arXiv:2303.09480v1 [math.SG] 16 Mar 2023

# 伪全纯哈密顿系统

by

**Luiz Frederic Wagner**

**2023年3月16日**

**摘要**

本文首先探讨全纯哈密顿系统。具体而言，我们为这类系统定义作用泛函，并证明全纯轨迹遵循作用原理，即在某种意义上，它们可以被视为这些作用泛函的临界点。作为一项应用，我们利用全纯哈密顿系统建立了 Lefschetz 纤维化与近似环面纤维化之间的联系。在研究全纯哈密顿系统的作用泛函时，我们发现，与全纯哈密顿系统相对应的复结构 $J$ 对某些轨线的存在施加了严格限制。例如，由于最大值原理，在 $\mathbb{C}^{2n}$ 中不存在以复环面为定义域的非平凡全纯轨迹。为了消除此限制，我们将全纯哈密顿系统的概念推广到具有不可积近复结构 $J$的系统，从而引出伪全纯哈密顿系统的定义。我们证明，这些系统具有与其全纯对应定理非常相似的性质，尤其是它们同样遵循作用原理。此外，我们证明， $J$ 的可积性等价于“伪全纯辛”形式的闭性。最后，通过考察全纯哈密顿系统的变形，我们证明，除四维情形外，真伪全纯哈密顿系统在伪全纯哈密顿系统集合中构成一个开且稠密的子集。这意味着真伪全纯哈密顿系统是泛型的。

# 目录

**致谢** **1**

**1. 引言 2**

**2. 全纯哈密顿系统 5**
2.1. HHS：基本定义与概念.5 2.2 全纯轨迹.7 2.3. HHS 的作用泛函与原理.15 2.4. HHS 的应用：Lefschetz 与近似环面纤维化 . . . . . 22

**3. 伪全纯哈密顿系统 30**
3.1. PHHS：基本定义、概念与性质.30 3.2. HHS 与 PHHS 之间的关系.40

**4. 正定 PHHS 的构造与 HHS 的变形 43**
4.1. 由 HHS 构造正定 PHHS.43 4.2. 利用正定 PHHS 变形 HHS.49

**附录** **58**

**A. HSM 达布定理的证明 58 B. 莫尔斯-达布引理的证明 63 C. HHS 和 PHHS 的各种作用泛函 70 D. TM 和 $T^*M$ 上的近复结构 77 E. 全纯 Levi-Civita 联络 82**

**Re差异** **I**

## 致谢

首先，我要感谢我的导师 Kai Cieliebak，感谢他的指导、宝贵的反馈和富有见地的讨论。此外，我要感谢 Lei Zhao，是他劝我撰写这篇论文；也要感谢奥格斯堡辛群的其他成员，尤其是 Urs Frauenfelder，感谢他们的意见和陪伴。最后，我要感谢在我的学术生涯中一直支持我的家人和朋友，尤其是 Christian P.M. Schneider、Alexander Segner 和 Florian Stuhlmann。

# 1. 引言

作为经典力学数学模型的哈密顿系统（HS）一直是现代物理学和数学发展的核心。在物理学中，哈密顿系统为若干量子化方法提供了理论基础。在数学中，对哈密顿系统的研究推动了辛几何与拓扑的研究。这项研究中发展出的各种方法，例如 Floer 理论，已在数学和物理学的多个分支中取得巨大成功，例如天体力学和弦理论。

简而言之，一个哈密顿系统由三项数据构成：一个光滑流形 $M$、定义在 $M$上的一个辛 2- 形式 $\omega$，以及一个光滑函数 $H \in C^\infty(M, \mathbb{R})$。从物理学角度看，辛流形 $(M, \omega)$ 可理解为该系统的相空间，而函数 $H$通常称为哈密顿函数，或简称哈密顿量，它为相空间中的每个点赋予其能量。这些数据使我们能够通过方程 $\iota_{X_H}\omega = -dH$定义$M$上的哈密顿向量场 $X_H$ 。哈密顿系统 $(M, \omega, H)$的动力学由向量场 $X_H$支配。确切地说，哈密顿系统 $(M, \omega, H)$所描述的点状粒子的物理轨线，恰好就是 $X_H$的积分曲线。 $X_H$ 的积分曲线方程与经典力学中熟知的哈密顿方程之间的联系由达布定理给出：每个辛形式 $\omega$ 都可以局部写成

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i.$$

在这样的达布坐标图中， $X_H$ 的可积曲线方程化为哈密顿方程:

$$\dot{q}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \forall t \in I \ \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

由于积分曲线方程只是一阶微分方程，因此对于任意初值$x \in M$ 和 $t_0 \in \mathbb{R}$，总存在一个开区间 $I$ 以及一条轨迹 $\gamma : I \to M$，使得 $\gamma(t_0) = x$。此外，两条轨迹 $\gamma_1 : I_1 \to M$ 和 $\gamma_2 : I_2 \to M$ 相同，当且仅当它们的定义域相同（$I_1 = I_2 \equiv I$），并且在某个点 $t_0 \in I$ 处取值相同。特别地，给定初值的极大轨迹是唯一的。

物理轨迹也遵循作用原理，即它们可以作为作用泛函 $\mathrm{A}_H : C^\infty(I, M) \to \mathbb{R}$ 的“临界点”求得；该作用泛函赋予一个正合哈密顿系统（$M, \omega = d\lambda, H$）：

$$\mathcal{A}_H[\gamma] \equiv \mathcal{A}_H^\lambda[\gamma] \coloneqq \int_I \gamma^*\lambda - \int_I H \circ \gamma(t)\, dt.$$

这里，“临界点”是指，在轨迹 $\gamma \in C^\infty(I, M)$ 处，$\mathrm{A}_H$ 的一阶变分必须为零；其中只允许那些使 $\gamma$ 的端点保持固定的 $\gamma$ 变分。有时，例如在 Floer 理论中，人们希望将某些轨迹视为某个作用泛函的实际临界点。有几种实现方法，

例如，将轨迹的端点置于拉格朗日子流形上，或者只考虑周期轨道。

由于 HS 是以实流形 $M$、微分形式 $\omega$ 和函数 $H$ 的形式给出的，自然会让人想知道，能否针对复流形 $X$、微分形式 Ω 和函数 H 构造出具有类似性质的类似系统。这个问题的答案直接引出了**全纯哈密顿系统**（HHS）的概念。与实哈密顿系统[1]（RHS）类似，HHS 也由三项数据描述（参见第 2.1 小节）：一个复流形 $X$（隐式定义一个可积复结构 $J$）、定义在 $X$ 上的全纯辛二形式 Ω，以及一个全纯函数 $\mathrm{H} : X \to \mathbb{C}$。自 21 世纪初以来，已有学者研究 HHS，例如 Gerdjikov 和 Kyuldjiev 等人 [1], [2], [3]，以及 Arathoon 和 Fontaine [4]。在所引文献中，HHS 通常被视为 RHS 的复化，主要用作研究 RHS 的工具；这类 RHS 是 HHS 的实形式[2]。例如，文献 [4], 基于球面摆复化所得的 HHS，构造了一个可积且紧致的 RHS。

本文采用一种不同的方法。我们独立研究 HHS，并尝试为 HHS 重现已知的实哈密顿系统结果。首先，我们讨论全纯轨迹的存在唯一性。与实哈密顿系统类似，全纯轨迹被定义为全纯哈密顿向量场 $X_{\mathcal{H}}$ 的全纯积分曲线。我们在第 2.2 小节中证明，局部而言，给定一个初值，全纯轨迹总是存在且唯一。然而，由于单值化的影响，即使给定初值，极大全纯轨迹也不再唯一[3]。这种行为与实哈密顿系统形成鲜明对比。尽管如此，如第 2.2 小节所示，对于 H 的正则值$E$，全纯轨迹仍构成由能量超曲面 $\mathrm{H}^{-1}(E)$ 组成的叶状结构。

在此讨论之后，我们将在第 2.3 小节证明全纯轨线满足作用原理[4], ，也就是说，在某种意义上，它们可以被理解为某些作用泛函的临界点。这些作用泛函的构造方法是：先将一个全纯哈密顿系统（$X$，Ω，H）分解为四个实哈密顿系统，分别对应 Ω 和 H 的实部与虚部的四种组合。对于每个实哈密顿系统，我们都可以赋予其通常的作用泛函。随后，我们对每个作用泛函沿虚（或实）时间轴取平均，并取适当的线性组合，从而得到全纯哈密顿系统（$X$，Ω，H）的作用泛函。事实上，这种方法可以为全纯哈密顿系统（$X$，Ω，H）导出大量作用泛函，它们仅在取平均和线性组合的方式上有所不同。我们以全纯哈密顿系统的一个应用结束第 2 节。具体而言，我们将运用全纯哈密顿系统，在第 2.4 小节建立 Lefschetz 纤维化与近似环面纤维化之间的

[1]为区分实值与复值哈密顿系统，今后我们将实值哈密顿系统称为实哈密顿系统。[2]“哈密顿系统的复化与实形式”这些术语可以得到恰当定义，但此处不作明确界定。对我们而言，只需知道，哈密顿系统的复化与实形式的定义方式与流形的复化与实形式类似：实流形 $M$ 是复流形 $X$ 的实形式，并且 $X$ 是 $M$ 的复化，当且仅当 $M$ 是 $X$ 上某个反全纯对合的不动点集。[3]近期，Sun 和 You 研究了复化开普勒问题的单值化（参见[5]）。[4]据作者所知，此前文献中尚未为 HHS 制定作用原理。

利用 HHS 探讨第 2.4 小节中 Lefschetz 纤维化与近似环面纤维化之间的关系。

在研究 HHS 的作用泛函时，我们注意到， $J$， $X$的复结构对某些全纯轨迹的存在施加了相当强的限制。在第 2.3 小节中，我们考察定义域为复环面的全纯轨迹，并将其解释为周期轨道的复化。然而，根据最大值原理，如果相关的复流形 $X = \mathbb{C}^{2n}$ 配备了标准复结构$J = i$，这类全纯轨迹总是常数。若允许 $J$ 采用任意近复结构，同样的论证便不再成立。Moser 在其 1995 年发表的精彩论文 [6]中证明，可以将复环面伪全纯嵌入 $\mathbb{R}^4$，其中 $\mathbb{R}^4$ 配备了一种合适的、未必可积的近复结构 $J$。

为了避免 $J$的可积性所施加的限制，我们在第 3 节引入了特殊的哈密顿系统。这类系统由与 HHS 相同的数据描述，但其近复结构 $J$ 不再需要可积。这些哈密顿系统称为**伪全纯哈密顿系统**（PHHS），其设计使它们具有与 HHS 相同的性质。特别是，PHHS 的伪全纯轨迹会诱导出由正则能量超曲面 $H^{-1}(E)$ 构成的叶状结构，并满足作用原理（参见第3.1小节）。

乍看之下，PHHS 似乎是牵强而人为的，尤其是按照定义，Ω 的虚部不再需要是闭的。然而，正如我们在第3.2小节所示，Ω 的虚部不闭是 $J$ 不可积所不可避免的结果。事实上，我们证明，当且仅当 $J$ 可积时，才能从 PHHS 恢复出 HHS；这等价于 Ω 的虚部是闭的。为进一步强化我们的主张，即 PHHS 确实是 HHS 的自然推广，我们证明，在一个固定流形 $X$ 上，维数为 $\dim_{\mathbb{R}}(X) > 4$ 的正定[5] PHHS 构成 PHHS 空间中的开稠密子集，这意味着正定 PHHS 是泛型的。为证明正定 PHHS 是泛型的，我们首先给出一种由 HHS 构造正定 PHHS 的方法（参见第 4.1 小节）。该方法本身很有意思，因为它与超凯勒结构有关，并且使我们能够在复流形的余切丛上赋予 PHHS 结构。最后，我们利用这一构造，通过正定 PHHS 使 HHS 发生变形（参见第 4.2 节）。

[5]真伪全纯哈密顿系统是指不同时为全纯哈密顿系统的伪全纯哈密顿系统。

## 2. 全纯哈密顿系统

本节将已知的实哈密顿系统结果（见第 1 节）推广到全纯哈密顿系统。我们首先介绍全纯哈密顿系统的基本概念（第 2.1 小节），包括全纯辛流形的定义以及全纯辛流形的达布定理；随后讨论全纯轨迹的性质（第 2.2 小节），接着阐述全纯哈密顿系统的作用原理（第 2.3 小节），最后运用 HHS 研究 Lefschetz 与近似环面纤维化之间的关系（第 2.4 小节）。

### 2.1. 全纯哈密顿系统：基本定义与概念

首先，我们定义全纯辛流形:

**定义 1**（全纯辛流形）。一对（$X$,Ω）称为全纯辛流形[6]（*HSM*），当且仅当 $X$ 是一个复流形，且Ω 是 $X$ 上的全纯2-形式，在（1, 0）-切丛 $T^{(1,0)}X$ 上闭且非退化。$X$在此设定下，Ω 称为（$X$,Ω）的全纯辛2-形式。

我们花些时间来理解全纯辛流形的定义。回忆一下，复流形 $X$ 是通过一个坐标图册$\{(\phi_\alpha,\ U_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ 定义的，其中坐标图的值取自 $\mathbb{C}^m$，并且它们的过渡函数是全纯的。若 $\phi=(z_1,\ \ldots,\ z_m):U\to V\subset\mathbb{C}^m$ 是这样的全纯坐标图，那么 $X$ 上的全纯二形式 Ω 在局部可写为:

$$\Omega|_U=\sum_{i,j=1}^{m}\Omega_{ij}dz_i\wedge dz_j,$$

其中 $\Omega_{ij}:U\to\mathbb{C}$ 是 $U$上的全纯函数。与实情形类似，可以在复值形式上定义外微分 $d$，使得 Ω 的闭性等价于 $d\Omega=0$。为理解全纯辛流形定义中的非退化性，请回想每个复流形 $X$ 都隐含地定义了 $X$ 上的一个可积（近）复结构 $J$；此外，将$X$视为实流形时，其复化切丛和余切丛都可分解为两个子丛的直和:

$$T_{\mathbb{C}}X=T^{(1,0)}X\oplus T^{(0,1)}X;\quad T^*_{\mathbb{C}}X=T^{*,(1,0)}X\oplus T^{*,(0,1)}X,$$

其中，(1，0)-丛和 (0，1)-丛分别是 $J$（或其对偶 $J^*$）对应特征值 $i$ 和 $-i$的逐纤维特征子空间。根据构造，局部微分形式 $dz_i$ 是 $T^{*,\ (1,\ 0)}X$的局部截面，因此会将 $T^{(0,1)}X$中的元素映射为零。这意味着，全纯二形式不可能在整个复化切丛上非退化，因为它们在 (0，1)-丛上总是为零。对于一个全纯二形式 Ω，我们至多只能在 $T^{(1,0)}X$ 上实现非退化，即:

$$\forall x\in X\ \ \forall V\in T^{(1,0)}_xX\backslash\{0\}\ \ \exists W\in T^{(1,0)}_xX:\quad \Omega_x(V,W)\neq 0.$$

[6]警告：在代数几何的某些分支中，“全纯辛流形”一词也有使用，但其定义对 $X$ 和 Ω 附加了约束!

特别地，与实情形一样，Ω 的非退化性意味着 $X$ 的复维数$m$ 为偶数。另请注意，根据构造，Ω 和 $J$ 满足以下关系：

$$\Omega(J\cdot,\cdot) = \Omega(\cdot, J\cdot) = i\cdot\Omega; \quad \Omega(J\cdot, J\cdot) = -\Omega. \tag{1}$$

与“实”辛几何一样，HSM 有两个标准例子：第一个是 $X = \mathbb{C}^{2n}$，配备标准形式 $\Omega = \sum_{j=1}^{n} dP_j \wedge dQ_j$，其中 $(Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n) \in \mathbb{C}^{2n}$。另一个是复流形 $Y$的全纯余切丛$X = T^{*,(1,0)}Y$，其典范二形式为 $\Omega_{\mathrm{can}} = d\Lambda_{\mathrm{can}}$，其中 $\Lambda_{\mathrm{can}}$是全纯李维尔一形式。

根据达布定理，辛流形没有局部不变量，因为它们在局部都同构于标准辛流形 $(\mathbb{R}^{2n}, \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i)$。HSM 也有相同的结论：

**定理1** (HSM 的达布定理)。设 $(X,\Omega)$ 是一个复维数为$\dim_{\mathbb{C}}(X) = 2n$ $(n \in \mathbb{N})$的 *HSM*。则对于每个点 $x \in X$，都存在一个全纯坐标图$\psi = (Q_1,\ldots, Q_n, P_1,\ldots, P_n) : U \to V \subset \mathbb{C}^{2n}$，定义在 $X$ 中 $x$ 附近，使得

$$\Omega|_U = \sum_{j=1}^{n} dP_j \wedge dQ_j.$$

数学界普遍认可 HSM 的达布定理是正确的；然而，据作者所知，迄今尚未有人正式写出其证明。为求完整起见，附录 A 给出了 HSM 达布定理的证明。我们将在第 4.2 小节中使用 HSM 的达布定理。

现在，让我们转而关注全纯哈密顿系统：

**定义 2** （全纯哈密顿系统）。当且仅当$(X,\Omega)$ 是一个 *HSM*，且$\mathcal{H} : X \to \mathbb{C}$ 是定义在 $X$ 上的全纯函数时，我们称三元组 $(X,\Omega, \mathcal{H})$ 为全纯哈密顿系统 （*HHS*）。在此设定下，我们称$\mathcal{H}$ 为 *HHS* $(X,\Omega, \mathcal{H})$的哈密顿函数，或简称哈密顿量。

全纯哈密顿系统的例子包括标准 HSM（$\mathbb{C}^{2n}, \sum_{j=1}^{n} dP_j \wedge dQ_j$）及其上的任意全纯函数 $\mathrm{H} : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}$，以及全纯余切丛（$T^{*,(1,0)}Y, \Omega_{\mathrm{can}}$）及其上的自然哈密顿量。我们称全纯余切丛上的哈密顿量为自然哈密顿量，当且仅当它可写为动能与势能之和，即 $\mathrm{H} = \mathrm{T} + \mathrm{V}$。在此，若全纯函数 $\mathrm{V} : T^{*,(1,0)}Y \to \mathbb{C}$ 可通过全纯投影 $\pi : T^{*,(1,0)}Y \to Y$ 进行分解，即可写成 $\mathrm{V} = \mathrm{V}_0 \bigcirc \pi$，其中 $\mathrm{V}_0 : Y \to \mathbb{C}$是某个全纯函数，则称 V 表示势能。此外，若全纯函数 $\mathrm{T} : T^{*,(1,0)}Y \to \mathbb{C}$ 满足 $2\mathrm{T}(x) \equiv g^*(x,x) \forall x \in T^{*,(1,0)}Y$，其中 $g^*$ 是某个定义在 $Y$上的全纯度量 $g$ 的对偶化，则称 T 为动能。定义在 $Y$ 上的全纯度量 $g$ 是一个全纯对称 $\mathbb{C}$双线性形式，在 $T^{(1,0)}Y$上非退化；也就是说，对于 $Y$的任意全纯坐标图 $\phi = (z_1, \ldots, z_n) : U \to V \subset \mathbb{C}^n$， $g$ 可写为

$$g|_U = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dz_i \otimes dz_j,$$

其中 $g_{ij}: U \to \mathbb{C}$ 是满足 $g_{ij} = g_{ji}$ 且 $\det(g_{ij}) \neq 0$的全纯函数。我们将在接下来的小节中更详细地研究这些例子。

## 2.2 全纯轨迹

接下来，我们要研究全纯哈密顿系统的动力学。与实哈密顿系统一样，它们由一个哈密顿向量场决定：

**定义 3 (**全纯哈密顿向量场**)**。 设 $(X, \Omega, \mathcal{H})$ 是一个全纯哈密顿系统。我们称由 $\iota_{X_{\mathcal{H}}}\Omega = -d\mathcal{H}$ 定义在 $X$ 上的全纯向量场 $X_{\mathcal{H}}$ 为该全纯哈密顿系统 $(X, \Omega, \mathcal{H})$ 的（全纯）哈密顿向量场 。

**注 1** $(X_{\mathcal{H}}$ **定义良好)**。 注意，复流形 $X$ 上的全纯向量场 $V$ 在全纯坐标图 $\phi \equiv (z_1, .., z_m) : U \to V \subset \mathbb{C}^m$ 中可以写成

$$V|_U = \sum_{j=1}^{m} V_j \partial_{z_j},$$

其中 $V_j : U \to \mathbb{C}$ 是 $U$ 上的全纯函数。因此，$X$ 上的全纯向量场的取值仅落在丛 $T^{(1,0)}X$ 中。结合$\Omega$ 在$T^{(1,0)}X$上的非退化性，这说明哈密顿向量场 $X_{\mathcal{H}}$ 定义良好。

在定义全纯哈密顿系统的轨迹之前，明智的做法是先研究 $X_{\mathcal{H}}$ ，或者更确切地说，研究一般的全纯向量场。以下命题是复几何中的一个标准结果：

**命题 1 (**全纯向量场 $\Leftrightarrow$ $J$**-**保持向量场**)**。 设 $X$ 是一个复流形，其复结构为 $J \in \Gamma(\mathrm{End}(TX))$。那么，切丛$TX$[7]和 $T^{(1,0)}X$作为光滑复向量丛，通过以下映射同构：

$$f : TX \to T^{(1,0)}X, \quad v \mapsto \frac{1}{2}(v - i \cdot J(v)),$$

其中， $TX$ 的逐纤维复向量空间结构由复数乘法 $(a + ib) \odot v \coloneqq av + bJ(v)$ 给出，对每个 $a$、$b \in \mathbb{R}$和 $v \in TX$均成立。

现在考虑空间 $\Gamma_J(TX)$，它由 $X$ 上光滑的实 $J$-保持[8]向量场组成 ：

$$\Gamma_J(TX) \coloneqq \{V_R \in \Gamma(TX) \mid L_{V_R} J = 0\},$$

其中， $L_{V_R}J$是 $V_R$关于 $J$的李导数，而 $\Gamma(TX)$ 是 $X$上的光滑实向量场空间。于是，$\Gamma_J(TX)$ 连同向量场的标准对易子$[\cdot, \cdot]$ 和复结构 $J$ 构成一个复李代数。事实上，$(\Gamma_J(TX)\ [\cdot, \cdot])$ 作为复李代数，同构于$(\Gamma(T^{(1,0)}X)\ [\cdot, \cdot])$ 上的全纯向量场空间，其中 $X$ 通过

$$F : \Gamma_J(TX) \to \Gamma(T^{(1,0)}X), \quad V_R \mapsto \frac{1}{2}(V_R - i \cdot J(V_R)).$$

[7]对于 $TX$， $X$ 被视为实流形， [7]中的保持向量场称为无穷小自同构。

命题 1 的证明可见 [7]第九章（参见命题 2.10 和 2.11）。命题 1 的一个重要推论是全纯向量场的实部和虚部彼此对易；我们将在后文大量用到这一事实：

**推论 1** ($V_R$ 和 $J(V_R)$ 对易)。设 $X$ 是一个具有复结构 $J$ 的复流形，且 $V_R \in \Gamma_J(TX)$ 是一个保持 $J$ 的向量场。那么：

$$[V_R, J(V_R)] = 0.$$

特别地， $X$ 上全纯向量场的实部和虚部彼此对易。

*Pr*噢。 由命题 1 可知，$(\Gamma_J(TX)\ [\cdot,\cdot])$ 是一个复李代数，因此 :

$$[V_R, J(V_R)] = J\left([V_R, V_R]\right) = 0.$$

□

由命题 1，我们可以将全纯哈密顿系统 $(X, \Omega, \mathrm{H})$ 的哈密顿向量场 $X_{\mathcal{H}}$ 与一个保持 $J$ 的向量场 $X_{\mathcal{H}}^R$ 关联起来，该向量场由下式唯一确定：

$$X_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}(X_{\mathcal{H}}^R - i \cdot J(X_{\mathcal{H}}^R)).$$

有了这些认识，现在有两种定义全纯哈密顿系统的全纯轨迹的方法：第一种是直接将全纯轨迹定义为全纯哈密顿向量场 $X_{\mathcal{H}}$ 的全纯积分曲线。第二种是将全纯轨迹定义为 $X_{\mathcal{H}}^R$ 的积分曲线的解析延拓。这两种定义确实等价，我们会同时采用。就本文而言，我们采用第一种作为正式定义，并在之后用第二种来构造和研究全纯轨迹：

**定义4** （全纯轨迹）。 设$(X,\Omega, \mathcal{H})$ 是一个全纯哈密顿系统，且$X_{\mathcal{H}} = 1/2(X_{\mathcal{H}}^R - i \cdot J(X_{\mathcal{H}}^R))$ 是其哈密顿向量场。若全纯映射 $\gamma : U \to X$ 满足全纯积分曲线方程，则称其为全纯哈密顿系统$(X,\Omega, \mathcal{H})$ 的一条全纯轨迹： $\gamma$

$$\gamma'(z) = X_{\mathcal{H}}(\gamma(z)) \quad \forall z \in U,$$

其中 $U \subset \mathbb{C}$ 是一个开连通子集， $\gamma'$ 是 $\gamma$ 的复导数。若对于每个全纯轨迹ˆˆ
ˆˆ$\gamma : U \to X$ ，只要满足 $U \subset U$ 且 $\hat{\gamma}|_U = \gamma$ ，就有 $U = U$ 且 $\hat{\gamma} = \gamma$，则称全纯轨迹 $\gamma : U \to X$ 极大 。有时，我们将实向量场 $X_{\mathcal{H}}^R$ 的积分曲线称为全纯哈密顿系统 $(X,\Omega, \mathcal{H})$ 的实轨迹 。

接下来，我们来考察全纯轨迹的存在唯一性：

命题 *2*（全纯轨迹的存在唯一性）。设 *(X, Ω, H)* 是一个全纯哈密顿系统。那么，对任意 $z_0 \in \mathbb{C}$ 和 $x_0 \in X$，存在一个开连通子集$U \subset \mathbb{C}$，满足 $z_0 \in U$，以及 *(X, Ω, H)* 的一条全纯轨迹 $\gamma^{z_0,x_0} : U \to X$，满足$\gamma^{z_0,x_0}(z_0) = x_0$。若两条全纯轨迹 $\gamma^{z_0}{}_{,1}{}^{x_0} : U_1 \to X$ 和 $\gamma^{z_0}{}_{,2}{}^{x_0} : U_2 \to X$满足 $\gamma^{z_0}{}_{,1}{}^{x_0}(z_0) = x_0 = \gamma^{z_0}{}_{,2}{}^{x_0}(z_0)$，则它们局部重合；特别地，它们相等当且仅当其定义域 $U_1$ 和 $U_2$ 相等。此外，全纯轨迹 $\gamma^{z_0,x_0}$ 关于 $z_0$ 和 $x_0$全纯依赖。

证明。 设 $(X, \Omega, \mathrm{H})$ 是一个全纯哈密顿系统，其哈密顿向量场为 $X_{\mathcal{H}} = 1/2(X^R_{\mathcal{H}} - iJ(X^R_{\mathcal{H}}))$，并设 $z_0 \in \mathbb{C}$ 和 $x_0 \in X$ 是任意点。为了构造一条全纯轨迹 $\gamma^{z_0,x_0}$，我们首先注意到，对于固定的 $s \in \mathbb{R}$， $t \mapsto \gamma^{z_0,x_0}(t + is)$ 是一条实轨迹。取全纯积分曲线方程的实部即可看出这一点。因此，寻找全纯轨迹相当于寻找实轨迹的解析延拓。为完成这一任务，我们注意到，对于固定的 $t \in \mathbb{R}$，类似地， $s \mapsto \gamma^{z_0,x_0}(t + is)$ 是 $J(X^R_{\mathcal{H}})$ 的一条积分曲线。直观地说，我们希望 $\gamma^{z_0,x_0}(t + is)$ 可表示为：

$$\gamma^{z_0,x_0}(t + is) = \varphi^{J(X^R_{\mathcal{H}})}_{s-s_0} \circ \varphi^{X^R_{\mathcal{H}}}_{t-t_0}(x_0),$$

其中， $z_0 = t_0 + is_0$ 和 $\varphi^{J(X^R_{\mathcal{H}})}{}_{s-s_0}$ 和 $\varphi^{X^R_{\mathcal{H}}}_{t-t_0}$ 分别是向量场 $J(X^R_{\mathcal{H}})$ 和$X^R_{\mathcal{H}}$ 在时间 $s - s_0$ 和 $t - t_0$下的流。然而，一般而言，这个表达式存在问题：尽管对于固定的 $t$，它是 $J(X^R_{\mathcal{H}})$ 的积分曲线，但由于与 $\varphi^{J(X^R_{\mathcal{H}})}{}_{s-s_0}$ 复合，对于固定的 $s$，它可能不再是 $X^R_{\mathcal{H}}$ 的积分曲线。为避免这个问题，我们需要流的复合满足交换性，至少在较小的时间 $t - t_0$ 和 $s - s_0$下如此。当向量场 $X^R_{\mathcal{H}}$和 $J(X^R_{\mathcal{H}})$ 本身交换时，就会出现这种情况。在我们的情形中确实如此，因为我们可以使用推论 1，以及 $X_{\mathcal{H}}$ 是全纯向量场这一事实。因此，我们可以定义：

$$\gamma^{z_0,x_0}(t + is) \coloneqq \varphi^{J(X^R_{\mathcal{H}})}_{s-s_0} \circ \varphi^{X^R_{\mathcal{H}}}_{t-t_0}(x_0) \equiv \varphi^{X^R_{\mathcal{H}}}_{t-t_0} \circ \varphi^{J(X^R_{\mathcal{H}})}_{s-s_0}(x_0) \equiv \varphi^{(t-t_0)X^R_{\mathcal{H}}+(s-s_0)J(X^R_{\mathcal{H}})}_{1}(x_0).$$

对于足够小的 $|t - t_0|, |s - s_0| < \varepsilon$，上述表达式都有定义，并且由于 $X^R_{\mathcal{H}}$ 与 $J(X^R_{\mathcal{H}})$ 的交换性，它们都相同。

让我们验证给定的表达式 $\gamma^{z_0,x_0}$ 确实定义了一条全纯轨迹。根据构造，映射 $\gamma^{z_0,x_0}$ 是全纯的，因为它满足柯西-黎曼方程。因此，我们只需计算复导数 $\gamma^{z_0,x_0\prime}$。若 $\phi = (z_1, \ldots, z_{2n}) : V \to W \subset \mathbb{C}^{2n}$ 是 $X$ 在 $x_0$ 附近的全纯坐标图，则对于合适的 $z$，我们可以通过 $(\gamma^{z_0,x_0}{}_{,1}(z), \ldots, \gamma^{z_0,x_0}{}_{,2n}(z)) \coloneqq \phi \bigcirc \gamma^{z_0,x_0}(z)$ 定义复导数 $\gamma^{z_0,x_0\prime}(z)$：

$$\gamma^{z_0,x_0\,\prime}(z) \coloneqq \sum_{j=1}^{2n} \gamma^{z_0,x_0\,\prime}_j(z) \cdot \partial_{z_j}\big|_{\gamma^{z_0,x_0}(z)},$$

其中， $\gamma^{z_0,x_0\,\prime}{}_j(z)$ 是从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}$的全纯映射的通常复导数。直接计算可得，复导数 $\gamma^{z_0,x_0\,\prime}(z)$ 等于：

$$\gamma^{z_0,x_0\,\prime}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma^{z_0,x_0}}{\partial t}(z) - i \cdot \frac{\partial \gamma^{z_0,x_0}}{\partial s}(z)\right).$$

根据 $\gamma^{z_0,\,x_0}$的定义，我们有：

$$\frac{\partial \gamma^{z_0,x_0}}{\partial t}(z) = X^R_{\mathcal{H}}(\gamma^{z_0,x_0}(z)); \quad \frac{\partial \gamma^{z_0,x_0}}{\partial s}(z) = J\left(X^R_{\mathcal{H}}(\gamma^{z_0,x_0}(z))\right).$$

综合以上结果可得：

$$\gamma^{z_0,x_0\,\prime}(z) = \frac{1}{2}\left(X^R_{\mathcal{H}}(\gamma^{z_0,x_0}(z)) - i \cdot J\left(X^R_{\mathcal{H}}(\gamma^{z_0,x_0}(z))\right)\right) = X_{\mathcal{H}}(\gamma^{z_0,x_0}(z)).$$

因此，$\gamma^{z_0,\,x_0}$ 确实是一条全纯轨迹。显然，$\gamma^{z_0,\,x_0}$ 满足 $\gamma^{z_0,\,x_0}(z_0) = x_0$，从而证明了命题 2 中存在性的结论。

为证明给定初值时的局部唯一性，我们回顾一下，$\gamma^{z_0,x_0}$ 只是沿 $t$ 轴的 $X_{\mathcal{H}}^R$ 的一条积分曲线，并满足 $\gamma^{z_0,x_0}(z_0) = x_0$。因此，任何其他满足 $\hat{\gamma}^{z_0,x_0}(z_0) = x_0$ 的全纯轨迹 $\hat{\gamma}^{z_0,x_0}$，在 $t_0$ 附近的 $s = s_0$ 和 $t$ 上都与 $\gamma^{z_0,x_0}$ 一致。于是，我们可以在 $x_0$ 附近的一个全纯坐标图中，对 $\gamma^{z_0,x_0}$ 和 $\hat{\gamma}^{z_0,x_0}$ 的坐标应用全纯函数的恒等定理，从而得到局部唯一性。为了证明 $\gamma^{z_0,x_0}$ 和 $\hat{\gamma}^{z_0,x_0}$ 完全重合当且仅当它们的定义域相同，我们用全纯坐标图覆盖 $\gamma^{z_0,x_0}$ 和 $\hat{\gamma}^{z_0,x_0}$ 的像，并反复应用恒等定理。

最后，我们需要证明 $\gamma^{z_0,x_0}$ 关于 $z_0$ 和 $x_0$ 解析地依赖。对于 $z_0$，这显然成立，因为 $\gamma^{z_1,x_0}(z)$ 和 $\gamma^{z_2,x_0}(z)$ 在 $z_1 \neq z_2$ 上只相差一个 $z$ 平移。对于 $x_0$，当且仅当 $\varphi_{t-t_0}^{X_{\mathcal{H}}^R}$ 和 $\varphi^{J(X_{\mathcal{H}}^R)\,s-s_0}$（分别属于 $X_{\mathcal{H}}^R$ 和 $J(X_{\mathcal{H}}^R)$）是从 $X$ 映到 $X$ 的全纯映射时，这一结论才成立。正如 [7], 的第九章所述，$X$ 上保持 $J$ 的向量场，恰好是其流为全纯映射的实向量场。根据命题 1，向量场 $X_{\mathcal{H}}^R$ 和 $J(X_{\mathcal{H}}^R)$ 保持 $J$，由此即可完成证明。

□

**注 2.** 在上一个证明中，我们用到了全纯哈密顿系统 $(X, \Omega, \mathcal{H})$ 的一条全纯轨迹 $\gamma(t+is)$ 在固定 $s$ 时是 $X_{\mathcal{H}}^R$的积分曲线，而在固定 $t$时是 $J(X_{\mathcal{H}}^R)$的积分曲线。我们可以推广这一观察。若将 $t+is$ 写成极坐标形式，$t+is = re^{i\alpha}$，则对于固定的 $\alpha$，$\gamma(re^{i\alpha})$ 是 余弦$(\alpha)X_{\mathcal{H}}^R$ + 正弦$(\alpha)J(X_{\mathcal{H}}^R)$ 的积分曲线。

迄今为止我们发现的性质似乎表明，全纯哈密顿系统的全纯轨迹与实哈密顿系统的轨线表现相同。然而，事实并非完全如此。与实情形形成鲜明对比的是，给定一个初值，极大全纯轨迹未必唯一，下面的反例将对此作出说明。

**例 1**（一维复空间中的中心问题）。

令 $X \coloneqq T^{*,(1,0)}\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}$ 为 $\mathbb{C}^\times \coloneqq \mathbb{C}/\{0\}$ 的全纯余切丛，并配备标准形式 $\Omega = \Omega_{\text{can}} = dP \wedge dQ$、$(Q,P) \in X$以及自然哈密顿量[9] $\mathrm{H}(Q,P) \coloneqq \frac{P^2}{2} - \frac{1}{8Q^2}$。从物理角度来说，全纯哈密顿系统 $(X, \Omega, \mathrm{H})$ 是描述一个位于一维位置空间中的单粒子受近似开普勒型中心势 $V(q) = -\frac{1}{8q^2}$作用的实哈密顿系统的复化。该全纯哈密顿系统 $(X, \Omega, \mathrm{H})$ 的哈密顿向量场 $X_{\mathcal{H}}$ 由下式给出

$$X_{\mathcal{H}}(Q,P) = P \cdot \partial_Q - \frac{1}{4Q^3} \cdot \partial_P.$$

因此，$(X, \Omega, \mathrm{H})$ 的全纯轨迹 $\gamma(z) = (Q(z)\ P(z)$ 满足

$$Q'(z) = P(z); \quad P'(z) = -\frac{1}{4Q^3(z)}$$

[9]给定的哈密顿量甚至是正则的，即对于 $X$ 中的所有点，$d\mathrm{H} \neq 0$。

或者，将两个方程结合起来：

$$Q''(z) = -\frac{1}{4Q^3(z)}.$$

我们希望确定满足 $\gamma(z_0) = x_0 = (Q_0,\ P_0)$（对于$z_0,\ P_0 \in \mathbb{C}$ 以及 $Q_0 \in \mathbb{C}^\times$）的全纯轨迹 $\gamma$。在 $z$ 中进行平移后，我们可以假设 $z_0 = 0$。直接计算可知，局部而言，所需的解由下式给出：

$$Q(z) = \sqrt{Q_0^2 + 2Q_0P_0 \cdot z + 2E_0 \cdot z^2};\quad P(z) = Q'(z),$$

其中 $E_0 \coloneqq \mathrm{H}(Q_0,\ P_0)$，并且选择 $\sqrt{\cdot}$ 使得 $\sqrt{Q_0^2} = \overline{Q_0}$。将 $Q_0^2$ 映射到 $Q_0$ 的两个平方根在 $Q_0^2$ 的一个小邻域内重合，但它们的定义域不必相同。下面通过为 $Q_0$ 和 $P_0$ 选取值来对此进行精确说明。取 $Q_0 = 1$ 和 ~~$P_0$~~ $= \frac{1}{2}$。于是，$E_0 = 0$ 和 $Q(z) = \sqrt{z+1}$。这里，所有与正实数上的标准平方根重合的平方根都是可接受的。例如，可以选择

$$\sqrt{\cdot}^1 : \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \neq 0 \text{ or } \mathrm{Re}(z) > 0\} \to \mathbb{C},\quad z = re^{i\alpha} \mapsto \sqrt{r}e^{\frac{i\alpha}{2}}\ \ (\alpha \in (-\pi, \pi))$$

or

$$\sqrt{\cdot}^2 : \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \neq 0 \text{ or } \mathrm{Im}(z) > 0\} \to \mathbb{C},\quad z = re^{i\alpha} \mapsto \sqrt{r}e^{\frac{i\alpha}{2}}\ \ \left(\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\right).$$

利用这些平方根，我们可以定义全纯轨迹 $\gamma_1 : U_1 \to X$ and$\gamma_2 : U_2 \to X$ 如下：

$$Q_1 : U_1 \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z+1) \neq 0 \text{ or } \mathrm{Re}(z+1) > 0\} \to \mathbb{C},\quad Q_1(z) \coloneqq \sqrt{z+1}^1,$$
$$Q_2 : U_2 \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z+1) \neq 0 \text{ or } \mathrm{Im}(z+1) > 0\} \to \mathbb{C},\quad Q_2(z) \coloneqq \sqrt{z+1}^2.$$

显然，$\gamma_1$ and $\gamma_2$ 是满足 $\gamma_1(0) = (1, 1\ 2) = \gamma_2(0)$ 的极大全纯轨迹。然而，它们的定义域 $U_1$ and $U_2$ 不同，这表明即使给定初值，极大轨迹也不唯一。特别地，轨线 $\gamma_1$ and $\gamma_2$ 对 $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z+1) < 0 \text{ and } \mathrm{Im}(z+1) < 0\} \subset U_1 \cap U_2$ 取不同的值，即 $\gamma_1(z) = -\gamma_2(z)$。

尽管在前一个例子中，平方根使极大轨迹不再唯一，但它在整个 $\mathbb{C}/\{0\}$ 上并没有定义，不过在 $\mathbb{C}/\{0\}$ 的 $2:1$覆盖 $z \mapsto z^2$ 上有定义。同样，全纯哈密顿系统的极大轨迹在“将其投影到覆盖空间上”之后便变得唯一。为理解这一想法，回忆一下，对于实哈密顿系统 $(M,\ \omega,\ H)$，若 $E$是 $H$的正则值，则能量超曲面 $H^{-1}(E)$ 由 $(M,\ \omega,\ H)$ 的极大轨迹构成叶状结构。类似地，全纯哈密顿系统 $(X,\ \Omega,\ \mathrm{H})$ 的正则能量超曲面也存在叶状结构。不过这一次，叶状结构的叶“远不止”极大轨迹：

**命题 3**（正则超曲面的全纯叶状结构）。设$(X,\Omega,\mathcal{H})$是一个具有复结构 $J$、哈密顿向量场 $X_{\mathcal{H}} = 1/2(X^R_{\mathcal{H}} - iJ(X^R_{\mathcal{H}}))$，且 $E$ 是 $\mathcal{H}$ 的正则值的全纯哈密顿系统。则能量超曲面 $\mathcal{H}^{-1}(E)$ 允许一种全纯[10]叶状结构。该叶状结构中经过点 $x_0 \in \mathcal{H}^{-1}(E)$ 的叶 $L_{x_0}$ 由下式给出

$$L_{x_0} \coloneqq \{y \in X \mid y = \varphi^{X^R_{\mathcal{H}}}_{t_1} \circ \varphi^{J(X^R_{\mathcal{H}})}_{s_1} \circ \varphi^{X^R_{\mathcal{H}}}_{t_2} \circ \varphi^{J(X^R_{\mathcal{H}})}_{s_2} \circ \ldots \circ \varphi^{X^R_{\mathcal{H}}}_{t_n} \circ \varphi^{J(X^R_{\mathcal{H}})}_{s_n}(x_0); \\ t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}\},$$

其中 $\varphi^{X^R_{\mathcal{H}}}_{t_j}$和 $\varphi^{J(X^R_{\mathcal{H}})}{}_{s_j}$ 分别是 $X^R_{\mathcal{H}}$ 和 $J(X^R_{\mathcal{H}})$ 在时间 $t_j$ 和 $s_j$下的流。每条能量为 $E$ 的 $(X,\Omega,\mathcal{H})$ 全纯轨迹都完全包含在这样一个叶中。

证明。采用上文的假设和记号。 $E$ 是 H 的正则值，因此，$\mathrm{H}^{-1}(E)$ 是 $X$ 的复子流形。$\mathrm{H}^{-1}(E)$ 的（实）切空间由满足 $d\mathrm{H}(W) = 0$ 的向量 $W$ 组成，它们属于 $X$ 的（实）切空间。利用 H 的全纯性， $d\mathrm{H} \circ J = i \cdot d\mathrm{H}$，我们得到

$$d\mathcal{H}(X^R_{\mathcal{H}}) = d\mathcal{H}(X_{\mathcal{H}}) = -\Omega(X_{\mathcal{H}}, X_{\mathcal{H}}) = 0, \\ d\mathcal{H}(J(X^R_{\mathcal{H}})) = i \cdot d\mathcal{H}(X^R_{\mathcal{H}}) = 0$$

这表明，在 $\mathrm{H}^{-1}(E)$ 的每一点， $X^R_{\mathcal{H}}$ 和 $J(X^R_{\mathcal{H}})$ 都属于 $\mathrm{H}^{-1}(E)$ 的切空间。因此，我们可以将 $X^R_{\mathcal{H}}$ 和 $J(X^R_{\mathcal{H}})$ 限制为 $\mathrm{H}^{-1}(E)$ 上的实向量场。
由于 H 在 $\mathrm{H}^{-1}(E)$ 上正则， $X^R_{\mathcal{H}}$ 和 $J(X^R_{\mathcal{H}})$ 在 $\mathrm{H}^{-1}(E)$ 上均不为零。此外，作为实向量场，它们在 $\mathrm{H}^{-1}(E)$ 的每一点都 $\mathbb{R}$-线性无关，因为没有实数的平方等于 $-1$。根据推论 1，$X^R_{\mathcal{H}}$ 和 $J(X^R_{\mathcal{H}})$ 也彼此可交换。因此，我们可以对由实向量场 $X^R_{\mathcal{H}}$和 $J(X^R_{\mathcal{H}})$ 张成的分布应用弗罗贝尼乌斯定理，从而得到 $\mathrm{H}^{-1}(E)$ 上的叶状结构，其叶具有命题 3 中描述的形式。由于生成该叶状结构的向量场 $X^R_{\mathcal{H}}$和 $J(X^R_{\mathcal{H}})$ 分别是一个全纯向量场的实部和虚部，根据弗罗贝尼乌斯定理的全纯版本，该叶状结构本身是全纯的（参见 [8] 中的定理 2.26）。将命题 2 证明中全纯轨迹的构造与命题 3 中叶的形式进行比较可知，全纯轨迹完全包含在一个叶中，证明完毕。

