汤普森问题的一则短文

谨以此文庆祝 John Thompson教授90岁生日

Yu Li [a] 和 Wujie Shi [b,*a]广西师范大学数学与统计学院，桂林 541004，中国 西南大学数学与统计学院，重庆 400715，中国，以及[b]重庆文理学院，重庆 402160，中国；苏州大学，江苏 215006，中国；电子邮箱：liskyu@163.com 和 shiwujie@outlook.com

摘要：本文证明，若两个有限群G和H的伯恩赛德环同构，则G和H是同阶型群，并给出一个例子，说明同阶型群的伯恩赛德环不一定同构。此结果与1987年提出的汤普森问题有关。

数学主题分类：20D60, 19A22。
关键词：汤普森问题；伯恩赛德环；同阶型。

1 引言

1987年，第二作者猜想，每个有限单群都能在有限群类中由其阶和元素阶集合唯一确定。也就是说：

猜想1。设G是一个有限群，S是一个有限单群。那么$G \cong S$当且仅当 (1) $\pi_e(G) = \pi_e(S)$，其中 $\pi_e(G)$ 表示G的元素阶集合；并且 (2) $|G| = |S|$。

在向 J.G. Thompson 教授报告上述猜想后，Thompson 在回信中提出了以下问题 [17]:

对于每个有限群G和每个整数$d > 1$，令$G(d) = \{x \in G \mid x^d = 1\}$。

定义2。G_1与G_2具有相同的阶型，当且仅当 $|G_1(d)| = |G_2(d)|$，$d = 1, 2, \ldots\ldots$。

汤普森问题（1987年）。假设G_1和G_2是阶型相同的群。再假设G_1是可解的。那么G_2也必然是可解的吗?

---

* 通讯作者。

此外，汤普森指出：**“我曾与几位数学家讨论过阶型相同的群。这个问题最初是在研究代数数域时产生的，并且颇有研究价值。”**

事实上，具有相同阶型的群，其阶方程相同。也就是说，将元素阶视为等价关系时，群G 被划分为相同的阶类。阶方程为

$$|G| = n_1 + n_2 + \ldots + n_s,$$

其中$n_i > 0$ 表示G中阶为i 的元素个数。

为方便起见，$|G|$ 和 $\pi_e(G)$被称为G的两个阶。经过一系列论文的发表（见[4, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 19]），猜想1得以证明，并成为一个定理。也就是说，所有有限单群G 都可以由其两个阶确定。此外，所有对称群都可由其两个阶刻画[2],，但二面体群D_8 和四元数群Q_8 不能由其两个阶刻画。因此，我们提出以下问题：

问题 3。哪些有限群可以由其两个阶刻画 ？

定义 4。G_1和G_2 是两阶类型相同，当且仅当 $|G_1| = |G_2|$且 $\pi_e(G_1) = \pi_e(G_2)$。

到目前为止，我们尚未回答汤普森问题。考虑到存在不同构但阶型相同的群这一反例，汤普森还给出了一个非可解的例子，其中两个群阶型相同但不同构：$G_1 = 2^4 : A_7$ 和$G_2 = L_3(4) : 2_2$（符号采用 ATLAS [5]）都是M_{23}的极大子群。

为了比较汤普森问题，我们提出以下问题：假设G_1和G_2 是两阶类型相同的群。再假设G_1 是可解群。是否G_2也必然是可解群?

上述问题存在一个反例。

例 5。设 $G_1 = A_5 \times A_5 \times A_5$, G_1 不可解，且 $|G_1| = 60^3$ 和 $\pi_e(G_1) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$，因为 $\pi_e(A_5) = \{1, 2, 3, 5\}$。设 $G_2 = C_{30} \times C_{30} \times C_{30} \times C_2 \times C_2 \times C_2$。则 $|G_2| = 60^3$ 和 $\pi_e(G_2) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$。$G_1$和 G_2 是两阶类型相同的群，但 G_2 是可解群。此外，G_1和 G_2 的阶型不同。

设G 是一个有限群，$B(G)$是按 [1, 6]定义的G 的伯恩赛德环。Dress[7] 证明，若两个有限群G 和H 具有同构的伯恩赛德环，则 $|G| = |H|$。自然会让人想知道，若两个群的伯恩赛德环同构，它们具有什么性质。 [20]中有人提出，若两个群的伯恩赛德环同构，它们是否也同构；Thevenaz [16] 给出了这个问题的第一个反例。[9], 中证明，若两个有限群具有同构的伯恩赛德环，则它们的可解子群族之间存在一一对应关系，且该对应保持子群的阶和共轭类。Kimmerle、Luca

和 Raggi-Cardenas [8] 证明，若两个有限群具有同构的伯恩赛德环，则它们的循环子群族之间存在一一对应关系，且该对应保持子群的阶和共轭类。事实证明，若两个有限群G 和H 的伯恩赛德环同构，则 $\pi_e(G) = \pi_e(H)$ [8, 推论 5.2]. 若G 是有限单群，且 $B(G) \cong B(H)$，则根据猜想 1, $G \cong H$.因此，单群的同构类完全由其伯恩赛德环决定，Yoshida 问题 [20, problem 2] 对单群的答案是肯定的。本文证明，若两个有限群G 和H 具有同构的伯恩赛德环，则G 和H 具有相同的阶型，并给出一个例子，说明具有相同阶型的群的伯恩赛德环不一定同构。

2 结果

以下两个引理对于证明我们的主要结果很重要 s.

引理 6. [*9, 推论 5.3*] 设 G 和 G' 是有限群，且它们的伯恩赛德环同构。G 和 G' 的可解子群的共轭类之间存在一一对应，该对应保持子群的阶和共轭类的基数。

引理 7. [*8, 命题 5.1*] 设 G 和 H 是有限群，且 $a : B(G) \to B(H)$ 是它们的伯恩赛德环之间的一个同构。则存在一个保持阶和包含关系的双射 σ_*，将 G 和 H 的幂零子群的共轭类相互对应。此外， σ_*将一类循环子群映射到由循环子群组成的一类。

现在我们可以证明主要结果了。

定理 8. 设G 和H 是有限群，且它们的伯恩赛德环同构。则G 和H 具有相同的阶型。

证明。如果 G 和 H 的伯恩赛德环同构，由引理 7 可知，存在一个双射 σ_*, 将 G 和 H 的循环子群共轭类对应起来，并保持阶以及共轭类的基数不变。若 $N_1, N_2, \dots, N_s$和 $K_1, K_2, \dots, K_t$分别表示 G 和 H 中阶为 n 的循环群的共轭类，则 $s = t$，且 $|G : N_G(N_i)| = |H : N_H(K_j)|$，如果 $\sigma_*(N_i)=K_j$，$i, j = 1, 2, \dots, s$。因此 $\Sigma|G : N_G(N_i)|\varphi(n)= \Sigma|H : N_H(K_i)|\varphi(n)$，其中$\varphi$为欧拉函数。这意味着 G 和 H 的阶为 n 的元素数量相同。因此，G 和 H 具有相同的阶型。□

在　下面的定理表明，定理 8 的逆命题不成立　.

定理 9. 设 $G_1 = L_3(4) : 2_2$ 且 $G_2 = 2^4{:}\, A_7$. 那么 G_1 和 G_2 具有相同的阶型，但 B(G_1) 不同构于 B(G_2)。

证明。通过 MAGMA [3] 计算可知，G_1 和 G_2 具有相同的阶方程

$$|G_1| = |G_2| = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_{14}$$
$$= 1+435+2240+6300+8064+6720+5760+5040+5760.$$

因此，G_1 和 G_2 具有相同的阶型。根据 ATLAS [5], A_7 有一个阶为 $2^3{\cdot}3^2$ 的可解极大子群（$A_4 \times 3$）：2，而 $2^3{\cdot}3^2$ 不能整除 $L_3(4)$ 的任何极大子群的阶。因此，G_2 有一个阶为 $2^7{\cdot}3^2$,的可解子群，但 G_1没有阶为 $2^7{\cdot}3^2$的子群。因此，根据引理 5，B(G_1) 不同构于B(G_2)。□