□

**注 3**（$X^R_{\mathcal{H}}$与 $J(X^R_{\mathcal{H}})$ 的流在全局上不可交换）。人们或许会想，在命题 *3* 中定义叶时将 $n$设为 1，因为 $X^R_{\mathcal{H}}$和 $J(X^R_{\mathcal{H}})$ 彼此可交换，它们的流也可交换。然而，这只在局部成立。为说明这一点，我们再次考察例 *1*。取初值$x_0 = (Q_0, P_0) = (1, 1/2)$，并设 $n = 2$, $t_1 = 0$, $s_1 = -2$, $t_2 = -2$ 和 $s_2 = 1$:

$$\varphi^{X^R_{\mathcal{H}}}_0 \circ \varphi^{J(X^R_{\mathcal{H}})}_{-2} \circ \varphi^{X^R_{\mathcal{H}}}_{-2} \circ \varphi^{J(X^R_{\mathcal{H}})}_1 \left(1, \frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{5\pi}{8}}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot e^{-i\frac{5\pi}{8}}\right).$$

[10]如果读者不熟悉全纯叶状结构这一概念，请参阅命题 15 的证明，其中给出了它的定义。

如果交换 $s_1$ 和 $s_2$的顺序，结果会有所不同：

$$\varphi_0^{X_{\mathcal{H}}^R} \circ \varphi_1^{J(X_{\mathcal{H}}^R)} \circ \varphi_{-2}^{X_{\mathcal{H}}^R} \circ \varphi_{-2}^{J(X_{\mathcal{H}}^R)} \left(1, \frac{1}{2}\right) = -\left(\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{5\pi}{8}}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot e^{-i\frac{5\pi}{8}}\right).$$

鉴于命题 3，我们可以说，全纯哈密顿系统 ($X$，Ω，H) 的叶应被视为实哈密顿系统 ($M$，$\omega$，$H$) 极大轨迹的全纯对应定理。让我们进一步考察这一说法。为此，我们首先需要推广全纯轨迹的概念，使得我们可以将任意黎曼曲面视为轨迹的定义域，而不只是 $\mathbb{C}$的子集：

**定义 5** (几何轨迹)。设($X$,Ω, $\mathcal{H}$) 是一个全纯哈密顿系统，且 $E$是$\mathcal{H}$的正则值； $L = \{L_{x_0}\}_{x_0 \in I}$ 是$\mathcal{H}^{-1}(E)$ 的叶状结构（如命题 *3* 所述），其中$I$为某个指标集。此外，设 $\Sigma$ 是一个黎曼曲面，即一个连通的一维复流形。若全纯映射 $\gamma : \Sigma \to X$ 是浸入，且其像完全包含在叶状结构 $L$的某个叶 $L_{x_0}$ 中，则称 $\gamma : \Sigma \to X$ 为能量为 $E$ 的几何轨迹。

几何轨迹的定义是合理的，因为每条几何轨迹在局部都是全纯轨迹：

**命题 4** （几何轨迹在局部是全纯轨迹）。设($X$,Ω, 哈密顿量) 是一个全纯哈密顿系统，其哈密顿量的正则值为 $E$； $\Sigma$是一个黎曼曲面， $\gamma : \Sigma \to X$是能量为 $E$的几何轨迹。那么，对任意 $s_0 \in \Sigma$，都存在 $s_0$ 的一个开邻域 $V \subset \Sigma$ 以及 $\Sigma$ 的一个全纯坐标图 $\varphi : V \to U \subset \mathbb{C}$，使得$\gamma \circ \varphi^{-1} : U \to X$是全纯哈密顿系统 ($X$,Ω, 哈密顿量)的一条全纯轨迹。

证明。 沿用上文的假设和记号。由于 $\gamma$ 是一个全纯浸入，其像完全包含在一片叶中，并且 $L$ 的叶由哈密顿向量场 $X_{\mathcal{H}}$生成，因此，对每个 $s \in \Sigma$，都存在唯一确定的向量 $Y_{\mathcal{H}}(s) \in T_s^{(1,0)}\Sigma$，使得：

$$d\gamma|_s(Y_{\mathcal{H}}(s)) = X_{\mathcal{H}}(\gamma(s)).$$

这些向量构成了 $\Sigma$ 上的全纯向量场 $Y_{\mathcal{H}}$。现在取 $s_0 \in \Sigma$ 和 $z_0 \in \mathbb{C}$。根据命题 2 和注 4，存在一个开连通子集 $U \subset \mathbb{C}$，使得 $\varphi^{-1} : U \to \Sigma$ 是满足 $\varphi^{-1}(z_0) = s_0$ 的 $Y_{\mathcal{H}}$ 的全纯积分曲线。必要时缩小 $U$ 后， $\varphi^{-1}$ 成为到其像 $\varphi^{-1}(U) =: V$ 上的双全纯映射。因此，$\varphi : V \to U$ 是 $\Sigma$ 在 $s_0$ 附近的全纯坐标图。此外，曲线 $\gamma \bigcirc \varphi^{-1} : U \to X$ 是 $X_{\mathcal{H}}$ 的积分曲线：

$$\left(\gamma \circ \varphi^{-1}\right)'(z) = d\gamma|_{\varphi^{-1}(z)}\left(\varphi^{-1\prime}(z)\right) = d\gamma|_{\varphi^{-1}(z)}\left(Y_{\mathcal{H}}(\varphi^{-1}(z))\right) = X_{\mathcal{H}}(\gamma \circ \varphi^{-1}(z)) \quad \forall z \in U,$$

因此，它是一条全纯轨迹，从而完成证明。 □

现在假设 ($X$，Ω，H) 是一个全纯哈密顿系统，且 $E$ 是 H 的正则值，$L = \{L_{x_0}\}_{x_0 \in I}$ 是 $\mathrm{H}^{-1}$($E$) 的叶状结构。取一片叶 $L_{x_0}$。如果 $L_{x_0}$ 是 $X$ 的复子流形，那么包含映射 $L_{x_0} \hookrightarrow X$ 显然是一条几何轨迹。如果 $L_{x_0}$ 不是复子流形

属于 $X$，我们总可以通过选取合适的图册，为 $L_{x_0}$ 赋予复流形结构，使包含映射 $L_{x_0} \hookrightarrow X$ 成为一条几何轨迹。所讨论的图册由映射 $\gamma^{-1}$ 构成，其中 $\gamma : U \to X$ 是一个单射全纯轨迹，其像包含于 $L_{x_0}$ 中。与极大轨迹不同，给定初值 $x_0 \in \mathrm{H}^{-1}(E) \subset X$ 且满足 $x_0 \in L_{x_0}$ 时，几何轨迹 $L_{x_0} \hookrightarrow X$ 是唯一的。事实上，这种唯一性可以表述为一种泛性质：取$x_0 \in \mathrm{H}^{-1}(E)$。那么，每一条初值为 $x_0 \in \gamma(\Sigma)$ 的几何轨迹 $\gamma : \Sigma \to X$，都唯一地经由几何轨迹 $L_{x_0} \hookrightarrow X$ 分解；并且，具有该性质的几何轨迹$L_{x_0} \hookrightarrow X$ 在双全纯映射意义下唯一。

通常，几何轨迹 $L_{x_0} \hookrightarrow X$ 可以理解为对极大轨迹的覆盖，或被极大轨迹覆盖。例 1 展示了这种情形。要了解这一点，我们首先需要确定例 1 中的叶。为此，我们应用以下命题：

**命题 5**（低维系统的能量超曲面）。设 $(X, \Omega, \mathcal{H})$ 是一个维数$_{\mathbb{C}}(X) = 2$ 的全纯哈密顿系统，且 $E$ 是 $\mathcal{H}$的正则值。那么，$\mathcal{H}^{-1}(E)$ 的叶就是它的连通分支；特别地，它们是 $X$的复子流形。

证明。沿用上文的记号和假设。$X$ 是一个复二维流形，因此，$\mathrm{H}^{-1}(E)$ 是一个复一维流形。同样，$\mathrm{H}^{-1}(E)$ 的叶是浸入 $\mathrm{H}^{-1}(E)$ 的一维复流形。因此，这些叶在 $\mathrm{H}^{-1}(E)$ 中是开集。根据叶状结构的定义，$\mathrm{H}^{-1}(E)$ 分解为叶的不交并。因此，这些叶在 $\mathrm{H}^{-1}(E)$ 中也为闭集，证毕。 □

回到例 1。根据命题 5，本例中的叶就是能量超曲面 $\mathrm{H}^{-1}(E)$ 的连通分支。对于 $E \neq 0$，能量超曲面是连通的，只包含一片叶，即其自身。对于 $E = 0$，我们有：

$$\mathcal{H}(Q,P) = \frac{P^2}{2} - \frac{1}{8Q^2} = \frac{1}{2}\left(P - \frac{1}{2Q}\right)\left(P + \frac{1}{2Q}\right) \overset{!}{=} 0.$$

我们看到这次有两个连通分支，因此也有两片叶：一片对应 $Q \cdot P = \frac{1}{2}$，另一片对应 $Q \cdot P = -\frac{1}{2}$。我们已经确定了对应于 $Q \cdot P = \frac{1}{2}$ 这片叶的极大轨迹：它们由 $Q(z) = \sqrt{z+1}$ 和$P = Q'(z)$ 给出，并取适当的平方根。将极大轨迹与 $2:1$ 覆盖 $z \mapsto z^2 - 1$ 作前复合，便得到一个从 $\mathbb{C}/\{0\}$ 到对应于 $Q \cdot P = \frac{1}{2}$ 的叶的良定义映射。事实上，这个映射是一个双全纯映射。从这个意义上说，这片叶可以看作极大轨迹的双重覆盖。关于一片叶被一条极大轨迹覆盖的例子，请参见例2。

在结束关于全纯轨线的这一节之前，我们再简要补充两点。第一点涉及全纯轨线和几何轨迹的概念：在本文余下部分中，我们不再区分全纯轨线与几何轨迹，而是交替使用这两个名称。第二点涉及一般复流形上的全纯向量场：

**注 4.** 上述结果不仅适用于 *HHS* 的全纯哈密顿量向量场和全纯轨线，也适用于任意复流形上的全纯向量场和全纯积分曲线。

### 2.3. HHS 的作用泛函与原理

与实情形一样，我们希望将全纯哈密顿系统 $(X,\Omega,\mathrm{H})$ 的全纯轨线与某个作用泛函的临界点联系起来。为此，我们先研究 $X$ 上的全纯辛 2-形式 $\Omega$。根据定义，$\Omega$ 在 $T^{(1,0)}X$ 上非退化，但在 $T^{(0,1)}X$ 上为零。每个复形式 $\Omega$ 与复向量 $V$ and $W$ 都满足 $\Omega(V,W) = \Omega(V,W)$，因此，全纯辛形式 $\Omega$ 的复共轭 $\Omega$ 在 $T^{(0,1)}X$ 上非退化，但在 $T^{(1,0)}X$[11] 上为零。总之，这意味着 $\Omega$ 的实部和虚部，

$$\Omega_R = \frac{1}{2}(\Omega + \overline{\Omega}) \quad \text{and} \quad \Omega_I = \frac{-i}{2}(\Omega - \overline{\Omega}),$$

在 $X$ 的整个复化切丛 $T_{\mathbb{C}}X = T^{(1,0)}X \oplus T^{(0,1)}X$ 上均非退化。显然，$\Omega_R$ 和 $\Omega_I$ 是 $X$ 上的实 2-形式，因此在实切丛 $TX$ 上也必然非退化。由于 $\Omega$ 是全纯且闭的，$\Omega_R$ 和 $\Omega_I$ 光滑且闭。综合以上各点可知，$\Omega$ 的实部 $\Omega_R$ 和虚部 $\Omega_I$ 分别是将 $X$ 视为实流形时其上的辛 2-形式。

回到全纯哈密顿系统 $(X, \Omega, \mathrm{H})$。显然，哈密顿量 $\mathrm{H} = \mathrm{H}_R + i\mathrm{H}_I$ 的实部和虚部都是 $X$ 上的光滑实函数。因此，任意全纯哈密顿系统 $(X, \Omega, \mathrm{H})$ 都会产生四个实哈密顿系统：$(X, \Omega_R, \mathrm{H}_R)$、$(X, \Omega_I, \mathrm{H}_R)$、$(X, \Omega_R, \mathrm{H}_I)$ 和 $(X, \Omega_I, \mathrm{H}_I)$[12]。接下来，我们要确定这四个实哈密顿系统的哈密顿向量场。

我们从实哈密顿系统 $(X, \Omega_R, \mathrm{H}_R)$ 开始。将全纯哈密顿向量场 $X_{\mathcal{H}}$ 记作 $X_{\mathcal{H}} = 1/2(X^R_{\mathcal{H}} - iJ(X^R_{\mathcal{H}}))$，并计算 $\iota_{X^R_{\mathcal{H}}}\Omega_R$:

$$\begin{aligned}\iota_{X^R_{\mathcal{H}}}\Omega_R &= \frac{1}{2}\left(\iota_{X^R_{\mathcal{H}}}\Omega + \iota_{X^R_{\mathcal{H}}}\overline{\Omega}\right) = \frac{1}{2}\left(\iota_{X^R_{\mathcal{H}}}\Omega + \iota_{\overline{X^R_{\mathcal{H}}}}\overline{\Omega}\right) = \frac{1}{2}\left(\iota_{X^R_{\mathcal{H}}}\Omega + \overline{\iota_{X^R_{\mathcal{H}}}\Omega}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\iota_{X_{\mathcal{H}}}\Omega + \overline{\iota_{X_{\mathcal{H}}}\Omega}\right) = -\frac{1}{2}\left(d\mathcal{H} + \overline{d\mathcal{H}}\right) = -\frac{1}{2}d\left(\mathcal{H} + \overline{\mathcal{H}}\right) = -d\mathcal{H}_R,\end{aligned}$$

这里用到了 $X^R_{\mathcal{H}}$ 是 $X$ 上的实向量场，即 $X^R_{\mathcal{H}} = X^R_{\mathcal{H}}$，并且根据方程（1），$\iota_{X_{\mathcal{H}}}\Omega = \iota_{X^R_{\mathcal{H}}}\Omega$。由上式可知，$X^R_{\mathcal{H}}$ 是实哈密顿系统 $(X, \Omega_R, \mathrm{H}_R)$ 的实哈密顿向量场。类似地，可以证明以下命题:

**命题 6**（全纯哈密顿系统作为四个实哈密顿系统）。设（$X, \Omega = \Omega_R + i\Omega_I, \mathcal{H} = \mathcal{H}_R + i\mathcal{H}_I$）是一个全纯哈密顿系统，其哈密顿向量场为 $X_{\mathcal{H}} = 1/2$（$X^R_{\mathcal{H}} - iJ$（$X^R_{\mathcal{H}}$））。那么:

[11] 这里，我们还利用了复共轭映射将 $T^{(1,0)}X$ 映射到 $T^{(0,1)}X$，并将 $T^{(0,1)}X$ 映射到 $T^{(1,0)}X$这一事实。

[12] 正如我们稍后将看到的，说 $(X, \Omega, \mathrm{H})$ 仅产生两个实哈密顿系统可能更恰当，因为 $(X, \Omega_R, \mathrm{H}_R)$ 和 $(X, \Omega_I, \mathrm{H}_I)$，以及 $(X, \Omega_I, \mathrm{H}_R)$ 和 $(X, \Omega_R, -\mathrm{H}_I)$，都遵循相同的动力学。

*1.*（$X$,$\Omega_R$, $\mathcal{H}_R$）是一个实哈密顿系统，其哈密顿向量场为 $X^R_{\mathcal{H}}$。*2.*（$X$, $\Omega_R$, $\mathcal{H}_I$）是一个实哈密顿系统，其哈密顿向量场为 $-J$（$X^R_{\mathcal{H}}$）。*3.*（$X$, $\Omega_I$, $\mathcal{H}_R$）是一个实哈密顿系统，其哈密顿向量场为 $J$（$X^R_{\mathcal{H}}$）。*4.*（$X$, $\Omega_I$, $\mathcal{H}_I$）是一个实哈密顿系统，其哈密顿向量场为 $X^R_{\mathcal{H}}$。

**备注5**（柯西-黎曼型关系）。乍看之下，人们可能会疑惑，为什么$(X, \Omega_R, \mathcal{H}_R)$和$(X, \Omega_I, \mathcal{H}_I)$的哈密顿向量场相同，而$(X, \Omega_R, \mathcal{H}_I)$和$(X, \Omega_I, \mathcal{H}_R)$的哈密顿向量场却相差一个符号。不过，这一现象只是全纯哈密顿系统$(X,\Omega, \mathcal{H})$解析性的结果，也可以将其视为柯西-黎曼型关系：

$$X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R} = X^{\Omega_I}_{\mathcal{H}_I}; \quad J\left(X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R}\right) = X^{\Omega_I}_{\mathcal{H}_R} = -X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_I},$$

其中 $X^{\Omega_a}{}_{\mathcal{H}_b}$是实哈密顿系统$(X,\Omega, \mathcal{H}_b)$的哈密顿向量场。

命题 6 的要点是，全纯哈密顿系统（$X$,$\Omega$, H）的实轨迹恰好就是实哈密顿系统（$X$, $\Omega_R$,$\mathrm{H}_R$）和（$X$,$\Omega_I$,$\mathrm{H}_I$）的轨线。特别地，（$X$,$\Omega$, H）的实轨迹是某个作用泛函的临界点，至少当（$X, \Omega = d\Lambda, \mathrm{H}$）是恰当的[13]时如此。当然，对于（$X, \Omega_R, \mathrm{H}_I$）和（$X$, $\Omega_I, \mathrm{H}_R$）的轨线，也同样如此：

命题 *7*（实轨迹的作用原理）。设 *(X, Ω = dΛ, H)* 是一个精确的全纯哈密顿系统，其哈密顿向量场为 $X_{\mathcal{H}} = 1/2(X^R_{\mathcal{H}} - iJ(X^R_{\mathcal{H}}))$，且分解为 $\Omega = \Omega_R + i\Omega_I$, $\Lambda = \Lambda_R + i\Lambda_I$，以及 $H = H_R + iH_I$。设 $I_0 \subset \mathbb{R}$为一个区间。令 $P_{I_0} \coloneqq C^\infty(I_0, X)$，并定义作用泛函 $A^{\Lambda_R}H_R : P_{I_0} \to \mathbb{R}$, $A^{\Lambda_R}_{-}H_I : P_{I_0} \to \mathbb{R}$[14], $A^{\Lambda_I}H_R : P_{I_0} \to \mathbb{R}$, $A^{\Lambda_I}H_I : P_{I_0} \to \mathbb{R}$, $A^{\Lambda}_{\mathcal{H}} : P_{I_0} \to \mathbb{C}$ 和 $A^{\Lambda}_{i\mathcal{H}} : P_{I_0} \to \mathbb{C}$ 如下

$$\mathcal{A}^{\Lambda_R}_{\mathcal{H}_R}[\gamma] \coloneqq \int_{I_0} \gamma^*\Lambda_R - \int_{I_0} \mathcal{H}_R \circ \gamma(t)dt, \quad \mathcal{A}^{\Lambda_R}_{-\mathcal{H}_I}[\gamma] \coloneqq \int_{I_0} \gamma^*\Lambda_R + \int_{I_0} \mathcal{H}_I \circ \gamma(t)dt,$$
$$\mathcal{A}^{\Lambda_I}_{\mathcal{H}_R}[\gamma] \coloneqq \int_{I_0} \gamma^*\Lambda_I - \int_{I_0} \mathcal{H}_R \circ \gamma(t)dt, \quad \mathcal{A}^{\Lambda_I}_{\mathcal{H}_I}[\gamma] \coloneqq \int_{I_0} \gamma^*\Lambda_I - \int_{I_0} \mathcal{H}_I \circ \gamma(t)dt,$$
$$\mathcal{A}^{\Lambda}_{\mathcal{H}}[\gamma] \coloneqq \mathcal{A}^{\Lambda_R}_{\mathcal{H}_R}[\gamma] + i\mathcal{A}^{\Lambda_I}_{\mathcal{H}_I}[\gamma] = \int_{I_0} \gamma^*\Lambda - \int_{I_0} \mathcal{H} \circ \gamma(t)dt,$$
$$\mathcal{A}^{\Lambda}_{i\mathcal{H}}[\gamma] \coloneqq \mathcal{A}^{\Lambda_R}_{-\mathcal{H}_I}[\gamma] + i\mathcal{A}^{\Lambda_I}_{\mathcal{H}_R}[\gamma] = \int_{I_0} \gamma^*\Lambda - i\int_{I_0} \mathcal{H} \circ \gamma(t)dt,$$

其中 $\gamma \in \mathcal{P}_{I_0}$。现在，令 $\gamma \in \mathcal{P}_{I_0}$为 $X$ 中任意一条光滑路径。那么，$\gamma$ 是 $(X, \Omega, \mathcal{H})$ 的一条实轨迹，当且仅当 $\gamma$ 是作用泛函 $\mathcal{A}^{\Lambda_R}{}_{\mathcal{H}_R}$, $\mathcal{A}^{\Lambda_I}{}_{\mathcal{H}_I}$ 和 $\mathcal{A}^{\Lambda}_{\mathcal{H}}$ 的一个“临界点”。类似地，$\gamma$ 是 $J(X^R_{\mathcal{H}})$ 的一条（实）积分曲线，当且仅当 $\gamma$ 是作用泛函 $\mathcal{A}^{\Lambda_R}_{-}{}_{\mathcal{H}_I}$, $\mathcal{A}^{\Lambda_I}{}_{\mathcal{H}_R}$ 和 $\mathcal{A}^{\Lambda}_{i\mathcal{H}}$ 的一个“临界点”。

[13]全纯哈密顿系统（HHS）（$X$，$\Omega$，H）是恰当的，当且仅当 $\Omega$ 存在全纯原函数 $\Lambda$。[14]注意，由于柯西-黎曼型关系，$\mathrm{A}^{\Lambda_R}_{-}{}_{\mathcal{H}_I}$ 的定义中符号不同。

证明。 命题 7 是命题 6 和实哈密顿系统的作用原理的推论。

□

**注 6** （“临界点”的含义）。 “临界点”并非指真正的临界点。命题 7 中的“临界点”是指作用泛函的一阶导数在 $\gamma$ 处仅对所有保持 $\gamma$ 的端点 $\gamma$ 固定的变分才为零！人们通常希望将轨线视为某个作用泛函的真正临界点，而不仅仅是在端点固定的情况下。实现这一点主要有两种方法：

*1.* 只考虑起点和终点都位于辛形式的原始形式为零的点上的路径，这些点通常是辛流形中的拉格朗日子流形。*2.* 只考虑周期路径，使得作用泛函一阶导数中的边界项相互抵消。

**注 7** （“倾斜”轨线的作用泛函）。 积分曲线 $X^R_{\mathcal{H}}$和 $J(X^R_{\mathcal{H}})$ 分别与作用泛函 $\mathcal{A}^{\Lambda}_{\mathcal{H}}$和 $\mathcal{A}^{\Lambda}_{i\mathcal{H}}$的“临界点”相关联这一观察，可以推广到“倾斜”轨线。对于任意 $\alpha\in\mathbb{R}$， $\gamma$是 $\cos(\alpha)\cdot X^R_{\mathcal{H}}+\sin(\alpha)\cdot J(X^R_{\mathcal{H}})$ 的积分曲线，当且仅当 $\gamma$是由下式定义的作用泛函 $\mathcal{A}^{\Lambda}_{e^{i\alpha}\mathcal{H}}:\mathcal{P}_{I_0}\to\mathbb{C}$的“临界点”：

$$\mathcal{A}^{\Lambda}_{e^{i\alpha}\mathcal{H}}[\gamma]\coloneqq\int_{I_0}\gamma^*\Lambda-e^{i\alpha}\int_{I_0}\mathcal{H}\circ\gamma(t)dt.$$

当然，如果我们只考虑 $\mathcal{A}^{\Lambda}_{e^{i\alpha}\mathcal{H}}$ 的实部或虚部，同样的作用原理依然成立。这一事实在后文以及附录 *C* 中将非常重要。

由于全纯哈密顿系统 $(X,\Omega,\mathrm{H})$ 的全纯轨迹是其实轨迹的解析延拓，因此只求出实轨迹的作用泛函或许就足够了。不过，也可以通过对以下四个底层实哈密顿系统的作用泛函进行平均化，为 $(X,\Omega,\mathrm{H})$ 的全纯轨迹构造作用泛函：

**引理 1** (全纯轨迹的作用原理)。 设 $(X,\Omega=d\Lambda,\mathcal{H})$ 是一个恰当 *HHS*，且满足 $\Lambda=\Lambda_R+i\Lambda_I$。此外，设 $R\coloneqq[t_1,t_2]+i[s_1,s_2]\subset\mathbb{C}$ 是复平面中的一个矩形，其实数边界为 $t_1<t_2$ 和 $s_1<s_2$。用 $\mathcal{P}_R$ 表示从 $R$ 到 $X$ 的光滑映射空间，并定义作用泛函 $\mathcal{A}^R_{\mathcal{H}}:\mathcal{P}_R\to\mathbb{C}$ 如下：

$$\mathcal{A}^R_{\mathcal{H}}[\gamma]\coloneqq\int_{t_1}^{t_2}\int_{s_1}^{s_2}\left[\Lambda_R|_{\gamma(t+is)}\left(2\frac{\partial\gamma}{\partial z}(t+is)\right)-\mathcal{H}\circ\gamma(t+is)\right]ds\,dt\ \ with\ \frac{\partial\gamma}{\partial z}\coloneqq\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial t}-i\frac{\partial\gamma}{\partial s}\right)$$

对于每个 $\gamma\in\mathcal{P}_R$。现在，设 $\gamma\in\mathcal{P}_R$ 是从 $R$ 到 $X$的光滑映射。那么， $\gamma$ 是 $(X,\Omega,\mathcal{H})$ 的全纯轨迹，当且仅当 $\gamma$是 $\mathcal{A}^R_{\mathcal{H}}$的“临界点”。

[15]“临界点”意味着只允许那些在边界 $\partial R$ 上保持 $\gamma$ 不变的变分。

证明。 沿用上文的记号，并将 $\mathrm{H} = \mathrm{H}_R + i\mathrm{H}_I$分解。此外，设$\gamma \in \mathrm{P}_R$ 为光滑映射，并设 $\gamma_s : [t_1, t_2] \to X$ 和 $\gamma_t : [s_1, s_2] \to X$ 由下式定义：$\gamma_s(t) = \gamma(t + is) = \gamma_t(s)$，其中 $s \in [s_1, s_2]$ 和 $t \in [t_1, t_2]$为任意值。回顾命题 7 中的作用泛函。经过简短计算可得，$\mathrm{A}^R_{\mathcal{H}}[\gamma]$ 可表示为

$$\mathcal{A}^R_{\mathcal{H}}[\gamma] = \int_{s_1}^{s_2} \mathcal{A}^{\Lambda_R}_{\mathcal{H}_R}[\gamma_s]ds - i\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{A}^{\Lambda_R}_{-\mathcal{H}_I}[\gamma_t]dt.$$

$\gamma$ 是 $\mathrm{A}^R_{\mathcal{H}}$ 的“临界点”，当且仅当 $\gamma$ 是其实部和虚部的“临界点”。现在考虑 $\mathrm{A}^R_{\mathcal{H}}$ 的实部。对于任意 $s \in [s_1, s_2]$，$\gamma_s$ 是 $\mathrm{A}^{\Lambda_R}{}_{\mathcal{H}_R}$ 的“临界点”，当且仅当 $\gamma_s$ 是 $X^R_{\mathcal{H}}$ 的积分曲线，其中 $X_{\mathcal{H}} = 1/2(X^R_{\mathcal{H}} - iJ(X^R_{\mathcal{H}}))$ 是 $(X, \Omega, \mathrm{H})$ 的哈密顿向量场。明确写出泛函 $\gamma \mapsto \int \mathrm{A}^{\Lambda_R}{}_{\mathcal{H}_R}[\gamma_s]ds$ 的一阶导数，可知该性质在平均化下保持不变：$\gamma$是 $\gamma \mapsto \int \mathrm{A}^{\Lambda_R}{}_{\mathcal{H}_R}[\gamma_s]ds$ 的“临界点”，当且仅当对于每个 $s \in [s_1, s_2]$，$\gamma_s$都是 $X^R_{\mathcal{H}}$ 的积分曲线。

类似地，对于 $\mathrm{A}^R_{\mathcal{H}}$ 的虚部，我们发现：$\gamma$ 是$\gamma \mapsto \int \mathrm{A}^{\Lambda_R}_{-}{}_{\mathcal{H}_I}[\gamma_t]dt$ 的“临界点”，当且仅当对于每个 $t \in [t_1, t_2]$，$\gamma_t$都是 $J(X^R_{\mathcal{H}})$ 的积分曲线。结合目前得到的结果可知，$\gamma$是 $\mathrm{A}^R_{\mathcal{H}}$ 的“临界点”，当且仅当对于每个 $s \in [s_1, s_2]$，$\gamma_s$都是 $X^R_{\mathcal{H}}$ 的积分曲线，并且对于每个 $t \in [t_1, t_2]$，$\gamma_t$都是 $J(X^R_{\mathcal{H}})$ 的积分曲线。回顾第 2.2 小节的内容，$(X, \Omega, \mathrm{H})$ 的全纯轨迹恰好是满足以下条件的光滑映射 $\gamma$：沿 $t$ 方向是 $X^R_{\mathcal{H}}$ 的积分曲线，沿 $s$ 方向是 $J(X^R_{\mathcal{H}})$ 的积分曲线。由此证明得证。 □

为了更好地理解引理 1，下面作几点说明：

**注 8.**

*1.* 请注意，引理 *1* 中的作用泛函$\mathcal{A}^R_{\mathcal{H}}$ 只使用实部 $\Lambda_R$，而不使用$\Lambda_I$。当然，也存在__包含 $\Lambda_I$ 的类似作用泛函，但由于第 *3* 节中会显现的原因，我们不会使用它。 *2.* 如前所述，人们可能希望将全纯轨线表示为某个泛函的实际临界点。同样，实现这一点主要有两种方式：可以只考虑从矩形 $R$映射到 $X$的光滑映射 $\gamma$，这些映射..... *a)* .....将边界 $\partial R$映射到 $X$中的点，使得1-形式 $\Lambda_R$在这些点处消失；这些点通常位于 $X$的拉格朗日子流形上。 *b)* .....是双周期的，即沿 $t$方向和 $s$方向都周期。理论上，甚至可以设想将两种方法结合起来：只考虑沿一个方向周期，并将垂直于另一方向的边界映射到 $X$的拉格朗日子流形上的映射 $\gamma$。

*3.* 从更几何的角度来看，作用量$\mathcal{A}^R_{\mathcal{H}}$ 可表示为

$$\mathcal{A}^R_{\mathcal{H}}[\gamma] = \iint_R \left[\Lambda_R|_{\gamma(t+is)}\left(2\frac{\partial\gamma}{\partial z}(t+is)\right) - \mathcal{H}\circ\gamma(t+is)\right]dt\wedge ds,$$

其中， $dt \wedge ds$ 是 $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$上的标准面积形式。如果 $\gamma$ 是$\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^R$的“临界点”，或者说是一条全纯曲线，则有：

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z}(t+is) = \gamma'(t+is) \in T^{(1,0)}X.$$

利用 $\Lambda_R(V) = i\Lambda_I(V)$，对于 $V \in T^{(1,0)}X$，我们得到此类 $\gamma$的作用量为

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^R[\gamma] = \iint_R \left[\Lambda\left(\gamma'(t+is)\right) - \mathcal{H} \circ \gamma(t+is)\right] dt \wedge ds,$$

其中方括号中的表达式关于 $z = t + is$ 是全纯的。

*4.* 仔细考察引理 *1* 后，人们可能会想知道：如果将 $\mathcal{P}_R$ 限制为从 $R$ 到 $X$ 的全纯曲线，而不再遍历所有从 $R$ 到 $X$ 的光滑曲线，引理 *1* 是否仍然成立。显然并非如此，因为 $\gamma$ 在 $\partial R$ 处取得的值完全确定了一条全纯曲线，因此在这个空间上进行变分并不可行。作用泛函 $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^R$ 本身则提供了另一种视角。通过写出 $dt \wedge ds = i/2 \cdot dz \wedge d\bar{z}$ 并回顾第 *3* 点，可以将 $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^R[\gamma]$ 写成一个具有原函数的形式在全纯 $\gamma$ 上的积分。根据斯托克斯定理，$\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^R[\gamma]$ 因而只取决于 $\gamma$ 在边界 $\partial R$上的取值。由于变分过程中这些值保持不变，作用泛函在整个变分过程中始终不变，因而无法提供任何信息。附录 *C* 对这一现象作了进一步解释。

我们不仅可以为矩形定义作用泛函 $\mathrm{A}_{\mathcal{H}}^R$，还可以为 $\mathbb{C}$ 中各种各样的区域定义作用泛函。附录 C 中探讨了其中许多类型。这里，我们快速介绍 $\mathrm{A}_{\mathcal{H}}^R$ 的一种推广，即适用于平行四边形$P_\alpha$的作用泛函 $\mathrm{A}^{P_\alpha}{}_{\mathcal{H}}$。为简单起见，我们假设张成平行四边形$P_\alpha$ 的第一个向量平行于实轴，因此可以写成 $P_\alpha = [t_1, t_2] + e^{i\alpha} \cdot [r_1, r_2]$，其中 $\alpha \in \mathbb{R}/\{n \cdot \pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 是某个角， $t_1 < t_2$ 和 $r_1 < r_2$ 是某些实数。利用标准面积形式 $dt \wedge ds$，将 $\mathrm{A}_{\mathcal{H}}^R$ 推广为 $\mathrm{A}^{P_\alpha}{}_{\mathcal{H}}$ 是直接的：

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^{P_\alpha}[\gamma] \coloneqq \iint_{P_\alpha} \left[\Lambda_R|_{\gamma(t+is)}\left(2\frac{\partial \gamma}{\partial z}(t+is)\right) - \mathcal{H} \circ \gamma(t+is)\right] dt \wedge ds \quad \forall \gamma \in \mathcal{P}_{P_\alpha},$$

其中我们使用了坐标 $z = t + is$，并按照引理 1 的定义定义了 $\partial\gamma/\partial z$。为了证明 $\gamma$ 是 $\mathrm{A}^{P_\alpha}{}_{\mathcal{H}}$ 的“临界点”当且仅当 $\gamma$ 是一条全纯轨迹，我们将 $\mathrm{A}^{P_\alpha}{}_{\mathcal{H}}$ 表示为

“倾斜”坐标 $z = t + r\cdot e^{i\alpha}$ （固定 $\alpha$）：

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{P_\alpha}_{\mathcal{H}}[\gamma] &= \int_{t_1}^{t_2}\int_{r_1}^{r_2}\left[\Lambda_R|_{\gamma(t+re^{i\alpha})}\left(2\frac{\partial\gamma}{\partial z}(t+re^{i\alpha})\right) - \mathcal{H}\circ\gamma(t+re^{i\alpha})\right]\sin(\alpha)\,dr\,dt\\ &= \int_{t_1}^{t_2}\int_{r_1}^{r_2}\Big[\Lambda_R|_{\gamma(t+re^{i\alpha})}\left(ie^{-i\alpha}\cdot\frac{d\gamma_r}{dt}(t) - i\cdot\frac{d\gamma_t}{dr}(r)\right)\\ &\qquad -\left(ie^{-i\alpha}\mathcal{H}_R - i\mathrm{Re}(e^{i\alpha}\mathcal{H})\right)\circ\gamma(t+re^{i\alpha})\Big]\,dr\,dt\\ &= ie^{-i\alpha}\int_{r_1}^{r_2}\mathcal{A}^{\Lambda_R}_{\mathcal{H}_R}[\gamma_r]dr - i\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{Re}(\mathcal{A}^{\Lambda}_{e^{i\alpha}\mathcal{H}}[\gamma_t])dt,\end{aligned}$$

其中，对于任意 $t\in[t_1,t_2]$ 和 $r\in[r_1,r_2]$，曲线 $\gamma_r:[t_1,t_2]\to X$ 和 $\gamma_t:[r_1,r_2]\to X$ 由 $\gamma_r(t) = \gamma(t+re^{i\alpha}) = \gamma_t(r)$ 定义，$\mathrm{Re}(\cdot)$ 表示实部，而 $\mathbf{A}^{\Lambda_R}\mathbf{H}_R$ 和 $\mathbf{A}^{\Lambda}_{e^{i\alpha}}\mathbf{H}$ 分别是命题 7 和注 7 中的作用泛函。对于 $\alpha\neq n\cdot\pi$、$n\in\mathbb{Z}$，复数 $ie^{-i\alpha}$ 和 $-i$ 构成 $\mathbb{C}$ 的 $\mathbb{R}$-线性基。因此，当且仅当 $\gamma$ 是泛函 $\gamma\mapsto\int\mathbf{A}^{\Lambda_R}\mathbf{H}_R[\gamma_r]dr$ 和 $\gamma\mapsto\int\mathrm{Re}(\mathbf{A}^{\Lambda}_{e^{i\alpha}}\mathbf{H}[\gamma_t])dt$的“临界点”时，$\gamma$ 是 $\mathbf{A}^{P_\alpha}\mathbf{H}$ 的“临界点”。接下来的论证与引理 1 的证明相同，利用命题 7、注 7，以及全纯轨迹恰好是这样的光滑曲线这一事实：它们在 $t$ 方向上是 $X^R_{\mathcal{H}}$ 的积分曲线，在 $r$ 方向上是 $\cos(\alpha)X^R_{\mathcal{H}} + \sin(\alpha)J(X^R_{\mathcal{H}})$ 的积分曲线（$z = t + re^{i\alpha}$），其中 $\alpha\in\mathbb{R}/\{n\cdot\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}$。综上，我们刚刚证明了：

**命题 8**（平行四边形的作用原理）。设 $(X,\Omega = d\Lambda,\mathcal{H})$ 是一个满足 $\Lambda = \Lambda_R + i\Lambda_I$ 的恰当 *HHS*。对于 $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{n\cdot\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}$，设 $P_\alpha := [t_1,t_2] + e^{i\alpha}[r_1,r_2]\subset\mathbb{C}$ 是复平面中的一个平行四边形，其实数为 $t_1 < t_2$ 和 $r_1 < r_2$。记从 $P_\alpha$ 到 $X$ 的光滑映射空间为 $\mathcal{P}_{P_\alpha}$，并定义作用泛函 $\mathcal{A}^{P_\alpha}\mathcal{H}:\mathcal{P}_{P_\alpha}\to\mathbb{C}$如下

$$\mathcal{A}^{P_\alpha}_{\mathcal{H}}[\gamma] := \iint_{P_\alpha}\left[\Lambda_R|_{\gamma(t+is)}\left(2\frac{\partial\gamma}{\partial z}(t+is)\right) - \mathcal{H}\circ\gamma(t+is)\right]dt\wedge ds \ \ with\ \frac{\partial\gamma}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial t} - i\frac{\partial\gamma}{\partial s}\right)$$

对每个 $\gamma\in\mathcal{P}_{P_\alpha}$ 均成立。现在，设 $\gamma\in\mathcal{P}_{P_\alpha}$ 是一个从 $P_\alpha$ 到 $X$ 的光滑映射。那么，$\gamma$ 是 $(X,\Omega,\mathcal{H})$ 的全纯轨迹，当且仅当 $\gamma$ 是 $\mathcal{A}^{P_\alpha}\mathcal{H}$ 的一个“临界点”[16]。

**注 9**。命题 *8* 是引理 *1* 的直接推广，因为将 $\alpha = \pi/2$ 代入命题 *8* 即可得到引理 *1*。

在结束第 2.3 小节之前，让我们更仔细地考察注 8 的第 2b) 点。如果全纯曲线 $\gamma:P_\alpha\to X$ 的定义域是平行四边形 $P_\alpha\subset\mathbb{C}$，且具有双重周期性，即沿 $t$ 和 $r$ 方向以 $z = t + re^{i\alpha}$ 为周期，那么我们也可以将 $\gamma$ 视为

[16]再次说明，“临界点”是指只允许那些使边界 $\partial P_\alpha$ 上的 $\gamma$ 保持不变的变分。

从复环面到 $X$ 的全纯映射。从这个意义上说，我们可以将定义域为复环面的全纯轨线视为实哈密顿系统周期轨道的全纯类比。然而，与实哈密顿系统的周期轨道不同，两个全纯周期轨道的定义域不必同构。事实上，这种环面的复结构由平行四边形 $P_\alpha$ 的形状决定。因此，作用泛函 $\mathsf{A}^{P_\alpha}{}_{\mathcal{H}}$ 只对某些全纯周期轨道敏感，也就是那些定义域具有由 $P_\alpha$ 诱导的相同复结构的全纯周期轨道。

非常数的全纯周期轨道相当罕见，在大多数全纯哈密顿系统中并不存在（$X$，$\Omega$，$\mathsf{H}$）。例如，取 $X$ 为标准例子 $\mathbb{C}^{2n}$。由于复环面 $\mathbb{C}/\Gamma$是紧的，最大值原理适用，因此任何全纯映射$\gamma : \mathbb{C}/\Gamma \to X$ 都必为常数。若 $X$ 是Brody双曲的，同样的结论也成立[17]。此外，若 $X$ 是紧的，那么所有全纯轨迹都是常数，因为根据最大值原理，所有哈密顿量都是常数。尽管如此，仍存在一些全纯哈密顿系统（$X$，$\Omega$，$\mathsf{H}$），其中有大量全纯周期轨道。

**例2**（复环面 $\mathbb{C}^n/\Gamma$上的自然哈密顿量）。令 $n \in \mathbb{N}$ 为一个自然数，$\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ 为一个格，即

$$\Gamma \coloneqq \left\{ \sum_{j=1}^{2n} k_j \cdot e_j \middle| k_j \in \mathbb{Z} \right\},$$

其中向量 $e_1, \ldots, e_{2n} \in \mathbb{C}^n$ 构成 $\mathbb{C}^n$的一个 $\mathbb{R}$-线性基。于是，$\mathbb{C}^n/\Gamma$ 是一个复维数为 $n$ 的复环面。现在考虑全纯余切丛$X \coloneqq T^{*,(1,0)}(\mathbb{C}^n/\Gamma) \cong \mathbb{C}^n/\Gamma \times \mathbb{C}^n$，其坐标为 $([Q_1, \ldots, Q_j], P_1, \ldots, P_j) \in \mathbb{C}^n/\Gamma \times \mathbb{C}^n$，典范二形式为 $\Omega = \sum_{j=1}^n dP_j \wedge dQ_j$。我们要确定 HSM $(X, \Omega)$ 上的所有自然哈密顿量 $\mathsf{H} = \mathsf{T} + \mathsf{V}$。势能 $\mathsf{V}$ 可通过 $\mathbb{C}^n/\Gamma$上的一个全纯函数进行分解。由于 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ 是紧的，根据最大值原理，其上的所有全纯函数都是常数。将哈密顿量加上一个常数不会改变系统的动力学，因此不失一般性，可将势能设为零。为了计算动能 $\mathsf{T}$，我们需要对 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ 上的所有全纯度量 $g$ 进行分类。投影 $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/\Gamma$ 产生了 $n$ 个线性无关的全纯 1-形式 $dQ_j$, $j = 1, \ldots, n$，它们定义在环面 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ 上；我们此前已用这些形式表示典范形式 $\Omega$。利用这些 1-形式，我们可以将 $g$ 写成

$$g = \sum_{i,j=1}^{2n} g_{ij} dQ_i \otimes dQ_j,$$

其中 $g_{ij}$ 是环面上的全纯函数。与之前一样，这些函数必须是常数，这意味着 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ 上的全纯度量 $g$ 所构成的空间，同构于复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 上的对称非退化 $\mathbb{C}$-双线性形式空间。根据线性代数中的一个标准结果，$\mathbb{C}^n$ 上的每个对称非退化 $\mathbb{C}$-双线性形式，都可以通过一个 $\mathbb{C}$-线性变换化为标准形式 $g_{ij} = \delta_{ij}$[18]

[17]复流形 $X$ 是 Brody双曲的，当且仅当每个定义在整个 $\mathbb{C}$ 上的全纯映射 $\gamma : \mathbb{C} \to X$ 都是常数。[18]这里，$\delta_{ij}$ 是克罗内克δ!

变换。因此，如有必要，在变换格 $\Gamma$ 后，我们可以假设度量 $g$ 由 $g = \sum_{j=1}^{2n} dQ_j^2$ 给出。总之，只需研究哈密顿量为 H 的全纯哈密顿系统（HHS）的动力学：$(\mathbb{C}^n/\Gamma \times \mathbb{C}^n,$ $\sum_{j=1}^{n} dP_j \wedge dQ_j,$ H)

$$\mathcal{H}(Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n) = \sum_{j=1}^{2n} \frac{P_j^2}{2}$$

对所有格 $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$，以研究复环面上的所有自然哈密顿量。显然，与此问题相关的哈密顿方程为

$$Q_j'(z) = P_j(z); \quad P_j'(z) = 0$$

并且，给定初值 $\gamma(0) = ([Q_1^0, \ldots, Q_n^0],\ P_1^0,\ \ldots\ldots,\ P_n^0)$，显然可由全纯轨迹 $\gamma : \mathbb{C} \to X$ 求解，

$$\gamma(z) \coloneqq ([Q_1^0 + z \cdot P_1^0, \ldots, Q_n^0 + z \cdot P_n^0], P_1^0, \ldots, P_n^0).$$

现在定义 $P^0 \coloneqq (P_1^0,\ \ldots\ldots,\ P_n^0) \in \mathbb{C}^n$，并考察 $P^0$ 的不同取值：

1. 若 $P^0 = 0$，则 $\gamma$ 只是一个常值曲线。2. 若 $P^0 \neq 0$ 且对每个 $z \in \mathbb{C}/\{0\}$ 都有 $z \cdot P^0 \notin \Gamma$，则 $\gamma$ 是一条没有周期性的正则全纯轨迹。3. 若 $P^0 \neq 0$ 且至少对一个 $z_1 \neq 0$ 有 $z_1 \cdot P^0 \in \Gamma$，则 $\gamma$ 是一条至少在一个方向上周期的正则全纯轨迹。在这种情况下，我们可以将 $\gamma$ 视为从复圆柱到 $X$ 的全纯映射。4. 若 $P^0 \neq 0$ 且对于两个 $\mathbb{R}$-线性无关的复数 $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ 有 $z_1 \cdot P^0,\ z_2 \cdot P^0 \in \Gamma$，则 $\gamma$ 是一条正则的双周期全纯轨迹。在这种情况下，$\gamma$ 是全纯周期轨道。

我们注意到，$\gamma$ 的定义域的拓扑和复结构会随动量 $P^0$而变化。

注 *10*（复环面上的一般哈密顿量）。事实证明，例*2*涵盖了 *HSM*（$T^{*,(1,0)}(\mathbb{C}^n/\Gamma)$ $\sum_{j=1}^{2n} dP_j \wedge dQ_j$）上的所有可能哈密顿量。设 $H$ 是 $T^{*,(1,0)}(\mathbb{C}^n/\Gamma)$上的任意全纯函数。由于 $T^{*,(1,0)}(\mathbb{C}^n/\Gamma)$ 同构于$\mathbb{C}^n/\Gamma \times \mathbb{C}^n$，根据最大值原理，$H$ 不可能依赖于 $Q_j$坐标。因此，我们可以将哈密顿方程的解中的 $P_j^0$ 替换为 $\partial H/\partial P_j(P^0)$，从而重复例*2*中的讨论。

## 2.4. 全纯哈密顿系统的应用：Lefschetz 与近似环面纤维化

HHS 的一个有趣之处，在于它们与（辛）几何中的两种重要结构——Lefschetz 纤维化和近似环面纤维化——之间的相互作用。在本小节中，我们简要探讨这些结构之间的联系。我们先简要介绍 Lefschetz 纤维化和近似环面纤维化。

**Lefschetz 纤维化**

我们先回顾 Lefschetz 纤维化的定义：

**定义 6** (Lefschetz 纤维化)。 设 $X$ 是一个光滑的 $2m$-流形， $C$ 是一个光滑的2-流形（两者都可能带有边界）。若光滑满射 $\pi : X \to C$ 满足以下三个条件，我们称其为 *Lefschetz* 纤维化：

1. $\partial X = \pi^{-1}(\partial C)$

2. 边界 $\partial X$ 上的所有点都是 $\pi$ 的正则点。

3. 对于每个临界点 $p \in \mathit{Crit}(\pi) \subset \mathit{Int}(X)$，都存在一个光滑坐标图 $\psi_X : U_X \to V_X \subset \mathbb{R}^{2m} \cong \mathbb{C}^m$，位于 $p$ 附近；以及一个光滑坐标图 $\psi_C : U_C \to V_C \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$，位于 $\pi(p)$ 附近，使得

$$\psi_C \circ \pi \circ \psi_X^{-1}(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{j=1}^{m} z_j^2.$$

粗略来说，Lefschetz 纤维化将曲面上的纤维丛这一概念推广开来，并允许存在奇异纤维。以下命题体现了这一点：

**命题 9** (Lefschetz 纤维化作为纤维丛)。 设 $\pi : X \to C$ 是一个 *Lefschetz* 纤维化， $C^*$ 是 $\pi$的正则值集合。此外，假设 $X$ 是连通的。如果 $\pi : \pi^{-1}(C^*) \to C^*$ 是真映射，那么 $\pi^{-1}(C^*) \xrightarrow{\pi} C^*$ 是一个纤维丛。特别地，如果 $X$（那么 $C$也）是紧致的， $\pi^{-1}(C^*) \xrightarrow{\pi} C^*$ 是一个纤维丛。

证明。 这直接源于以下事实[19] ： 流形之间每个光滑、满射且为真的淹没映射都是纤维丛。 □

大多数作者会在 Lefschetz 纤维化的定义中加入额外条件。通常假设 $X$ 是紧致、连通且定向的四维流形。一方面，这有其历史原因：Lefschetz 引入这些纤维化，是为了研究复曲面的拓扑；Donaldson 和 Gompf 则通过证明每个紧致辛四维流形都具有 Lefschetz 纤维化结构（必要时先进行吹起），反过来也成立[20]，使 Lefschetz 纤维化受到辛几何学界的关注。关于四维流形与 Lefschetz 纤维化的历史综述，请参阅 [10]中的引言。

另一方面， $m = 2$ 的情形具有丰富的结构，且已得到充分理解：若 $X$ 是闭四维流形，那么 $\pi : X \to C$ 的正则纤维是闭曲面。在温和条件下，[21]， $\pi : X \to C$ 的正则纤维甚至是定向且连通的，因此是亏格为 $g$的曲面。在这种情况下，奇异纤维是亏格为 $g$ 的捏缩曲面（参见[11]）。在我们的研究中， $m = 2$ 的情形也发挥着重要作用。

[19]根据 Ehresmann，参见 [9]。[20]在温和条件下。[21] $X$ 和 $C$ 均为定向连通的，此外， $C$ 是单连通的，参见 [11]。

**近似环面纤维化**

近似环面纤维化推广了托里克纤维化的概念，而托里克纤维化本身可理解为有效哈密顿环面作用的动量映射。为阐明这一思想，我们回顾 Atiyah、Guillemin 和 Sternberg 著名的凸性定理（例如参见 [12]和 [13]）：

**定理 2**（凸性定理）。 设$(X^{2m},\omega)$ 是一个连通闭辛流形，其上具有一个有效的哈密顿量 $T^m$-作用。那么，相应动量映射 $\pi : X \to \mathbb{R}^m$ 的像是一个凸多面体。

该多面体具有自然的分层。维数最高的层，即其内部，是 $\pi$ 的正则值集合。正则水平集是拉格朗日环面，并且可以在任意正则点的邻域内将 $\omega$ 和 $\pi$ 表示为 [22]

$$\omega = \sum_{j=1}^{m} dx_j \wedge dy_j; \quad \pi_j = x_j.$$

对于 $k < m$， $k$ 维层上的点是临界值。与之前类似，可以证明，在这样的临界点的邻域内，我们可以写成（参见 [13] 和 [14]）：

$$\omega = \sum_{j=1}^{m} dx_j \wedge dy_j; \quad \pi_j = x_j \text{ for } 1 \le j \le k; \quad \pi_j = x_j^2 + y_j^2 \text{ for } k < j \le m. \tag{2}$$

我们看到，托里克纤维化是一个辛流形，可视为一个纤维丛，其正则纤维为拉格朗日环面，而奇异纤维在局部具有方程 2 所述的形式。

近似环面纤维化由 M. Symington 于 [13], 提出，体现了类似的结构，但其奇异纤维的局部描述范围更广。以下定义引自 [13] 和 [14]:

**定义 7**（拉格朗日子流形与近似环面纤维化）。 设 $C^m$ 是一个光滑的（$X^{2m},\omega$）辛流形（两者都允许有边界）。此外，设 $\pi : X \to C$ 是一个光滑且满射的映射。我们称 $\pi$ 是（,）的拉格朗日纤维化，当且仅当存在一个开且稠密的子集 $C^* \subset C$，使得 $\pi^{-1}(C^*) \xrightarrow{\pi} C^*$ 是一个以拉格朗日纤维为纤维的纤维丛。若 $\pi$ 是拉格朗日纤维化，且 $\pi$ 的每个临界点都有一个邻域，在该邻域中，选取坐标图后， $\omega$ 和 $\pi$ 具有如下形式（$0 \le k < m$），则称 $\pi$ 为近似环面纤维化：

1. $\omega = \sum_{j=1}^{m} dx_j \wedge dy_j$,
2. $\pi_j = x_j$ *for* $1 \le j \le k$,
3. $\pi_j = x_j^2 + y_j^2$ *or* $(\pi_j, \pi_{j+1}) = (x_j y_j + x_{j+1} y_{j+1}, x_j y_{j+1} - x_{j+1} y_j)$ *for* $k < j \le m$.

[22]这就是同样著名的 Arnold-Liouville 定理。

**注11**（近似环面纤维化的纤维）。 如果近似环面纤维化的正则纤维紧致且连通，那么根据阿诺德-利乌维尔定理，它们与环面微分同胚，这也解释了“近似环面纤维化”这一名称。

现在，让我们借助 HHS 来探讨 Lefschetz 纤维化与近似环面纤维化之间的关系。我们的思路是在 Lefschetz 纤维化上定义一个相容的全纯辛结构。这样的纤维化可以解释为一个 HHS。同时，在温和条件下，实四维中的全纯辛 Lefschetz 纤维化是一种近似环面纤维化，稍后我们将对此加以说明。

首先，我们在全纯框架下给出 Lefschetz 纤维化的定义：

**定义 8 (**全纯 Lefschetz 纤维化)。 设 $X$ 是一个复 $m$ 维流形， $C$ 是一个复一维流形（两者都可以有边界[23]）。如果一个满射全纯映射 $\pi : X \to C$ 满足以下三个条件，我们就称它为全纯勒夫谢茨纤维化：

1. $\partial X = \pi^{-1}(\partial C)$
2. 边界 $\partial X$ 上的所有点都是 $\pi$的正则点。
3. 每个临界点 $p \in Crit(\pi) \subset Int(X)$ 都是非退化的。

这里，临界点 $p \in$Crit($\pi$) 称为非退化，当且仅当其（复）海森矩阵[24]在 $p$ 处于 $X$ 和 $C$的某些全纯坐标图中是非退化的。正如其名称所示，全纯勒夫谢茨纤维化也是一种（光滑）Lefschetz 纤维化：

**命题 10**（全纯 Lefschetz 纤维化是 Lefschetz 纤维化）。设$\pi : X \to C$ 是一个全纯 *Lefschetz* 纤维化。那么 $\pi : X \to C$ 是通常意义下的（光滑）*Lefschetz* 纤维化。特别地，坐标图 $\psi_X$ 和 $\psi_C$ 可以选为全纯坐标图。

证明。这直接由全纯莫尔斯引理得出。 □

**引理 2**（全纯莫尔斯引理）。 设 $X$ 是一个复流形， $f : X \to \mathbb{C}$ 是一个全纯函数，且 $p \in X$ 是 $f$ 的一个非退化临界点。那么，存在 $X$ 在 $p$ 附近的全纯坐标图 $\psi_X : U_X \to V_X \subset \mathbb{C}^m$ ，满足 $\psi_X(p) = 0$ ，使得：

$$f \circ \psi_X^{-1}(z_1, \ldots, z_m) = f(p) + \sum_{j=1}^{m} z_j^2 \quad \forall (z_1, \ldots, z_m) \in V_X.$$

**注 12 (**海森矩阵的符号差)。 与实莫尔斯引理不同，在全纯莫尔斯引理中，我们不必关心（复）海森矩阵的符号差，因为在 $\mathbb{C}^m$ 上所有非退化的对称 $\mathbb{C}$-双线性形式都彼此同构。

[23]带边界的复流形的定义与带边界的实流形类似，尽管两者存在细微差异。[24]由于 $p$ 是临界点，海森矩阵的非退化性定义良好，也就是说，它与坐标图的选择无关。

证明。全纯莫尔斯引理可以用与通常的莫尔斯引理相同的方法证明（例如参见 [15] 第 12 页及后续内容中的证明），当然，我们使用的是复分析中的相应定理，而非其光滑版本[25]。□

现在，我们为全纯勒夫谢茨纤维化赋予一个相容的辛结构：

**定义 9**（全纯辛勒夫谢茨纤维化）。若全纯勒夫谢茨纤维化 $\pi : X \to C$ 具备辛结构，即 $X$ 具有 *HSM*（$X$,Ω）的结构，且每个临界点 $p \in$ *Crit*（$\pi$）附近都有全纯莫尔斯-达布坐标图，也就是说，存在全纯坐标图 $\psi_X = (z_1, \ldots, z_{2n}) : U_X \to V_X \subset \mathbb{C}^{2n}$，定义在 $X$ 上且包含 $p$，以及定义在 $C$ 上且包含 $\pi(p)$ 的全纯坐标图，并满足：

1. $\Omega|_{U_X} = \sum_{j=1}^{n} dz_{j+n} \wedge dz_j$，
2. $\psi_C \circ \pi|_{U_X} = \sum_{j=1}^{2n} z_j^2$。

如果 $\pi : X \to C$ 是一个底层 HSM 为（$X$,Ω）的全纯辛勒夫谢茨纤维化，那么选取 $C$ 的一个全纯坐标图 $\psi_C$ 后，我们可以将（$X$,Ω $\pi$）局部地解释为一个 HHS。当然，这个 HHS 的哈密顿向量场并未明确定义，因为哈密顿函数取决于 $\psi_C$ 的选取。不过，两个哈密顿向量场之差只是一个全纯函数：

$$X_{\hat{\psi}_C \circ \pi}|_p = (\hat{\psi}_C \circ \psi_C^{-1})'(\psi_C \circ \pi(p)) \cdot X_{\psi_C \circ \pi}|_p \quad \text{for } p \in X.$$

因此，这两个哈密顿向量场具有相同的轨线，只是参数化方式不同。这意味着，即使哈密顿向量场并未良好定义，由 HHS 的正则水平集构成的全纯叶状结构仍然是良好定义的。特别是，如果 $X$ 是复二维，或等价地说是实四维，且 $\pi : X \to C$ 的水平集是连通的，那么该叶状结构的叶就是正则水平集本身，从而我们可以将全纯辛 Lefschetz 纤维化理解为 HHS 的全纯叶状结构。

下一步是将全纯辛 Lefschetz 纤维化与近似环面纤维化联系起来。我们证明，如果 $\pi$ 是真映射，那么每个实四维的全纯辛 Lefschetz 纤维化也是近似环面纤维化。

**命题 11** (实四维中的全纯辛 Lefschetz 纤维化)。设 $\pi : X \to C$ 是一个全纯辛 *Lefschetz* 纤维化，其底层 *HSM* 为$(X, \Omega = \Omega_R + i\Omega_I)$。假设 $X$ 连通且实维数为四。如果 $\pi : X \to C$ 是真映射，那么 $\pi : X \to C$ 是 $(X,\Omega_R)$ 上的近似环面纤维化。特别地，如果 $X$ 紧致，那么 $\pi : X \to C$ 是 $(X,\Omega_R)$ 上的近似环面纤维化。

证明。 $C^*$ 的正则值集合在 $C$中是开且稠密的。根据命题 9 证明中的同一论证， $\pi^{-1}(C^*) \xrightarrow{\pi} C^*$ 是一个纤维丛。现在我们考察 $\pi^{-1}(C^*) \xrightarrow{\pi} C^*$的纤维。全纯哈密顿系统（$X$, Ω $\pi$）是复二维的，因此， $\pi$ 的正则水平集是（$X$，Ω）中的复拉格朗日子流形。因此，它们也是（$X$， $\Omega_R$）中的拉格朗日子流形，因为 $\Omega = \Omega_R + i\Omega_I$是一个全纯二形式。这意味着 $\pi : X \to C$ 是（$X$，$\Omega_R$）的一个拉格朗日纤维化。

To 为了完成证明，我们需要考虑 $\pi$ 的一个临界点 $p$。根据定义， e

[25]例如，使用全纯隐函数定理而非隐函数定理 m.

存在全纯坐标图 $\psi_X = (z_1,\ z_2) : U_X \to V_X \subset \mathbb{C}^2$，定义在 $p$ 附近的 $X$ 上，以及定义在 $\pi(p)$ 附近的 $C$ 上，满足：

$$\Omega|_{U_X} = dz_2 \wedge dz_1,$$
$$\psi_C \circ \pi|_{U_X} = z_1^2 + z_2^2.$$

在新的坐标 $z_1 =: (\hat{z}_2 - i\hat{z}_1)/\sqrt{2}$、$z_2 =: (\hat{\bar{z}_1} - i\hat{z}_2)/\sqrt{2}$ 和 $\hat{\psi}_C := -\psi_C/2i$ 中，我们得到：

$$\Omega|_{\hat{U}_X} = d\hat{z}_1 \wedge d\hat{z}_2 = (d\hat{x}_1 \wedge d\hat{x}_2 - d\hat{y}_1 \wedge d\hat{y}_2) + i(d\hat{x}_1 \wedge d\hat{y}_2 + d\hat{y}_1 \wedge d\hat{x}_2),$$
$$\hat{\psi}_C \circ \pi|_{\hat{U}_X} = \hat{z}_1\hat{z}_2 = (\hat{x}_1\hat{x}_2 - \hat{y}_1\hat{y}_2) + i(\hat{x}_1\hat{y}_2 + \hat{y}_1\hat{x}_2),$$

这里用到了分解 $\hat{z}_j = \hat{x}_j + i\hat{y}_j$。特别地，在这些坐标中有 $\Omega_R|_{\hat{U}_X} = d\hat{x}_1 \wedge d\hat{x}_2 - d\hat{y}_1 \wedge d\hat{y}_2$。令 $x_1 := \hat{x}_1$、$x_2 := -\hat{y}_1$、$y_1 := \hat{x}_2$、$y_2 := \hat{y}_2$、$\pi_1 \equiv \mathrm{Re}(\psi_C \bigcirc \pi|_{\hat{U}_X})$ 和 $\pi_2 \equiv \mathrm{Im}(\psi_C \bigcirc \pi|_{\hat{U}_X})$，即可复现近似环面纤维化定义中临界点附近的局部结构。

□

**注 13** (命题 11 关于 $(X, \Omega_I)$)。 在与命题 *11* 相同的假设下，我们发现，如果 $\pi : X \to C$ 是真映射，那么它也是 $(X, \Omega_I)$ 的一个近似环面纤维化。就此而言，全纯辛勒夫谢茨纤维化会产生两个不同的近似环面纤维化。

**注 14** (临界点是非环面型)。 注意，全纯辛勒夫谢茨纤维化的临界点是非环面型的，也就是说，它们的局部描述符合定义 *7* 中的非环面型情形。

或许有人会想知道命题 11 适用于多少个流形 $X$。当 $X$ 为闭时，答案已广为人知：Leung 和 Symington 将所有闭近似环面四维流形按微分同胚分类。他们证明，局部上为 Lefschetz 型的唯一例子，也就是说，临界点为非环面型的例子，是基底为 $C = S^2$ 的 K3 曲面及其 $\mathbb{Z}_2$-商，即基底为$C = \mathbb{R}P^2$的 Enriques 曲面。由于 $\mathbb{R}P^2$ 不可定向，它不可能具有复结构，因此 Enriques 曲面不可能是全纯辛勒夫谢茨纤维化。由此，四维中闭全纯辛勒夫谢茨纤维化唯一可能的例子是 K3 曲面[26]。

最后，为结束本节，我们将最后一个问题加以推广，并思考全纯勒夫谢茨纤维化是否存在成为辛纤维化的障碍。当然，全纯勒夫谢茨纤维化 $\pi : X \to C$ 的空间 $X$ 必须具有全纯辛流形的结构，$\pi : X \to C$ 才能成为辛纤维化。这本身就是一个非平凡的条件。但即使 $X$ 是全纯辛流形，勒夫谢茨纤维化在临界点附近是否存在莫尔斯-达布坐标图，也并不清楚。这个问题尤其有趣，因为我们已经知道，每个全纯辛流形在任意点附近都存在达布坐标图，而每个全纯勒夫谢茨纤维化在临界点附近都存在莫尔斯坐标图。

在复数情形下，这是一个非平凡的问题，目前尚未得到完全理解[27]。为了获得一些直观认识，我们转而考虑二维的实情形。

[26]根据注11，K3 曲面的正则纤维是环面。[27]至少作者并不知道。

**设定：** 令 $M$ 为一个实维数为二、带有辛形式 $\omega$的光滑流形， $L$ 为一个实维数为一的光滑流形， $f \in C^\infty(M, L)$，且 $p \in M$ 为 $f$的一个非退化[28] 临界点。

**问题：** 是否存在光滑坐标图 $\psi_M = (x, y) : U_M \to V_M \subset \mathbb{R}^2$ ，使得在 $p$ 附近的 $M$ 和在 $f(p)$ 附近的 $L$ 满足

1. $\omega|_{U_M} = dx \wedge dy$，2. $\psi_L \bigcirc f|_{U_M} = x^2 + y^2$?

当然，由于 $p$ 的莫尔斯指标在复数情形中不存在，因此一般而言，对这个问题的回答是否定的:

定义*10*（莫尔斯指标 $\mu_f(p)$）。设 $M$ 为光滑 $m$-流形， $L$ 为光滑一维流形， $f \in C^\infty(M, L)$，且 $p \in M$ 是 $f$ 的一个临界点。我们称 $p$ 非退化，当且仅当对于某些坐标图$\psi_M$（定义在 $p$ 附近的 $M$ 上）和 $\psi_L$（定义在 $f(p)$ 附近的 $L$ 上）， $\psi_L \bigcirc f \bigcirc \psi_M^{-1}$ 在 $\psi_M(p)$ 处的海森矩阵非退化。莫尔斯指标 $\mu_f(p)$ 是 $\min\{k, m-k\}$，其中 $k$ 是在坐标图 $\psi_M$ 和 $\psi_L$ 下， $\psi_L \bigcirc f \bigcirc \psi_M^{-1}$ 在 $\psi_M(p)$ 处的通常莫尔斯指标，即其海森矩阵的负特征值个数。

**注**。尽管海森矩阵的非退化性与坐标图的选择无关，但海森矩阵负特征值的个数则与坐标图的选择有关。例如，对坐标图 $\psi_L$作反向定向变换 $\psi_L \mapsto -\psi_L$，会使该个数从 $k$ 变为$m-k$，这解释了莫尔斯指标的定义。

$(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ 的莫尔斯指标为 0。由于莫尔斯指标在坐标图变换下保持不变，因此，在$p$ 附近存在莫尔斯-达布坐标图的一个必要条件是 $\mu_f(p) = 0$。问题在于这个条件是否充分。除正则性问题外，看来确实如此。为准确说明这一点，请看以下两个引理，它们在附录 B 中得到证明:

引理 *3*（莫尔斯-达布引理 *I*）。设 $(M^2, \omega)$ 是辛二维流形， $L^1$ 是光滑一维流形， $f \in C^\infty(M, L)$，且 $p \in M$ 是函数 $f$ 的莫尔斯指标为 $\mu_f(p) = 0$ 的非退化临界点。此外，设 $T > 0$ 为正实数。那么，存在一个 $C^1$ 坐标图 $\psi_L : U_L \to V_L \subset \mathbb{R}$ ，它定义在 $L$ 的 $f(p)$ 附近，并且在 $U_L \setminus \{f(p)\}$ 上光滑，使得实哈密顿系统 $(U_M, \omega|_{U_M}, H)$ 中 $p$ 附近所有满足 $U_M \coloneqq f^{-1}(U_L)$ 且 $H \coloneqq \psi_L \bigcirc f|_{U_M}$ 的非恒定轨线都是 $T$-周期的。

[28]参见定义10。

**引理 4** (Morse-Darboux引理II)。 设 $(M^2,\omega)$ 是辛2维流形，且令$H \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ 为定义在 $M$ 上、在 $p \in M$ 处具有莫尔斯指标为 $\mu_H(p) \neq 1$ 的非退化临界点的光滑函数。此外，设 $T>0$ 为正实数。那么，以下陈述等价：

*1.* 存在一个拓扑坐标图 $\psi_M = (x,y) : U_M \to V_M \subset \mathbb{R}^2$，定义在 $M$ 的 $p$ 附近，并且在 $U_M/\{p\}$ 上光滑，使得 $(\psi_M(p) = 0)$：（*a*） $H|_{U_M} = H(p) \pm \frac{\pi}{T}(x^2+y^2)$，（*b*） $\omega|_{U_M} = dx \wedge dy$。*2.* 存在 $p$ 的一个开邻域 $U_M \subset M$，使得实哈密顿系统 $(U_M, \omega|_{U_M}, H|_{U_M})$ 的所有非常数轨道都是 $T$-周期的。*3.* 存在一个数 $E_0 > 0$，使得对于每个 $E \in [0, E_0]$，都有 $\int_{U(E)} \omega = T \cdot E$，其中 $U(E)$ 是集合 $\{q \in M \mid |H(q) - H(p)| \leq E\}$ 中包含 $p$ 的连通分支。

考虑到引理 3 和引理 4，要证明莫尔斯-达布坐标图存在，粗略思路很清楚：首先，我们利用引理 3 找到一个坐标图 $\psi_L$，使得 $p$附近的所有轨线都具有周期 $T = \pi$，且 $\psi_L \bigcirc f$的通常莫尔斯指标为 0。接下来，我们希望应用引理 4，找到一个坐标图 $\psi_M$，使得 $\omega$和 $H = \psi_L \bigcirc f$分别具有各自的标准形式。然而，这里会遇到正则性问题：我们无法应用引理 4[29]，因为哈密顿函数 $\psi_L \bigcirc f$ 通常只有 $C^1$。这会造成麻烦，原因有几个，其中最重要的一点是，对于 $C^1$函数，莫尔斯指标的概念甚至没有意义。

此时显然有必要对这个问题进行更深入的分析，尤其是当我们还想讨论复数情形时。我们就此结束这段探讨，转而进入本文的主体部分。

[29]不过请注意，如果引理 3 中的所有对象都是实解析的，那么在应用引理 3 之后，我们就可以应用引理 4，因为此时坐标图 $\psi_L$ 和哈密顿函数 $\psi_L \bigcirc f$ 都是实解析的。详情参见附录 B 中的注 23。

# 3. 伪全纯哈密顿系统

在第 2.3 小节中，我们已经看到，对于一大类 HHS（$X$，$\Omega$，H），非常数全纯周期轨道的存在是不允许的。这类轨道存在的一个可能障碍是 $X$ 的近复结构 $J$ 的可积性。在本节中，我们不再要求 $J$ 可积，由此引出伪全纯哈密顿系统（PHHS）的概念。我们将在第3.1小节中展示，PHHS 按其设计具有与第 2 节中的 HHS（几乎）相同的性质，尤其是在伪全纯轨迹的存在唯一性以及作用泛函和原理方面。在第3.2小节中，我们探讨 HHS 与 PHHS 之间的关系，并说明，若恢复其近复结构 $J$ 的可积性，就能从 PHHS 得到一个 HHS。

## 3.1. 伪全纯哈密顿系统：基本定义、概念与性质

在第 2.3 小节中，我们发现大多数全纯哈密顿系统（$X$，$\Omega$，H）并不存在非恒定的全纯周期轨道。通常，最大值原理会排除这类轨道的存在。例如，考虑配备标准复结构 $J = i$ 的 $X = \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$。由于全纯周期轨道是全纯映射 $\gamma : \mathbb{C}/\Gamma \to X$，而复环面 $\mathbb{C}/\Gamma$ 是紧的，因此最大值原理适用，$\mathbb{C}^2$ 中的每个全纯周期轨道都是常数。

在他于 1995年 发表的那篇精彩论文 [6] 中，Moser 指出，如果我们为 $\mathbb{R}^4$ 配备另一种近复结构 $J$，同样的论证便不再适用。设 $\gamma$ 是二维环面到 $\mathbb{R}^4$ 的任意光滑嵌入，例如包含映射 $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}^4$。那么，$\gamma$ 的像是 $\mathbb{R}^4$ 中的一个二维子流形，其切丛可以延拓为 $\mathbb{R}^4$ 上的一个光滑二维分布 $D$。具体如下：$S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$ 的切丛由 $S^1 \times S^1$ 上的两个向量场 $V_1$ 和 $V_2$ 张成：

$$
\begin{aligned}
V_1 &: S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^4,\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-x_2, x_1, 0, 0);\\
V_2 &: S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^4,\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (0, 0, -x_4, x_3).
\end{aligned}
$$

我们证明，在 $\mathbb{R}^4$ 上存在两个线性无关向量场 $\hat{} V_1$ 和 $\hat{} V_2$，它们延拓了 $\hat{} \hat{} \hat{} V_1$ 和 $V_2$，即 $V_i|_{S^1 \times S^1} = V_i$。为构造 $V_1$ 和 $V_2$，我们先定义函数$r_1 \coloneqq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$、$r_2 \coloneqq \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$ 和 $R \coloneqq (1 - r_1^2)^2 + (1 - r_2^2)^2$。接着，按如下方式在 $\mathbb{R}^4$ 上定义向量场 $\hat{} V_1$、$W_1$ 和 $W_2$：

$$
\begin{aligned}
\hat{V}_1 &: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-x_2, x_1, R, 0);\\
W_1 &: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-x_2 x_4 R,\, x_1 x_4 R,\, -r_1^2 x_4,\, r_1^2 x_3);\\
W_2 &: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, 0, R).
\end{aligned}
$$

$\hat{}$ 容易验证，$V_1$ 是 $V_1$的延拓，处处不为零，并且相对于 $\mathbb{R}^4$上的标准度量，与 $W_1$ 和 $W_2$ 正交。此外，我们注意到$W_1$ 是 $V_2$的延拓。然而，当 $x_1 = x_2 = 0$ 或 $x_3 = x_4 = 0$时，$W_1$ 为零。为了解决这一问题，我们取 $W_1$ 和 $W_2$的一个适当线性组合。为此，我们首先

注意到 $W_1$ 在 $S^1 \times S^1$上不为零。因此，我们可以选取 $S^1 \times S^1$ 的一个开邻域$U \subset \mathbb{R}^4$，使得 $W_1$ 在 $U$上不为零。接下来，我们在 $\mathbb{R}^4$ 上选取一个从属于 $\mathbb{R}^4$的开覆盖$\{U,\ \mathbb{R}^4/(S^1 \times S^1)\}$的单位分解$\{f_1,\ f_2\}$，也就是说，取两个光滑函数 $f_1,\ f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^4,\ \mathbb{R}_{\geq 0})$，满足：

1. $f_1(x) + f_2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^4$,
2. $\mathrm{supp}(f_1) \subset U$ and $\mathrm{supp}(f_2) \subset \mathbb{R}^4 \backslash (S^1 \times S^1)$.

ˆ ˆ 现在通过 $V_2 \coloneqq f_1 \cdot W_1 + f_2 \cdot W_2$ 定义向量场 $V_2$。根据构造，向量场 $V_2$ 是 $V_2$ 的延拓。此外，分别在 $S^1 \times S^1$、$U/(S^1 \times S^1)$ 和 $\mathbb{R}^4/U$ 上考察ˆ $V_2$，可以证明 $V_2$ 处处不为零。由于ˆ $V_1$与ˆ ˆ$W_1$ 正交，且 $W_2$，$V_1$ 也与向量场 $V_2$正交。两个处处不为零的正交向量场线性无关，因此，向量场 $V_1$ 和 $V_2$ 是 $V_1$ 和 $V_2$所需的延拓。现在，分布 $D$ 在任意一点 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) \in \mathbb{R}^4$处，就是由 $V_1$和ˆ $V_2$ 张成的空间。

回到 Moser 构造。选取 $\mathbb{R}^4$ 上的黎曼度量 $g$，并考虑相对于 $g$ 而言，$D$ 的正交补 $D^\perp$。$D^\perp$ 也是 $\mathbb{R}^4$ 上的光滑二维分布。此外，$D$ 和 $D^\perp$ 张成 $\mathbb{R}^4$、$T\mathbb{R}^4 = D \oplus D^\perp$ 的切丛。现在可以如下在 $\mathbb{R}^4$ 上构造近复结构 $J$：为 $D$ 和 $D^\perp$ 选定定向，并将 $J$ 定义为相对于 $g$ 和给定定向，在 $D$ 和 $D^\perp$ 中旋转 $90°$。为二维环面选取适当的复结构 $j$后，$\gamma$ 就成为伪全纯[30] 嵌入，即 $d\gamma \bigcirc j = J \bigcirc d\gamma$。以此方式构造的近复结构 $J$ 通常不可积。

Moser 的例子表明，在讨论（伪）全纯周期轨道时，具有不可积近复结构 $J$ 的哈密顿系统可能比 HHS 更丰富。然而，推广 HHS 并非易事，因为在大多数关于 HHS 的定义中，复结构 $J$ 只是隐含地出现。为此，我们来回顾一下第 2 节的定义与讨论中哪些对象和关系至关重要。一个 HHS 由六个对象组成：一个光滑流形 $X$，以及其上的一个可积近复结构 $J$；定义在 $X$ 上的两个实 2-形式 $\Omega_R$ 和 $\Omega_I$，它们共同构成一个全纯辛形式 $\Omega = \Omega_R + i\Omega_I$；还有定义在 $X$ 上的两个光滑实函数 $\mathrm{H}_R$ 和 $\mathrm{H}_I$，它们构成一个全纯函数 $\mathrm{H} = \mathrm{H}_R + i\mathrm{H}_I$ $X$。仔细追踪第 2 节中的每一步，我们会发现，这六个对象必须满足以下关系：

1. $\Omega_R$ 必须是闭的[31]。
2. $J$、$\Omega_R$ 和 $\Omega_I$ 需要满足方程（1）所导出的关系。
3. $J$ 且底层实哈密顿系统的哈密顿向量场必须满足备注5中提出的类柯西–黎曼关系。

[30]具有近复结构 $J_1$和 $J_2$的光滑流形 $X_1$与 $X_2$之间的光滑映射 $f : (X_1,\ J_1) \to (X_2,\ J_2)$称为**伪全纯**，当且仅当 $df \bigcirc J_1 = J_2 \bigcirc df$。若伪全纯映射 $f$还满足 $J_1$和 $J_2$可积，则称其为**全纯**。对于第 2.3 小节中全纯轨迹的作用泛函，我们需要 $\Omega_R$的一个原函数，而不需要 $\Omega_I$的原函数！[31]

4. 所有哈密顿向量场都必须彼此对易，从而重现推论 1。

现在，定义伪全纯哈密顿系统的一种方法，就是对任意近复结构 $J$直接施加这些关系：

**定义 11** (伪全纯哈密顿系统)。若一组$(X, J; \Omega_R, \Omega_I; \mathcal{H}_R, \mathcal{H}_I)$满足以下条件，则称其为伪全纯哈密顿系统*(PHHS)*： $X$是一个光滑流形， $J$ 是 $X$上的一个（不一定可积的）近复结构，$\Omega_R$ 和$\Omega_I$ 是 $X$上的两个光滑、非退化、交替的实2形式，并且$\mathcal{H}_R$和$\mathcal{H}_I$ 是 $X$上的两个满足以下条件的光滑实函数：

1. $\Omega_R$ *is closed,* $d\Omega_R = 0$.
2. $\Omega_R(J\cdot,\cdot) = \Omega_R(\cdot, J\cdot) = -\Omega_I$; $\quad \Omega_I(J\cdot,\cdot) = \Omega_I(\cdot, J\cdot) = \Omega_R$;
   $\Omega_R(J\cdot, J\cdot) = -\Omega_R$; $\qquad\qquad \Omega_I(J\cdot, J\cdot) = -\Omega_I$.
3. $X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R} = X^{\Omega_I}_{\mathcal{H}_I}$ *and* $J\left(X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R}\right) = X^{\Omega_I}_{\mathcal{H}_R} = -X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_I}$, *where* $X^{\Omega_a}_{\mathcal{H}_b}$ *is defined by* $\iota_{X^{\Omega_a}_{\mathcal{H}_b}}\Omega_a = -d\mathcal{H}_b$.
4. $[X^{\Omega_a}_{\mathcal{H}_b}, X^{\Omega_c}_{\mathcal{H}_d}] = 0$ *for all* $a, b, c, d \in \{R, I\}$.

**注15** (定义 11 中的性质 3)。 注意，我们可以将定义 *11* 中的性质 *3* 替换为条件：$\mathcal{H} \coloneqq \mathcal{H}_R + i\cdot\mathcal{H}_I$ 是伪全纯的。事实上，性质 *2* 和性质 *3* 蕴含$\mathcal{H} : X \to \mathbb{C}$ 是伪全纯的：

$$\begin{aligned} d\mathcal{H}\circ J &= -\Omega_R(X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R}, J\cdot) - i\cdot\Omega_R(X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_I}, J\cdot) \\ &= \Omega_I(X^{\Omega_I}_{\mathcal{H}_I}, \cdot) + i\cdot\Omega_I(-X^{\Omega_I}_{\mathcal{H}_R}, \cdot) = -d\mathcal{H}_I + i\cdot d\mathcal{H}_R = i\cdot d\mathcal{H}. \end{aligned}$$

反过来，性质 *2* 和 $d\mathcal{H}\circ J = i\cdot d\mathcal{H}$ 蕴含性质 *3* 中的柯西-黎曼型方程。

**备注 16** （形式 Ω，第一部分）。与复流形的情形一样，我们可以将带有近复结构 $J$ 的流形 $X$ 的复化切丛[32] $T_{\mathbb{C}}X$ 分解为丛 $T^{(1,0)}X$ 和 $T^{(0,1)}X$ 的直和，它们在每个纤维上分别由 $J$ 对应于特征值 $i$ 和 $-i$的特征子空间给出。不同之处在于，现在 $T^{(1,0)}X$ 不是全纯向量丛，而只是 $X$上的光滑复向量丛。尽管如此，若对 *PHHS* 定义复 2-形式 Ω 为 $\Omega_R + i\Omega_I$，我们会发现 Ω 属于 $(2,0)$ 型，即在 $T^{(0,1)}X$ 上为零。

有人可能会疑惑，为什么我们只要求 $\Omega_R$ 是闭的。原因在于，如果我们把 $\Omega_I$ 的闭性也纳入 PHHS 的定义，那么近复结构 $J$ 就会自动可积，从而使我们的构造失去意义。关于这一结论的证明见第3.2小节，届时我们将探讨 HHS 与 PHHS 之间的关系。

定义 11 复杂冗余，且相当难以处理。为了更好地研究 PHHS，我们先来定义伪全纯辛流形：

[32]当然，类似的注释也适用于 $X$ 的复化余切丛 $T^*_{\mathbb{C}}X$。

**定义 12** (伪全纯辛流形)。当三元组 $(X, J; \Omega_R)$满足以下条件时，我们称其为伪全纯辛流形*(PHSM)*：$(X,\Omega_R)$ 是一个辛流形，并且 $J$ 是 $X$ 上的近复结构，且与$\Omega_R$反相容，即$\Omega_R(J\cdot, J\cdot) = -\Omega_R$。若 *PHSM* $(X, J; \Omega_R)$满足 $J$不可积，则称其为真。

**备注17** （形式 Ω，第二部分）。每个 *PHSM* $(X, J; \Omega_R)$ 都具有如下定义的微分形式 $\Omega_I$和 Ω：

$$\Omega_I \coloneqq -\Omega_R(J\cdot,\cdot); \quad \Omega \coloneqq \Omega_R + i\Omega_I.$$

容易看出，$\Omega_I$ 是定义在 $X$ 上的光滑、非退化交替2-形式，并且与 $J$ 反相容。此外，Ω 也与 $J$ 反相容，满足$\Omega(J\cdot,\cdot) = \Omega(\cdot, J\cdot) = i\Omega$，即 Ω 是$(2, 0)$型，并且在 $T^{(1,0)}X$ 上非退化。然而，$\Omega_I$ 和Ω 都不一定是闭的。

现在我们可以给出伪全纯哈密顿系统的另一种定义：

定义*13*（伪全纯哈密顿系统）。称一个集体 $(X, J; \Omega_R, H_R)$ 为伪全纯哈密顿系统（*PHHS*），当且仅当 $(X, J; \Omega_R)$ 是一个 *PHSM*，$H_R : X \to \mathbb{R}$是 $X$ 上的光滑函数，并且 *1*-形式 $\Omega_R(J(X^{\Omega_R}H_R)\ \cdot)$ 是恰当的，其中 $\Omega_R(X^{\Omega_R}H_R, \cdot) \coloneqq -dH_R$。称 *PHHS* $(X, J; \Omega_R, H_R)$ 为真，当且仅当 $J$ 不可积。

显然，若要这两个定义一致，条件"$\Omega_R(J(X^{\Omega_R}\mathcal{H}_R)\ \cdot)$ 是恰当的"是必要的，因为根据定义 11：$\Omega_R(J(X^{\Omega_R}\mathcal{H}_R)\ \cdot) = d\mathrm{H}_I$。如下命题保证了该条件也充分：

**命题12** (PHHS 定义良好)。 定义 *11* 与定义*13*一致。

证明。显然，定义 11 中的每个 PHHS 也满足定义 13。现在设 $(X, J; \Omega_R, \mathrm{H}_R)$ 是定义 13 中的一个 PHHS。于是，我们定义 $\Omega_I \coloneqq -\Omega_R(J\cdot,\cdot)$，并令 $\mathrm{H}_I$为 1-形式 $\Omega_R(J(X^{\Omega_R}\mathcal{H}_R)\ \cdot)$ 的一个原函数。我们需要检查这些数据是否满足定义 11 中的性质 1-4。根据定义，性质 1 显然成立。验证性质 2 只需进行简单计算。为检验性质 3，我们回顾注 15。只需验证映射 $\mathrm{H} = \mathrm{H}_R + i\mathrm{H}_I : X \to \mathbb{C}$ 是伪全纯的，这一点可立即得出：

$$\begin{aligned} d\mathcal{H}_R \circ J &= -\Omega_R(X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R}, J\cdot) = -\Omega_R(J(X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R}), \cdot) = -d\mathcal{H}_I, \\ d\mathcal{H}_I \circ J &= \Omega_R(J(X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R}), J\cdot) = -\Omega_R(X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R}, \cdot) = d\mathcal{H}_R, \\ \Rightarrow d\mathcal{H} \circ J &= i \cdot d\mathcal{H}. \end{aligned}$$

最后，我们需要验证性质 4。为此，请记住，任意辛流形（$X$,$\Omega_R$）都具有泊松括号 $\{\cdot,\cdot\}$ $: C^\infty(X, \mathbb{R}) \times C^\infty(X, \mathbb{R}) \to C^\infty(X, \mathbb{R})$，其定义如下

$$\{F, G\} \coloneqq \Omega_R(X_F, X_G),$$

其中， $X_F$ 和 $X_G$ 是函数 $F$ 和 $G$的哈密顿向量场。此外，请回忆，映射 $X_\cdot : C^\infty(X,\mathbb{R}) \to \Gamma(TX)$ 是一个李代数同态：

$$X_{\{F,G\}} = [X_F, X_G] \quad \forall F, G \in C^\infty(X,\mathbb{R}).$$

因此，为了证明 $X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R}$和 $X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_I}$可交换，只需证明 $\{\mathrm{H}_R, \mathrm{H}_I\}$ 为零。我们利用性质 2 和 3 计算 $\{\mathrm{H}_R, \mathrm{H}_I\}$：

$$\{\mathcal{H}_R, \mathcal{H}_I\} = \Omega_R(X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R}, X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_I}) = -\Omega_R(X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R}, J(X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R})) = \Omega_I(X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R}, X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R}) = 0.$$