本文研究了两个有限群G_1 和 G_2的以下三个性质：(1) B(G_1)≅ B(G_2)，即 G_1 和 G_2具有相同的 Brunside 环类型；(2)G_1 和 G_2 具有相同的阶型；(3) G_1 和 G_2 具有相同的两阶类型。根据上述讨论，这三个陈述彼此并不等价，但 (1) 蕴含 (2)，而 (2) 蕴含 (3)。汤普森问题是：如果两个有限群满足性质 (2)，其中一个可解，那么另一个也可解吗？若将 (2) 改为 (1)，根据 [6], ，答案是肯定的；若将 (2) 改为 (3)，答案则是否定的，例 5 就是一个反例。

致谢

本研究得到广西自然科学基金（2022GXNSFBA035572）和国家自然科学基金（11171364、11271301）的资助。

参考文献

[1] D.J. Benson，《表示与上同调 I》，载于：剑桥高等数学研究丛书，第30卷，剑桥大学出版社，剑桥，1991年。

[2] J.X. Bi，对称群的一种新刻画。《数学学报》**33** (1) (1990), 70-77（中文）。

[3] W. Bosma、J. Cannon、C. Playoust，Magma代数系统 I：用户语言，《符号计算杂志》**24** (1997), 235-265。[4] H.P. Cao 和 W.J. Shi，有限射影特殊酉群的纯定量刻画，《中国科学》A **45** (6) (2002), 761-772。[5] J.H. Conway、R.T. Curtis、S.P. Norton、R.A. Parker、R.A. Wilson，《有限群图谱》，牛津大学出版社，伦敦，1985。[6] A. Dress，可解群的一种刻画，*Math.Z.* **110** (1969), 213-217。[7] A. Dress，有限群表示论札记。第一部分：有限群的伯恩赛德环及其若干 AGN应用。借助讲座

e

笔记，比勒费尔德大学，1971年。[8] W. Kimmerle、F. Luca 和 A.G. Raggi-Cardenas，伯恩赛德环的不可约分支与同构，《群论杂志》《群论杂志》**11**(2008)，831-844。[9] A.G. Raggi-Cardenas 和 L. Valero-Elizondo，伯恩赛德环之间的正规化同构，《代数杂志》《代数杂志》**277** (2004), 643-657。[10] W.J. Shi，散在单群的一种新刻画。群论：1987年新加坡会议论文集，Walter de Gruyter，柏林，531-540（1989）。[11] W.J. Shi，有限单群的纯定量刻画（I），《自然科学进展》**4** (3)（1994），316-326。[12] W.J. Shi 和 J.X. Bi，每个有限射影特殊线性群的一个特征性质，《数学讲义》，Springer-Verlag，**1456**（1990），171-180。[13] W. J. Shi 和 J.X. Bi，铃木-李群的一种刻画，《中国科学·*A*辑》**34** （1991），14-19。[14] W.J. Shi 和 J.X. Bi，交错群的一种新刻画，东南

t

《亚洲数学通报》,**16** (1) (1992), 81-90.[15] R. Solomon，关于有限单群及其分类，《美国数学会通报》**42** (2) (1995), 231-239.[16] J. Thaevenaz. 同构Burnside环，《代数通讯》 **16** (1988), 1945-1947.[17] J.G. Thompson，私人通信，1987年。

[18] A.V. Vasil'ev、M.A. Grechkoseeva 和 V.D.Mazurov，基于谱与阶刻画有限单群，代数与逻辑 **48** (6) (2009), 385-409.[19] M.C. Xu 和 W.J. Shi，有限单群 ${}^2D_n(q)$ 和 $D_l(q)$（l 为奇数）的纯定量刻画，代数学讨论 **10** (3) (2003), 427-443.[20] T. Yoshida，关于有限群与有限范畴的伯恩赛德环。《交换代数与组合数学》（京都，1985），337-353，纯粹数学高级研究,**11** (North-Holland, 1987年), 337-353。