其余哈密顿向量场的交换性由 $X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R}$ 和 $X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_I}$ 的交换性以及性质 3 得出，从而完成证明。 □

现在我们已经给出了 PHHS 的简洁定义，接下来应简要介绍一些 PHHS 的例子。当然，按照设计，每个 HHS 都是具有可积$J$的 PHHS。尽管正定 PHHS 的集合远大于 HHS 的集合，找到这类系统要复杂一些，因此相关内容留到第4节讨论。部分原因在于，不像实哈密顿系统和 HHS 那样有余切丛[33]作为“标准”例子，正定 PHHS 并没有这样的例子。从更深层次来看，这是因为缺少类达布定理。显然，PHSM 不可能存在达布定理的对应版本，因为 $J$ 通常不可积，因此不存在能使$J$取标准形式的坐标，更不用说能使 $J$ 和 $\Omega = \Omega_R + i\Omega_I$同时取某种标准形式的坐标了。不过，我们仍可利用局部（通常不可积的）标架，将 $J$ 和 $\Omega$ 化为标准形式：

**引理 5** （局部标架中的部分超辛流形）。 设$(X, J; \Omega_R)$是一个具有$\Omega \coloneqq \Omega_R - i\Omega_R(J\cdot,\cdot)$的 *PHSM*，且 $x_0 \in X$为任意一点。那么，存在 $x_0$的一个开邻域 $U \subset X$，以及光滑复向量丛 $T^{*,(1,0)}X$在 $U$上的一个局部标架 $\theta^Q_1, \ldots, \theta^Q_n, \theta^P_1, \ldots, \theta^P_n$，使得$\Omega$ 在 $U$ 上可表示为

$$\Omega|_U = \sum_j^n \theta^P_j \wedge \theta^Q_j.$$

特别地， $X$ 的实维数是 *4* 的倍数。若且唯若 $J$ 在 $x_0$附近可积，局部标架才可取为可积的（必要时缩小 $U$ ）。

注 *18*（$J$处于标准形式）。在$\theta^Q_1$、...、$\theta^Q_n$、$\theta^P_1$、...、$\theta^P_n$的对偶标架下， $J$也处于标准形式。说明如下：局部标架 $\theta^Q_1$、...、$\theta^Q_n$、$\theta^P_1$、...、$\theta^P_n$（$\theta = \theta^x + i\theta^y$）的实部和虚部构成实余切丛 $T^*X$的一个局部标架。其对偶标架$\hat{e}^Q_{\ 1}$、...、$\hat{e}^P_{\ n}$是切丛 $TX$的一个局部标架。令$\hat{e} \coloneqq 1/2(\hat{e}^x - i\hat{e}^y)$，便得到 $T^{(1,0)}X$的一个局部标架。在$T^{(1,0)}X$上，$J$的作用仅为 $i$，因此，$\hat{e}^x$和$\hat{e}^y$满足 $J(\hat{e}^x) = \hat{e}^y$以及 $J(\hat{e}^y) = -\hat{e}^x$。这就是 $J$的标准形式。

[33]至少没有典范的那种！在第4节中，我们将赋予复流形的全纯余切丛一个非典范的 PHHS 结构。

证明。引理 5 可由对$T^{(1,0)}X$的局部标架应用辛 Gram–Schmidt 过程得到；任何一本辛几何教材中都能找到这一过程。关于辛 Gram–Schmidt 过程的复数类比，参见 [16] 中的命题 2.8。为完整起见，我们在此重述其具体构造。设（$X$， $J$；$\Omega_R$）是一个 PHSM，其中 $\Omega \coloneqq \Omega_R - i\Omega_R$（$J\cdot$， $\cdot$），并令 $X$的实维数为 $\dim_{\mathbb{R}}(X) = 2m$， $m \in \mathbb{N}$。由于 $X$ 具有近复结构 $J$， $X$ 的维数为偶数。因此，复化丛 $T_{\mathbb{C}}X$ 的复秩也为$2m$。现在回顾分解 $T_{\mathbb{C}}X = T^{(1,0)}X \oplus T^{(0,1)}X$。由于复向量丛 $T^{(1,0)}X$和 $T^{(0,1)}X$通过复共轭 $v+iw \mapsto v-iw$同构，它们的纤维具有相同的复维数，即 $m$。现在取任意一点 $x_0 \in X$，并在 $x_0$的开邻域 $U \subset X$上选取 $T^{(1,0)}X$的局部标架 $v_1$、…、 $v_m$。根据注 17，$\Omega$ 在 $T^{(1,0)}X$上非退化，因此存在一个向量$\hat{e}_1^Q|_{x_0} \in T^{(1,0)}_{x_0}X$，使得 $\Omega|_{x_0}(v_1|_{x_0}, \hat{e}_1^Q|_{x_0}) \neq 0$。 $v_1$、…、 $v_m$是 $x_0$附近 $T^{(1,0)}X$的局部标架，因此我们可以写出

$$\hat{e}_1^Q|_{x_0} = \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot v_j|_{x_0}$$

对某些常数 $c_j \in \mathbb{C}$。现在定义 $T^{(1,0)}X$ 的局部截面 $\hat{e}_1^Q \coloneqq \sum_j c_j \cdot v_j$。必要时，在保持 $x_0 \in U$ 不变的前提下缩小 $U$，便可得到：对于每个 $x \in U$，$\Omega|_x(v_1|_x, \hat{e}_1^Q|_x) \neq 0$。令 $\hat{e}_1^P \coloneqq v_1$，并在必要时改变 $\hat{e}_1^Q$ 的归一化，可将 $\Omega|_U(\hat{e}_1^P, \hat{e}_1^Q) = 1$ 写成如下形式。

若 $m = 2$，我们只需将 $\theta_1^Q, \theta_1^P$ 定义为 $\hat{e}_1^Q, \hat{e}_1^P$ 的对偶标架。若 $m > 2$，则可从标架 $v_1, \ldots, v_m$ 中选取一个局部截面，例如 $v_2$，使得在必要时缩小 $U \ni x_0$ 后，对于每个 $x \in U$，$\hat{e}_1^Q|_x$、$\hat{e}_1^P|_x$ 和 $v_2|_x$ 都是 $\mathbb{C}$-线性无关的。我们令：

$$\hat{v}_2 \coloneqq v_2 - \Omega|_U(v_2, \hat{e}_1^Q)\cdot \hat{e}_1^P + \Omega|_U(v_2, \hat{e}_1^P)\cdot \hat{e}_1^Q.$$

那么，$\hat{e}_1^Q$、$\hat{e}_1^P$和$\hat{v}_2$ 在 $U$ 上仍然是 $\mathbb{C}$-线性无关的，并且$\hat{v}_2$ 与$\hat{e}_1^Q$ 和$\hat{e}_1^P$ $\Omega$-正交，即 $\Omega|_U(\hat{v}_2, \hat{e}_1^Q) = \Omega|_U(\hat{v}_2, \hat{e}_1^P) = 0$。再次利用 $\Omega$ 的非退化性，我们可以找到一个向量 $e_2^Q|_{x_0} \in T^{(1,0)}_{x_0}X$，使得 $\Omega|_{x_0}(\hat{v}_2|_{x_0}, e_2^Q|_{x_0}) \neq 0$。和之前一样，我们可以写成

$$e_2^Q|_{x_0} = \sum_{j=1}^{m} d_j \cdot v_j|_{x_0}$$

其中 $d_j \in \mathbb{C}$ 为某些常数，并定义 $T^{(1,0)}$的局部截面 $e_2^Q \coloneqq \sum_j d_j \cdot v_j$。必要时，对 $U$进行缩小，并改变 $e_2^Q$的归一化后，我们得到 $\Omega|_U(\hat{v}_2, e_2^Q) = 1$。现在我们设：

$$\hat{e}_2^P \coloneqq \hat{v}_2; \quad \hat{e}_2^Q \coloneqq e_2^Q - \Omega|_U(e_2^Q, \hat{e}_1^Q)\cdot \hat{e}_1^P + \Omega|_U(e_2^Q, \hat{e}_1^P)\cdot \hat{e}_1^Q.$$

通过归纳可得，在 $x_0$ ($n \coloneqq m$/2) 的某个邻域 $U$ 上， $T^{(1,0)}X$ 存在一个局部标架 $\hat{e}_1^Q$、……$\hat{e}_n^Q$、$\hat{e}_1^P$、……、$\hat{e}_n^P$，满足：

$$\Omega|_U(\hat{e}_i^Q, \hat{e}_j^Q) = \Omega|_U(\hat{e}_i^P, \hat{e}_j^P) = 0; \quad \Omega|_U(\hat{e}_i^P, \hat{e}_j^Q) = \delta_{ij}.$$

因此，与标架 $\hat{e}_1^Q$、.....$\hat{e}_n^Q$、$\hat{e}_1^P$、.....、$\hat{e}_n^P$ 对偶的标架 $\theta_1^Q$、.....、$\theta_n^Q$、 $\theta_1^P$、.....、$\theta_n^P$，就是 $x_0$ 附近 $T^*$、$^{(1,0)}X$ 的所需局部标架，在此标架下 Ω 具有如下形式：

$$\Omega|_U = \sum_j^n \theta_j^P \wedge \theta_j^Q.$$

特别地， $X$的实维数为 $4n$。如果标架 $\theta_1^Q, \ldots$是可积的，那么标架$\hat{e}_1^Q, \ldots$也可积，并且在 $x_0$附近存在一个（全纯）坐标图$\phi = (Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n) : U \to V \subset \mathbb{C}^{2n}$，使得：

$$\hat{e}_j^Q \equiv \partial_{Q_j}; \quad \hat{e}_j^P \equiv \partial_{P_j}; \quad \theta_j^Q \equiv dQ_j; \quad \theta_j^P \equiv dP_j.$$

根据注 18， $J$ 在此坐标图中也具有标准形式，因此， $J$ 的Nijenhuis张量在 $x_0$ 的某个开邻域上消失，且 $J$ 在 $x_0$附近可积。反向结论由定理3（参见第3.2小节）以及HSM的达布定理（参见定理1和附录 A）得出。

□

接下来，我们来研究伪全纯哈密顿系统（$X, J$； $\Omega_R, \mathrm{H}_R$）的动力学。为此，我们需要引入伪全纯哈密顿向量场和轨线。为此，我们仿照第 2 节中的定义。为简便起见，从现在起，对于伪全纯哈密顿系统（$X, J$； $\Omega_R, \mathrm{H}_R$），我们总是将微分形式$\Omega_I := -\Omega_R(J\cdot, \cdot)$和$\Omega := \Omega_R + i\Omega_I$，以及函数$\mathrm{H}_I$和$\mathrm{H} := \mathrm{H}_R + i\mathrm{H}_I$与之关联，其中$\mathrm{H}_I$是$\Omega_R(J(X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R}) \cdot)$的一个原函数。

定义 *14*（伪全纯哈密顿向量场和轨迹）。设 *$(X, J; \Omega_R, H_R)$* 是一个伪全纯哈密顿系统。我们将由$\iota_{X_{\mathcal{H}}}\Omega = -d\mathcal{H}$ 定义的 $T^{(1,0)}X$ 的光滑截面 $X_{\mathcal{H}}$ 称为该伪全纯哈密顿系统 *$(X, J; \Omega_R, H_R)$* 的（伪全纯）哈密顿向量场。此外，当伪全纯映射 $\gamma : U \to X$满足伪全纯积分曲线方程时，我们称其为该伪全纯哈密顿系统 *$(X, J; \Omega_R, H_R)$* 的伪全纯轨迹：

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z}(z) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}(z) - i\frac{\partial \gamma}{\partial s}(z)\right) = X_{\mathcal{H}}(\gamma(z)) \quad \forall z = t + is \in U,$$

其中， $U \subset \mathbb{C}$ 是一个带有标准复结构 $j = i$的开连通子集。当对每个满足 $U \subset U$ 且 $\hat{\gamma}|_U = \gamma$ 的伪全纯轨迹 $\hat{\gamma} : U \to X$，都有 $U = U$ 且 $\hat{\gamma} = \gamma$时，我们称伪全纯轨迹 $\gamma : U \to X$ 极大。

或者，也可以用向量场 $X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R}$ 来定义伪全纯哈密顿向量场和轨线：

**命题 13** （ $X_{\mathcal{H}}$和 $\gamma$的替代定义）。 设 （$X, J$； $\Omega_R$， $\mathcal{H}_R$）是一个伪全纯哈密顿系统，其向量场 $X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R}$由 $\Omega_R$（$X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R}, \cdot$） $= -d\mathcal{H}_R$ 定义。那么：

$$X_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\left(X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R} - i \cdot J(X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R})\right).$$

现在，设 $U \subset \mathbb{C}$ 为一个开连通子集， $\gamma : U \to X$ 为一个映射。那么， $\gamma$ 是伪全纯轨迹，当且仅当由 $\gamma_s(t) := \gamma(t + is)$ 定义的 $\gamma_s$ 对每个适当的 $s \in \mathbb{R}$ 都是 $X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R}$ 的积分曲线，并且 $\gamma : U \to X$ 是伪全纯的。

证明。 通过直接计算可验证，定义 14 中的 $X_{\mathcal{H}}$ 满足上述方程。为了证明关于伪全纯轨迹的陈述，考虑伪全纯积分曲线方程的实部，并注意到由于 $\gamma$的伪全纯性：

$$\frac{\partial \gamma}{\partial s} = J(\frac{\partial \gamma}{\partial t}).$$

□

我们对 PHHS 的设计方式是，使得我们在第 3 节中发现的 HHS 的所有性质都能（几乎）完整地推广到 PHHS。例如，我们得到了命题 2 在 PHHS 中的对应命题：

命题 *14*（伪全纯轨迹的存在唯一性）。设 $(X, J; \Omega_R, H_R)$ 是一个 *PHHS*。那么，对于任意 $z_0 \in \mathbb{C}$和 $x_0 \in X$，存在一个开连通子集 $U \subset \mathbb{C}$ 以及 $(X, J; \Omega_R, H_R)$ 的一条伪全纯轨迹 $\gamma^{z_0,x_0} : U \to X$，满足 $\gamma^{z_0,x_0}(z_0) = x_0$。满足 $\gamma^{z_0}{}_{,1}{}^{x_0}(z_0) = x_0 = \gamma^{z_0}{}_{,2}{}^{x_0}(z_0)$ 的两条伪全纯轨迹 $\gamma^{z_0}{}_{,1}{}^{x_0} : U_1 \to X$ 和 $\gamma^{z_0}{}_{,2}{}^{x_0} : U_2 \to X$ 在局部重合；特别地，当且仅当它们的定义域 $U_1$ 和 $U_2$ 相等时，它们才相等。此外，伪全纯轨迹 $\gamma^{z_0,x_0}$ 关于 $z_0$伪全纯地依赖，但一般而言，仅关于 $x_0$光滑地依赖。

证明。 命题 14 的证明与命题 2 的证明非常相似。根据定义 11 和命题 13， $X_{\mathcal{H}}$ 的实部和虚部彼此可交换，因此，我们可以按照命题 2 的证明方式，证明给定初值 $\gamma^{z_0,x_0}(z_0)$ 时，伪全纯轨迹 $\gamma^{z_0,x_0}$ 存在。

为证明唯一性，我们注意到公式

$$\gamma^{z_0,x_0}(z) \coloneqq \varphi_{s-s_0}^{J(X_{\mathcal{H}_R}^{\Omega_R})} \circ \varphi_{t-t_0}^{X_{\mathcal{H}_R}^{\Omega_R}}(x_0) \equiv \varphi_{t-t_0}^{X_{\mathcal{H}_R}^{\Omega_R}} \circ \varphi_{s-s_0}^{J(X_{\mathcal{H}_R}^{\Omega_R})}(x_0) \equiv \varphi_1^{(t-t_0)X_{\mathcal{H}_R}^{\Omega_R}+(s-s_0)J(X_{\mathcal{H}_R}^{\Omega_R})}(x_0),$$

其中 $z = t + is$ 唯一确定了 $\gamma^{z_0,x_0}$ 在 $\mathbb{C}$ 中靠近 $z_0 = t_0 + is_0$的一个小矩形上的取值。接下来，只需用有限个这样的矩形覆盖连接 $z_0$ 与 $U_1 \equiv U_2$ 中任意点 $z_1$ 的路径，即可得到其余结论。

最后，我们来考察 $\gamma^{z_0,x_0}$ 对 $z_0 \in \mathbb{C}$ 和 $x_0 \in X$的依赖关系。同样， $\gamma^{z_1,x_0}(z)$ 与 $\gamma^{z_2,x_0}(z)$ 仅相差 $z$中的一个平移。由于伪全纯轨迹是伪全纯映射，因此它对 $z_0$的依赖也是伪全纯的。对于 $x_0$的依赖，我们需要考察 $X^{\Omega_R}{}_{\mathcal{H}_R}$和 $J(X^{\Omega_R}{}_{\mathcal{H}_R})$的流。 $X^{\Omega_R}{}_{\mathcal{H}_R}$和 $J(X^{\Omega_R}{}_{\mathcal{H}_R})$都是光滑向量场，因此它们的流也光滑，证明得证。

□

**注记 19** ($x_0$-依赖性)。 请注意，*HHS* 的全纯轨迹全纯地依赖于 $x_0$，而 *PHHS* 的伪全纯轨迹通常不会伪全纯地依赖于 $x_0$。这种区别可以追溯到哈密顿向量场 $X_{\mathcal{H}}$。对于 *HHS*， $X_{\mathcal{H}}$ 是全纯向量场，特别是其实部和虚部是保持 $J$ 的向量场（参见命题 *1*），这意味着它们的流的微分与 $J$ 可交换。对于 *PHHS*，情况不再

如此： $X^{\Omega_R}\mathcal{H}_R$和 $J(X^{\Omega_R}\mathcal{H}_R)$都不必保持 $J$！事实上，我们在第*4*节研究了一个真 *PHHS* 的例子，其中 $X^{\Omega_R}\mathcal{H}_R$ 保持 $J$，但$J(X^{\Omega_R}\mathcal{H}_R)$则不保持。

与 HHS 类似，给定初值后，PHHS 的极大轨迹不一定唯一；不过，我们仍然可以对 PHHS 的能量超曲面 $\mathrm{H}^{-1}(E)$ 进行伪全纯叶状分解：

**命题 15** (正则超曲面的伪全纯叶状分解)。 设 $(X, J; \Omega_R, \mathcal{H}_R)$ 是一个 *PHHS*，其哈密顿向量场为 $X_{\mathcal{H}} = 1/2(X^{\Omega_R}\mathcal{H}_R - iJ(X^{\Omega_R}\mathcal{H}_R))$，且 $\mathcal{H}$ 的[34] 值 $E$ 是正则值。那么，能量超曲面 $\mathcal{H}^{-1}(E)$ 允许一个伪全纯叶状分解。该叶状分解中经过点 $x_0 \in \mathcal{H}^{-1}(E)$ 的叶 $L_{x_0}$ 为

$$L_{x_0} \coloneqq \{y \in X \mid y = \varphi_{t_1}^{X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R}} \circ \varphi_{s_1}^{J(X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R})} \circ \varphi_{t_2}^{X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R}} \circ \varphi_{s_2}^{J(X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R})} \circ \ldots \circ \varphi_{t_n}^{X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R}} \circ \varphi_{s_n}^{J(X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R})}(x_0);$$
$$t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}\},$$

其中，$\varphi_{t_j}^{X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R}}$和 $\varphi^{J(X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R})s_j}$分别是 $X^{\Omega_R}\mathcal{H}_R$ 和 $J(X^{\Omega_R}\mathcal{H}_R)$在时间 $t_j$ 和 $s_j$下的流。每条能量为 $E$ 的伪全纯轨迹 $(X, J; \Omega_R, \mathcal{H}_R)$ 都完全包含在这样一片叶中。

证明。首先，我们需要明确伪全纯叶状结构的概念。为此，回顾全纯叶状结构的定义。复流形 $X$ 上的一个（$d$ 维）全纯叶状结构 $\{L_{x_0}\}_{x_0 \in I}$ （$I$：指标集）是将$X = \bigcup_{x_0 \in I} L_{x_0}$ 分解为叶 $L_{x_0}$ 的不交并，其中叶是 $X$ 的道路连通子集，并且满足：对每个点 $x \in X$，都存在一个 $x \in X$ 附近的全纯坐标图 $\phi = (z_1, \ldots, z_n) : U \to V \subset \mathbb{C}^n$，使得对于每个满足$U \cap L_{x_0} \neq \varnothing$的叶 $L_{x_0}$，$U \cap L_{x_0}$ 的连通分支都由 $z_{d+1} = c_{d+1}, \ldots, z_n = c_n$ 给出，其中 $c_{d+1}, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ 是某些常数。显然，我们不能将这个定义直接推广到非可积情形，因为泛型的近复流形并不具有全纯坐标图。因此，当且仅当 $\{L_{x_0}\}_{x_0 \in I}$ 是 $X$ 上的一个（光滑）叶状结构，且叶 $L_{x_0}$ 的切空间在 $J$ 的作用下封闭时，我们称 $\{L_{x_0}\}_{x_0 \in I}$ 为几乎复流形（$X, J$）上的伪全纯叶状结构。现在，我们可以像命题 3 一样，通过将弗罗贝尼乌斯定理应用于向量场 $X^{\Omega_R}\mathrm{H}_R$ 和 $J$（$X^{\Omega_R}\mathrm{H}_R$），证明最后一个命题。

□

与 HHS 类似，我们也可以为 PHHS 定义几何轨迹的概念。只需照搬定义 5，并将“全纯”替换为“伪全纯”即可。我们在第 2.2 小节中关于 HHS 几何轨线得到的所有结果，在伪全纯情形下仍然成立。特别是，命题 4 对 PHHS 仍然成立。证明与全纯情形基本相同。然而，黎曼曲面 $\Sigma$ 上的向量场 $Y_{\mathcal{H}}$ 原则上只是一个光滑截面

[34]与之前一样，若在能量 $E \in \mathbb{C}$ 处，$d\mathrm{H}$ 或等价地 $d\mathrm{H}_R$ 在 $\mathrm{H}^{-1}(E)$ 上不为零，则 PHHS（$X$，$J$；$\Omega_R$，$\mathrm{H}_R$）是正则的。

属于 $T^{(1,0)}\Sigma$。注意到哈密顿向量场 $X_{\mathcal{H}}$ 的实部和虚部按构造彼此交换， $Y_{\mathcal{H}}$ 因此成为 $\Sigma$ 上的全纯向量场。于是 $Y_{\mathcal{H}}$ 的实部和虚部也彼此交换，因为 $\gamma$ 的推前是李代数同态，即对于 $\Sigma$ 上的向量场[35] $V$和 $W$，有 $\gamma_*[V,W] = [\gamma_*V, \gamma_*W]$。现在注意，对于黎曼曲面 $\Sigma$， $T^{(1,0)}\Sigma$ 的光滑截面 $V$ 的实部和虚部彼此交换，当且仅当 $V$ 是 $\Sigma$ 上的全纯向量场。在 $\Sigma$ 的全纯坐标图中可以轻易验证这一点。这表明 $Y_{\mathcal{H}}$ 的全纯性。关于几何轨迹的其余结果，其证明只需在必要时调整术语，便与全纯情形相同。

在结束本小节之前，我们想为伪全纯轨迹构造作用泛函，并阐述相关原理。根据 PHHS 的构造，这可以采用与第 2.3 小节相同的方法完成。首先，我们注意到，一个 PHHS $(X, J; \Omega_R, \mathrm{H}_R)$ 可分解为多个实哈密顿系统。与 HHS 不同，这次我们只能得到两个实哈密顿系统，即 $(X, \Omega_R, \mathrm{H}_R)$ 和 $(X, \Omega_R, \mathrm{H}_I)$，因为 $\Omega_I$ 通常并非闭形式。不过，这足以为伪全纯轨迹找到作用泛函，因为 HHS 的四个基础实哈密顿系统中，只有两个具有不同的动力学。如果 PHHS $(X, J; \Omega_R, \mathrm{H}_R)$ 是恰当的，即 $\Omega_R = d\Lambda_R$，那么两个实哈密顿系统 $(X, \Omega_R, \mathrm{H}_R)$ 和 $(X, \Omega_R, \mathrm{H}_I)$ 也都是恰当的，并且各自具有作用泛函。与 HHS 的情形一样，我们现在可以对这些作用泛函关于剩余的时间变量取平均，然后再进行适当的线性组合，从而得到以下用于伪全纯轨迹的作用泛函：

**引理 6** （伪全纯轨迹的作用原理）。
设$(X, J; \Omega_R = d\Lambda_R, \mathcal{H}_R)$ 为一个恰当 *PHHS*。对于 $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{n \cdot \pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$，设 $P_\alpha \coloneqq [t_1, t_2] + e^{i\alpha}[r_1, r_2] \subset \mathbb{C}$ 为复平面中的一个平行四边形，其实数为 $t_1 < t_2$ 和 $r_1 < r_2$。将从 $P_\alpha$ 到 $X$ 的光滑映射空间记为 $\mathcal{P}_{P_\alpha}$，并定义作用泛函 $\mathcal{A}^{P_\alpha}{}_{\mathcal{H}} : \mathcal{P}_{P_\alpha} \to \mathbb{C}$ 如下

$$\mathcal{A}^{P_\alpha}_{\mathcal{H}}[\gamma] \coloneqq \iint_{P_\alpha} \left[\Lambda_R|_{\gamma(t+is)}\left(2\frac{\partial\gamma}{\partial z}(t+is)\right) - \mathcal{H}\circ\gamma(t+is)\right] dt\wedge ds \ \ with\ \frac{\partial\gamma}{\partial z} \coloneqq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial t} - i\frac{d\gamma}{\partial s}\right)$$

对每个 $\gamma \in \mathcal{P}_{P_\alpha}$均成立。现在，设 $\gamma \in \mathcal{P}_{P_\alpha}$ 是从 $P_\alpha$ 到 $X$的光滑映射。那么， $\gamma$ 是$(X, J; \Omega_R, \mathcal{H}_R)$ 的伪全纯轨迹，当且仅当 $\gamma$是$\mathcal{A}^{P_\alpha}{}_{\mathcal{H}}$ 的一个“临界点”[36]。

证明。 证明引理 6 时，针对 PHHS 重复第 2.3 小节中的步骤，特别是命题 8 的证明。 □

如前所述，如果我们希望将伪全纯轨迹视为某个泛函的实际临界点，可以通过将边界 $\partial P_\alpha$ 映射到（$X$,$\Omega_R$）中的一个拉格朗日子流形，或对曲线 $\gamma$施加周期性来实现。

[35]严格来说，这并不正确，因为 $\gamma : \Sigma \to X$ 只是一个浸入，而不是微分同胚，因此 $\gamma$ 的推前没有明确定义。不过，如果我们将$\gamma_*V$和 $\gamma_*W$ 视为拉回丛 $\gamma^*TX$ 的截面，并相应调整李括号的定义，这一论证仍然成立。
[36]“临界点”意味着只允许那些使 $\gamma$ 在边界 $\partial P_\alpha$上保持固定的变分。

### 3.2. HHS 与 PHHS 之间的关系

此时，尚不清楚 PHHS 与 HHS 有何关联，也不清楚为何就 $J$ 的可积性而言，PHHS 是 HHS 的一种“合理”推广。具体来说，我们还不知道，当恢复 $J$ 的可积性时，第3.1小节引入的 PHHS 概念为何应当与 HHS 概念一致。先验地，并无理由认为与 PHHS $(X, J; \Omega_R, \mathrm{H}_R)$ 相关联的 2-形式 $\Omega \coloneqq \Omega_R - i\Omega_R(J\cdot,\cdot)$ 在可积的 $J$ 情形下应当是全纯的，甚至是闭的。以下定理保证了事实确实如此：

**定理 3**（HSM 与 PHSM 之间的关系）。设 $(X, J;\ \Omega_R)$ 是一个 *PHSM*，其2-形式为 $\Omega_I \coloneqq -\Omega_R$ $(J\cdot,\cdot)$ 以及 $\Omega \coloneqq \Omega_R + i\Omega_I$。此外，设 $x_0 \in X$ 为任意一点。那么，$J$ 在 $x_0$ 附近可积，当且仅当 $d\Omega_I$ 在 $x_0$附近消失。此外，下列陈述等价：

1. $(X, \Omega)$ 是一个带有复结构 $J$的 *HSM*。
2. $\Omega_I$ 是闭的，$d\Omega_I = 0$。
3. $J$ 是可积的。

证明。我们只证明陈述 1、2 和 3 的等价性。定理 3 的第一部分便是这一等价性的局部版本。根据 HSM 的定义，方向“1⇒2”显然成立。蕴含“2⇒3”归功于 Verbitsky（参见 [17]中的定理3.5以及 [16]中的命题2.12）。为求完整起见，我们在此给出证明。设 $(X, J; \Omega_R)$ 是一个 PHSM，其 2-形式为 $\Omega_I \coloneqq -\Omega_R(J\cdot,\cdot)$ 以及 $\Omega \coloneqq \Omega_R + i\Omega_I$。此外，假设$d\Omega_I = 0$。我们要证明 $J$ 是可积的。根据 Newlander-Nirenberg定理，$J$ 可积，当且仅当 $J$ 没有挠率，也就是说，其 Nijenhuis张量为零。现在应用 [7]第九章中的定理2.8。因此，$J$ 可积，当且仅当 $T^{(0,1)}X$ 的光滑截面空间在对易子 $[\cdot,\cdot]$下封闭。由第3.1小节可知，$\Omega$ 在 $T^{(1,0)}X$上非退化，而在 $T^{(0,1)}X$上消失。因此，$X$ 上的复向量场 $V$是 $T^{(0,1)}$ 的光滑截面，当且仅当 $\iota_V\Omega = 0$。因此，$J$可积，当且仅当对于 $X$上满足 $\iota_V\Omega = \iota_W\Omega = 0$的任意一对复向量场 $V$ 和 $W$，都有 $\iota_{[V,W]}\Omega = 0$。现在设 $V$和 $W$是 $X$上的两个复向量场，且满足 $\iota_V\Omega = \iota_W\Omega = 0$。回顾一下，作用于微分形式的内积 $\iota$ 满足以下关系（参见 [18]第 I 章中的命题 3.10）：

$$\iota_{[V,W]} = [L_V, \iota_W],$$

其中，$L_V$是 $V$的李导数。我们可以利用嘉当魔法公式 $\iota_V\Omega = 0$ 和 $d\Omega = 0$ 计算 $L_V\Omega$：

$$L_V\Omega = d\iota_V\Omega + \iota_V d\Omega = 0.$$

综上，利用 $\iota_W\Omega = 0$，我们得到：

$$\iota_{[V,W]}\Omega = [L_V, \iota_W]\Omega = L_V(\iota_W\Omega) - \iota_W(L_V\Omega) = 0$$

证明 $J$ 的可积性。

剩下的方向“3⇒1”可按如下方式证明：设 $(X, J; \Omega_R)$ 是一个 PHSM，其 2-形式为 $\Omega_I := -\Omega_R(J\cdot,\cdot)$，且 $\Omega := \Omega_R + i\Omega_I$。此外，假设 $J$ 是可积的。那么，$X$ 是一个复流形，其复结构为 $J$。我们需要证明 $\Omega$ 是闭的全纯二形式，并且在 $T^{(1,0)}X$ 上非退化。根据备注17，$\Omega$ 在 $T^{(1,0)}X$ 上非退化，且类型为 $(2,0)$。因此，$\Omega$ 可在 $X$ 的全纯坐标图 $\phi = (z_1,\ldots,z_{2m}) : U \to V \subset \mathbb{C}^{2m}$ 中写为

$$\Omega|_U = \sum_{i,j=1}^{2m} \Omega_{ij} dz_i \wedge dz_j,$$

其中系数 $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji} : U \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ 是定义在 $U$ 上的光滑函数。由 $d\Omega_R = 0$，可得：

$$0 = 2d\Omega_R|_U = (\partial + \bar\partial)(\Omega + \overline{\Omega})|_U = \sum_{i,j,k=1}^{2m} \Big( \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_i \wedge dz_j + \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial \bar z_k} d\bar z_k \wedge dz_i \wedge dz_j + \frac{\partial \overline{\Omega}_{ij}}{\partial z_k} dz_k \wedge d\bar z_i \wedge d\bar z_j + \frac{\partial \overline{\Omega}_{ij}}{\partial \bar z_k} d\bar z_k \wedge d\bar z_i \wedge d\bar z_j \Big).$$

该方程意味着：

$$\frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial \bar z_k} = 0 \quad \forall i,j,k \in \{1,\ldots,2m\}.$$

因此，系数 $\Omega_{ij}$ 是定义在 $U$ 上的全纯函数。由于最后一个论证可对 $X$ 的任意全纯坐标图重复进行，形式 $\Omega$ 本身是全纯的。因此，其外微分 $d\Omega$ 也是全纯形式。特别地，$d\Omega$ 满足：

$$d\Omega(J\cdot,\cdot,\cdot) = i \cdot d\Omega.$$

由于外微分是 $\mathbb{C}$-线性的，将 $d\Omega$ 分解为实部和虚部相当于 $d\Omega = d\Omega_R + i d\Omega_I$。将此分解与前一个方程结合，可得

$$d\Omega_I = -d\Omega_R(J\cdot,\cdot,\cdot) = 0,$$

这里再次用到了 $\Omega_R$ 的闭性。这表明 $\Omega$ 具有所需性质，证明完毕。

□

**注 20**（$\Omega$ 的闭性$_R$）。注意，$\Omega_R$ 的闭性对于定理*3*至关重要：若 （$X$，$\Omega = \Omega_R + i\Omega_I$） 是一个全纯辛流形，且 $f : X \to \mathbb{R}_+$ 是定义在 $X$ 上的正光滑函数，那么 $f\cdot\Omega_R$ 仍是 $X$ 上一个与可积复结构 $J$ 反相容的非退化2-形式；然而，$f\cdot\Omega_R$ 和 $f\cdot\Omega_I$ 未必是闭的。事实上，通常而言，$f\cdot\Omega$ 甚至不是全纯的。

当然，我们也可以针对哈密顿系统表述定理3：

推论 *2*（*HHS* 与 *PHHS* 之间的关系）。设 $(X, J; \Omega_R, H_R)$ 是一个 *PHHS*，其 *2*-形式为 $\Omega_I := -\Omega_R(J\cdot, \cdot)$ 和 $\Omega := \Omega_R + i\Omega_I$，且函数 $H := H_R + iH_I$ 满足：$H_I$ 是 *1*-形式 $\Omega_R(J(X^{\Omega_R} H_R)\ \cdot)$ 的任意一个原函数。那么，以下陈述等价：

*1.* $(X, \Omega, \mathcal{H})$ 是具有复结构 $J$ 的全纯哈密顿系统。
*2.* $\Omega_I$ 是闭的，$d\Omega_I = 0$。*3.* $J$ 是可积的。

证明。 推论 2 是定理3和注15的直接推论。 □

我们可以将定理3和推论 2解读如下：PHSM 的近复结构 $J$的可积性，或 PHHS（$X, J; \Omega_R$）的近复结构 $J$的可积性，是由虚部 $\Omega_I := -\Omega_R(J\cdot, \cdot)$ 的闭性完全刻画的，反之亦然。此外，这些量是 PHSM 或 PHHS 的唯一局部不变量：根据 HSM 的达布定理（参见定理1），我们知道任何 HSM 都可以局部化为标准形式。类似地，我们将在第 4.2 小节看到，（正则）HHS 也可以局部化为标准形式。存在某些坐标使几何对象呈现标准形式，这意味着该几何对象没有局部不变量。从这个意义上说，定理3和推论 2表明，Nijenhuis张量 $N_J$ of $J$ 或等价地，外微分 $d\Omega_I$ 是 PHSM 和（正则）PHHS 的唯一局部不变量。对于一般的 PHHS，Nijenhuis张量以及哈密顿量在奇异点附近的行为是唯一的局部不变量。

# 4. 正定 PHHS 的构造与 HHS 的变形

本节有两个目的。首先是展示正定 PHHS 的实例。事实上，我们提供了一种从 HHS 构造 PHHS 的通用方法（参见第 4.1 小节），例如，该方法可以为复流形的全纯余切丛赋予一种（非典范的）PHHS 结构。其次，我们研究正定 PHHS 在所有 PHHS 集合中的“规模”。这项研究的主要结果是，正定 PHHS 是泛型的（参见第 4.2 小节）。为证明这一点，我们利用正定 PHHS 对 HHS 进行变形。

## 4.1. 由 HHS 构造正定 PHHS

在本小节中，我们希望构造正定 PHHS 的例子。构造的基本思路是从一个 HHS $(X, \Omega, \mathrm{H})$ 出发，通过将其复结构 $J$ 变换为近复结构 $J_g \coloneqq I_g \bigcirc J \bigcirc I_g$，并利用一个与 $\Omega_R$ 相容[37] 的近复结构 $I_g$，将其转化为 PHHS。下面将这一思路精确化：

选取一个带有复结构 $J$ 的 HHS $(X, \Omega = \Omega_R + i\Omega_I, \mathrm{H} = \mathrm{H}_R + i\mathrm{H}_I)$。接下来，选取 $X$ 上满足 $\Omega_R(I_g \cdot, I_g \cdot) = \Omega_R$ 的近复结构 $I_g$，并考虑 $X$ 上光滑的 $(1,1)$ 型张量场 $J_g \coloneqq I_g \bigcirc J \bigcirc I_g$。显然，$J_g$ 是 $X$ 上的近复结构：

$$J_g^2 = (I_g \circ J \circ I_g) \circ (I_g \circ J \circ I_g) = -I_g \circ J^2 \circ I_g = I_g^2 = -1.$$

此外，$J_g$ 仍与 $\Omega_R$ 反相容：

$$\Omega_R(J_g \cdot, J_g \cdot) = \Omega_R(J \circ I_g \cdot, J \circ I_g \cdot) = -\Omega_R(I_g \cdot, I_g \cdot) = -\Omega_R.$$

因此，$(X, J_g; \Omega_R)$ 是一个 PHSM。若选择 $I_g$ 使得 1-形式 $\Omega_R(J_g(X^{\Omega_R \mathcal{H}_R}) \cdot)$ 恰当，那么 $(X, J_g; \Omega_R, \mathrm{H}_R)$ 甚至是一个 PHHS。一般而言，以这种方式构造的 PHHS 是真的。根据推论 2，只需计算 $\Omega_I^g \coloneqq -\Omega_R(J_g \cdot, \cdot)$ 的外微分即可检验这一点。

在实践中，可以通过选择合适的半黎曼度量 $g \coloneqq \Omega_R(I_g \cdot, \cdot)$，找到与 $\Omega_R$ 相容的近复结构 $I_g$。然而，对于任意给定的全纯哈密顿系统 $(X, \Omega, \mathrm{H})$，任意一个与 $\Omega_R$ 相容的近复结构 $I_g$ 通常并不与 $\mathrm{H}_R$ 相容，具体含义如上所述。多数情况下，更简单的做法是先选取一个近复结构 $I_g$，再选取合适的实函数 $\mathrm{H}_R$。由于在我们希望研究的大多数例子中，$X$ 都是可缩的，例如局部情形和 $X = \mathbb{C}^{2n}$，因此通常可以通过求解微分方程 $d[\Omega_R(J_g(X^{\Omega_R \mathcal{H}_R}) \cdot)] = 0$ 来找到合适的 $\mathrm{H}_R$。

为了说明这一构造，我们来考虑最简单的非平凡例子：

[37] 这里，$I_g$ 与 $\Omega_R$ 相容，当且仅当 $\Omega_R(I_g \cdot, I_g \cdot) = \Omega_R$。在辛几何文献中，这个术语的用法有所不同。通常，若 $(X, \Omega_R)$ 是一个辛流形，且 $I_g$ 是 $X$ 上的近复结构，则称 $I_g$ 与 $\Omega_R$ 相容，如果 $-g \coloneqq \Omega_R(\cdot, I_g \cdot)$ 是一个黎曼度量。这比我们的条件更强，因为我们的条件只能推出 $-g$ 是半黎曼度量，但不一定正定。还要注意，在下面的计算中，我们使用 $g \coloneqq \Omega_R(I_g \cdot, \cdot)$，而不是 $-g$，因为符号对我们并不重要。

**例3** （ $X=\mathbb{C}^2$上的伪全纯哈密顿系统）。设 $(X,\Omega,\mathrm{H})$ 是满足 $X=\mathbb{C}^2$、$\Omega=dz_2\wedge dz_1$ 的全纯哈密顿系统，其中 $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$，且 $\mathrm{H}(z_1,z_2)=i\cdot z_1$。利用分解 $z_j=x_j+i\cdot y_j$，可得：

$$\Omega_R=dx_2\wedge dx_1-dy_2\wedge dy_1;\quad \mathcal{H}_R=-y_1.$$

HHS $(X,\Omega,\mathrm{H})$ 的复结构 $J$ 可直接通过乘以 $i$ 得到：

$$J(\partial_{x_j}):=\partial_{y_j};\quad J(\partial_{y_j}):=-\partial_{x_j}.$$

现在我们在 $\mathbb{C}^2$ 上选取如下半黎曼度量 $g$：

$$g(\partial_{x_1},\partial_{x_1})=g(\partial_{x_2},\partial_{x_2})^{-1}=f;\quad g(\partial_{y_1},\partial_{y_1})=g(\partial_{y_2},\partial_{y_2})^{-1}=h;$$
$$g(\partial_{x_1},\partial_{x_2})=g(\partial_{y_1},\partial_{y_2})=g(\partial_{x_i},\partial_{y_j})=0,$$

其中 $f,h:\mathbb{C}^2\to\mathbb{R}$ 是光滑且处处非零的函数。相应的近复结构 $I_g$ 为：

$$I_g(\partial_{x_1})=f\partial_{x_2},\ I_g(\partial_{x_2})=-f^{-1}\partial_{x_1};\quad I_g(\partial_{y_1})=-h\partial_{y_2},\ I_g(\partial_{y_2})=h^{-1}\partial_{y_1}.$$

容易验证，$I_g$ 确实是一个近复结构，且与 $\Omega_R$ 相容。现在我们采用记号 $r:=f/h$，并令 $J_g:=I_g\bigcirc J\bigcirc I_g$。于是，$J_g$ 为

$$J_g(\partial_{x_1})=r\partial_{y_1},\ J_g(\partial_{x_2})=r^{-1}\partial_{y_2};\quad J_g(\partial_{y_1})=-r^{-1}\partial_{x_1},\ J_g(\partial_{y_2})=-r\partial_{x_2}.$$

根据构造，$J_g$ 是一个近复结构，且与 $\Omega_R$ 反相容。因此，$(X,J_g;\Omega_R)$ 是一个 PHSM。对于诱导的2-形式 $\Omega_I^g:=-\Omega_R(J_g\cdot,\cdot)$，可得：

$$\Omega_I^g=r^{-1}dx_2\wedge dy_1+rdy_2\wedge dx_1.$$

因此，$\Omega_I^g$ 的外微分可表示为

$$d\Omega_I^g=dr\wedge\left(dy_2\wedge dx_1-r^{-2}dx_2\wedge dy_1\right).$$

一般而言，外微分 $d\Omega_I^g$ 不为零。例如，我们可以令 $f(z_1,z_2)=1$，并令 $h(z_1,z_2)=e^{x_1}$，从而得到 $r(z_1,z_2)=e^{-x_1}$。这一选择给出

$$d\Omega_I^g=e^{x_1}dx_1\wedge dx_2\wedge dy_1$$

它在 $X$ 的任意一点都不为零。因此，对于所给出的 $f$ 和 $h$，$(X,J_g;\Omega_R)$ 是一个真 PHSM。

接下来，我们检验 1-形式 $\Omega_R(J_g(X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R})\cdot)$ 是否恰当。由于 $X=\mathbb{C}^2$ 是可缩的，只需检验 $\Omega_R(J_g(X^{\Omega_R}_{\mathcal{H}_R})\cdot)$ 是否闭。为保持一般性，我们先对任意光滑实函数 $H:\mathbb{C}^2\to\mathbb{R}$ 进行计算，随后再代入$H=\mathrm{H}_R=-y_1$。我们先确定哈密顿向量场 $X_H\equiv X^{\Omega_R}_H$。它可以写成

$$X_H=(\partial_{x_2}H)\cdot\partial_{x_1}-(\partial_{x_1}H)\cdot\partial_{x_2}-(\partial_{y_2}H)\cdot\partial_{y_1}+(\partial_{y_1}H)\cdot\partial_{y_2}.$$

将 $J_g$ 应用于 $X_H$，得到：

$$J_g(X_H) = (r^{-1}\partial_{y_2}H)\cdot\partial_{x_1} - (r\partial_{y_1}H)\cdot\partial_{x_2} + (r\partial_{x_2}H)\cdot\partial_{y_1} - (r^{-1}\partial_{x_1}H)\cdot\partial_{y_2}.$$

将 $J_g(X_H)$ 与 $\Omega_R$ 收缩，得到：

$$\begin{aligned}\Omega_R(J_g(X_H),\cdot) &= -(r\partial_{y_1}H)\cdot dx_1 - (r^{-1}\partial_{y_2}H)\cdot dx_2 + (r^{-1}\partial_{x_1}H)\cdot dy_1 + (r\partial_{x_2}H)\cdot dy_2\\ &\equiv w_{x_1}dx_1 + w_{x_2}dx_2 + w_{y_1}dy_1 + w_{y_2}dy_2.\end{aligned}$$

For 要使 $\Omega_R(J_g(X_H)\ \cdot)$ 闭，系数 $w$ 需要满足以下条件 ：

$$\partial_{x_i}w_{x_j} = \partial_{x_j}w_{x_i};\quad \partial_{y_i}w_{y_j} = \partial_{y_j}w_{y_i};\quad \partial_{x_i}w_{y_j} = \partial_{y_j}w_{x_i}.$$

现在令 $H$ =$\mathrm{H}_R$ = $-y_1$。这样，除 $w_{x_1} = r$ 外的所有系数都为零。特别地，$\Omega_R(J_g(X_H)\ \cdot)$ 恰当，当且仅当 $r$ 仅依赖于 $x_1$。在这种情况下，$\Omega_R(J_g(X_H)\ \cdot)$ 的原函数 $\mathrm{H}_I^g$ 为 $R$，其中 $R$ 仅依赖于 $x_1$，且满足$\partial_{x_1}R = r$。例如，我们也可以再次令 $f(z_1,\ z_2) = 1$，并令 $h(z_1,\ z_2) = e^{x_1}$，从而得到$r(z_1,\ z_2) = e^{-x_1}$。对于这一选择，$(X,\ J_g;\ \Omega_R,\ \mathrm{H}_R)$ 是一个真伪全纯哈密顿系统，其中 $\mathrm{H}_I^g = -e^{-x_1}$ 是哈密顿量虚部的一种可能形式。

当然，上述构造并非从 HSM 得到 PHSM 的唯一方法。例如，例子（$X = \mathbb{C}^2$，$\Omega = dz_2\wedge dz_1$）的简单结构使我们能够通过旋转坐标轴，将标准复结构 $J$ 变换为新的 $\Omega_R$-反相容近复结构 $J_\varphi$：

$$\begin{aligned}J_\varphi(\partial_{x_1}) &\coloneqq \cos(\varphi)\partial_{y_1} - \sin(\varphi)\partial_{y_2}, \qquad J_\varphi(\partial_{x_2}) \coloneqq \sin(\varphi)\partial_{y_1} + \cos(\varphi)\partial_{y_2};\\ J_\varphi(\partial_{y_1}) &\coloneqq -\cos(\varphi)\partial_{x_1} - \sin(\varphi)\partial_{x_2}, \quad J_\varphi(\partial_{y_2}) \coloneqq \sin(\varphi)\partial_{x_1} - \cos(\varphi)\partial_{x_2},\end{aligned}$$

其中 $\varphi:\mathbb{C}^2\to\mathbb{R}$ 是任意光滑函数。由此得到的 PHSM（$X$，$J_\varphi$；$\Omega_R$）通常也是真 PHSM。

我们之所以重点关注涉及 $I_g$ 的构造，是因为它与超凯勒流形有着有趣的联系。再看例 3。若选取 $g$ 为 $\mathbb{C}^2\cong\mathbb{R}^4$上的标准欧几里得度量 $\delta$，即 $f\equiv h\equiv 1$，则 $I_\delta$ 与标准复结构 $J$反对易。因此， $J_\delta$与 $J$重合，我们的构造不会改变底层 HSM（$\mathbb{C}^2$，$dz_2\wedge dz_1$）。事实上，（$\mathbb{C}^2$，$dz_2\wedge dz_1$）源自 $\mathbb{C}^2$上的超凯勒结构，该结构由 $\delta$、 $I_\delta$、 $J$和$K \coloneqq I_\delta\bigcirc J$定义。这里，若一个五元组（$X$，$g$，$I$，$J$，$K$）满足以下条件，我们称其为超凯勒流形： $X$是一个光滑流形，带有黎曼度量 $g$ 以及其上的可积近复结构$I$、 $J$和 $K$，使得 $I$、 $J$和 $K$满足关系 $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$，并且$\omega^a \coloneqq -g(a\cdot,\ \cdot)$对每个 $a\in\{I,\ J,\ K\}$ 都是 $X$上的辛 2-形式。每个超凯勒流形（$X$，$g$，$I$，$J$，$K$）都具有三个全纯辛形式，即：

$$\Omega^I \coloneqq \omega^J + i\omega^K;\quad \Omega^J \coloneqq \omega^K + i\omega^I;\quad \Omega^K \coloneqq \omega^I + i\omega^J,$$

其中，$\Omega^a$相对于 $a\in\{I,J,K\}$ 是全纯的。对于超K¨ahler 流形 $(X=\mathbb{C}^2,\delta,I_\delta,J,K)$，全纯辛形式 $\Omega = dz_2\wedge dz_1$与 $-i\Omega^J$ 重合。

现在注意，在$\mathbb{C}^2$ 上由光滑且处处非零的函数组成的有序对 $(f,h)$ 的空间有四个连通分支，它们通过 $(f,h) \mapsto (-f,h)$ 和 $(f,h) \mapsto (f,-h)$ 彼此同构。此外，每个连通分支都是可缩的。因此，我们可以通过一条从 $(1,1)$ 出发的路径和一个离散变换，到达该空间中的任意有序对 $(f,h)$。接下来，考虑该空间中的这样一条路径，即 $\mathbb{C}^2$ 上的处处非零函数 $f^\varepsilon$ 和 $h^\varepsilon$ 构成的光滑单参数族，满足 $f^0 \equiv h^0 \equiv 1$。这一族在 $\mathbb{C}^2$ 上诱导出一个满足 $J^0 = J$的近复结构单参数族 $J^\varepsilon$。根据构造， $J^\varepsilon$ 本身是通过满足 $I^0 = I_\delta$的近复结构单参数族 $I^\varepsilon$ 定义的。根据我们此前的认识，可以将 $I^\varepsilon$ 理解为超K¨ahler 流形 $(X = \mathbb{C}^2, \delta, I_\delta, J, K)$ 的某种变形。因此，我们可以说，例3中每个如 $J_g$ 这样的、能够导出 PHSM 的近复结构，都是超K¨ahler 流形经过这种“变形”并施以离散变换$J_g \mapsto -J_g$ 后得到的。一般而言，这似乎也是我们构造的最佳应用：选取一个源自超K¨ahler 流形 $(X, g, I, J, K)$ 的 HSM $(X, \Omega = -i\Omega^J)$，然后按上述方式变形 $I$ ，以找到 PHSM。

接下来，我们将说明，构造 $J_g = I_g \bigcirc J \bigcirc I_g$ PHSM 的方法适用于相当大一类复流形 $X$，即复流形 $Y$ 的全纯余切丛 $X = T^{*,(1,0)}Y$。为此，设 $Y$为一个复流形，且 $X \coloneqq T^{*,(1,0)}Y$为其全纯余切丛。 $Y$上的复结构诱导出 $X$上的典范复结构 $J$。此外，作为全纯余切丛， $X$ 具有带 2-形式 $\Omega_{\text{can}} = \Omega_R + i\Omega_I$的典范 HSM 结构。我们注意到，$\Omega_{\text{can}}$ 的实部 $\Omega_R$ 可与实余切丛 $T^*Y$上的典范辛 2-形式 $\omega_{\text{can}}$ 等同：

**命题 16** $(F^*\omega_{\text{can}} = \Omega_R)$**.** 设 $Y$ 为一个复流形。那么，映射$F : T^{*,(1,0)}Y \to T^*Y$

$$F(\alpha) \coloneqq \operatorname{Re}(\alpha) \quad \forall \alpha \in T^{*,(1,0)}Y,$$

其中，$\operatorname{Re}(\alpha)$ 表示 $\alpha$的实部，是光滑实向量丛之间的丛同构。特别地， $F$ 是光滑流形 $T^{*,(1,0)}Y$与 $T^*Y$之间满足 $F^*\omega_{can} = \Omega_R$的微分同胚。

证明。 沿用上文的记号。设 $(Q_1 = Q_{x,1} + iQ_{y,1}, \ldots, Q_n = Q_{x,n} + iQ_{y,n}) = \psi$是 $Y$的全纯坐标图。那么， $T^{*,(1,0)}\psi$和 $T^*\psi$分别是 $T^{*,(1,0)}Y$和 $T^*Y$的（光滑）坐标图：

$$\begin{aligned}
\left(T^{*,(1,0)}\psi\right)^{-1}(\tilde{Q}_{x,1}, \ldots, P_{y,n}) &\coloneqq \sum_{j=1}^{n} P_j dQ_j|_{\psi^{-1}(\tilde{Q}_1,\ldots,\tilde{Q}_n)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} P_{x,j} dQ_{x,j}|_{\ldots} - P_{y,j} dQ_{y,j}|_{\ldots} + i \sum_{j=1}^{n} P_{x,j} dQ_{y,j}|_{\ldots} + P_{y,j} dQ_{x,j}|_{\ldots}, \\
(T^*\psi)^{-1}(\tilde{q}_{x,1}, \ldots, p_{y,n}) &\coloneqq \sum_{j=1}^{n} p_{x,j} dQ_{x,j}|_{\psi^{-1}(\tilde{q}_1,\ldots,\tilde{q}_n)} + p_{y,j} dQ_{y,j}|_{\psi^{-1}(\tilde{q}_1,\ldots,\tilde{q}_n)}.
\end{aligned}$$

我们将 $T^{*,(1,0)}\psi$的分量记为 $T^{*,(1,0)}\psi = (Q_{x,1}, \ldots, P_{y,n})$，而将 $T^*\psi$的分量记为 $T^*\psi = (q_{x,1}, \ldots, p_{y,n})$。在这些坐标下，$\Omega_{\text{can}}$和 $\omega_{\text{can}}$可表示为：

$$\Omega_{\text{can}} = \sum_{j=1}^{n} dP_j \wedge dQ_j = \sum_{j=1}^{n} dP_{x,j} \wedge dQ_{x,j} - dP_{y,j} \wedge dQ_{y,j} + i \sum_{j=1}^{n} dP_{x,j} \wedge dQ_{y,j} + dP_{y,j} \wedge dQ_{x,j},$$
$$\omega_{\text{can}} = \sum_{j=1}^{n} dp_{x,j} \wedge dq_{x,j} + dp_{y,j} \wedge dq_{y,j}.$$

用这些坐标表示 $F$，得到：

$$T^*\psi \circ F \circ \left(T^{*,(1,0)}\psi\right)^{-1} (\tilde{Q}_{x,j}, \tilde{Q}_{y,j}, P_{x,j}, P_{y,j}) = (\tilde{Q}_{x,j}, \tilde{Q}_{y,j}, P_{x,j}, -P_{y,j}).$$

综上，我们得到：

$$F^*\omega_{\text{can}} = \sum_{j=1}^{n} dP_{x,j} \wedge dQ_{x,j} - dP_{y,j} \wedge dQ_{y,j} = \text{Re}(\Omega_{\text{can}}) = \Omega_R.$$

□

现在在 $Y$ 上选取一个半黎曼度量 $g_Y$。在附录 D 中，我们证明，$Y$ 上的任意半黎曼度量 $g_Y$ 都会在 $T^*Y$ 上诱导出一个与 $\omega_{\text{can}}$ 相容的近复结构 $J^*_{\nabla^{g_Y}}$。利用 $F$，我们可以将这个近复结构从$T^*Y$传递到 $X$。我们将所得结构记为 $I_g \coloneqq dF^{-1} \bigcirc J^*_{\nabla^{g_Y}} \bigcirc dF$。根据命题 16，$X$ 上的 $I_g$ 也与 $\Omega_R$ 相容。因此，$J_g \coloneqq I_g \bigcirc J \bigcirc I_g$ 与 $\Omega_R$ 反相容，且 $(X, J_g; \Omega_R)$ 是一个 PHSM。注意，$J_g$ 取决于度量 $g_Y$ 的选择。
一般而言，这个 PHSM 是真的，因为我们没有对 $g_Y$ 与 $Y$ 上的复结构施加任何关系。不过，有一种特殊情形下 $J_g$ 是可积的，即 $g_Y = h_R$ 是 $Y$ 上某个全纯度量 $h = h_R + ih_I$ 的实部：

**引理 7** ($g_Y = h_R \Rightarrow J$和 $I_g$可交换)。设 $Y$是一个带有全纯度量 $h = h_R + ih_I$的复流形。那么，根据上述构造得到的 $I_g$与 $X \coloneqq T^{*,(1,0)}Y$上的复结构 $J$可交换。特别地，$J_g \coloneqq I_g \circ J \circ I_g = -J$。

证明。证明的思路是选取一组坐标，使得 $J$ 和 $I_g$ 具有简单的形式。设 $p \in Y$ 为任意一点。首先，我们选取全纯坐标（$Q_1 = Q_{x,1} + iQ_{y,1}, \ldots, Q_n = Q_{x,n} + iQ_{y,n}$）$= \psi$，它们属于 $Y$，且在 $p$附近同时也是（$Y, h_R$）的正规坐标。在附录 E 中，我们通过考察全纯度量 $h$的全纯 Levi-Civita 联络 $\nabla^h$的正规坐标，证明这样的坐标确实存在。于是，全纯正规坐标 $\psi$ 导出 $X$的全纯坐标 $T^{*,(1,0)}\psi =$（$Q_1, \ldots, P_n = P_{x,n} + iP_{y,n}$）。由于 $J$是 $X$ 的复结构，$J$在 $T^{*,(1,0)}\psi$（$\alpha \in T^*_{,p}{}^{(1,0)}Y$）中具有如下形式：

$$J\left(\partial_{Q_{x,j}}|_\alpha\right) = \partial_{Q_{y,j}}|_\alpha, \quad J\left(\partial_{Q_{y,j}}|_\alpha\right) = -\partial_{Q_{x,j}}|_\alpha,$$
$$J\left(\partial_{P_{x,j}}|_\alpha\right) = \partial_{P_{y,j}}|_\alpha, \quad J\left(\partial_{P_{y,j}}|_\alpha\right) = -\partial_{P_{x,j}}|_\alpha.$$

在附录 D 中，我们证明 $I_g$ 在 $T^{*,(1,0)}\psi$中具有如下形式[38]：

$$I_g\left(\partial_{Q_{x,j}}|_\alpha\right) = -\partial_{P_{x,j}}|_\alpha, \quad I_g\left(\partial_{Q_{y,j}}|_\alpha\right) = -\partial_{P_{y,j}}|_\alpha,$$
$$I_g\left(\partial_{P_{x,j}}|_\alpha\right) = \partial_{Q_{x,j}}|_\alpha, \quad I_g\left(\partial_{P_{y,j}}|_\alpha\right) = \partial_{Q_{y,j}}|_\alpha.$$

现在，通过直接计算可以验证，$J$ 和 $I_g$ 在点 $\alpha$处对易。由于对每个 $\alpha \in T^*_{,\,p}{}^{(1,0)}Y$和 $p \in Y$都可以重复同样的论证，因此该结果对 $X$ 的所有点都成立，证明完毕。

□

在结束本小节并转而讨论 HHS 的变形之前，我们应简要说明正定 PHHS 的一个特征，而这一特征在 HHS 中并不存在：PHHS（$X$，$J$；$\Omega_R$，$\mathrm{H}_R$）的哈密顿向量场 $X^{\Omega_R}{}_{\mathcal{H}_R}$和 $J(X^{\Omega_R}{}_{\mathcal{H}_R})$不一定是 $J$保持的（参见注记 19）。例3很好地展示了这一特征。为此，我们先给出一个判据，用以说明在什么情况下向量场 $X^{\Omega_R}{}_{\mathcal{H}_R}$和 $J(X^{\Omega_R}{}_{\mathcal{H}_R})$是 $J$保持的：

命题 *17*（$X^{\Omega_R}H_R$和 $J(X^{\Omega_R}H_R)$何时是 $J$保持的）。设（$X$，$J$；$\Omega_R$，$H_R$）是一个 *PHHS*，其哈密顿向量场为 $X_{\mathcal{H}} = 1/2(X^{\Omega_R}H_R - iJ(X^{\Omega_R}H_R))$，且 *2*-形式为 $\Omega_I = -\Omega_R(J\cdot,\cdot)$。那么，$X^{\Omega_R}H_R$是 $J$保持的，当且仅当 $d\Omega_I(X^{\Omega_R}H_R,\cdot,\cdot) \equiv 0$。类似地，$J(X^{\Omega_R}H_R)$是 $J$保持的，当且仅当 $d\Omega_I(J(X^{\Omega_R}H_R)\,\cdot,\cdot) \equiv 0$。

证明。设 $(X, J; \Omega_R, \mathrm{H}_R)$ 是一个伪全纯哈密顿系统，其 2-形式为 $\Omega_I = -\Omega_R(J\cdot,\cdot)$，哈密顿向量场为 $X_{\mathcal{H}} = 1/2(X^{\Omega_R}{}_{\mathcal{H}_R} - iJ(X^{\Omega_R}{}_{\mathcal{H}_R}))$。取 $V \in \{X^{\Omega_R}{}_{\mathcal{H}_R},\ J(X^{\Omega_R}{}_{\mathcal{H}_R})\}$。我们要确定在什么情况下 $V$ 保持 $J$。为此，我们使用 [7] 第九章中的命题 2.10：光滑流形 $X$ 上带有近复结构 $J$ 的（实）向量场 $V$ 保持 $J$，当且仅当对每个向量场 $W$，下式成立：

$$[V, J(W)] = J([V, W]).$$

由于 $\Omega_R$ 非退化，我们得出 $V$ 保持 $J$，当且仅当

$$\iota_{[V,J(W)]}\Omega_R - \iota_{J([V,W])}\Omega_R = 0$$

对 $X$ 上的每个向量场 $W$ 都成立。现在我们来计算该方程的左侧。首先，根据 $\Omega_I$ 的定义，我们得到：

$$\iota_{J([V,W])}\Omega_R = -\iota_{[V,W]}\Omega_I.$$

现在回想关系式（参见 [18]第 I 章中的命题 3.10）：

$$\iota_{[V,W]} = [L_V, \iota_W].$$

[38]准确地说，我们已在附录 D 中确定了 $J^*_{\nabla^{h_R}}$ 在坐标 $T^*\psi$ 下的形式。通过应用 $F$，我们得到 $I_g := dF^{-1} \circ J^*_{\nabla^{h_R}} \circ dF$ 的形式。请注意，由于 $F$，$P_{y,\,j}$ 的符号发生了变化。

此外，回想一下，根据定义 11，1-形式 $\Omega_R(V,\cdot)$ 和 $\Omega_I(V,\cdot) = -\Omega_R(J(V)\ \cdot)$ 是恰当的。结合 $d\Omega_R = 0$ 以及嘉当魔法公式，可得：

$$L_V\Omega_R = 0; \quad L_V\Omega_I = \iota_V d\Omega_I,$$

其中 $L_V$ 表示 $V$的李导数。这些关系使我们能够计算：

$$\begin{aligned}\iota_{[V,J(W)]}\Omega_R &= [L_V, \iota_{J(W)}]\Omega_R = L_V\left(\iota_{J(W)}\Omega_R\right) - \iota_{J(W)}\left(L_V\Omega_R\right)\\ &= -L_V\left(\iota_W\Omega_I\right) = -[L_V,\iota_W]\Omega_I - \iota_W\left(L_V\Omega_I\right)\\ &= -\iota_{[V,W]}\Omega_I - \iota_W\iota_V d\Omega_I = \iota_{J([V,W])}\Omega_R - \iota_W\iota_V d\Omega_I.\end{aligned}$$

综上，我们发现 $V$ 是 $J$-保持的，当且仅当

$$\iota_{[V,J(W)]}\Omega_R - \iota_{J([V,W])}\Omega_R = -\iota_W\iota_V d\Omega_I = 0$$

对于 $X$ 上的每个向量场 $W$，证明得证。 □

现在让我们再次考察例3，其中 $f = 1$、 $h = e^{x_1}$和 $H = \mathrm{H}_R = -y_1$。那么，哈密顿向量场以及 $\Omega_I^g$ 的外微分为：

$$X_{\mathcal{H}_R}^{\Omega_R} = -\partial_{y_2}; \quad J_g(X_{\mathcal{H}_R}^{\Omega_R}) = e^{-x_1}\partial_{x_2}; \quad d\Omega_I^g = e^{x_1}dx_1\wedge dx_2\wedge dy_1.$$

利用命题 17，我们立即看到 $X^{\Omega_R}\mathcal{H}_R$ 是 $J_g$-保持的，而 $J_g(X^{\Omega_R}\mathcal{H}_R)$则不是。通过令 $H$ 为 $\mathrm{H}_R = -y_1$ 和 $\mathrm{H}_I^g = -e^{-x_1}$的线性组合，例3甚至表明，PHHS（$X, J$；$\Omega_R$,$\mathrm{H}_R$）的 $X^{\Omega_R}\mathcal{H}_R$和 $J(X^{\Omega_R}\mathcal{H}_R)$都不一定是$J$-保持的。

### 4.2. 用正定 PHHS 变形 HHS

在本小节中，我们探讨这样一个问题：“在所有 PHHS 构成的集合中，正定 PHHS 的集合有多‘大’？”本小节的答案和主要结果是，当 $\dim_{\mathbb{R}}(X) > 4$ 时，正定 PHHS 是泛型的。为证明这一点，我们首先将正定 PHHS 的泛性归结为以下论断：每个 HHS 都可以通过正定 PHHS 变形。随后，我们分两步证明这一论断。第一步是将每个 HHS 在局部化为标准形式。第二步是在一个小邻域内，通过正定 PHHS 对标准形式的 HHS 进行变形。

我们先回顾泛型性质的定义。对于拓扑空间 $B$及其子集 $A \subset B$，若某个元素属于 $A$ **泛型** 的性质成立，当且仅当$B/A$ 是 $B$ 中的第一纲子集（按贝尔的意义）。特别地，若 $A$ 是 $B$中的开稠子集，则性质 $a \in A$ 是泛型的。现在设 $X$ 是一个光滑流形。我们引入以下记号，分别表示 $X$上的近复结构、PHSM 和 PHHS 的集合：

$\mathrm{J}_{\mathrm{a.c.}}(X) \coloneqq \{J \in \Gamma(\mathrm{End}(TX)) \mid J^2 = -1\}$，$\mathrm{PHSM}(X) \coloneqq \{(J, \Omega_R) \in \mathrm{J}_{\mathrm{a.c.}}(X) \times \Omega^2(X) \mid (X, J; \Omega_R)$ 是一个 PHSM$\}$，$\mathrm{PHHS}(X) \coloneqq \{(J, \Omega_R, \mathrm{H}_R) \in \mathrm{J}_{\mathrm{a.c.}}(X) \times \Omega^2(X) \times C^\infty(X, \mathbb{R}) \mid (X, J; \Omega_R, \mathrm{H}_R)$ 是一个伪全纯哈密顿系统$\}$。

类似地，我们将 $X$ 上的复结构、HSM 和 HHS 的集合记为：

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\mathrm{c}}(X) &\coloneqq \{J \in \mathcal{J}_{\mathrm{a.c.}}(X) \mid J \text{ is integrable}\},\\ \mathrm{HSM}(X) &\coloneqq \{(J,\Omega_R) \in \mathrm{PHSM}(X) \mid J \text{ is integrable}\},\\ \mathrm{HHS}(X) &\coloneqq \{(J,\Omega_R,\mathcal{H}_R) \in \mathrm{PHHS}(X) \mid J \text{ is integrable}\}.\end{aligned}$$

最后，我们用以下符号表示 $X$ 上真（即不可积近复结构）的 PHSM，以及真 PHHS 的集合：

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\mathrm{p}}(X) &\coloneqq \mathcal{J}_{\mathrm{a.c.}}(X)\backslash\mathcal{J}_{\mathrm{c}}(X),\\ \mathrm{PHSM}_{\mathrm{p}}(X) &\coloneqq \mathrm{PHSM}(X)\backslash\mathrm{HSM}(X),\\ \mathrm{PHHS}_{\mathrm{p}}(X) &\coloneqq \mathrm{PHHS}(X)\backslash\mathrm{HHS}(X).\end{aligned}$$

我们为每个集合赋予由紧开拓扑诱导的拓扑。我们希望证明，当 $\dim_{\mathbb{R}}(X) > 4$ 时，$\mathcal{J}_{\mathrm{P}}(X) \subset \mathcal{J}_{\mathrm{a.c.}}(X)$、$\mathrm{PHSM}_{\mathrm{P}}(X) \subset \mathrm{PHSM}(X)$ 和 $\mathrm{PHHS}_{\mathrm{P}}(X) \subset \mathrm{PHHS}(X)$ 都是开且稠密的子集。显然，所讨论的集合都是开子集，因为前面提到的所有子集都恰好包含其各自母集中那些 Nijenhuis 张量 $N_J$ of $J$ 不为零的元素。注意到 $N_J \neq 0$ 是一个开条件，即可完成论证。

还需证明这些子集在各自的母集中稠密。为此，只需证明“可积”集合 $\mathcal{J}_{\mathrm{c}}(X)$、$\mathrm{HSM}(X)$ 和 $\mathrm{HHS}(X)$ 分别包含于“真”集合 $\mathcal{J}_{\mathrm{P}}$、$\mathrm{PHSM}_{\mathrm{P}}(X)$ 和 $\mathrm{PHHS}_{\mathrm{P}}(X)$ 的边界中。若“可积”元素可以通过“真”元素变形，则最后这一点成立：

定义 *15*（（真）变形）。设 $X$ 是一个光滑流形，其上带有几乎复结构 $J$。当且仅当 $J^\varepsilon$ 描述了 $J_{\mathrm{a.c.}}(X)$ 中一条以 $J^0 = J$ 为起点的光滑[39]路径时，$(X, J^\varepsilon)$ 称为 $(X, J)$ 的变形。现在设 $\Omega_R$ 是 $X$ 上的一个 2-形式，使得 $(X, J; \Omega_R)$ 是一个 *PHSM*。则当且仅当 $(J^\varepsilon, \Omega_R^\varepsilon)$ 描述了 $PHSM(X)$ 中一条以 $(J^0, \Omega_R^0) = (J, \Omega_R)$ 为起点的光滑路径时，$(X, J^\varepsilon; \Omega_R^\varepsilon)$ 是 $(X, J; \Omega_R)$ 的变形。此外，若 $H_R$ 是 $X$ 上的一个函数，使得 $(X, J; \Omega_R, H_R)$ 是一个 *PHHS*，则当且仅当 $(J^\varepsilon, \Omega_R^\varepsilon, H_R^\varepsilon)$ 描述了 $PHHS(X)$ 中一条以 $(J^0, \Omega_R^0, H_R^0) = (J, \Omega_R, H_R)$ 为起点的光滑路径时，我们称 $(X, J^\varepsilon; \Omega^\varepsilon, H_R^\varepsilon)$ 是 $(X, J; \Omega_R, H_R)$ 的变形。当对应的 $J^\varepsilon$ 对 $\varepsilon \neq 0$ 不可积时，我们称该变形为真变形。

在继续证明泛性之前，我们先简要讨论定义中的一个方面：在变形的定义中，我们忽略了虚部 $\Omega_I$ 和 $\mathrm{H}_I$，尽管它们对于定义 HSM 和 HHS 至关重要。有人可能会问，这样做是否合理，也就是说，PHSM 或 PHHS 的每个变形是否都会自动给出一个合适的虚部单参数族 $\Omega_I^\varepsilon$ 和 $\mathrm{H}_I^\varepsilon$。对于形式 $\Omega_I$，只需令 $\Omega_I^\varepsilon \coloneqq -\Omega_R^\varepsilon(J^\varepsilon \cdot, \cdot)$，这显然成立。然而，将 $\mathrm{H}_I$ 定义为 $\Omega_R(J(X^{\Omega_R}\mathcal{H}_R)\cdot)$ 的原函数，可能会更棘手。光滑的恰当 1-形式单参数族 $\alpha^\varepsilon$ 为何必定是光滑函数单参数族 $f^\varepsilon$ 的微分，并不明显。尽管如此，当 $X$ 可缩时，这仍然成立：

[39]这里，光滑路径是指映射 $J^\varepsilon : X \times \mathbb{R} \to \mathrm{End}(TX)$ 是光滑的。$\Omega_R^\varepsilon$ 和 $\mathrm{H}_R^\varepsilon$ 也适用类似的注。

**命题 18**（$\alpha^\varepsilon$的原函数）。设 $X$ 是光滑可缩流形，$\alpha^\varepsilon$ 是 $X$上的光滑恰当 1-形式单参数族，且 $f \in C^\infty(X,\mathbb{R})$ 满足 $\alpha^0 = df$。那么，存在 $X$上的光滑函数单参数族 $f^\varepsilon$，使得 $\alpha^\varepsilon = df^\varepsilon$且 $f^0 = f$。

证明。设 $X$、$\alpha^\varepsilon$ 和 $f$ 如上。$X$ 是可缩的，因此存在一个光滑映射 $F : [0,1] \times X \to X$，使得对每个 $x \in X$ 以及某个 $x_0 \in X$，都有 $F(0,\ x) = x_0$，且 $F(1,\ x) = x$。固定 $\varepsilon$，则 $F^*\alpha^\varepsilon$ 是 $[0,1]\times X$ 上的闭 1-形式，并可表示为（利用 $F_t : X \to X$，对每个 $t \in [0,1]$，都有 $F_t(x) \coloneqq F(t,\ x)$）：

$$F^*\alpha^\varepsilon = F_t^*\alpha^\varepsilon + \beta_t^\varepsilon \cdot dt,$$

其中 $\beta_t^\varepsilon$ 是 $X$ 上的函数，且光滑地依赖于 $\varepsilon$ 和 $t$。固定 $t$ 和 $\varepsilon$，则 $F_t^*\alpha^\varepsilon$ 可视为 $X$ 上的闭 1-形式。$F^*\alpha^\varepsilon$ 和 $F_t^*\alpha^\varepsilon$ 的闭性，结合 $F^*\alpha^\varepsilon$ 的表达式，可推出：

$$\frac{d}{dt}F_t^*\alpha^\varepsilon = d\beta_t^\varepsilon.$$

总之，我们得到：

$$\alpha^\varepsilon = \mathrm{id}_X^*\alpha^\varepsilon - \mathrm{const}_{x_0}^*\alpha^\varepsilon = F_1^*\alpha^\varepsilon - F_0^*\alpha^\varepsilon = \int_0^1 \frac{d}{dt}(F_t^*\alpha^\varepsilon)\,dt = d\int_0^1 \beta_t^\varepsilon dt =: df^\varepsilon.$$

将 $f^\varepsilon$ 平移一个常数，使其在 $\varepsilon = 0$ 处与 $f$ 相匹配，即完成证明。 □

为了证明“真”这一性质是泛型的，我们只使用局部变形。具体来说，我们总可以缩小变形可积结构所在的邻域，使其成为可缩空间。因此，在此处我们可以合理地忽略虚部 $\Omega_I$ 和 $\mathrm{H}_I$ 的变形。

现在回到泛性的证明。如前所述，只需为每个“可积”元素找到一个真变形，即可证明泛性。我们分两步构造所需的真变形：

1. 将“可积”元素在局部化为标准形式。
2. 在一个小邻域内对标准形式进行“真”变形。

关于第一步，复流形和 HSM 的标准形式是什么以及如何实现它们，都是显而易见的。对于复流形，标准形式就是$X = \mathbb{C}^m$，其复结构为 $J = i$；每个复流形都可以通过全纯坐标图化为标准形式。对于 HSM，标准形式是 $X = \mathbb{C}^{2n}$，并配有 $\Omega = \sum_j dP_j \wedge dQ_j$；每个 HSM 都可以通过全纯达布坐标图化为标准形式（参见定理1和附录 A）。

对于一个全纯哈密顿系统（$X$，$\Omega$，H），我们注意到，H要么局部为常数，要么在某个点处正则，即存在 $x_0 \in X$ 使得 $d\mathrm{H}|_{x_0} \neq 0$。如果给定的全纯哈密顿系统在某点附近局部为常数，那么全纯达布坐标就能在该点附近将所讨论的全纯哈密顿系统表示为标准形式。如果给定的全纯哈密顿系统在某点附近正则，那么以下引理可将其化为标准形式：

**引理8 (**标准形式下的正则全纯哈密顿系统)。 设（$X$,Ω, $\mathcal{H}$）是一个全纯哈密顿系统，且 $x_0 \in X$ 是一个满足 $d\mathcal{H}|_{x_0} \neq 0$的点。那么，存在一个全纯坐标图$\phi = (z_1,\ldots, z_{2n})$ $: U \to V \subset \mathbb{C}^{2n}$，使得 $x_0 \in U$附近的$\Omega|_U = \sum_{j=1}^{n} dz_{j+n} \wedge dz_j$且$\mathcal{H}|_U = z_{2n}$。

证明。 设 ($X$,Ω, H) 是一个全纯哈密顿系统，且 $x_0 \in X$是一个满足 $d\mathrm{H}|_{x_0} \neq 0$ 的点。不失一般性，我们可以假设 $\mathrm{H}(x_0) = 0$。证明分为三个步骤：

1. 构造一个在 $x_0$ 附近局部定义的全纯函数 $G$ ，使其满足 $\{\mathrm{H}\ G\} \coloneqq \Omega(X_{\mathcal{H}}, X_G) = 1$。 2. 找到一个全纯坐标图 $\phi_3 = (z_1^{\#}, \ldots, z_{2n}^{\#}) : U_3 \to V_3$，使其在 $x_0$ 附近属于 $X$，并满足 $G|_{U_3} = z_n^{\#}$、$\mathrm{H}|_{U_3} = z_{2n}^{\#}$、 $X_{\mathcal{H}}|_{U_3} = \partial_{z_n^{\#}}$ 和 $X_G|_{U_3} = -\partial_{z_{2n}^{\#}}$。 3. 我们有 $\Omega|_{U_3} = dz_{2n}^{\#} \wedge dz_n^{\#} + \Sigma$，其中 $\Sigma$ 是一个仅依赖于 $z_1^{\#}, \ldots, z_{n-1}^{\#}, z_{n+1}^{\#}, \ldots, z_{2n-1}^{\#}$ 的闭 2-形式。利用 HSM 的达布定理（参见定理1和附录 A），将 $\Sigma$ 化为标准形式。

**步骤 1：** 我们选取 $x_0$ 的一个足够小的开邻域 $U_1$，使得 $U_1$ 是全纯坐标图 $\phi_1 = (\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_{2n}) : U_1 \to V_1 \subset \mathbb{C}^{2n}$ 的定义域，其中 $\phi_1(x_0) = 0$，且 $d\mathrm{H}$ 在 $U_1$ 上不为零。 $\partial_{\hat{z}_1}, \ldots, \partial_{\hat{z}_{2n}}$ 构成切丛 $T^{(1,0)}U_1$ 的一个全纯标架。由于全纯哈密顿向量场 $X_{\mathcal{H}}$ 在 $U_1$ 上不为零，我们可以将集合 $\partial_{\hat{z}_1}, \ldots, \partial_{\hat{z}_{2n}}$ 中的一个坐标向量场（例如 $\partial_{\hat{z}_n}$）替换为 $X_{\mathcal{H}}$；若有必要，缩小 $U_1$ 后，仍可得到 $T^{(1,0)}U_1$ 的一个标架。
现在令 $\varphi_z^{X_{\mathcal{H}}} : U_1 \to X$ 为全纯哈密顿向量场$X_{\mathcal{H}}$ 在适当的 $z \in \mathbb{C}$ 下的复流。 $\varphi_z^{X_{\mathcal{H}}}$ 的构造如下：对于 $x \in X$，我们用 $\gamma_x$ 表示从 $\mathbb{C}$ 到 $X$、满足以下初值问题的全纯曲线：

$$\gamma_x'(z) = X_{\mathcal{H}}(\gamma_x(z)); \quad \gamma_x(0) = x.$$

根据命题 2，曲线 $\gamma_x$ 存在且局部唯一。由此，我们可以将 $X_{\mathcal{H}}$ 的流定义为 $\varphi_z^{X_{\mathcal{H}}}(x) \coloneqq \gamma_x(z)$。

现在考虑映射 $\phi_2^{-1}$，它从 $\mathbb{C}^{2n}$ 到 $X$，定义为

$$\phi_2^{-1}(\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_{2n}) \coloneqq \varphi_{\tilde{z}_n}^{X_{\mathcal{H}}} \circ \phi_1^{-1}(\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_{n-1}, 0, \tilde{z}_{n+1}, \ldots, \tilde{z}_{2n}).$$

$\phi_2^{-1}$在 $0 \in \mathbb{C}^{2n}$ 处的微分将 $\mathbb{C}^{2n}$ 的标准复基映射为 $\partial_{\hat{z}_1}, \ldots, \partial_{\hat{z}_{n-1}}, X_{\mathcal{H}}, \partial_{\hat{z}_{n+1}}, \ldots, \partial_{\hat{z}_{2n}}$处的向量场。这些向量场在 $x_0$处构成一个复基，因此，根据反函数定理的全纯版本， $\phi_2^{-1}$在 0 附近是一个局部双全纯映射。这给出了全纯坐标图$\phi_2 = (\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_{2n}) : U_2 \to V_2$，其中 $U_2$是 $x_0$的一个小开邻域。接下来，我们令 $G : U_2 \to \mathbb{C}$ 为坐标 $\tilde{z}_n$。我们得到：

$$dG|_x(X_{\mathcal{H}}|_x) = \frac{d}{dz}\Big|_{z=0} (G \circ \varphi_z^{X_{\mathcal{H}}}(x)) = 1 \quad \forall x \in U_2.$$

这意味着 H 与 $G$的泊松括号为:

$$\{\mathcal{H}, G\} \coloneqq \Omega(X_{\mathcal{H}}, X_G) = dG(X_{\mathcal{H}}) = 1,$$

其中， $X_G$是全纯哈密顿系统（$U_2, \Omega|_{U_2}, G$）的全纯哈密顿向量场。**步骤 2：** 取全纯函数的哈密顿向量场构成李代数同态，因此我们得到:

$$[X_{\mathcal{H}}, X_G] = X_{\{\mathcal{H},G\}} = 0.$$

与实情形一样，向量场的交换性意味着它们的流也具有交换性。这使我们能够找到一个全纯坐标图$\phi_3 = (z_1^{\#}, \ldots, z_{2n}^{\#}) : U_3 \to V_3$，它位于 $X$ 上且靠近 $x_0$，使得 $G|_{U_3} = z_n^{\#}$、H $|_{U_3} = z_{2n}^{\#}$、 $X_{\mathcal{H}}|_{U_3} = \partial_{z_n^{\#}}$和 $X_G|_{U_3} = -\partial_{z_{2n}^{\#}}$。构造 $\phi_3$ 时用到了复流形的正则值定理。考虑全纯映射 $f \coloneqq (H|_{U_2}, G) : U_2 \to \mathbb{C}^2$。由于$\Omega(X_{\mathcal{H}}, X_G) = 1$，映射$f$ 是淹没映射。根据正则值定理， $f$ 的水平集是 $U_2$的复子流形。水平集的切空间由 $df$的核给出。现在取包含 $x_0$的水平集 $W \coloneqq f^{-1}(\mathrm{H}(x_0), 0) = f^{-1}(0, 0)$，并取 $W$ 上靠近 $x_0$ 的全纯坐标图 $\psi$，使得 $\psi(x_0) = 0$。接下来，我们通过以下方式定义映射 $\phi_3^{-1}$:

$$\phi_3^{-1}(z_1^{\#}, \ldots, z_{2n}^{\#}) \coloneqq \varphi^{X_{\mathcal{H}}}_{z_n^{\#}} \circ \varphi^{X_G}_{-z_{2n}^{\#}} \circ \psi^{-1}(z_1^{\#}, \ldots, z_{n-1}^{\#}, z_{n+1}^{\#}, \ldots, z_{2n-1}^{\#}).$$

$\phi_3^{-1}$在 $0 \in \mathbb{C}^{2n}$ 处的微分将 $\mathbb{C}^{2n}$ 的标准复基映射为向量场 $X_{\mathcal{H}}$、 $-X_G$以及 $\psi$ 在 $x_0$处的坐标向量场。 $\psi$ 的坐标向量场$v_j$ 满足 $d\mathrm{H}(v_j) = dG(v_j) = 0$，因此相对于辛形式$\Omega$，它们与 $X_{\mathcal{H}}$ 和 $X_G$ 正交。于是，根据$\Omega(X_{\mathcal{H}}, X_G) = 1$ 以及线性辛代数中的标准论证， $\psi$ 的坐标向量场与 $X_{\mathcal{H}}$ 和 $-X_G$共同构成 $T^{(1,0)}_{x_0} X$的一个复基。我们再次应用反函数定理，证明 $\phi_3^{-1}$在0附近是局部双全纯的。由 $\phi_3^{-1}$，得到 $X$ 在 $x_0$附近的全纯坐标图$\phi_3 = (z_1^{\#}, \ldots, z_{2n}^{\#}) : U_3 \to V_3$。利用 $\varphi^{X_{\mathcal{H}}}_{z_n^{\#}}$ 和 $\varphi^{X_G}_{-z_{2n}^{\#}}$ 的交换性，我们很容易算出 $\partial_{z_n^{\#}} = X_{\mathcal{H}}|_{U_3}$ 和 $\partial_{z_{2n}^{\#}} = -X_G|_{U_3}$。根据 $\phi_3$ 通过H和 $G$的水平集构造这一点，利用哈密顿流保持$\Omega$这一事实，并结合$d\mathrm{H}(X_{\mathcal{H}}) = dG(X_G) = 0$，我们推得函数H和 $G$ 分别只沿 $X_G$方向和$X_{\mathcal{H}}$方向变化。因此，H仅依赖于 $z_{2n}^{\#}$，而 $G$ 仅依赖于$z_n^{\#}$。对 $dG(X_{\mathcal{H}}) = d\mathrm{H}(-X_G) = \Omega(X_{\mathcal{H}}, X_G) = 1$ 积分，得到$G = z_n^{\#}$和$\mathrm{H} = z_{2n}^{\#}$。

**步骤 3：** 让我们更仔细地考察坐标图 $\phi_3$ 中的 $\Omega$。 $\phi_3$ 的坐标满足$\iota_{\partial_{z_n^{\#}}}\Omega|_{U_3} = -dz_{2n}^{\#}$ 和 $\iota_{\partial_{z_{2n}^{\#}}}\Omega|_{U_3} = dz_n^{\#}$。因此，$\Omega|_{U_3}$ 具有以下形式:

$$\Omega|_{U_3} = dz_{2n}^{\#} \wedge dz_n^{\#} + \sum_{i,j \neq n,2n} \Omega_{ij} dz_i^{\#} \wedge dz_j^{\#} =: dz_{2n}^{\#} \wedge dz_n^{\#} + \Sigma.$$

$\Omega|_{U_3}$ 和 $dz_{2n}^{\#} \wedge dz_n^{\#}$是 $U_3$上的闭 2-形式，因此， $\Sigma$ 也是 $U_3$上的闭 2-形式。$d\Sigma = 0$ 意味着 $\Omega_{ij}$ 关于 $z_n^{\#}$ 和 $z_{2n}^{\#}$ 的偏导数必须

对每个 $i,\ j \neq n,\ 2n$都为零。因此， $\Sigma$ 在超平面 $z_n^{\#} = c_1$ 和 $z_{2n}^{\#} = c_2$ 上的限制不依赖于 $c_1$ 和 $c_2$的取值。此外， $\Sigma$ 的限制是该超平面上的全纯辛二形式。这直接源于 $\Omega|_{U_3}$ 是 $U_3$上的全纯辛二形式。因此，我们可以将定理1应用于 $\Sigma$，得到超平面 $z_n^{\#} = 0$ 和 $z_{2n}^{\#} = 0$ 的全纯坐标图 $\Psi$，在该坐标图中$\Sigma$具有标准形式。将$\phi_3$的坐标 $z_1^{\#}$、……、$z_{n-1}^{\#}$、$z_{n+1}^{\#}$、……、$z_{2n-1}^{\#}$替换为 $\Psi$的坐标，可得 $X$ 在 $x_0$ 附近的全纯坐标图 $\phi = (z_1$、……、$z_{2n}) : U \to V$（取 $\Psi(x_0) = 0$）：

$$\phi^{-1}(z_1, \ldots, z_{2n}) \coloneqq \varphi_{z_n}^{X_{\mathcal{H}}} \circ \varphi_{-z_{2n}}^{X_G} \circ \Psi^{-1}(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_{n+1}, \ldots, z_{2n-1}).$$

在此坐标图中，$\Omega$ 和 H 具有如下形式 $\Omega|_U = \sum_{j=1}^{n} dz_{j+n} \wedge dz_j$ 和 $\mathrm{H}|_U = z_{2n}$，证明至此完成。 □

**推论3**（每个正则全纯哈密顿系统作为哈密顿系统都是局部可积的）。 设$(X,\Omega, \mathcal{H})$ 是一个全纯哈密顿系统，且 $x_0 \in X$ 是满足 $d\mathcal{H}|_{x_0} \neq 0$的点。那么，存在 $x_0$ 的一个开邻域 $U$以及全纯函数 $F_i, G_i : U \to \mathbb{C}$，其中 $i \in \{1, \ldots, n\}$,$2n \coloneqq$维$_{\mathbb{C}}(X)$，使得：

$$F_n = \mathcal{H}|_U, \quad \{F_i, G_j\} = \delta_{ij}, \quad \{F_i, F_j\} = \{G_i, G_j\} = 0 \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

特别地，每个正则全纯哈密顿系统作为哈密顿系统都是局部可积的。

证明。 取引理8中的坐标图 $\phi$，并令 $F_j \coloneqq z_{j+n}$，同时令 $G_j \coloneqq z_j$。 □

**注21**（每个正则实哈密顿系统都是局部可积的）。 引理*8*和推论*3*对于正则实哈密顿系统也成立，证明几乎完全相同。特别地，每个正则实哈密顿系统都是局部可积的。

标准形式中有了“可积”元素后，现在让我们转向第二步。我们需要构造标准形式的局部真变形。这里，我们仅展示如何显式地变形 HHS。HSM 和复流形的变形可以用类似的方法得到。

命题*19*（标准 *HHS* 的变形）。设 *(X, Ω, H)* 是具有复结构 $J$ 的 *HHS*，其分解为 $\Omega = \Omega_R + i\Omega_I$，且 $H = H_R + iH_I$，其中 $X = \mathbb{C}^{2n} (n > 1)$,$J = i$, $\Omega = \sum_{j=1}^{n} z_{j+n} \wedge z_j$，且 $H \equiv c$，其中某个常数为 $c \in \mathbb{C}$，或 $H = z_{2n}$。此外，设 $U \subset \mathbb{C}^{2n}$ 是任意非空开子集。则存在 *HHS (X, Ω, H)* 的真变形 $(X, J^{\varepsilon}; \Omega_R^{\varepsilon}, H_R^{\varepsilon})$，使得对于每个 $\varepsilon \in \mathbb{R}$，都有 $J^{\varepsilon}|_{X\setminus U} = J|_{X\setminus U}$，$\Omega_R^{\varepsilon} = \Omega_R$，且 $H_R^{\varepsilon} = H_R$。

证明。 变形的思路基于例3。设 $(X,\Omega, \mathrm{H})$ 是上述全纯哈密顿系统（HHS），且其开子集 $U \subset X$ 非空。现在选取一个非常数光滑函数$f : X \cong \mathbb{R}^{4n} \to \mathbb{R}$，使其满足：

$$f(x) \geq 0 \ \forall x \in X, \quad f(x) = 0 \ \forall x \in X\setminus U.$$

我们将 $X$ 上的光滑函数单参数族 $r^\varepsilon$ 定义如下:

$$r^\varepsilon(x) \coloneqq 1+\varepsilon^2 f(x) \quad \forall x\in X\ \forall \varepsilon\in\mathbb{R}.$$

利用 $r^\varepsilon$，我们定义 $X$ 上的近复结构单参数族 $J^\varepsilon$ :

$$J^\varepsilon(\partial_{x_1}) \coloneqq r^\varepsilon\partial_{y_1},\ J^\varepsilon(\partial_{x_{n+1}}) \coloneqq \frac{1}{r^\varepsilon}\partial_{y_{n+1}};\quad J^\varepsilon(\partial_{y_1}) \coloneqq \frac{-1}{r^\varepsilon}\partial_{x_1},\ J^\varepsilon(\partial_{y_{n+1}}) \coloneqq -r^\varepsilon\partial_{x_{n+1}};$$
$$J^\varepsilon(\partial_{x_j}) \coloneqq \partial_{y_j};\quad J^\varepsilon(\partial_{y_j}) \coloneqq -\partial_{x_j}\quad \forall j\in\{2,\dots,n,n+2,\dots,2n\},$$

其中 $\partial_{x_j}$ 和 $\partial_{y_j}$ 是由坐标 $(z_1 = x_1+iy_1,\ \dots\dots,\ z_{2n}=x_{2n}+iy_{2n})\in\mathbb{C}^{2n}$ 得到的向量场。显然，当 $\varepsilon=0$ 时，$J^\varepsilon$ 与 $J=i$ 重合。此外，容易验证，对于每个 $\varepsilon\in\mathbb{R}$，$J^\varepsilon$ 都满足 $J^\varepsilon|_{X\setminus U}=J|_{X\setminus U}$，并且与 $\Omega_R$ 反相容。

接下来，对于每个 $\varepsilon\in\mathbb{R}$，我们令 $\Omega_R^\varepsilon\equiv\Omega_R$ 和 $\Omega_I^\varepsilon \coloneqq -\Omega_R^\varepsilon(J^\varepsilon\cdot,\ \cdot)$。与例3中一样，$\Omega_I^\varepsilon$ 的外微分可表示为

$$d\Omega_I^\varepsilon = \varepsilon^2\cdot df\wedge\left(dy_{n+1}\wedge dx_1-\left(\frac{1}{r^\varepsilon}\right)^2 dx_{n+1}\wedge dy_1\right).$$

我们看到，对于每个 $\varepsilon\neq 0$，都存在一个点 $x_0\in U$ 满足 $d\Omega_I^\varepsilon|_{x_0}\neq 0$。因此，根据定理3，对于每个 $\varepsilon\neq 0$，$(X,\ J^\varepsilon;\Omega_R^\varepsilon)$ 都成为一个适当的 PHSM。
唯一尚待验证的是，$\mathrm{H}_R^\varepsilon\equiv\mathrm{H}_R$ 与 PHSM $(X,J^\varepsilon;\Omega_R^\varepsilon)$ 相容，即对于每个 $\varepsilon$，都有 $d[\Omega_R^\varepsilon(J^\varepsilon(X^{\Omega_R^\varepsilon}\mathrm{H}_R^\varepsilon)\ \cdot)]=0$。当 $\mathrm{H}\equiv c$ 时，这显然成立，因为此时哈密顿向量场 $X^{\Omega_R^\varepsilon}\mathrm{H}_R^\varepsilon$ 为零。当 $\mathrm{H}=z_{2n}$ 时，我们首先注意到，上述方程等价于条件：$\mathrm{H}_R^\varepsilon$ 是某个伪全纯函数 $\mathrm{H}^\varepsilon$ 的实部。我们已经知道，$\mathrm{H}^\varepsilon\equiv\mathrm{H}$ 关于 $J=i$ 是伪全纯的。由于 $\mathrm{H}^\varepsilon$ 只依赖于最后一个分量 $z_{2n}$，且对于每个 $\varepsilon$，$J^\varepsilon$ 和 $J=i$ 对 $X$ 的最后几个分量的作用方式相同（因为 $n>1$），因此对于每个 $\varepsilon$，$\mathrm{H}^\varepsilon\equiv\mathrm{H}$ 关于 $J^\varepsilon$ 也同样是伪全纯的。由此，$(X,J^\varepsilon;\Omega_R^\varepsilon,\mathrm{H}_R^\varepsilon)$ 成为 $(X,\Omega,\mathrm{H})$ 所需的变形，证明完毕。

□

**注记22**（情形 $\mathcal{H}\equiv c$）。仔细观察后，我们注意到，当$\mathcal{H}\equiv c$时，该证明对 $n=1$ 也成立。事实上，我们只需要条件 $n>1$ 来确保$\mathcal{H}_R^\varepsilon$ 是某个伪全纯函数$\mathcal{H}^\varepsilon$的实部。然而，常值函数相对于任意近复结构都是伪全纯的。

为了找到标准 HSM 的局部真变形，我们只需采用上述证明中的变形，并忽略哈密顿量 $\mathrm{H}_R^\varepsilon$。由于此处不受与哈密顿量 $\mathrm{H}_R^\varepsilon$ 兼容性的约束，这种变形甚至适用于 $n=1$。类似地，若采用证明中的近复结构 $J^\varepsilon$，我们便能得到复流形 $\mathbb{C}^m$ 的局部真变形。这里，我们需要强制要求 $m>1$，以确保有足够的四个实维数可供重缩放。结合引理8与命题19，可得以下定理:

**定理 4** (真PHHS具有泛型性)。 设 $X$ 为一个光滑流形，则根据 $X$的实维数，以下陈述成立：

*1.* 若维数$_{\mathbb{R}}(X) = 2$： $X$ 上的每个近复结构都是可积的，因此自动成为复结构[40]。*2.* 若维数$_{\mathbb{R}}(X) > 2$：每个复流形$(X, J)$ 和 *HSM*$(X, \Omega)$ 都存在真变形。特别地， $X$ 上的不可积近复结构和正定 *PHSM*，分别是 $X$上所有近复结构和 *PHSM* 集合中的泛型对象。*3.* 若维数$_{\mathbb{R}}(X) > 4$：每个 *HHS*$(X,\Omega, \mathcal{H})$ 都存在真变形。特别地， $X$ 上的正定 *PHHS* 是 $X$上所有 *PHHS* 集合中的泛型对象。

在结束本小节之前，我们先简要讨论一下维数 dim$_{\mathbb{R}}(X) = 4$ 下的 PHHS（$X, J; \Omega_R$, H$_R$）。这些系统是本小节研究的几何对象中唯一不适用定理 4 的对象。原因在于，当 dim$_{\mathbb{R}}(X) = 4$ 时，命题19不成立，因为~~H~~$_R = x_2$ 不可能是一个复函数的实部，而该复函数相对于证明命题19时所选的变形 $J^\varepsilon$ 是伪全纯的。尽管如此，定理 4 的陈述 3 在 dim$_{\mathbb{R}}(X) = 4$ 时仍可能成立。一种可能的证明方法是修改命题19。我们可以不再要求 H$_R^\varepsilon$与 $\varepsilon$无关，而是允许 H$_R^\varepsilon$ 为 H$_R$的一般变形。求出这样的变形 H$_R^\varepsilon$ 需要求解一个带边界条件的二阶偏微分方程。然而，Nijenhuis张量可能会阻碍该问题存在非平凡解。我们进一步阐述这一想法：设 $X$ 为带有近复结构 $J$的光滑流形， $N_J$为 $J$的Nijenhuis张量， $f : X \to \mathbb{C}$为伪全纯映射，即 $df \circ J = i \cdot df$。直接计算可得，对 $X$ 上的任意向量场 $V$和 $W$，都有 $df(N_J(V, W)) = 0$。因此，对于任意伪全纯函数 $f$ 和任意点 $x \in X$， $N_J|_x$的像都包含在 $df|_x$ 的核中。这意味着，在给定点 $x \in X$ 处微分线性无关的 $\mathbb{C}$，其在 $X$ 上的伪全纯函数至多有 1/2(dim$_{\mathbb{R}}(X) - r_x$) 个，其中 $r_x$ 是 $N_J|_x$ 的秩[41] 。在四维中，仅凭 $N_J$ 的秩并不能排除非平凡伪全纯函数的存在：设 $V_1$, $V_2$, $J(V_1)$ 和 $J(V_2)$ 是 $X$的一个局部标架。容易看出，由于$N_J$的对称性，即 $N_J(V, W) = -N_J(W, V)$ 以及 $N_J(J(V) W) = -JN_J(V, W)$， $N_J(V_1, V_2)$ 和$N_J(V_1, J(V_2)) = -JN_J(V_1, V_2)$ 是 $N_J$在局部标架 $V_1$,$V_2$, $J(V_1)$ 和 $J(V_2)$ 下仅有的两个非冗余分量。因此，在四维中，Nijenhuis张量的秩至多为 2。例如，对于 $n = 1$，上文的变形 $J^\varepsilon$，

$$J^\varepsilon(\partial_{x_1}) \coloneqq r^\varepsilon \partial_{y_1},\ J^\varepsilon(\partial_{x_2}) \coloneqq \frac{1}{r^\varepsilon}\partial_{y_2}; \quad J^\varepsilon(\partial_{y_1}) \coloneqq \frac{-1}{r^\varepsilon}\partial_{x_1},\ J^\varepsilon(\partial_{y_2}) \coloneqq -r^\varepsilon \partial_{x_2},$$

[40]容易验证，Nijenhuis张量在二维情形下总是消失。[41]Nijenhuis张量满足关系 $N_J(J(V) W) = -JN_J(V, W)$，因此其秩为偶数。

对于 $r^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^4,\ \mathbb{R}_+)$，得到：

$$N_{J^\varepsilon}(\partial_{x_1},\partial_{x_2}) = \frac{1}{r^\varepsilon} J^\varepsilon\left(N_{J^\varepsilon}(\partial_{x_1},\partial_{y_2})\right) = \sum_{a\in\{x,y\}} \sum_{i,j=1;\ i\neq j}^{2} (\partial_{a_i} \ln(r^\varepsilon)) \cdot \partial_{a_j}.$$

因此， $N_{J^\varepsilon}|_x$ 的（实）秩在 $dr^\varepsilon|_x \neq 0$ 时为 2，在 $dr^\varepsilon|_x = 0$时为 0。
然而， $N_J$ 的秩对于独立伪全纯函数的数量而言，是一个相当宽松的上界。确切数量为 $1/2(\dim_{\mathbb{R}}(X) - k)$，其中 $k$ 是 IJ- 丛[42] 在 $X$ 上的秩，且该丛包含 $N_J$ 的像。尽管在四维中存在一些不可积近复结构 $J$，其 IJ-丛并非满秩，例如例3中的 $J^\varepsilon$ （其中 $r^\varepsilon = e^{-x_1}$），但对于一般函数 $r^\varepsilon$而言，完全不清楚为什么上述近复结构 $J^\varepsilon$ 也应满足这一点。

[42]关于 IJ-丛的定义以及 Nijenhuis 张量与伪全纯函数之间关系的详细研究，请参阅 [19] 。

# 附录

## A. HSM 的达布定理证明

在本附录的这一部分，我们要证明存在一个与达布定理相对应的全纯定理。

**定理** (HSM 的达布定理)。 设$(X,\Omega)$ 是一个复维数为$\dim_{\mathbb{C}}(X) = 2n$ $(n \in \mathbb{N})$的全纯辛流形（*HSM*）。那么，对于每个点 $x \in X$，都存在一个全纯坐标图 $\psi = (Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n) : U \to V \subset \mathbb{C}^{2n}$，它定义在 <*style id='39}* 近 $x$ 处，使得

$$\Omega|_U = \sum_{j=1}^{n} dP_j \wedge dQ_j.$$

证明。 HSM 的达布定理的证明几乎完全类似于 Weinstein 给出的实情形下达布定理的证明。具体而言，我们将把莫泽技巧应用于 HSM。Soldatenkov 和 Verbitsky 对莫泽技巧在复流形上的详细转述见 [20]。

设 $(X,\Omega)$ 是复维数为 $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 2n$ $(n \in \mathbb{N})$ 的全纯辛流形， $x \in X$ 是 $X$ 上任意一点，且 $(U, \psi = (\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_{2n}))$ 是 $X$ 在 $x$ 附近的全纯坐标图。首先，我们注意到，复向量空间 $V$ 上的任意复辛形式 $\omega$，若其维数为 $\dim_{\mathbb{C}}(V) = 2n$，都可以化为标准形式，即可以写成

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} \theta_{j+n} \wedge \theta_j$$

其中 $(\theta_1, \ldots, \theta_{2n})$ 是某个复基 $(e_1, .., e_{2n})$ 在 $V$ 上的对偶基。因此，我们可以假设，在坐标图 $(U, \psi)$ 中，$\Omega$ 在 $x$ 处具有如下形式

$$\Omega|_x = \sum_{j=1}^{n} d\hat{z}_{j+n}|_x \wedge d\hat{z}_j|_x$$

必要时，通过对 $(\hat{U}, \hat{\psi})$ 施加 $\mathbb{C}$-线性变换即可。接下来，我们在 $U$ 上定义如下 2-形式：

$$\Omega_1 \coloneqq \sum_{j=1}^{n} d\hat{z}_{j+n} \wedge d\hat{z}_j \in \Omega^{(2,0)}(\hat{U}).$$

显然，$\Omega_0 \coloneqq \Omega|_{\hat{U}}$和 $\Omega_1$都是 $U$ 上的全纯辛二形式。现在，我们将 $U$ 上的 2-形式 $\Omega_t$ 定义为 $\Omega_0$ 与 $\Omega_1$的插值：

$$\Omega_t \coloneqq \Omega_0 + t(\Omega_1 - \Omega_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

对于每个 $t \in \mathbb{R}$，形式 $\Omega_t$ 是全纯且闭的，因为 $\Omega_0$ 和 $\Omega_1$ 都是全纯且闭的。此外，我们发现，对于每个 $t \in \mathbb{R}$，$\Omega_t|_x = \Omega_0|_x$，因为 $\Omega_0$ 和 $\Omega_1$ 在 $x$ 处重合

根据构造。这意味着对于每个 $t$，$\Omega_t|_x$ 都是非退化的。由于非退化性是开性质，我们可以构造一个包含 $x$ 的开子集 $U' \subset \hat{U}$，使得对于每个 $t \in [0,1]$，$\Omega_t|_{U'}$ 都是非退化的 2-形式；这里我们还用到了 $\Omega_t$ 关于 $t$ 连续变化，以及 $[0,1]$ 是紧区间这一事实。这样，对于每个 $t \in [0,1]$，$(U', \Omega_t|_{U'})$ 就成为一个全纯辛流形。此外，必要时通过缩小 $U'$，我们可以假设 $U'$ 是可缩的。为简洁起见并便于记号，从现在起我们假设 $U' = \hat{U}$。由于 $\hat{U}$ 可缩，其上同调是平凡的。这使我们能够应用 [20] 中的定理 2.5（Moser 同伦，版本 I）。因此，我们可以在 $\hat{U}$ 上找到一个 (1，0) 型的 1-形式 $\alpha$[43]，使得

$$\Omega_1 - \Omega_0 = \frac{d}{dt}\Omega_t = d\alpha.$$

由于 2-形式 $\Omega_1 - \Omega_0$ 属于 (2,0) 型，1-形式 $\alpha$ 满足 $\partial\alpha = 0$。因此，形式 $\alpha$ 也是全纯的。不失一般性，我们可以假设 $\alpha$ 满足 $\alpha|_x = 0$，必要时用 $\alpha$ 替换它

$$\alpha' = \alpha - \alpha^x$$

，其中 $\alpha^x$ 是满足 $\alpha^x|_x = \alpha|_x$ 和 $d\alpha^x = 0$的全纯 1-形式。对于每个$t \in [0,1]$，定义 $\hat{U}$上的向量场 $V_t$，其值属于 $T^{(1,0)}\hat{U}$：

$$\iota_{V_t}\Omega_t = -\alpha.$$

注意，$V_t$ 定义良好，因为 $\alpha$ 是 (1,0) 型的 1-形式，并且 $\Omega_t$ 在$T^{(1,0)}\hat{U}$上非退化，因此 $\Omega_t$ 给出了从 $T^{(1,0)}\hat{U}$到 $T^{*,(1,0)}\hat{U}$的同构。由于 $\alpha$和 $\hat{}\,\Omega_t$ 是全纯的，对于每个 $t \in [0,1]$，$V_t$ 都是 $U$ 上的全纯向量场。利用 $\Omega_t$ 的闭性和嘉当魔法公式，我们计算李导数 $L_{V_t}\Omega_t$：

$$L_{V_t}\Omega_t = d\iota_{V_t}\Omega_t + \iota_{V_t}d\Omega_t = d\iota_{V_t}\Omega_t = -d\alpha = -\frac{d}{dt}\Omega_t \quad \forall t \in [0,1].$$

回顾一下，每个全纯向量场 $V$ 都可以唯一地写成 1/2($V^R - i \cdot J(V^R)$)，其中 $J$ 是底层复流形的复结构，而 $V^R$是一个保持 $J$不变的实向量场。现在，对每个 $t \in [0,1]$，令 $V_t^R$为与 $V_t$ 对应的实向量场，且保持 $J$不变。接下来，我们要证明以下等式：

$$L_{V_t^R}\Omega_t = L_{V_t}\Omega_t = -\frac{d}{dt}\Omega_t.$$

我们通过证明一个更一般的辅助引理来做到这一点：

在 Soldatenkov 和 Verbitsky 的论文中，1-形式 $\alpha \equiv \alpha_t$ 通常会非平凡地依赖于 $t$。然而在当前情形下，我们可以省略对 $t$的依赖，因为 $d/dt\Omega_t$ 不再依赖于 $t$。有关详情，请参见命题 1 和 [7]。

**辅助引理**。 设 $X$ 为一个复流形，其复结构为 $J \in \Gamma(\mathrm{End}(TX))$。此外，设 $V^R \in \Gamma_J(TX)$ 是 $X$ 上的一个保持 $J$ 的向量场，其对应的全纯向量场为 $V \coloneqq 1/2(V^R - iJ(V^R))$，且 $T$ 是 $X$ 上的全纯张量场。那么， $T$ 关于 $V^R$ 和 $V$ 的李导数相同，即：

$$L_{V^R}T = L_V T.$$

证明。 设 $X$ 和 $J$ 如上，并设 $V^R \in \Gamma_J(TX)$ 是 $X$ 上的一个保持 $J$ 的向量场，其对应的全纯向量场为 $V \coloneqq 1/2(V^R - iJ(V^R))$. 此外，设 $T$ 是 $X$ 上的全纯 $(k,l)$-张量场。李导数是复线性的，因此根据 $V$ 的定义，我们有：

$$L_V T = \frac{1}{2}\left(L_{V^R}T - i \cdot L_{J(V^R)}T\right).$$

因此，只需证明：

$$L_{J(V^R)}T = i \cdot L_{V^R}T. \tag{3}$$

在 $X$ 的一个全纯坐标图 $\phi = (z_1, \ldots, z_n)$ 中， $T$ 可以表示为

$$T|_U = \sum_{i_1 \ldots i_k, j_1 \ldots j_l = 1}^{n} T^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l} \cdot dz_{j_1} \otimes \ldots \otimes dz_{j_l} \otimes \partial_{z_{i_1}} \otimes \ldots \otimes \partial_{z_{i_k}},$$

其中 $T^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l} : U \to \mathbb{C}$ 是 $U$ 上的全纯函数。由于李导数可以局部计算且满足莱布尼茨法则，只需证明当 $T$ 为 $T^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l}$、 $dz_i$ 和 $\partial_{z_j}$ 时，方程 (3) 成立。又由于李导数与外微分 $d$ 可交换，且 $\partial_{z_j}$ 是一个（局部）全纯向量场，因此只需证明当 $T$ 为全纯函数 $h$ 和全纯向量场 $W$ 时，方程 (3) 成立。对于 $T = h$，我们得到：

$$L_{J(V^R)}h = dh\left(J(V^R)\right) = i \cdot dh(V^R) = i \cdot L_{V^R}h,$$

这里我们用到了 $h$ 是全纯的，即 $dh \circ J = i \cdot dh$。对于 $T = W$，我们可以利用命题 1 得到：

$$\begin{aligned} L_{J(V^R)}W &= \left[J(V^R), W\right] = \frac{1}{2}\left([J(V^R), W^R] - i[J(V^R), J(W^R)]\right) \\ &= \frac{1}{2}\left([V^R, J(W^R)] - i[V^R, J^2(W^R)]\right) = \frac{i}{2}\left([V^R, W^R] - i[V^R, J(W^R)]\right) \\ &= i\left[V^R, W\right] = i \cdot L_{V^R}W, \end{aligned}$$

由此完成证明。 □

现在回到 HSM 的达布定理证明。设 $\varphi_t$ 是实时变向量场 $V_t^R$ 的（可能是局部）流。拉回 $\varphi_t^*\Omega_t$ 是以下初值问题的一个解：

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\Omega_t) = \varphi_t^*(L_{V_t^R}\Omega_t + \frac{d}{dt}\Omega_t) = 0, \quad \varphi_0^*\Omega_0 = \Omega_0,$$

ˆ 这里的记号省略了这样一个事实：对于每个 $t \in [0,1]$， $\varphi_t$ 可能并未在整个 $U$ 上定义。显然，$\Omega_0$ 也是同一初值问题的一个解。由于给定初值问题的解是唯一的，我们得到：

$$\varphi_t^* \Omega_t = \Omega_0.$$

我们需要证明，对于每个 $t \in [0,1]$，在 $x$ 的某个开邻域 $U \subset U\hat{}$ 中，最后一个方程都成立。为此，我们回忆起，根据构造， $\alpha|_x = 0$。因此，对于每个 $t \in [0,1]$，我们有 $V_t^R(x) = V_t(x) = 0$。这意味着流 $\varphi_t$ 在 $x$ 处是静止的，即对于每个 $t \in [0,1]$， $\varphi_t(x) = x$。由此可推得，存在 $x$ 的一个开邻域 $U \subset \hat{U}$，使得对于每个 $t \in [0,1]$，流 $\varphi_t : U \to \varphi_t(U) \subset U\hat{}$ 都是定义良好的微分同胚。特别地，时刻 1 映射 $\varphi_1 : U \to \varphi_1(U)$ 满足：

$$\varphi_1^* \Omega_1 = \Omega_0.$$

ˆ因此，$(U, \psi \coloneqq \psi \bigcirc \varphi_1)$ 是 $X$ 在 $x$ 附近的一个光滑坐标图，并且满足：

$$\psi^{-1\,*}\Omega|_U = \hat{\psi}^{-1\,*}\left(\varphi_1^{-1\,*}\Omega_0\right) = \hat{\psi}^{-1\,*}\Omega_1 = \sum_{j=1}^{n} \theta_{j+n} \wedge \theta_j,$$

其中， $\sum \theta_{j+n} \wedge \theta_j$ 是 $\mathbb{C}^{2n}$上的标准辛形式。因此，全纯辛形式 Ω 在（$U$， $\psi \equiv$（$z_1$，.. .，$z_{2n}$））上具有如下形式：

$$\Omega|_U = \sum_{j=1}^{n} dz_{j+n} \wedge dz_j.$$

我们看到，（$U$， $\psi$）是所需达布坐标图的合适候选。为完成证明，我们需要证明（$U$，$\psi$）也是 $X$的全纯坐标图。为此，只需证明映射 $\varphi_1 : U \to \varphi_1$（$U$）是局部双全纯的。这个证明的思路很简单：在 [7], 第九章中，证明了复流形 $X$ 上保持[45] 且与时间无关的$J$向量场 $V^R$，恰好就是那些其流 $\varphi_t^{V^R}$ 为局部双全纯的实向量场。然而,~~我们不能将这一~~结论直接应用于 $V_t^R$，因为一般而言， $V_t^R$具有非平凡的时间依赖性。为处理这一点，我们将 $V_t$与 $V$联系起来；后者是在ˆ$U \times O$ ∋（$x$， $t$）上的时间无关全纯向量场，其中 $O \subset \mathbb{C}$。

首先，我们推广 $\Omega_t$ 的定义，并允许复时间 $t \equiv \tau \in \mathbb{C}$。通过与之前相同的论证，并在必要时缩小 $U$，我们可找到 $[0,1]$ 的一个开邻域 $O \subset \mathbb{C}$，使得对每个 $\tau \in O$，$\Omega_\tau$ 都是非退化的。这使我们能够将 $V_\tau$ 的定义推广到所有 $\tau \in O$。现在注意，我们不仅可以将 $\Omega_\tau$ 视为 $U$ 上依赖时间的 (2，0)-形式，也可以将其视为 $U \times O$ 上与时间无关的 (2，0)-形式。显然，$\Omega_\tau$ 的时间依赖性是全纯的，因此，作为 $U \times O$ 上的形式，$\Omega_\tau$ 也是全纯的。因此，将 $V_\tau$ 视为 $U \times O$ 上的向量场时，它也是全纯的。现在考虑 $U \times O$ 上与时间无关的向量场 $V$：

$$V(y, \tau') \coloneqq V_{\tau'}(y) + \partial_\tau|_{(y,\tau')} \quad \forall (y, \tau') \in \hat{U} \times O.$$

保持[45] $J$的向量场在 [7]中称为无穷小自同构。

由于 $V_\tau$ 和 $\partial_\tau$ 是全纯的， $V$ 也是全纯的。现在令 $V^R$ 为对应于 $V$ 的实 $J$-保持向量场，并令 $\Gamma:[0,1]\to\hat{U}\times O$、 $\Gamma(r)\equiv(\gamma(r)\ \rho(r))$ 为 $\hat{U}\times O$ 中的一条光滑曲线，满足 $\rho(0)=0$。那么，我们有以下辅助引理：

**辅助引理**。 $\Gamma$ 是 $V^R$ 的积分曲线，当且仅当 $\gamma:[0,1]\to\hat{U}$ 是 $V_t^R$的积分曲线，并且对每个 $r\in[0,1]$都有 $\rho(r)=r$。

辅助引理的证明。通过简单计算即可得出：设 $\tau=t+is$ 是 $\tau$ 的实部和虚部分解，则向量场 $V^R$ 为：

$$V^R(y,\tau')=V^R_{\tau'}(y)+\partial_t|_{(y,\tau')}\quad\forall(y,\tau')\in\hat{U}\times O.$$

进一步，设 $\rho=\rho_R+i\rho_I$ 是 $\rho$ 的实部和虚部分解，则 $V^R$ 关于 $\Gamma$ 的积分曲线方程可写为：

$$\dot{\gamma}(r)=V^R_{\rho(r)}(\gamma(r));\quad\dot{\rho}_R(r)\cdot\partial_t|_{\Gamma(r)}+\dot{\rho}_I(r)\cdot\partial_s|_{\Gamma(r)}=\partial_t|_{\Gamma(r)}\quad r\in[0,1].$$

由于 $\rho$ 需要满足初始条件 $\rho(0)=0$，若 $\Gamma$ 是 $V^R$的积分曲线，则 $\rho$ 由 $\mathrm{id}_{[0,1]}$ 给出。在这种情况下， $\gamma$ 必须满足以下微分方程：

$$\dot{\gamma}(r)=V^R_r(\gamma(r))\quad r\in[0,1].$$

因此，若 $\Gamma$ 是 $V^R$的积分曲线，则 $\gamma$ 是$\hat{U}$上时变向量场 $V_t^R$的积分曲线。反向结论的证明类似。 □

由辅助引理可知， $V^R$ 的流 $\varphi_t^{V^R}$ 与时变向量场 $V_t^R$的流 $\varphi_t$ 之间存在如下关系：

$$\varphi_t^{V^R}(y,0)=(\varphi_t(y),t)$$

对每个合适的 $y\in\hat{U}$ 都成立。如前所述， $\varphi_t^{V^R}$ 是一个全纯向量场的流，因此是局部双全纯的。这说明 $\varphi_t$ 也是局部双全纯的，从而完成证明。

□

## B. 莫尔斯-达布引理的证明

本部分的目标是证明引理 3 和引理 4。我们从引理 3 开始。

引理（莫尔斯-达布引理 *I*）。设 $(M^2,\omega)$ 是一个辛二维流形，$L^1$ 是一个光滑一维流形，$f \in C^\infty(M,L)$，且 $p \in M$ 是 $f$的一个莫尔斯指标为 $\mu_f(p) = 0$的非退化临界点。此外，设 $T > 0$ 是一个正实数。那么，存在一个 $C^1$-坐标图 $\psi_L : U_L \to V_L \subset \mathbb{R}$，定义在 $L$ 的 $f(p)$ 附近，并且在 $U_L/\{f(p)\}$ 上光滑，使得对于实哈密顿系统 $(U_M,\omega|_{U_M},H)$，所有位于 $p$附近、满足$U_M \coloneqq f^{-1}(U_L)$ 且 $H \coloneqq \psi_L \bigcirc f|_{U_M}$ 的非恒定轨线都是 $T$-周期的。

证明。 证明分为三个步骤：

1. 首先，我们确认 $\gamma$ 附近的非恒定轨线确实是周期的。2. 随后，我们计算满足 $f \bigcirc \gamma = r^2$、位于 $p$ 附近的轨迹 $\gamma$ 的周期 $\hat{T}(r)$，以证明对于 $r \in (-\varepsilon,\ \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$，$\hat{T}(r)$ 有定义，光滑地依赖于 $r$，且有一个正的下界。3. 最后，我们利用 $\hat{T}(r)$ 的这些性质来定义一个 $C^1$-微分同胚$\psi_L : U_L \to V_L \subset \mathbb{R}$，使得重标定的实哈密顿系统 $(U_M,\ \omega|_{U_M},\ H)$ 的轨线在满足上述 $U_M$ 和 $H$ 的条件时具有固定周期 $T > 0$。

**步骤 1**

不失一般性，在选取适当的坐标图后，我们可以假设 $L = \mathbb{R}, f(p) = 0 \in \mathbb{R}$，且 $f : M \to \mathbb{R}$的（通常）莫尔斯指标 $\mu_f(p)$ 为 0。现在，我们应用莫尔斯引理，找到一个坐标图 $\psi_M = (\hat{x},\hat{y}) : U_M \to V_M$，它属于 $M$且位于 $p$附近，并满足 $\psi_M(p) = 0$，使得 $f|_{U_M} = \hat{x}^2 + \hat{y}^2$。在此坐标图中，我们有 $\omega|_{U_M} = \hat{v}\, d\hat{x} \wedge d\hat{y}$，其中 $\hat{v} \in C^\infty(\hat{U}_M,\mathbb{R})$。由于 $\omega$是非退化的，我们可以假设 $\hat{v} > 0$（如有必要，可交换 $\hat{x}$和 $\hat{y}$）。现在考虑实哈密顿系统（$M,\omega,f$）及其在 $p$附近的轨线 $\gamma$。 $f$沿着 $\gamma$为常数，因此，当 $r > 0$ 足够小时，满足 $f \bigcirc \gamma = r^2$ 的 $p$ 附近轨线 $\gamma$ 沿着圆移动

$$f^{-1}(r^2) = \hat{\psi}_M^{-1}(\{(\hat{x},\hat{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \hat{x}^2 + \hat{y}^2 = r^2\}) \cong S^1$$

速度为 $\dot{\gamma} \neq 0$。因此， $p$ 附近的轨线是周期的。

**步骤 2**

将 $\gamma$ 的周期记为 $\hat{T}(r)$，其中 $f \bigcirc \gamma = r^2$ 和 $r > 0$。我们通过转到极坐标来计算 $\hat{T}(r)$：

$$(\hat{x},\hat{y}) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)).$$

定义 $v \coloneqq \hat{v} \bigcirc \hat{\psi}_M^{-1}$，则哈密顿向量场 $X_f$为：

$$d\hat{\psi}_M(X_f) = \frac{2}{v(\hat{x},\hat{y})}\begin{pmatrix}-\hat{y}\\ \hat{x}\end{pmatrix} = \frac{2}{v(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))}\begin{pmatrix}-r\sin(\varphi)\\ r\cos(\varphi)\end{pmatrix}.$$

现在按以下方式用 $r_\gamma, \varphi_\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 参数化 $X_f$ 的积分曲线 $\gamma : \mathbb{R} \to M$：

$$\hat{\psi}_M \circ \gamma(t) = \begin{pmatrix} r_\gamma(t)\cos(\varphi_\gamma(t)) \\ r_\gamma(t)\sin(\varphi_\gamma(t)) \end{pmatrix}.$$

积分曲线方程 $\dot{\gamma} = X_f(\gamma)$ 现在得出：

$$\dot{r}_\gamma = 0; \quad \dot{\varphi}_\gamma = \frac{2}{v(r_\gamma\cos(\varphi_\gamma), r_\gamma\sin(\varphi_\gamma))}.$$

因此，$r_\gamma$ 是常数，并且由于 $f \bigcirc \gamma = r^2$，由 $r$ 给出。这使我们可以定义 $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$：

$$\begin{aligned}\Phi(t) &:= \varphi_\gamma(t) - \varphi_\gamma(0) = \int_0^t \dot{\varphi}_\gamma(t')dt' \\ &= \int_0^t \frac{2}{v(r\cos(\varphi_\gamma(t')), r\sin(\varphi_\gamma(t')))}dt'.\end{aligned}$$

$\Phi$ 是保向微分同胚，因为 $\dot{\Phi} = \frac{2}{v} > 0$。因此，$\Phi^{-1}$ 存在，且由下式给出：

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\alpha} v(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\, d\varphi$$

其中 $\varphi_0 := \varphi_\gamma(0)$，因为

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi^{-1}}{d\alpha}(\alpha) &= \frac{1}{\dot{\Phi}(\Phi^{-1}(\alpha))} = \frac{1}{2}v(r\cos(\varphi_\gamma(\Phi^{-1}(\alpha))), r\sin(\varphi_\gamma(\Phi^{-1}(\alpha)))) \\ &\overset{\varphi_\gamma = \varphi_0 + \Phi}{=} \frac{1}{2}v(r\cos(\varphi_0+\alpha), r\sin(\varphi_0+\alpha)).\end{aligned}$$

现在我们可以利用 $\Phi$ 和 $\Phi^{-1}$ 计算 $\hat{T}(r)$：

$$\begin{aligned}&\varphi_\gamma(t + \hat{T}(r)) = \varphi_\gamma(t) + 2\pi \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \Phi(\hat{T}(r)) = 2\pi \\ \Rightarrow &\hat{T}(r) = \Phi^{-1}(2\pi) = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} v(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} v(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\, d\varphi\end{aligned}$$

如我们所见，$T(r)$ 光滑地依赖于 $r > 0$。事实上，这个公式也使我们能够为 $r \le 0$ 光滑地定义 $\hat{T}(r)$。结果表明，$T(r)$ 甚至是：

$$\begin{aligned}\hat{T}(-r) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} v(-r\cos(\varphi), -r\sin(\varphi))\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} v(r\cos(\varphi+\pi), r\sin(\varphi+\pi))\, d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} v(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\, d\varphi = \hat{T}(r).\end{aligned}$$

必要时缩小 $U_M$ 后，我们可以假设 $U_M$ 有一个紧邻域。因此，$\hat{v} \in C^\infty(U_M, \mathbb{R})$ 有一个正的常数下界 $v_{\min} > 0$。因此，$v \coloneqq \hat{v} \circ \hat{\psi}_M^{-1}$ 也有下界 $v_{\min}$。这意味着：

$$\hat{T}(r) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} v(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \geq \pi v_{\min} > 0 \quad \forall r.$$

**步骤 3**

最后，我们利用 $\hat{T}(r)$ 的这些性质，在 $0 \in \mathbb{R} = L$ 的邻域 $U_L \subset L$ 上定义一个 $C^1$-微分同胚 $\psi_L : U_L \to V_L \subset \mathbb{R}$，将轨线 $\gamma$ 的周期重标定为固定周期 $T > 0$。考虑 $p$ 附近的一条轨迹 $\gamma$，其中再次有 $f \circ \gamma = r^2$。我们希望以这样的方式定义 $\psi_L(s)$，使得 $s = r^2$ 满足：重标定后的轨迹 $\Gamma(t) \coloneqq \gamma(\hat{T}(r) \cdot t/T)$ 是重标定的实哈密顿系统 $(U_M, \omega|_{U_M}, H)$（$U_M$ 和 $H$ 同上）的轨迹。因此，我们希望 $\Gamma$ 是 $X_H$ 的一条积分曲线：

$$\begin{aligned}\dot{\Gamma}(t) &= \frac{\hat{T}(r)}{T}\dot{\gamma}\left(\frac{\hat{T}(r)}{T}t\right) = \frac{\hat{T}(r)}{T} X_f(\Gamma(t)) \\ &\overset{!}{=} X_H(\Gamma(t)) = \frac{d\psi_L}{ds}(f \circ \Gamma(t)) X_f(\Gamma(t)) = \frac{d\psi_L}{ds}(r^2) X_f(\Gamma(t))\end{aligned}$$

因此，我们得到关于 $\psi_L$ 的以下条件：

$$\frac{d\psi_L}{ds}(r^2) = \frac{\hat{T}(r)}{T}. \tag{4}$$

为求解方程（4），我们将函数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义为 $g(s) \coloneqq \sqrt{|s|}$。$g$ 在 $\overline{\mathbb{R}}$ 上连续，并在 $\mathbb{R}/\{0\}$ 上光滑。因此，$\hat{T} \circ g$ 在 0 的某个邻域 $U_L$ 上也连续，并在 $U_L/\{0\}$ 上光滑。现在我们将 $\psi_L$ 定义为

$$\psi_L(s) \coloneqq \frac{1}{T}\int_0^s \hat{T} \circ g(s')ds' = \frac{1}{T}\int_0^s \hat{T}(\sqrt{|s'|})ds'.$$

由于 $\hat{T} \circ g$ 连续，因此 $\psi_L$ 存在，是 $U_L$ 上的一个 $C^1$函数，并且在 $U_L/\{0\}$ 上光滑。此外：

$$\frac{d\psi_L}{ds}(s) = \frac{\hat{T}(\sqrt{|s|})}{T} \geq \frac{\pi v_{\min}}{T} > 0.$$

因此，$\psi_L$ 也是一个 $C^1$-微分同胚。最后一个方程结合 $\hat{T}(r)$ 为偶函数这一事实，得出方程（4），证明完毕：

$$\frac{d\psi_L}{ds}(r^2) = \frac{\hat{T}(|r|)}{T} = \frac{\hat{T}(r)}{T}.$$

□

**注 23**（实解析情形下不存在正则性问题）。 如果引理 *3* 中的所有对象都是实解析的，而非光滑的，那么就不会出现正则性问题，也就是说，坐标图$\psi_L$ 可以选为实解析的。我们可以如下说明：通过与之前类似的论证ˆ ˆ，将周期 $T$（$r$） 赋给每个半径 $r$ 的映射 $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 由下式给出

$$\hat{T}(r) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} v(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\, d\varphi$$

ˆ因此，由于 $v$ 是实解析的，故其也是实解析的。因此， $T$ 在 $r = 0$附近可以写成幂级数：

$$\hat{T}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k.$$

ˆ ˆ现在回想一下， $T$ 是偶函数，因此， $T$的幂级数中只出现偶次幂：

$$\hat{T}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} r^{2k}.$$

这使我们可以定义实解析函数 ˆ$t$ ：

$$\hat{t}(s) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} s^k.$$

显然，ˆ$T$ 和 ˆ$t$ 满足关系：ˆ$t(r^2)$ = ˆ$T(r)$。现在我们定义实解析坐标图 $\psi_L$ ：

$$\psi_L(s) \coloneqq \frac{1}{T}\int_0^{s} \hat{t}(s')ds'.$$

与引理 *3* 的证明中一样，哈密顿量 $\psi_L \circ f$ 的所有非恒定轨线都是$T$-周期的，因为 $\psi_L$ 满足方程

$$\frac{d\psi_L}{ds}(r^2) = \frac{\hat{t}(r^2)}{T} = \frac{\hat{T}(r)}{T}.$$

接下来，我们证明引理 **4**。

**引理** (Morse-Darboux引理II)。 设$(M^2,\omega)$为一个辛2-流形，且令$H\in C^\infty(M,\mathbb{R})$为定义在 $M$ 上的光滑函数，其在 $p\in M$ 处有一个莫尔斯指标为 $\mu_H(p)\neq 1$的非退化临界点。此外，设 $T>0$ 为一个正实数。则以下陈述等价：

*1.* 存在一个拓扑坐标图 $\psi_M=(x,y):U_M\to V_M\subset\mathbb{R}^2$，它定义在 $M$ 的 $p$ 附近，并且在 $U_M\backslash\{p\}$ 上光滑，使得 $(\psi_M(p)=0)$ 满足：*(a)* $H|_{U_M}=H(p)\pm\frac{\pi}{T}(x^2+y^2)$，*(b)* $\omega|_{U_M}=dx\wedge dy$。*2.* 存在 $p$ 的一个开邻域 $U_M\subset M$，使得实哈密顿系统 $(U_M,\omega|_{U_M},H|_{U_M})$ 的所有非平凡轨道都是 $T$-周期的。*3.* 存在一个数 $E_0>0$，使得对于每个 $E\in[0,E_0]$，都有 $\int_{U(E)}\omega=T\cdot E$，其中 $U(E)$ 是集合 $\{q\in M\mid |H(q)-H(p)|\leq E\}$ 中包含 $p$ 的连通分支。

证明。 证明的思路很简单：“1. $\Rightarrow$ 2.”和“2. $\Rightarrow$ 3.”这两个蕴含关系可通过直接计算得出。为了证明剩下的蕴含关系“3. $\Rightarrow$ 1.”，我们首先选取一个莫尔斯坐标图 $\hat{}\psi_M=(\hat{}x,\hat{}y):\hat{}U_M\to\hat{}V_M$，使得 $H|_{\hat{U}_M}=H(p)+\varepsilon\frac{\pi}{T}(\hat{}x^2+\hat{}y^2)$，其中 $\hat{}\varepsilon\in\{-1,+1\}$。一般来说，$\psi_M$ 并不是 $\omega$ 的达布坐标图。不过，实哈密顿系统（$\hat{}U_M$，$\omega|_{\hat{}U_M}$，$H|_{\hat{}U_M}$）的轨线都是圆，特别是周期轨道。唯一可能不恒定的是这些圆的角速度。为了解决这一问题，我们改用极坐标 $(r,\varphi)$，并对 $\varphi$ 施加一个恰当选取的微分同胚。这一操作得到一个新的坐标图 $\psi_M$。由于半径 $r$ 没有改变，$\psi_M$ 仍然是莫尔斯坐标图。不过，角坐标的变化使 $\psi_M$ 成为达布坐标图。

$\boxed{1.\Rightarrow 2.}$

在坐标图 $\psi_M$ 中，我们得到哈密顿向量场 $X_H$：

$$d\psi_M(X_H)=\pm\frac{2\pi}{T}\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}.$$

因此，$X_H$ 的积分曲线 $\gamma$ 为：

$$\gamma(t)=\begin{pmatrix}r_0\cos(\varphi_0\pm\frac{2\pi}{T}t)\\r_0\sin(\varphi_0\pm\frac{2\pi}{T}t)\end{pmatrix}.$$

因此，$p$ 附近的轨线 $\gamma$ 是 $T$-周期的。

$\boxed{2.\Rightarrow 3.}$

$p$ 是 $H$ 的一个莫尔斯指标为 $\mu_H(p)\neq 1$的非退化临界点，因此，我们可以找到一个莫尔斯坐标图 $\psi_M=(\hat{}x,\hat{}y):U_M\to V_M$，它位于 $M$ 的 $p$ 附近，使得 $(\psi_M(p)=0)$

$$H|_{\hat{U}_M}=H(p)+\varepsilon\frac{\pi}{T}(\hat{x}^2+\hat{y}^2)$$

对于 $\varepsilon \in \{-1,\ +1\}$。在这个坐标图中，对于 $v \in C^\infty(U_M,\ \mathbb{R})$，有 $\omega|_{U_M} = v \cdot dx \wedge dy$。如有必要，交换 $x$ 和 $y$ 后，我们可以假设 $v > 0$。设 $\gamma$ 为 $X_H$的一条积分曲线。在极坐标 $(x,\ y)$ 中（$r\cos(\varphi)\ \ r\sin(\varphi)$），我们可以通过$r_\gamma,\ \varphi_\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 将 $\gamma$参数化如下：

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r_\gamma(t)\cos(\varphi_\gamma(t)) \\ r_\gamma(t)\sin(\varphi_\gamma(t)) \end{pmatrix}.$$

令 $v := v \bigcirc \psi_M^{-1}$，积分曲线方程变为：

$$\dot{r}_\gamma = 0; \quad \dot{\varphi}_\gamma = \frac{2\pi\varepsilon}{Tv(r_\gamma\cos(\varphi_\gamma), r_\gamma\sin(\varphi_\gamma))}.$$

因此，$r_\gamma \equiv r$ 是常数。这使我们可以定义 $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$：

$$\begin{aligned}\Phi(t) := \varphi_\gamma(t) - \varphi_\gamma(0) &= \int_0^t \dot{\varphi}_\gamma(t')dt' \\ &= \int_0^t \frac{2\pi\varepsilon}{Tv(r\cos(\varphi_\gamma(t')), r\sin(\varphi_\gamma(t')))}dt'.\end{aligned}$$

如引理 3 的证明所示，$\Phi^{-1}$ 存在，且由下式给出：

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \frac{T}{2\pi\varepsilon}\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\alpha} v(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\, d\varphi$$

且 $\varphi_0 := \varphi_\gamma(0)$。现在我们利用以下事实：根据假设，$\gamma$ 是 $T$-周期的，因此 $\Phi^{-1}$满足：

$$\Phi^{-1}(2\pi) = \varepsilon T \quad \Rightarrow \int_0^{2\pi} v(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))d\varphi = 2\pi.$$

注意，最后一个方程对所有足够小的 $r > 0$ 都成立。它使我们能够计算辛面积 $\int_{U(E)} \omega$：

$$\begin{aligned}\int_{U(E)} \omega &= \int_0^{\sqrt{\frac{TE}{\pi}}}\int_0^{2\pi} v(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\, r dr\, d\varphi \\ &= \int_0^{\sqrt{\frac{TE}{\pi}}}\left(\int_0^{2\pi} v(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\, d\varphi\right) r dr \\ &= \int_0^{\sqrt{\frac{TE}{\pi}}} 2\pi r\, dr = T \cdot E.\end{aligned}$$

3. $\Rightarrow$ 1.

与“2. $\Rightarrow$ 3.”中一样，我们可以找到一个莫尔斯坐标图 $\hat{}\ \psi_M = (\hat{}x, \hat{}y) : \hat{}U_M \to \hat{}V_M$，其定义在 $M$ 附近，使得 $(\psi_M(p) = 0)$

$$H|_{\hat{U}_M} = H(p) + \varepsilon\frac{\pi}{T}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)$$

$\hat{}$ 对于 $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ 和 $\omega|_{\hat{}U_M} = \hat{}v \cdot d\hat{}x \wedge d\hat{}y$，对于 $\hat{}v \in C^\infty(U_M, \mathbb{R})$，其中 $\hat{}v > 0$。对 $\int_{U(E)} \omega = T \cdot E$ 关于 $E$ 求导，我们可得

$$\int_0^{2\pi} v(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\, d\varphi = 2\pi$$

对于足够小的 $r > 0$，且 $v \coloneqq \hat{}v \bigcirc \hat{}\psi_M^{-1}$。最后一个方程意味着，由 $P : (0, \varepsilon_0) \times S^1 \to (0, \varepsilon_0) \times S^1$ 定义的映射

$$P(r, [\varphi]) \coloneqq \left(r, \left[\int_0^{\varphi} v(r\cos(\varphi'), r\sin(\varphi'))\, d\varphi'\right]\right)$$

当 $\varepsilon_0 > 0$ 足够小时，该映射定义良好。$P$ 是光滑微分同胚，因为 $P$ 的雅可比行列式为 $v > 0$。将与极坐标相关的映射记为 $S : \mathbb{R}_+ \times S^1 \to \mathbb{R}^2/\{0\}$，即 $S(r, [\varphi]) \coloneqq (r\cos(\varphi)\ r\sin(\varphi))$，并考虑映射 $S \bigcirc P \bigcirc S^{-1} : \dot{D}_{\varepsilon_0} \to \dot{D}_{\varepsilon_0}$，其中 $\dot{D}_{\varepsilon_0} \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^2/\{0\} \mid \|x\| \le \varepsilon_0\}$。$S \bigcirc P \bigcirc S^{-1}$ 是光滑微分同胚，因为 $S$ 和 $P$ 都是光滑微分同胚。此外，$S \bigcirc P \bigcirc S^{-1}$ 将半径为 $r$ 的圆映射到半径为 $r$ 的圆，因此，我们可以通过设定 $S \bigcirc P \bigcirc S^{-1}(0) \coloneqq 0$，将 $S \bigcirc P \bigcirc S^{-1}$ 延拓为 $D_{\varepsilon_0} \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \le \varepsilon_0\}$ 上的同胚。

现在考虑映射 $(x, y) \coloneqq \psi_M$，$\psi_M$ 是 $p$ 附近的一个拓扑 $\hat{}$ 坐标图，并且在 $U_M/\{p\}$ 上光滑。回忆一下，$\psi_M$ 是 $H$ 的莫尔斯坐标图，因此，$\hat{}$ $H$ 的水平集在坐标图 $\psi_M$ 中是圆。由于坐标图 $\psi_M$ 和 $\psi_M$ 仅相差与 $S \bigcirc P \bigcirc S^{-1}$ 的复合，而该复合保持圆的形状，因此，$\psi_M$ 也是 $H$ 的莫尔斯坐标图：

$$H|_{U_M} = H(p) + \varepsilon\frac{\pi}{T}(x^2 + y^2).$$

此外，$P$ 的雅可比行列式为 $v$ 这一事实意味着

$$\omega|_{U_M} = dx \wedge dy$$

证明结束。 $\square$

## C. HHS 和 PHHS 的各种作用泛函

在第 2.3 小节和第3.1小节中，我们定义并研究了 HHS 和 PHHS 的作用泛函。这些作用泛函的“临界点”给出了所研究系统的（伪）全纯轨迹，其定义域是复平面中的平行四边形。然而，这些作用泛函并非唯一一种其“临界点”能够与（伪）全纯轨迹相关联的泛函。事实上，存在大量作用泛函，它们的轨线定义域各不相同，其底层实哈密顿系统的一维作用泛函的积分方式也各有不同。在附录的这一部分，我们介绍并考察了大量此类作用泛函。首先，我们仅对 HHS 的作用泛函进行表述和探究。随后，我们说明如何修改这些作用泛函，使之成为 PHHS 的作用泛函。在此过程中，我们发现所介绍的 PHHS 作用泛函均为实值泛函。从这个角度来看，围绕这些实值泛函构建 PHHS 的 Floer型理论或许是可行的。

我们首先为定义域是以 $z_0 \in \mathbb{C}$ 为圆心、半径为 $R > 0$ 的圆盘 $D_R^{z_0} \subset \mathbb{C}$ 上的全纯轨线定义一个作用泛函。为此，我们需要先将圆盘 $D_R^{z_0}$ 划分成若干条直线。我们选择的划分由从圆心 $z_0$ 出发并延伸至任意边界点 $z \in \partial D_R^{z_0}$ 的直线组成。对于每一条这样的径向直线，我们考虑注 7 中的作用泛函 $\mathrm{A}^{\Lambda}_{e^{i\alpha}\mathcal{H}}$。现在，我们通过对所有径向直线上的作用量 $\mathrm{A}^{\Lambda}_{e^{i\alpha}\mathcal{H}}$ 积分，得到一个用于 HHS 的作用泛函，即 $\alpha \in [0, 2\pi]$:

**命题 20** (作用泛函 $\mathcal{A}^{D_R^{z_0}}{}_{\mathcal{H};1}$)。 设 $(X, \Omega = d\Lambda, \mathcal{H})$ 是一个恰当 *HHS*，$D_R^{z_0} \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R\}$ 是一个以 $z_0 \in \mathbb{C}$ 为圆心、半径为 $R > 0$ 的圆盘，$\mathcal{P}_{D_R^{z_0}} \coloneqq C^\infty(D_R^{z_0}, X)$ 是从 $D_R^{z_0}$ 到 $X$ 的光滑映射集合，而 $\mathcal{A}^{D_R^{z_0}}{}_{\mathcal{H};1} : \mathcal{P}_{D_R^{z_0}} \to \mathbb{C}$ 是由下式定义的作用泛函

$$\mathcal{A}^{D_R^{z_0}}_{\mathcal{H};1}[\gamma] \coloneqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[ \Lambda|_{\gamma_\alpha(r)} \left( \frac{d\gamma_\alpha}{dr}(r) \right) - e^{i\alpha} \cdot \mathcal{H} \circ \gamma_\alpha(r) \right] dr\, d\alpha \quad \forall \gamma \in \mathcal{P}_{D_R^{z_0}},$$

其中 $\gamma_\alpha : [0, R] \to X$ 由 $\gamma_\alpha(r) \coloneqq \gamma(z_0 + re^{i\alpha})$定义。现在令 $\gamma \in \mathcal{P}^{D_R^{z_0}}$。那么，$\gamma$ 是全纯哈密顿系统 $(X, \Omega, \mathcal{H})$ 的全纯轨迹，当且仅当 $\gamma$ 是 $\mathcal{A}^{D_R^{z_0}}{}_{\mathcal{H};1}$ 的“临界点”。这里，“临界点”指我们只允许对 $\gamma$ 进行这样的变分，使其在边界 $\partial D_R^{z_0}$ 和中心 $z_0$处保持 $\gamma$ 不变。

---

证明。 沿用上文的记号。利用注 7，并将 $\mathrm{A}^{D_R^{z_0}}{}_{\mathcal{H};1}$ 写作

$$\mathcal{A}^{D_R^{z_0}}_{\mathcal{H};1}[\gamma] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{A}^{\Lambda}_{e^{i\alpha}\mathcal{H}}[\gamma_\alpha] d\alpha,$$

我们可以像引理 1 的证明中那样，证明 $\gamma$ 是 $\mathrm{A}^{D_R^{z_0}}{}_{\mathcal{H};1}$ 的“临界点”，当且仅当对每个 $\alpha$, $\gamma_\alpha : [0, R] \to X$ 都是 $\cos(\alpha) \cdot X_{\mathcal{H}}^R + \sin(\alpha) \cdot J(X_{\mathcal{H}}^R)$ 的（实）积分曲线

$\alpha \in [0, 2\pi]$，其中 $X_{\mathcal{H}} = 1/2(X^R_{\mathcal{H}} - iJ(X^R_{\mathcal{H}}))$ 是 $(X, \Omega, \mathrm{H})$ 的哈密顿向量场。因此，给定初值 $x_0 \coloneqq \gamma(z_0)$，“临界点” $\gamma$ 唯一确定如下：

$$\gamma(z_0 + re^{i\alpha}) = \varphi_r^{\cos(\alpha)\cdot X^R_{\mathcal{H}} + \sin(\alpha)\cdot J(X^R_{\mathcal{H}})}(x_0) = \varphi_1^{r\cos(\alpha)\cdot X^R_{\mathcal{H}} + r\sin(\alpha)\cdot J(X^R_{\mathcal{H}})}(x_0),$$

其中，$\varphi_t^V$是实向量场 $V$ 在 $X$上的时间-$t$-流。将最后一个方程与命题 2 的证明中给出的、满足 $\gamma(z_0) = x_0$ 的全纯轨迹 $\gamma^{z_0,x_0}$ 的公式进行比较可知，$\gamma$是全纯哈密顿系统（$X$,Ω, H）的全纯轨迹，当且仅当 $\gamma$ 是 $\mathrm{A}^{D^{z_0}_R}\mathcal{H};1$的一个“临界点”。

最后，我们必须解释为什么 $\mathrm{A}^{D^{z_0}_R}\mathcal{H};1$ 的一个“临界点” $\gamma$ 要求在边界 $\partial D^{z_0}_R$ 和中心 $z_0$处固定 $\gamma$ 的变分。回顾 $\mathrm{A}^{\Lambda}_{e^{i\alpha}\mathcal{H}}$ 在 $\gamma_\alpha$处的变分。一般而言，这个泛函的变分还包括与 $\gamma_\alpha$像的边界相关的项。该边界由两个点组成，即中心 $z_0$ 和一个边界点 $z \in \partial D^{z_0}_R$。为了消去 $\mathrm{A}^{D^{z_0}_R}\mathcal{H};1$变分中的这些边界项，我们必须在 $z_0$ 和 $\partial D^{z_0}_R$处固定 $\gamma$。

□

在第 2.3 小节中，我们给出了两个理由，说明为什么需要在所有光滑曲线上进行变分 $\gamma$，而不能简单地将变分问题限制在全纯曲线空间 $\gamma$。新发现的作用泛函为此提供了另一个视角。它将每条全纯曲线 $\gamma$ 都映射为零，因此，只在全纯曲线空间上对其进行变分毫无意义：

**命题 21.** 采用命题 *20* 中的假设和记号。此外，设$\gamma : D^{z_0}_R \to X$ 是从 $D^{z_0}_R$到 $X$的任意全纯映射。那么：

$$\mathcal{A}^{D^{z_0}_R}_{\mathcal{H};1}[\gamma] = 0.$$

证明。 采用命题 20 中的假设和记号，并设 $\gamma : D^{z_0}_R \to X$ 为全纯映射。利用全纯 1-形式所满足的关系 $\Lambda(J\cdot) = i \cdot \Lambda$，可得：

$$\Lambda|_{\gamma_\alpha(r)}\left(\frac{d\gamma_\alpha}{dr}(r)\right) = e^{i\alpha}\cdot\Lambda|_{\gamma_\alpha(r)}\left(\gamma'(z_0 + re^{i\alpha})\right),$$

其中 $\gamma'$ 是 $\gamma$的复导数。由此，我们得到：

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{D^{z_0}_R}_{\mathcal{H};1}[\gamma] &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R \left[\Lambda|_{\gamma_\alpha(r)}\left(\frac{d\gamma_\alpha}{dr}(r)\right) - e^{i\alpha}\cdot\mathcal{H}\circ\gamma_\alpha(r)\right] dr\, d\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R \left[\Lambda|_{\gamma(z_0+re^{i\alpha})}\left(\gamma'(z_0+re^{i\alpha})\right) - \mathcal{H}\circ\gamma(z_0+re^{i\alpha})\right] dr\, e^{i\alpha}\, d\alpha \\
&= \int_0^R \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\left[\Lambda|_{\gamma(z_0+rz)}\left(\gamma'(z_0+rz)\right) - \mathcal{H}\circ\gamma(z_0+rz)\right] dz\, dr \\
&= \int_0^R \mathrm{Res}_{z=0}\left[\Lambda|_{\gamma(z_0+rz)}\left(\gamma'(z_0+rz)\right) - \mathcal{H}\circ\gamma(z_0+rz)\right] dr,
\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{Res}_{z=0}[f(z)]$ 表示亚纯函数 $f(z)$在 $z=0$处的留数。在计算的最后一行，我们用到了柯西定理。显然，我们需要求留数的函数在 $z=0$处全纯。因此，留数为 0，由此可知，全纯曲线的作用量为零，证明完毕。

□

尽管 $\mathrm{A}^{D_R^{z_0}}{}_{\mathcal{H};1}$ 的“临界值”清晰易懂，但作用泛函本身似乎并没有特别大的用处。我们往往希望修改作用泛函，使轨线成为真正的临界点。实现这一点的标准方法有两种：将轨线的边界置于拉格朗日子流形上，或施加周期性条件。但这两种方法在这里似乎都不合适。对于上述作用泛函，周期性意味着径向直线的周期性。因此，“周期的”曲线 $\gamma : D_R^{z_0} \to X$ 需要在边界上的取值与其中心处的取值相同。然而，根据恒等定理，只有常值曲线才是具有这种性质的全纯映射 $\gamma : D_R^{z_0} \to X$ 。

另一种方法是将“边界”映射到拉格朗日子流形上，但在这里这种做法显得不自然，而且相当难看：也就是将 $z_0$ 和 $\partial D_R^{z_0}$ 映射到拉格朗日子流形上。作用泛函 $\mathrm{A}^{D_R^{z_0}}{}_{\mathcal{H};2}$ 在这方面优于 $\mathrm{A}^{D_R^{z_0}}{}_{\mathcal{H};1}$ 。为了避免与 $z_0$相关的边界项——它们正是问题的核心所在——我们现在将圆盘 $D_R^{z_0}$划分为从 $z_0 - z$ 出发、以 $z_0 + z$ 为终点的直线（$|z| = R$）。为计入径向直线长度加倍这一点，这次我们只对角$\alpha \in [0, \pi]$ 积分：

**命题 22 (**作用泛函 $\mathcal{A}^{D_R^{z_0}}{}_{\mathcal{H};2}$**).** 设 $(X, \Omega = d\Lambda, \mathcal{H})$ 是一个恰当 *HHS*，$D_R^{z_0} \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R\}$ 是一个以 $z_0 \in \mathbb{C}$ 为中心、半径为 $R > 0$ 的圆盘，$\mathcal{P}_{D_R^{z_0}} \coloneqq C^\infty(D_R^{z_0}, X)$ 是从 $D_R^{z_0}$ 到 $X$ 的光滑映射集合，而$\mathcal{A}^{D_R^{z_0}}{}_{\mathcal{H};2} : \mathcal{P}_{D_R^{z_0}} \to \mathbb{C}$ 是由下式定义的作用泛函

$$\mathcal{A}^{D_R^{z_0}}_{\mathcal{H};2}[\gamma] \coloneqq \frac{i}{4R} \int_0^\pi \int_{-R}^{R} \left[ \Lambda|_{\gamma_\alpha(r)} \left( \frac{d\gamma_\alpha}{dr}(r) \right) - e^{i\alpha} \cdot \mathcal{H} \circ \gamma_\alpha(r) \right] dr\, d\alpha \quad \forall \gamma \in \mathcal{P}_{D_R^{z_0}},$$

其中，$\gamma_\alpha : [-R, R] \to X$ 由 $\gamma_\alpha(r) \coloneqq \gamma(z_0 + re^{i\alpha})$定义。现在令 $\gamma \in \mathcal{P}^{D_R^{z_0}}$。那么，$\gamma$ 是 *HHS* $(X, \Omega, \mathcal{H})$ 的一条全纯轨迹，当且仅当 $\gamma$是$\mathcal{A}^{D_R^{z_0}}{}_{\mathcal{H};2}$ 的一个“临界点”。这里，“临界点”意味着我们只允许对 $\gamma$ 进行那些在边界 $\partial D_R^{z_0}$ 处保持 $\gamma$ 固定的变分。

证明。证明方法与命题 20 的证明相同，将 $\mathrm{A}^{D_R^{z_0}}{}_{\mathcal{H};2}$ 写作

$$\mathcal{A}^{D_R^{z_0}}_{\mathcal{H};2}[\gamma] = \frac{i}{4R} \int_0^\pi \mathcal{A}^{\Lambda}_{e^{i\alpha}\mathcal{H}}[\gamma_\alpha] d\alpha.$$

这里，$\gamma$的变分只需在边界 $\partial D_R^{z_0}$ 上保持 $\gamma$ 不变，因为径向直线从 $\partial D_R^{z_0}$ 出发并在此结束。

□

[46]谨慎地。

**注记 24** （对 $\mathcal{A}^{D_R^{z_0}}{}_{\mathcal{H};2}$ 不适用命题 21）。 命题 *21* 不适用于 $\mathcal{A}^{D_R^{z_0}}{}_{\mathcal{H};2}$。事实上，命题 *22* 中的归一化是这样选取的，使得常值曲线的作用量由哈密顿函数给出：

$$\mathcal{A}^{D_R^{z_0}}_{\mathcal{H};2}[\gamma_{x_0}] = \mathcal{H}(x_0),$$

其中 $\gamma_{x_0}(z) \coloneqq x_0 \in X$ 对每个 $z \in D_R^{z_0}$都成立。因此，$\mathcal{H}$ 的任意奇点 $x_0$ ，若满足 $\mathcal{H}(x_0) \neq 0$ ，便为$\mathcal{A}^{D_R^{z_0}}{}_{\mathcal{H};2}$的命题 *21* 提供了一个反例。

若我们对 $\mathrm{A}^{D_R^{z_0}}{}_{\mathcal{H};2}$ 作出修改，使全纯轨迹成为真正的临界点，就会发现这个作用量更为合理一些。在拉格朗日情形下，我们现在将光滑曲线 $\gamma : D_R^{z_0} \to X$ 的空间限制为这样一些曲线构成的空间：它们只将边界 $\partial D_R^{z_0}$ 映射到拉格朗日子流形，这也符合预期。然而，通过周期性作出的修改仍然只能得到平凡结果。原因如下：现在，周期性指的是从 $\partial D_R^{z_0}$出发并返回 $\partial D_R^{z_0}$的径向直线的周期性。在此意义下，若 $\gamma : D_R^{z_0} \to X$ 在边界 $\partial D_R^{z_0}$上的相对点取值相同，我们就称其为“周期的”。为简单起见，现假设 $z_0 = 0$。对于这样的“周期的” $\gamma$，定义 $\gamma_-$ 为 $\gamma_-(z) \coloneqq \gamma(-z)$。若 $\gamma$ 是全纯的，则 $\gamma_-$ 也全纯，并且根据假设，它在 $\partial D_R^0$ 上的取值与 $\gamma$相同。因此，根据恒等定理， $\gamma$ 和 $\gamma_-$ 表示同一个映射。然而，若 $\gamma$ 甚至是一条全纯轨迹，则 $\gamma$ 是哈密顿向量场 $X_{\mathcal{H}}$ 的一条积分曲线，并且有：

$$X_{\mathcal{H}}(\gamma(z)) = \frac{\partial}{\partial z}(\gamma(z)) = \frac{\partial}{\partial z}(\gamma(-z)) = -X_{\mathcal{H}}(\gamma(-z)) = -X_{\mathcal{H}}(\gamma(z)).$$

因此，在这种情况下，哈密顿向量场为零，且 $\gamma$ 是一条常值曲线 .
我们不仅可以对圆盘 $D_R^{z_0}$定义 $\mathrm{A}^{D_R^{z_0}}{}_{\mathcal{H};\,1}$ 和 $\mathrm{A}^{D_R^{z_0}}{}_{\mathcal{H};\,2}$，还可以对任意具有光滑边界[48] $b : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \partial D$的有界星形区域[47] $D \subset \mathbb{C}$ 定义它们：

**命题 23 (**作用泛函 $\mathcal{A}^D_{\mathcal{H};1}$ 和$\mathcal{A}^D_{\mathcal{H};2}$ （有界星形区域）。设$(X,\Omega = d\Lambda, \mathcal{H})$ 是一个恰当 *HHS*，设 $D \subset \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}$ 中一个关于 $z_0$ 星形且具有光滑边界 $b : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \partial D$ 的有界区域，并设$\mathcal{P}_D \coloneqq C^\infty(D, X)$ 是从 $D$ 到 $X$ 的光滑映射集合。那么，我们可以定义作用泛函 $\mathcal{A}^D_{\mathcal{H};1} : \mathcal{P}_D \to \mathbb{C}$ 和 $\mathcal{A}^D_{\mathcal{H};2} : \mathcal{P}_D \to \mathbb{C}$，如下所示

$$\mathcal{A}^D_{\mathcal{H};1}[\gamma] \coloneqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R(\alpha)} \left[\Lambda|_{\gamma_\alpha(r)}\left(\frac{d\gamma_\alpha}{dr}(r)\right) - e^{i\alpha}\cdot\mathcal{H}\circ\gamma_\alpha(r)\right] dr\, d\alpha,$$

$$\mathcal{A}^D_{\mathcal{H};2}[\gamma] \coloneqq \frac{i}{4\hat{R}}\int_0^{\pi}\int_{-R(\alpha-\pi)}^{R(\alpha)} \left[\Lambda|_{\gamma_\alpha(r)}\left(\frac{d\gamma_\alpha}{dr}(r)\right) - e^{i\alpha}\cdot\mathcal{H}\circ\gamma_\alpha(r)\right] dr\, d\alpha,$$

[47]这里，定义域 $D \subset \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个道路连通子集，其内部 $D^\circ$ 非空且在 $D$中稠密。[48]边界 $b$ 由分解 $z = z_0 + re^{i\alpha} \in D$中的极角 $\alpha$ 参数化。

其中， $\gamma \in \mathcal{P}_D$, $R : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ 定义为 $R(\alpha) \coloneqq |b(\alpha) - z_0|$, $\gamma_\alpha : [-R(\alpha-\pi)\ R(\alpha)] \to X$由 $\gamma_\alpha(r) \coloneqq \gamma(z_0 + re^{i\alpha})$ 给出，而 $\hat{}R$ 定义为

$$\hat{R} \coloneqq \frac{i}{4}\left[\int_{\pi}^{2\pi} R(\alpha)e^{i\alpha}d\alpha - \int_{0}^{\pi} R(\alpha)e^{i\alpha}d\alpha\right].$$

现在令 $\gamma \in \mathcal{P}_D$。那么， $\gamma$是全纯哈密顿系统 $(X, \Omega, \mathcal{H})$ 的全纯轨迹，当且仅当 $\gamma$是 $\mathcal{A}^D_{\mathcal{H};1}$ 的“临界点”，当且仅当 $\gamma$ 是$\mathcal{A}^D_{\mathcal{H};2}$的“临界点”。

证明。 参见命题 20 和 22 的证明。 □

**注 25** （$\mathcal{A}^D_{\mathcal{H};1}$ 和$\mathcal{A}^D_{\mathcal{H};2}$的归一化）。 $\mathcal{A}^D_{\mathcal{H};1}$ 和$\mathcal{A}^D_{\mathcal{H};2}$的归一化方式经过选择，使其在 $D = D_R^{z_0}$ 为圆盘时与我们之前的定义一致。特别地，$\mathcal{A}^D_{\mathcal{H};2}$ 对于常值曲线 $\gamma$与哈密顿函数$\mathcal{H}$ 一致。

人们或许会想知道，作用泛函 $\mathrm{A}^D_{\mathcal{H};1}$ 和 $\mathrm{A}^D_{\mathcal{H};2}$ 与第 2.3 小节和第3.1小节中针对平行四边形 $P_\alpha$ 定义的作用泛函 $\mathrm{A}^{P_\alpha}{}_{\mathcal{H}}$ 之间有何关系，尤其是因为平行四边形 $P_\alpha$ 也是 $\mathbb{C}$中的有界星形区域。当我们修改泛函 $\mathrm{A}^D_{\mathcal{H};1}$ 和 $\mathrm{A}^D_{\mathcal{H};2}$ 以描述一般的 PHHS 时，将会看到 $\mathrm{A}^D_{\mathcal{H};1}$ 和 $\mathrm{A}^D_{\mathcal{H};2}$ 与 $\mathrm{A}^{P_\alpha}{}_{\mathcal{H}}$ 有很大差异。为了直接比较 $\mathrm{A}^{P_\alpha}{}_{\mathcal{H}}$ 与 $\mathrm{A}^D_{\mathcal{H};1}$ 和 $\mathrm{A}^D_{\mathcal{H};2}$，让我们用与 $\mathrm{A}^{P_\alpha}{}_{\mathcal{H}}$ 相同的坐标（即笛卡尔坐标 $z = t + is$）来表达 $\mathrm{A}^D_{\mathcal{H};1}$ 和 $\mathrm{A}^D_{\mathcal{H};2}$：

**命题 24** ($\mathcal{A}^D_{\mathcal{H};1}$ 和 $\mathcal{A}^D_{\mathcal{H};2}$ 在笛卡尔坐标中)。 采用命题 *23* 中的假设和记号。对于 $\gamma \in \mathcal{P}_D$, 我们定义以下笛卡尔坐标下的导数 $z = t + is \in D$:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial z}(z) \coloneqq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial t}(z) - i\frac{\partial\gamma}{\partial s}(z)\right); \quad \frac{\partial\gamma}{\partial \bar{z}}(z) \coloneqq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial t}(z) + i\frac{\partial\gamma}{\partial s}(z)\right).$$

此外，定义复函数 $f, g : D \to \mathbb{C}$ 如下:

$$f(z) \coloneqq \Lambda|_{\gamma(z)}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial z}(z)\right) - \mathcal{H}\circ\gamma(z); \quad g(z) \coloneqq \Lambda|_{\gamma(z)}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial \bar{z}}(z)\right).$$

笛卡尔坐标下的作用泛函 $\mathcal{A}^D_{\mathcal{H};1}$ 和 $\mathcal{A}^D_{\mathcal{H};2}$ 为:

$$\mathcal{A}^D_{\mathcal{H};1}[\gamma] = \frac{1}{2\pi}\iint_D \left[\frac{f(z)}{\bar{z} - \bar{z_0}} + \frac{g(z)}{z - z_0}\right] dt \wedge ds,$$

$$\mathcal{A}^D_{\mathcal{H};2}[\gamma] = \frac{i}{4\hat{R}}\iint_{D^+} \left[\frac{f(z)}{\bar{z} - \bar{z_0}} + \frac{g(z)}{z - z_0}\right] dt \wedge ds - \frac{i}{4\hat{R}}\iint_{D^-} \left[\frac{f(z)}{\bar{z} - \bar{z_0}} + \frac{g(z)}{z - z_0}\right] dt \wedge ds,$$

其中 $z = t + is \in D$, $\bar{\cdot}$表示复共轭， $D^+ \coloneqq \{z \in D \mid \mathrm{Im}(z - z_0) \geq 0\}$，以及$D^- \coloneqq \{z \in D \mid \mathrm{Im}(z - z_0) \leq 0\}$。

[49]按命题 20 的意义。[50]按命题 22 的意义。

证明。 采用上述假设和记号。我们只证明当 $D = D_R^0 \equiv D_R$ 为以原点为圆心、半径为 $R > 0$ 的圆盘时的命题 24。一般情形可用类似方法证明。利用上文定义的导数，我们可以写出：

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}(z) = \frac{\partial\gamma}{\partial z}(z) + \frac{\partial\gamma}{\partial\bar{z}}(z); \quad \frac{\partial\gamma}{\partial s}(z) = i\left(\frac{\partial\gamma}{\partial z}(z) - \frac{\partial\gamma}{\partial\bar{z}}(z)\right).$$

现在考虑在极坐标 $z = re^{i\alpha}$ 中定义的映射 $\gamma_\alpha : [-R, R] \to X$ $\gamma_\alpha(r) = \gamma(re^{i\alpha})$，对每个 $\alpha \in [0, 2\pi]$ 均成立。将 $\Lambda$ 应用于 $\gamma_\alpha$ 的导数，得到：

$$\begin{aligned}\Lambda|_{\gamma_\alpha(r)}\left(\frac{d\gamma_\alpha}{dr}(r)\right) &= \cos(\alpha)\cdot\Lambda|_{\gamma(re^{i\alpha})}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial t}(re^{i\alpha})\right) + \sin(\alpha)\cdot\Lambda|_{\gamma(re^{i\alpha})}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial s}(re^{i\alpha})\right)\\ &= e^{i\alpha}\cdot\Lambda|_{\gamma(re^{i\alpha})}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial z}(re^{i\alpha})\right) \quad + e^{-i\alpha}\cdot\Lambda|_{\gamma(re^{i\alpha})}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\bar{z}}(re^{i\alpha})\right).\end{aligned}$$

回顾 $f$ 和 $g$的定义，我们可以将其写为：

$$\begin{aligned}\Lambda|_{\gamma_\alpha(r)}\left(\frac{d\gamma_\alpha}{dr}(r)\right) - e^{i\alpha}\cdot\mathcal{H}\circ\gamma_\alpha(r) &= e^{i\alpha}\cdot f(re^{i\alpha}) + e^{-i\alpha}\cdot g(re^{i\alpha})\\ &= r\cdot\left[\frac{f(re^{i\alpha})}{re^{-i\alpha}} + \frac{g(re^{i\alpha})}{re^{i\alpha}}\right] = r\cdot\left[\frac{f(z)}{\bar{z}} + \frac{g(z)}{z}\right].\end{aligned}$$

将最后一个方程代入 $\mathsf{A}^D_{\mathcal{H};1}$ 的定义公式，并对 $re^{i\alpha} = z = t + is$使用 $r\cdot dr\wedge d\alpha = dt\wedge ds$，即可得到 $\mathsf{A}^D_{\mathcal{H};1}$ 的表达式。注意到 $\mathsf{A}^D_{\mathcal{H};1}$ 和 $\mathsf{A}^D_{\mathcal{H};2}$ 的被积函数在 $D_R^+$ 上相同，而在 $D_R^-$ 上只差一个符号，证明得证。

□

$\mathsf{A}^D_{\mathcal{H};1}$ 和 $\mathsf{A}^D_{\mathcal{H};2}$ 在笛卡尔坐标下的形式相当引人注目。事实上，我们可以将第 2.3 小节中的作用泛函 $\mathsf{A}^{P_\alpha}{}_{\mathcal{H}}$ 写成与$D = P_\alpha$时 $\mathsf{A}^D_{\mathcal{H};1}$ 相同的形式，只需使用不同的复函数 $f$ 和 $g$，具体设为：

$$f(z) = 2\pi\overline{(z - z_0)}\cdot\left[\Lambda_R|_{\gamma(z)}\left(2\frac{\partial\gamma}{\partial z}(z)\right) - \mathcal{H}\circ\gamma(z)\right]; \quad g(z) = 0.$$

如果我们在全纯曲线 $\gamma : P_\alpha \to X$ 上计算 $\mathsf{A}^{P_\alpha}{}_{\mathcal{H}}$，$\mathsf{A}^D_{\mathcal{H};1}$ 和 $\mathsf{A}^{P_\alpha}{}_{\mathcal{H}}$ 之间的相似之处就会更加明显。与注 8、第 3 点中一样，我们在此情形下得到：

$$\mathcal{A}^{P_\alpha}_{\mathcal{H}}[\gamma] = \iint\limits_{P_\alpha}\left[\Lambda\left(\frac{\partial\gamma}{\partial z}(z)\right) - \mathcal{H}\circ\gamma(z)\right]dt\wedge ds.$$

由于命题 24 中定义的函数 $g$ 在全纯 $\gamma$ 上为零，$\mathsf{A}^D_{\mathcal{H};1}$ 和 $\mathsf{A}^{P_\alpha}{}_{\mathcal{H}}$ 之间现在唯一的差别就是被积函数中的因子 $2\pi(z - z_0)$。不过，这看似微小的差别影响颇大，我们很快就会看到。

最后，我们希望修改作用量 $\mathsf{A}^D_{\mathcal{H};1}$ 和 $\mathsf{A}^D_{\mathcal{H};2}$，使其也适用于 PHHS。回想一下，对于恰当 PHHS $(X, J; \Omega_R = d\Lambda_R, \mathrm{H}_R)$，诱导的 2-形式 $\Omega_I$通常并非闭。因此，只有 $\mathsf{A}^D_{\mathcal{H};1}$ 和 $\mathsf{A}^D_{\mathcal{H};2}$ 中不包含 $\Lambda_I$

的部分才对 PHHS 有定义。准确地说，这些部分是 $\mathrm{A}^{D}_{\mathcal{H};1}$ 的实部以及 $-4i\hat{}R\cdot\mathrm{A}^{D}_{\mathcal{H};2}$的实部。尽管如此，这些实值泛函仍满足关于 PHHS 的伪全纯轨迹的作用原理。事实上，只需注意到注 7 对泛函 $\overset{\Lambda}{\mathrm{A}}{}^{e^{i\alpha}\mathcal{H}}$的实部同样成立，即可按照命题 20 的证明方式证明这一点；注 7 对命题 20 的证明至关重要。

将 $\mathrm{A}^{D}_{\mathcal{H};1}$ 和 $\mathrm{A}^{D}_{\mathcal{H};2}$ 推广到 PHHS 后，我们揭示了 $\mathrm{A}^{D}_{\mathcal{H};1}$ 与 $\mathrm{A}^{P_\alpha\mathcal{H}}$ 之间最显著的差异：如果只考虑 $\mathrm{A}^{D}_{\mathcal{H};1}$ 的实部，与 $\mathrm{A}^{D}_{\mathcal{H};1}$ 相关的作用原理仍然适用；但 $\mathrm{A}^{P_\alpha\mathcal{H}}$ 的实部和虚部对于与 $\mathrm{A}^{P_\alpha\mathcal{H}}$ 相关的作用原理成立都至关重要。特别是，可能存在一种与 $\mathrm{A}^{D}_{\mathcal{H};1}$ 或 $-4i\hat{}R\cdot\mathrm{A}^{D}_{\mathcal{H};2}$ 的实部相关的 Floer型理论。对于 $\mathrm{A}^{P_\alpha\mathcal{H}}$，我们无法设想这种理论应当是什么样，因为我们不知道如何将复函数解释为莫尔斯同调意义下的莫尔斯函数。由于可以将 $\mathrm{A}^{D}_{\mathcal{H};1}$ 和 $\mathrm{A}^{D}_{\mathcal{H};2}$ 转化为实值作用泛函，因此同样的疑虑并不适用于它们。不过，问题仍在于 $\mathrm{A}^{D}_{\mathcal{H};1}$ 或$-4i\hat{}R\cdot\mathrm{A}^{D}_{\mathcal{H};2}$的实部是否确实是合适的莫尔斯函数，以及由此得到的弗洛尔理论（如果存在）能否给出任何非平凡的结果。至少对于与 $\mathrm{A}^{D}_{\mathcal{H};1}$ 和 $\mathrm{A}^{D}_{\mathcal{H};2}$相关的（猜想中的）哈密顿 Floer 理论而言，它很可能只会给出平凡结果，因为所有轨线——按照上文所述、适用于 $\mathrm{A}^{D}_{\mathcal{H};1}$ 和 $\mathrm{A}^{D}_{\mathcal{H};2}$ 的意义而言是“周期的”——都必然是常数。

[51]在哈密顿弗洛尔理论中，人们只考虑周期轨道。

## D. 切丛 TM 和 T*M 上的近复结构

在这一部分，我们说明联络 $\nabla$ 如何在流形 $M$ 上诱导出其切丛 $TM$ 上的近复结构 $J_\nabla$（参见 [21]）。若 $\nabla = \nabla^g$ 是流形 $M$上半黎曼度量 $g$ 的列维-奇维塔联络，则 $\nabla^g$ 还通过丛同构 $G : TM \to T^*M,\ v \mapsto \iota_v g$在余切丛 $T^*M$上定义了近复结构$J^*_{\nabla^g}$。在这种情况下，$J^*_{\nabla^g}$与 $T^*M$上的典范辛形式 $\omega_{\mathrm{can}}$相容，即 $\omega_{\mathrm{can}}(\cdot,\ J^*_{\nabla^g}\cdot)$ 是 $T^*M$上的半黎曼度量，其符号差为 $(2s,\ 2t)$，其中 $(s,\ t)$ 是 $g$的符号差。此外，我们将看到，$J_{\nabla^g}$或等价地 $J^*_{\nabla^g}$可积，当且仅当 $\nabla^g$ 或等价地 $g$ 平坦。

设 $M$ 是维数为 $n$ 的光滑流形，$\pi_E : E \to M$ 是一个（光滑）向量丛，且 $\nabla$ 是向量丛 $E \to M$ 上的线性联络 [52] 。微分 $d\pi_E : TE \to TM$ 的（逐纤维）核给出 $TE$ 的垂直子丛 $VE$，而 $\nabla$ 定义了 $TE$ 的水平子丛 $HE$。事实上，水平子丛 $HE$ 的概念等价于 $E \to M$ 上的线性联络 $\nabla$ 的概念。为说明这一点，令 $K : TE = VE \oplus HE \to E$ 为垂直投影 [53] （关于 $K$ 的构造，参见 [22] ）。数据 $HE$ 和 $K$ 是等价的，因为给定水平子丛 $HE$，总能定义垂直投影 $K$；而给定映射 $K$，总能将水平丛 $HE$ 定义为 $K$ 的（逐纤维）核。同样，数据 $\nabla$ 和 $K$ 也是等价的。它们之间的关系由以下公式表示:

$$\nabla_X Y = K \circ dY(X) \quad \forall X \in TM,$$

其中，截面 $Y \in \Gamma(E)$ 被视为一个光滑映射 $Y : M \to E$。
现在注意到，映射 $f^\nabla := (d\pi_E, K) : TE \to TM \oplus E$ 是覆盖 $\pi_E : E \to M$ 的丛映射，也就是说，下面的图表

$$\begin{array}{ccc} TE & \xrightarrow{f^\nabla} & TM \oplus E \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{\pi_E} & M \end{array}$$

可交换，其中竖直箭头是向量丛 $TE$ 和 $TM \oplus E$ 的基点投影。逐纤维来看，丛映射 $f^\nabla$ 是一个线性同构。因此，$TE$ 与拉回丛 $\pi_E^*(TM \oplus E)$ 同构。

现在令 $E \to M$ 为 $M$ 的切丛 $TM \to M$，其基点投影为 $\pi \equiv \pi_{TM} : TM \to M$。于是，$f^\nabla$ 使我们能够通过“拉回”近复结构来定义流形 $TM$ 上的近复结构 $J_\nabla$

[52]有时会用“仿射联络”一词代替“线性联络”。[53]严格来说，映射 $\hat{} \ K : TE = VE \oplus HE \to VE$ 是垂直投影。为了从 $K$ 得到 $K\hat{}$，我们已经利用了 $E \to M$ 是一个向量丛这一事实，从而可以通过线性同构将 $VE$ 的纤维与 $E$ 的纤维识别起来

$$E_p \to V_w E, v \mapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (w + vt)$$

对于 $p \in M$ 和 $w \in E_p = \pi_E^{-1}(p)$。

$J_{TM\oplus TM} : TM \oplus TM \to TM \oplus TM$，$(w_1, w_2) \mapsto (w_2, -w_1)$，将向量丛$TM \oplus TM \to M$上的近复结构拉回到向量丛 $T(TM) \to TM$。具体而言，近复结构 $J_\nabla$ 完全由以下方程确定：

$$d\pi \circ J_\nabla = K; \quad K \circ J_\nabla = -d\pi.$$

接下来，我们希望用局部坐标表示 $J_\nabla$。为此，我们需要先对垂直子空间和水平子空间进行参数化。取一点 $p \in M$ 以及正规坐标$\psi = (x_1, \ldots\ldots, x_n) : U \to V \subset \mathbb{R}^n$，它们定义在 $(M, \nabla)$ 上且靠近 $p$；也就是说，取一个坐标图 $\psi$，其中所有经过原点 $\psi(p) = 0$ 的直线都是测地线。我们将 $T\psi = (\hat{x}_1, \ldots\ldots, \hat{x}_n, v_1, \ldots\ldots, v_n)$ 记作 $TM$ 在任意满足 $\pi(w) = p$的点 $w \in TM$ 附近的坐标，其定义如下：

$$(T\psi)^{-1}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n, v_1, \ldots, v_n) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} v_k \partial_{x_k}|_{\psi^{-1}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)}.$$

于是我们得到：

$$d\pi(\partial_{v_k}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \pi\left(\sum_{l\neq k}^{n} v_l \partial_{x_l} + (v_k + t)\partial_{x_k}\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \pi\left(\sum_{l=1}^{n} v_l \partial_{x_l}\right) = 0.$$

因此，向量场 $\partial_{v_1}, \ldots\ldots, \partial_{v_n}$ 张成垂直子空间。
为了对水平子空间进行参数化，我们考虑常数为 $c_k \in \mathbb{R}$的局部向量场 $X_c \coloneqq \sum_k c_k \partial_{x_k}$。我们得到：

$$\nabla_{\partial_{x_k}} X_c(p) = K \circ dX_c|_p(\partial_{x_k}|_p) = K\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(X_c \circ \psi^{-1}(\psi(p) + t\hat{e}_k)\right)\right) = K(\partial_{\hat{x}_k}|_{X_c(p)})$$

因此，对于任意 $w = X_c(p) \in T_pM$，向量 $\partial_{\hat{x}_1}|_w$、……、$\partial_{\hat{x}_n}|_w$ 张成水平子空间 $H(TM) = \ker(K)$，当且仅当方程

$$\nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j}(p) = 0$$

对所有 $i$、$j \in \{1$、……、$n\}$ 都成立。对于任意点 $p \in M$ 附近的所有正规坐标 $(x_1$、……、$x_n)$，最后一个方程成立，当且仅当 $\nabla$ 是对称的，即满足：

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

因此，以下我们将假设联络 $\nabla$ 是对称的。
总之，我们发现，在 $w \in T_pM$ 处，垂直子空间由向量 $\partial_{v_1}|_w$、……、$\partial_{v_n}|_w$ 张成；而对于 $p \in M$ 附近的坐标 $\psi = (x_1$、……、$x_n)$，在 $w \in T_pM$ 处，水平子空间由向量 $\partial_{\hat{x}_1}|_w$、……、$\partial_{\hat{x}_n}|_w$ 张成，其中这些坐标是以 $(M$、$\nabla)$ 为中心的正规坐标，且 $T\psi = (\hat{x}_1$、……、$\hat{x}_n$、$v_1$、……、$v_n)$。若将任意向量 $u \in T_w(TM)$ 及其像 $J_\nabla(u) \in T_w(TM)$ 表示为

$$u = \sum_{k=1}^{n} a_k \partial_{v_k}|_w + b_k \partial_{\hat{x}_k}|_w \quad \text{and} \quad J_\nabla(u) = \sum_{k=1}^{n} c_k \partial_{v_k}|_w + d_k \partial_{\hat{x}_k}|_w,$$

我们可以用 $a_k$ 和 $b_k$ 表示系数 $c_k$ 和 $d_k$：

$$-\sum_{k=1}^{n} b_k \partial_{x_k}|_p = -d\pi(u) = K \circ J_\nabla(u) = \sum_{k=1}^{n} c_k \partial_{x_k}|_p \quad \Rightarrow c_k = -b_k$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_k \partial_{x_k}|_p = K(u) = d\pi \circ J_\nabla(u) = \sum_{k=1}^{n} d_k \partial_{x_k}|_p \qquad \Rightarrow d_k = a_k,$$

其中我们用到了 $V(TM) = \ker(d\pi)$、 $H(TM) = \ker(K)$，以及 $d\pi(\partial_{\hat{x}_k}|_w) = \partial_{x_k}|_p = K(\partial_{v_k}|_w)$。由此得到：

$$J_\nabla(\partial_{v_k}|_w) = \partial_{\hat{x}_k}|_w; \quad J_\nabla(\partial_{\hat{x}_k}|_w) = -\partial_{v_k}|_w.$$

现在我们看到，在点 $w \in T_pM$ 附近的正规坐标中，近复结构 $J_\nabla$ 具有标准形式。然而，这并不意味着 $J_\nabla$ 可积，因为最后一个方程不一定对坐标图域 $TU$ 内的所有点 $w$ 都成立。当 $\nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} \equiv 0$ 时，也就是说，当 $\nabla$ 平坦时，情况便是如此[54]。

接下来，我们要将近复结构 $J_\nabla$ 从 $TM$ 转移到 $T^*M$。一般而言，我们可以任取一个丛同构 $TM \to T^*M$，它也因此是流形 $TM$ 与 $T^*M$ 之间的微分同胚，并利用这个微分同胚来传递 $J_\nabla$。然而，对于带有联络 $\nabla$ 的泛型流形 $M$，并不存在典范的丛同构选择。若 $M$ 配备了半黎曼度量$g$，且 $\nabla$ 是列维-奇维塔联络 $\nabla^g$，情况则有所不同。此时，我们可以选择 $G : TM \to T^*M, v \mapsto \iota_v g$ 作为丛同构，并通过以下方式在 $T^*M$ 上定义近复结构 $J^*_{\nabla^g}$

$$J^*_{\nabla^g} \coloneqq dG \circ J_{\nabla^g} \circ dG^{-1}.$$

同样，我们旨在用（$M, g$）在$p \in M$附近的正规坐标 $\psi = (x_1, \ldots, x_n)$表示 $J^*_{\nabla^g}$。注意，所选的正规坐标满足

$$g(p) = \sum_{k=1}^{s} dx_k|_p^2 - \sum_{k=s+1}^{n=s+t} dx_k|_p^2 \quad \text{and} \quad \partial_{x_k} g_{lm}(p) = 0,$$

其中（$s, t$）是 $g$的符号差。和之前一样，我们用记号$T\psi = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n, v_1, \ldots, v_n)$表示 $TM$ 上的诱导坐标。类似地，我们用记号 $T^*\psi = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$表示 $T^*M$上的诱导坐标：

$$(T^*\psi)^{-1}(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} p_k dx_k|_{\psi^{-1}(q_1, \ldots, q_n)}.$$

在这些坐标中， $G$ 为：

$$T^*\psi \circ G \circ (T\psi)^{-1}(0, \ldots, 0, v_1, \ldots, v_n) = (0, \ldots, 0, v_1, \ldots, v_s, -v_{s+1}, \ldots, -v_n).$$

[54]此外，如果 $\nabla = \nabla^g$ 是某个半黎曼度量 $g$的列维-奇维塔联络，那么这就成为一个“当且仅当”命题，即 $J_{\nabla^g}$ 可积，当且仅当 $\nabla^g$ 平坦，当且仅当 $g$ 平坦（Michel Grueneberg [23], 证明了黎曼度量情形下的这一命题，但同样的证明也适用于半黎曼度量）。

结合 $\partial_{x_k} g_{lm}(p) = 0$，可得：

$$dG|_w(\partial_{\hat{x}_k}|_w) = \partial_{q_k}|_{G(w)}, \quad dG|_w(\partial_{v_k}|_w) = \begin{cases} \partial_{p_k}|_{G(w)} \text{ for } 1 \le k \le s \\ -\partial_{p_k}|_{G(w)} \text{ for } k > s \end{cases} \qquad \forall w \in T_pM.$$

这使我们能够用坐标计算点 $\alpha \in T_p^*M$ 处的 $J_{\nabla^g}^*$：

$$J_{\nabla^g}^*(\partial_{q_k}|_\alpha) = -\partial_{p_k}|_\alpha; \quad J_{\nabla^g}^*(\partial_{p_k}|_\alpha) = \partial_{q_k}|_\alpha \quad (1 \le k \le s),$$
$$J_{\nabla^g}^*(\partial_{q_k}|_\alpha) = \partial_{p_k}|_\alpha; \quad J_{\nabla^g}^*(\partial_{p_k}|_\alpha) = -\partial_{q_k}|_\alpha \quad (k > s).$$

同样，这并不意味着 $J_{\nabla^g}^*$ 是可积的，因为上述方程仅对点 $\alpha \in T_p^*M$ 成立，并不一定在整个坐标图域 $T^*U$ 上成立。然而， $J_{\nabla^g}^*$ 可积，当且仅当 $\nabla^g$ 平坦；也就是说，当且仅当 $g$ 平坦（参见 [23]）。

我们之所以对近复结构 $J_{\nabla^g}^*$ 感兴趣，是因为有一个有趣的事实： $J_{\nabla^g}^*$ 与定义在 $T^*M$ 上的典范辛形式 $\omega_{\text{can}}$ 自然相容，这一点很容易验证：在上文 $T^*M$ 的坐标 $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ 中， $\omega_{\text{can}}$ 可表示为：

$$\omega_{\text{can}}|_{T^*U} = \sum_{k=1}^{n} dp_k \wedge dq_k.$$

因此， $\omega_{\text{can}}(\cdot, J_{\nabla^g}^* \cdot)$ 是定义在 $T^*M$ 上、符号差为 $(2s, 2t)$ 的半黎曼度量：

$$\omega_{\text{can}}|_\alpha(\cdot, J_{\nabla^g}^* \cdot) = \sum_{k=1}^{s} dq_k|_\alpha^2 + dp_k|_\alpha^2 - \sum_{k=s+1}^{n} dq_k|_\alpha^2 + dp_k|_\alpha^2 \quad \forall \alpha \in T_pM.$$

由于在任意 $p \in M$ 附近都能找到正规坐标，我们证明了以下定理：

**定理5** (关于 $TM$和 $T^*M$ 上的近复结构)。 设 $M$ 是一个带有联络 $\nabla$ 的光滑 $n$ 维流形。则切丛 $TM$ 上存在唯一的近复结构 $J_\nabla$ ，使得

$$d\pi \circ J_\nabla = K; \quad K \circ J_\nabla = -d\pi,$$

其中 $\pi : TM \to M$ 是 $TM$ 的基点投影，而 $K : T(TM) \to TM$ 是对应于 $\nabla$ 的垂直投影。若 $\nabla$ 是对称的，则 $J_\nabla$ 可表示为

$$J_\nabla(\partial_{v_k}|_w) = \partial_{\hat{x}_k}|_w; \quad J_\nabla(\partial_{\hat{x}_k}|_w) = -\partial_{v_k}|_w,$$

其中 $w \in TM$ 是一个点， $\psi = (x_1, \dots, x_n)$ 是 $(M, \nabla)$ 在 $p = \pi(w)$ 附近的正规坐标，而 $T\psi = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n, v_1, \dots, v_n)$ 是 $TM$ 上的诱导坐标。此外，若 $\nabla$ 是平坦的，则 $J_\nabla$ 是可积的。

若 $\nabla = \nabla^g$ 是 $M$ 上符号差为$(s,t)$的半黎曼度量 $g$ 的列维-奇维塔联络，则存在一个（典范的）近复结构 $J_{\nabla^g}^*$定义在 $T^*M$上，使得$\omega_{can}(\cdot, J_{\nabla^g}^* \cdot)$是 $T^*M$上符号差为$(2s, 2t)$的半黎曼度量，其中 $\omega_{can}$是 $T^*M$上的典范辛形式。用坐标表示， $J_{\nabla^g}^*$为：

$$J_{\nabla^g}^*(\partial_{q_k}|_\alpha) = -\partial_{p_k}|_\alpha; \quad J_{\nabla^g}^*(\partial_{p_k}|_\alpha) = \partial_{q_k}|_\alpha \quad (1 \le k \le s),$$
$$J_{\nabla^g}^*(\partial_{q_k}|_\alpha) = \partial_{p_k}|_\alpha; \quad J_{\nabla^g}^*(\partial_{p_k}|_\alpha) = -\partial_{q_k}|_\alpha \quad (k > s),$$

其中 $\alpha \in T_p^*M$是一个点， $\psi = (x_1, \ldots, x_n)$是 $p \in M$附近$(M, g)$的正规坐标，而 $T^*\psi = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$是 $T^*M$的诱导坐标。此外， $J^*_{\nabla^g}$可积当且仅当 $g$ 平坦。

## E. 全纯列维-奇维塔联络

在本部分中，我们介绍复流形 $(X, J)$ 上的（线性/仿射）全纯联络概念（参见 [24] 中第 4.2 节末尾）。特别地，我们定义由全纯度量 $h = h_R + ih_I$ 在 $(X, J)$ 上诱导的全纯列维-奇维塔联络 $\nabla^h$。我们证明，实部和虚部 $h_R$ 和 $h_I$ 的标准 Levi-Civita 联络 $\nabla^{h_R}$ 和 $\nabla^{h_I}$ 彼此相同；全纯列维-奇维塔联络 $\nabla^h$ 就是 $\nabla^{h_R} = \nabla^{h_I}$ 的复化；并且 $h$ 的全纯正规坐标也是 $h_R$ 的正规坐标。

我们首先定义复流形 $(X, J)$ 上的全纯联络 $\nabla$（参见 [24]）：

**定义 16 (**全纯联络**).** 设 $X$ 是一个复流形，其复结构为 $J$，并设 $\Gamma(T^{(1,0)}U)$ 是任意开子集 $U \subset X$ 上全纯向量场的复向量空间。若 $\nabla$ 是一个集合，则称其为 $(X, J)$ 上的全纯联络，当且仅当它是一个集合

$$\{{}^U\nabla : \Gamma(T^{(1,0)}U) \times \Gamma(T^{(1,0)}U) \to \Gamma(T^{(1,0)}U) \mid U \subset X \text{ open}\}$$

满足以下条件的 $\mathbb{C}$-双线性映射：对于所有开子集 $U' \subset U \subset X$、所有全纯函数 $f : U \to \mathbb{C}$ 以及所有全纯向量场 $X, Y \in \Gamma(T_{(1,0)}U)$：

*(1)* 第一分量张量性：

$${}^U\nabla_{fX}Y = f\,{}^U\nabla_X Y.$$

*(2)* 第二分量中的莱布尼茨法则：

$${}^U\nabla_X fY = X(f)Y + f\,{}^U\nabla_X Y.$$

*(3)* 预层性质：

$$({}^U\nabla_X Y)|_{U'} = {}^{U'}\nabla_{X|_{U'}} Y|_{U'}.$$

**注 26 (**预层性质**).** （光滑）流形 $M$[55] 上（光滑）联络 $\nabla$ 的标准定义是全局表述的，通常不包括预层性质，因为在这些情况下，（光滑）单位分解与性质（*1*）和（*2*）结合即可推出预层性质。然而，复流形上不存在全纯单位分解，因此我们需要手动施加性质（*3*）。否则，零映射会是复环面 $\mathbb{C}^n/\Gamma$（$\Gamma$：格）上的全纯联络，因为此时（全局）莱布尼茨法则简化为线性。

与实情形一样，全纯联络可以在局部计算：

[55] 具体而言，向量丛 $TM \to M$ 上的线性/仿射联络 $\nabla$。

**命题 25** ($\nabla$ 是局部的)。 设$(X,J)$ 是一个带有全纯联络 $\nabla$ 的复流形。对于任意点 $p\in X$、任意包含 $p$ 的开邻域 $U'\subset U\subset X$，以及其上的任意全纯向量场 $X,Y\in\Gamma(T_{(1,0)}U)$，表达式 ${}^U\nabla_X Y(p)$ 完全由 $X(p)$ 和 $Y|_{U'}$ 确定。

证明。 采用上文的记号，则:

$$ {}^U\nabla_X Y(p) = ({}^U\nabla_X Y)|_{U'}(p) \overset{(3)}{=} {}^{U'}\nabla_{X|_{U'}} Y|_{U'}(p) $$

因此， ${}^U\nabla_X Y(p)$只依赖于 $X|_{U'}$和 $Y|_{U'}$。通过转到$X$在 $p$附近的全纯坐标图，并利用性质（1），我们看到 ${}^U\nabla_X Y(p)$只依赖于 $X(p)$和$Y|_{U'}$。

□

接下来，我们要定义复流形$(X,\ J)$上全纯度量 $h$的全纯 Levi-Civita 联络 $\nabla^h$ 。与实情形一样， $\nabla^h$应当是 $X$ 上唯一一个无挠且与 $h$相容的全纯联络。因此，我们首先需要定义全纯联络 $\nabla$的挠率 $T$:

**定义 17** （挠率 $T$）。 设（$X,\ J$）是带有全纯联络 $\nabla$的复流形。 $\nabla$ 的挠率[56] $T$ 是由下式定义的一组映射

$$ \{{}^U T:\Gamma(T^{(1,0)}U)\times\Gamma(T^{(1,0)}U)\to\Gamma(T^{(1,0)}U)\mid U\subset X \text{ open}\} $$

定义为

$$ {}^U T(X,Y) \coloneqq {}^U\nabla_X Y - {}^U\nabla_Y X - [X,Y] \quad \forall X,Y\in\Gamma(T^{(1,0)}U)\ \forall U\subset X \text{ open}. $$

称$\nabla$ 为无挠，当且仅当对所有开子集 $U\subset X$， ${}^U T\equiv 0$ 成立。

**注** ($T$ 是一个张量)。 $T$ 具有双张量性，并满足预层性质。

我们还需要说明全纯联络 $\nabla$ 与全纯度量 $h$相容意味着什么:

**定义 18** (度量相容性)。 设$(X,J)$ 为带有全纯联络 $\nabla$的复流形。此外，设 $h$ 是 $X$上的全纯度量。 $\nabla$ 和 $h$ 的度量相容张量 $\nabla h$ 是由以下映射组成的集合

$$ \{{}^U\nabla h:\Gamma(T^{(1,0)}U)^3\to\mathcal{O}_U\coloneqq\{f:U\to\mathbb{C}\mid f \text{ holomorphic}\}\mid U\subset X \text{ open}\} $$

定义如下

$$ {}^U\nabla h(X,Y,Z)\coloneqq X(h|_U(Y,Z)) - h|_U({}^U\nabla_X Y,Z) - h|_U(Y,{}^U\nabla_X Z) $$

对所有全纯向量场 $X,Y,Z\in\Gamma(T_{(1,0)}U)$ 以及所有开子集 $U\subset X$。我们称 $\nabla$ 与 $h$ 相容，当且仅当对每个开子集 $U\subset X$，都有 ${}^U\nabla h\equiv 0$ 。

[56]有时也称为挠率张量或挠率（张量）场

**注** ($\nabla h$ 是一个张量。)。 $\nabla h$ 是三重张量性的，并满足预层性质。

现在我们可以定义全纯 Levi-Civita 联络 $\nabla^h$:

**引理 9** (列维-奇维塔联络 $\nabla^h$)。 设 $(X, J)$ 是一个复流形，配有全纯度量 $h$。那么，存在唯一一个全纯联络 $\nabla^h$ ，作用于$X$，即全纯列维-奇维塔联络；它无挠且与$h$相容。

证明。 沿用上文的记号。通过运用 Koszul 公式，证明过程与实情形非常相似。

**唯一性：** 设 $\nabla^{h,1}$ 和 $\nabla^{h,2}$ 是两个无挠且与 $h$相容的全纯联络。与实情形一样，可以证明 $\nabla^{h,1}$ 和 $\nabla^{h,2}$ 满足 Koszul 公式（$U \subset X$开； $X, Y, Z \in \Gamma(T_{(1,0)}U)$）：

$$\begin{aligned} 2h|_U({}^U\nabla^{h,1}_X Y, Z) &= X(h|_U(Y,Z)) + Y(h|_U(Z,X)) - Z(h|_U(X,Y)) \\ &\quad + h|_U([X,Y],Z) - h|_U([Y,Z],X) - h|_U([X,Z],Y) \\ &= 2h|_U({}^U\nabla^{h,2}Y, Z). \end{aligned}$$

现在设 $U \subset X$是任意开子集，且 $X, Y \in \Gamma(T_{(1,0)}U)$ 是 $U$上的两个全纯向量场。任取一点 $p \in U$ 及一个全纯坐标图 $(z_1, \ldots, z_n) : U' \to V \subset \mathbb{C}^n$，它在 $p$附近定义于$X$，且满足 $U' \subset U$。由 $\nabla^{h,i}$的预层性质可得 $(i \in \{1, 2\})$:

$${}^U\nabla^{h,i}_X Y(p) = {}^{U'}\nabla^{h,i}_{X|_{U'}} Y|_{U'}(p).$$

现在，我们在上面的公式中（在 $p$ 处取值）令 $Z|_{U'} = \partial_{z_j} (j \in \{1, \ldots, n\})$，并利用前一个方程得到:

$$h|_{U'}({}^{U'}\nabla^{h,1}_{X|_{U'}} Y|_{U'}, \partial_{z_j})(p) = h|_{U'}({}^{U'}\nabla^{h,2}_{X|_{U'}} Y|_{U'}, \partial_{z_j})(p).$$

由于最后一个方程对每个 $j \in \{1, \ldots, n\}$ 都成立，我们可以结合前两个方程得到:

$${}^U\nabla^{h,1}_X Y(p) = {}^{U'}\nabla^{h,1}_{X|_{U'}} Y|_{U'}(p) = {}^{U'}\nabla^{h,2}_{X|_{U'}} Y|_{U'}(p) = {}^U\nabla^{h,2}_X Y(p).$$

由于对每个 $p \in U$ 都可以重复这一论证，因此得到:

$${}^U\nabla^{h,1}_X Y = {}^U\nabla^{h,2}_X Y.$$

同样，对所有 $X, Y \in \Gamma(T_{(1,0)}U)$ 以及任意开子集 $U \subset X$，我们都可以重复这一论证，从而得到 $\nabla^{h,1} = \nabla^{h,2}$。

**存在性：** Koszul 公式为我们给出了一个表达式

$$h|_U({}^U\nabla^h_X Y, Z).$$

起初尚不清楚这个表达式是否能完全确定 ${}^{U}\nabla^{h}_{X}Y$，因为 $U$可能“太大”，以至于无法容纳足够多线性无关的全纯向量场$Z$。不过，根据预层性质，我们总可以缩小 $U$ 。特别是，如果将$U$ 缩小为一个坐标图域，那么 $U$ 就有足够多的全纯向量场。因此，对于任意点 $p \in U$，我们都可以通过该点 $p$附近一个较小坐标图中的 Koszul 公式来定义 ${}^{U}\nabla^{h}_{X}Y(p)$。由于 Koszul 公式与坐标图的选取无关，由此得到的全纯联络 $\nabla^{h}$ 是良定义的。容易验证，以这种方式定义的 $\nabla^{h}$ 是无挠的，并且与 $h$相容。

□

接下来，我们要考虑全纯联络的正规坐标。为此，我们首先需要定义测地线:

**定义19 (**沿 $\nabla/dz$的复导数 $\gamma$与测地线**).** 设 $(X, J)$ 是一个带有全纯联络 $\nabla$ 的复流形。此外，设 $D \subset \mathbb{C}$ 是一个开且连通的子集， $\gamma : D \to X$ 是一条全纯曲线， $Y$ 是沿 $\gamma$ 的全纯向量场，即拉回丛 $\gamma^{*}T^{(1,0)}X$ 的一个全纯截面。与实情形类似，我们可以定义沿 $\gamma$ 的复导数 $\nabla/dz$ 。在 $X$ 的全纯坐标图 $\phi = (z_1, \ldots, z_n) : U' \to V$，中， $\nabla/dz$ 定义如下:

$$\left(\frac{\nabla}{dz}Y\right)_{j}(z) \coloneqq Y'_{j}(z) + \sum_{k,l=1}^{n} \gamma'_{k}(z) \cdot Y_{l}(z) \cdot \Gamma^{j}_{kl}(\gamma(z)),$$

其中，*“'”*表示通常的复导数， ${}^{U'}\nabla_{\partial_{z_k}}\partial_{z_l} =: \sum_{j} \Gamma^{j}_{kl} \cdot \partial_{z_j}$ 是 $\nabla$ 的全纯 ***Christoffel***符号 。若 $\nabla/dz\ \gamma' \equiv 0$，则称 $\gamma$ 为 $\nabla$ 的一条测地线 。

以下关于 $\nabla$ 的测地线存在唯一性的结果令人想起实情形:

命题*26*（测地线的存在唯一性）。设 *$(X, J)$* 是一个带有全纯联络 $\nabla$ 的复流形。此外，设 $p \in X$ 和 $v \in T^{(1,0)}_{p}X$。那么，对于每个$z_0 \in \mathbb{C}$，都存在一个开且连通的邻域 $D \subset \mathbb{C}$ ，它包含 $z_0$ ，以及一条 $\nabla$ 的测地线$\gamma : D \to X$ ，使得 $\gamma(z_0) = p$ 且 $\gamma'(z_0) = v$。此外，若 $\gamma_1$、$\gamma_2 : D \to X$ 是 $\nabla$ 的两条测地线，满足 $\gamma_1(z_0) = \gamma_2(z_0) = p$ 且 $\gamma'_1(z_0) = \gamma'_2(z_0) = v$ ，其中 $D \subset \mathbb{C}$ 是 $z_0$ 的任意开且连通邻域，则 $\gamma_1 \equiv \gamma_2$。

证明。 我们注意到，测地线方程局部上是一个二阶复微分方程。因此，通过引入新变量 $v_i \coloneqq \gamma'_i$，将方程数量加倍，可以把二阶微分方程改写为一阶微分方程。由于测地线方程没有显式的时间依赖性（$z$ 依赖性），我们可以将由此得到的一阶微分方程解释为全纯向量场的积分曲线方程。测地线的存在唯一性结果现在可由全纯向量场积分曲线的存在唯一性结果推出（参见命题 2）。

还有一种证明唯一性的替代方法：在 $p$ 附近的全纯坐标图中写出测地线方程，并将 $\gamma_1$、$\gamma_2$ 的坐标在$z_0$处展开为幂级数。这样，测地线方程就成为关于

幂级数系数的递归公式。此外，我们发现，只要固定每个幂级数的前两项，这个递归公式就能完全确定所有系数。因此，固定$\gamma_1(z_0) = \gamma_2(z_0) = p$ 以及 $\gamma_1'(z_0) = \gamma_2'(z_0) = v$，就能唯一确定幂级数的系数。其余部分由恒等定理即可推出。 □

**注 27** (测地线对初始值全纯依赖)。 命题 *2* 还表明，具有 $\gamma(z_0) = p$ 和 $\gamma'(z_0) = v$的全纯联络 $\nabla$ 的测地线 $\gamma$ 关于 $z_0$、 $v$和 $p$全纯依赖。

现在我们可以利用 $\nabla$ 的测地线来定义 $\nabla$的指数映射:

**定义 20** (指数映射)。 设 $(X, J)$ 是一个带有全纯联络 $\nabla$ 的复流形，且 $p \in X$ 是任意一点。 $\nabla$的指数映射，$\exp_p : V \to X$ 在 0的某个合适开邻域 $V \subset T_p^{(1,0)}X$ 上定义如下:

$$\exp_p(v) \coloneqq \gamma_p^v(1),$$

其中 $\gamma_p^v$是 $\nabla$的一条测地线，满足 $\gamma_p^v(0) = p$以及 $\gamma_p^{v\prime}(0) = v$。这里，取足够小的 $V \subset T_{(1,0)_p} X$，使得 $\gamma_p^v(1)$ 有唯一确定的定义，且不受单值化效应影响（参见第 *2.2* 小节）。例如，取 $V \subset T_p^{(1,0)}X$，使得对于每个 $v \in V$，测地线 $\gamma_p^v : D \to X$ 的定义域都可以取为 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$。

**注 28** （指数映射是全纯的）。 根据前一条注，全纯联络 $\nabla$ 的指数映射$\exp_p$ 是全纯的。

现在我们可以缩小指数映射的定义域，从而得到一个双全纯映射:

**命题 27.** 设$(X, J)$ 是一个带有全纯联络 $\nabla$ 的复流形，且 $p \in X$ 是任意一点。那么，存在一个开邻域 $V \subset T_p^{(1,0)}X$ 包含0，使得$\exp_p : V \to \exp_p(V)$ 是一个双全纯映射。

证明。 对 $d\exp_p|_0 = \mathrm{id}_{T^{1,0}_p X}$应用全纯反函数定理。 □

最后，我们用这个双全纯映射来定义正规坐标:

定义 *21*（正规坐标）。设 *(X, J)* 是带有全纯联络 $\nabla$ 的复流形，且 $p \in X$ 是任意一点。此外，选取一个 $\mathbb{C}$-线性同构$l : \mathbb{C}^n \to T_{(1,0)_p} X$。我们称全纯坐标图 $l^{-1} \bigcirc \exp_p^{-1}$的坐标 $(z_1, \ldots, z_n)$ 为点 $p$附近 $(X, \nabla)$ 的全纯正规坐标。如果 $\nabla = \nabla^h$ 是复流形 $X$上全纯度量 $h$ 的列维-奇维塔联络，我们还要求向量$v_1 \coloneqq l(\hat{e}_1) \ldots, v_n \coloneqq l(\hat{e}_n)$ $(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n$: $\mathbb{C}^n$ 的标准基$)$ 满足:

$$h(v_i, v_j) = \delta_{ij}.$$

**注**。 请注意，在复数情形下，所有非退化对称双线性形式都是同构的；而在实情形下，两个非退化对称双线性形式当且仅当它们具有相同的符号差时才同构。

全纯正规坐标满足与其实坐标类似的性质:

**命题28** （全纯正规坐标的性质）。设（$X, J$）是一个带有全纯度量 $h$ 及相应列维-奇维塔联络 $\nabla^h$的复流形。此外，设 $p \in X$为任意一点， $\phi = (z_1, \ldots, z_n) : U \to V$是（$X$, $\nabla^h$）在 $p$附近的全纯正规坐标。那么，在坐标（$z_1, \ldots, z_n$）下，我们有：

*(1)* $h_{ij}(p) = \delta_{ij}$
*(2)* $\partial_{z_k} h_{ij}(p) = 0$*(3)* $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$

证明。我们只证明 (3)，因为 (1) 显然成立，而 (2) 可利用度量相容张量的消失由 (3) 推出。对于 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$，定义曲线$\gamma(z) \coloneqq \phi^{-1}(z \cdot x)$。根据全纯正规坐标的定义，$\gamma$ 是 $\nabla^h$ 的一条测地线，且 $\gamma'(0) = d\phi^{-1}|_0(x)$。在坐标 $(z_1, \ldots, z_n)$ 中，测地线方程写作：

$$\gamma_j''(z) + \sum_{k,l=1}^{n} \Gamma_{kl}^j(\gamma(z))\gamma_k'(z)\gamma_l'(z) = 0$$

对于 $z = 0$，得到：

$$\sum_{k,l=1}^{n} \Gamma_{kl}^j(p) x_k x_l = 0$$

最后一个方程对任意 $x \in \mathbb{C}^n$ 都成立，因此它迫使 $\Gamma_{kl}^j(p) + \Gamma_{lk}^j(p) = 0$。由于 $\nabla^h$ 是对称的，$\Gamma_{kl}^j(p)$ 关于 $k$ 和 $l$ 对称。这意味着 $2\Gamma_{kl}^j(p) = 0$，从而证明得证。

□

我们的下一个目标是建立全纯 Levi-Civita 联络 $\nabla^h$ 与标准 Levi-Civita 联络 $\nabla^{h_R}$ 和 $\nabla^{h_I}$之间的联系。具体而言，我们旨在建立复流形 $(X, \nabla^h)$ 上的全纯正规坐标与 $(X, \nabla^{h_R})$ 和 $(X, \nabla^{h_I})$ 上的标准正规坐标之间的联系，其中度量为全纯度量 $h = h_R + ih_I$。为此，我们先证明以下命题：

**命题 29.** 设$(X, J)$是一个带有全纯度量 $h = h_R + ih_I$及相应列维-奇维塔联络 $\nabla^h$、 $\nabla^{h_R}$ 和 $\nabla^{h_I}$的复流形。此外，设 $p \in X$为任意一点，且 $\phi = (z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, z_n = x_n + iy_n) : U \to V$是$(X, \nabla^h)$ 在 $p$附近的全纯正规坐标。那么：

*(1)* $h_R|_p(\partial_{x_i}|_p, \partial_{x_j}|_p) = -h_R|_p(\partial_{y_i}|_p, \partial_{y_j}|_p) = \delta_{ij}$, $h_I|_p(\partial_{x_i}|_p, \partial_{y_j}|_p) = \delta_{ij}$
$h_R|_p(\partial_{x_i}|_p, \partial_{y_j}|_p) = h_I|_p(\partial_{x_i}|_p, \partial_{x_j}|_p) = h_I|_p(\partial_{y_i}|_p, \partial_{y_j}|_p) = 0$

（*2*） $h_R$和 $h_I$的所有导数在坐标$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$中的 $p$处均为零 .

*(3)* 在坐标$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$中，$\nabla^{h_R}$ 和 $\nabla^{h_I}$ 的所有 *Christoffel*符号在 $p$ 处都为零。

证明。 (1) 由前一个命题的 (1) 得出:

$$h_R|_p + ih_I|_p = h|_p = \sum_{j=1}^{n} dz_j^2|_p = \sum_{j=1}^{n} \left(dx_j^2|_p - dy_j^2|_p\right) + i\sum_{j=1}^{n} \left(dx_j|_p \otimes dy_j|_p + dy_j|_p \otimes dx_j|_p\right).$$

(2) 由前一个命题的 (2) 以及分量 $h_{ij}$ 是全纯这一事实推出，即 $\partial_{\bar{z}_k} h_{ij}(p) = 0$。

(3) 由当前命题的 (2) 以及标准列维-奇维塔联络的 Christoffel 符号的 Koszul 公式推出。 □

上一个命题表明，列维-奇维塔联络 $\nabla^{h_R}$ 和 $\nabla^{h_I}$ 描述的是同一个联络。

**推论4** $(\nabla^{h_R} = \nabla^{h_I})$。 设$(X, J)$是带有全纯度量 $h = h_R + ih_I$ 的复流形。那么，（标准）列维-奇维塔联络 $\nabla^{h_R}$ 和 $\nabla^{h_I}$ 重合，即 $\nabla^{h_R} = \nabla^{h_I}$。

证明。 这是上一个命题的直接推论：对于每个点 $p \in X$，都存在坐标，使得 $\nabla^{h_R}$ 和 $\nabla^{h_I}$ 的 Christoffel 符号在 $p$ 处相同，因此，根据 Christoffel 符号的定义， $\nabla^{h_R} = \nabla^{h_I}$。 □

我们稍后会看到，全纯 Levi-Civita 联络 $\nabla^h$ 可以视为联络 $\nabla^{h_R} = \nabla^{h_I}$的复化。在准确表述这一点之前，我们首先需要考察复结构 $J$ 与联络 $\nabla^h$ 和 $\nabla^{h_R} = \nabla^{h_I}$之间的相互作用。为此，我们引入以下定义:

**定义22** （复联络）。设 $X$ 是带有近复结构 $J$的光滑流形。若联络 $\nabla : \Gamma（TX） \times \Gamma（TX） \to \Gamma（TX）$关于 $X$复，则称其相对于 $J$ 为复的，当且仅当 $\nabla J \equiv 0$。

**注**（ $\nabla J$的定义）。回顾一下，对于所有 $X$、$Y \in \Gamma（TX）$，都有:

$$(\nabla_X J)(Y) = \nabla_X(J(Y)) - J(\nabla_X Y).$$

我们发现， $\nabla^{h_R} = \nabla^{h_I}$ 是复的:

**命题30** （$\nabla^{h_R} = \nabla^{h_I}$是复的）。设（$X, J$）是一个带有全纯度量 $h = h_R + ih_I$的复流形。那么，联络 $\nabla^{h_R} = \nabla^{h_I}$相对于$J$是复的。

证明。 我们需要证明:

$$(\nabla_X^{h_R} J)(Y) = \nabla_X^{h_R}(J(Y)) - J(\nabla_X^{h_R} Y) = 0 \quad \forall X, Y \in \Gamma(TX).$$

对象 $(\nabla_X^{h_R} J)(Y)$ 关于 $X$和 $Y$是张量性的，因此，只需在任意一点 $p \in X$ 处，对与该点附近的全纯正规坐标 $(z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, z_n = x_n + iy_n)$ 相对应的切向量场计算 $\nabla^{h_R} J$。根据命题 29，我们得到:

$$\nabla^{h_R}_{\partial_{x_i}} \left(J(\partial_{x_j})\right)(p) = \nabla^{h_R}_{\partial_{x_i}} \partial_{y_j}(p) = 0, \quad \nabla^{h_R}_{\partial_{x_i}} \left(J(\partial_{y_j})\right) = \ldots$$
$$J(\nabla^{h_R}_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j})(p) = 0, \quad J(\nabla^{h_R}_{\partial_{x_i}} \partial_{y_j})(p) = \ldots$$

因此， $\nabla^{h_R} J = 0$。 □

在继续探究 $\nabla^h$ 和 $\nabla^{h_R} = \nabla^{h_I}$之间的关系之前，我们先花一点时间理解联络为复的含义。为此，我们首先注意到，光滑流形 $X$ 上的每个联络 $\nabla : \Gamma(TX) \times \Gamma(TX) \to \Gamma(TX)$，都可以通过 $\mathbb{C}$-线性将其复化，也就是说，可以将其转化为一个作用于光滑复向量场的联络$\nabla : \Gamma(T_{\mathbb{C}}X) \times \Gamma(T_{\mathbb{C}}X) \to \Gamma(T_{\mathbb{C}}X)$。现在，我们可以将“复”这一性质重新表述如下：

**命题 31.** 设 $X$ 是带有近复结构 $J$的光滑流形。联络 $\nabla : \Gamma(TX) \times \Gamma(TX) \to \Gamma(TX)$ 是复的，当且仅当其复化$\nabla : \Gamma(T_{\mathbb{C}}X) \times \Gamma(T_{\mathbb{C}}X) \to \Gamma(T_{\mathbb{C}}X)$ 满足：

$$\nabla_X Y \in \Gamma_{C^\infty}(T^{(1,0)}X) \quad \forall X \in \Gamma(T_{\mathbb{C}}X)\ \forall Y \in \Gamma_{C^\infty}(T^{(1,0)}X),$$

其中 $\Gamma_{C^\infty}(T^{(1,0)}X)$ 是 $T^{(1,0)}X$的光滑截面空间。

证明. “⇒”：设 $X \in \Gamma(T_{\mathbb{C}}X)$ 和 $Y \in \Gamma_{C^\infty}(T_{(1,0)}X)$，则 $Y = 1/2(\hat{Y} - iJ(\hat{Y}))$，其中 $\hat{}$ 是 $X$ 上的唯一实向量场 $Y$。因此，我们得到：

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}\left(\nabla_X \hat{Y} - i\nabla_X(J(\hat{Y}))\right) \overset{\nabla J=0}{=} \frac{1}{2}\left(\nabla_X \hat{Y} - iJ(\nabla_X \hat{Y})\right) \in \Gamma_{C^\infty}(T^{(1,0)}X).$$

“⇐”：设 $X \in \Gamma(TX)$ 和 $\hat{Y} \in \Gamma(TX)$，则 $Y \coloneqq 1/2(\hat{Y} - iJ(\hat{Y})) \in \Gamma_{C^\infty}(T_{(1,0)}X)$。因此，我们得到 $\nabla_X Y \in \Gamma_{C^\infty}(T_{(1,0)}X)$。由于

$$\mathrm{Re}\,(\nabla_X Y) = \frac{1}{2}\nabla_X \hat{Y},$$

我们必须有：

$$\mathrm{Im}\,(\nabla_X Y) = -\frac{1}{2}J(\nabla_X \hat{Y}).$$

总之，这给出：

$$\frac{1}{2}\nabla_X(\hat{Y} - iJ(\hat{Y})) = \frac{1}{2}\left(\nabla_X \hat{Y} - iJ(\nabla_X \hat{Y})\right)$$

因此：

$$\nabla_X J(\hat{Y}) = J(\nabla_X \hat{Y}) \ \Rightarrow\ \nabla J = 0$$

□

现在我们可以看到，乍一看，复联络和全纯联络的定义非常相似。复联络 $\nabla : \Gamma(TX) \times \Gamma(TX) \to \Gamma(TX)$ 可以视为一个映射 $\nabla : \Gamma_{C^\infty}(T_{(1,\ 0)}X) \times \Gamma_{C^\infty}(T^{(1,0)}X) \to \Gamma_{C^\infty}(T_{(1,\ 0)}X)$（通过复化），满足定义 16 中的性质（1）、（2）和（3）[57]，其中所有向量

[57]利用光滑单位分解（参见注 26），我们可以确认复联络满足性质 (3)。

场 $X$ 和 $Y$ 都取为光滑复向量场，所有函数 $f$ 都取为光滑的 $\mathbb{C}$值函数。复联络与全纯联络的主要区别在于，全纯联络仅定义在可积的 $J$上，并将全纯向量场映射为全纯向量场；而复联络则定义在一般的几乎复流形（$X$，$J$）上。特别是，如果 $J$不可积，就没有全纯向量场这一概念。即使 $J$ 可积，也不要求复联络将全纯向量场映射为全纯向量场。从这个意义上说，全纯联络的概念比复联络的概念限制更多。

现在我们具备了所有工具，可以证明 $\nabla^h$ 是 $\nabla^{h_R} = \nabla^{h_I}$ 的复化 ：

**引理 10** （$\nabla^h = \nabla^{h_R} = \nabla^{h_I}$）。设（$X, J$）是一个带有全纯度量 $h = h_R + ih_I$ 的复流形。那么，全纯 ***Levi-Civita*** 联络 $\nabla^h$ 是标准 ***Levi-Civita*** 联络 $\nabla^{h_R} = \nabla^{h_I}$ 的复化 [58]，即：

$$^U\nabla^h_X Y = \nabla^{h_R|_U}_X Y = \nabla^{h_I|_U}_X Y \quad \forall X, Y \in \Gamma(T^{(1,0)}X)\ \forall U \subset X \ \textit{open.}$$

证明。对于光滑实向量场 $X$，$Y$，$Z \in \Gamma(TX)$，我们可以将这些项

$$2h_R\left(\nabla^{h_R}_X Y, Z\right) \quad \text{and} \quad 2h_I\left(\nabla^{h_I}_X Y, Z\right)$$

借助引理 9 证明中所用的 Koszul 公式表示出来。我们注意到，如果按照 $\mathbb{C}$ 对 $X$，$Y$，$Z$ 的线性性，将上述表达式和 Koszul 公式复化，那么 Koszul 公式对于光滑复向量场 $X$，$Y$，$Z \in \Gamma(T_{\mathbb{C}}X)$ 也成立。特别地，对于全纯向量场 $X$，$Y$，$Z \in \Gamma(T^{(1,0)}X)$，可得：

$$\begin{aligned} 2h(\nabla^{h_R}_X Y, Z) &= 2h_R(\nabla^{h_R}_X Y, Z) + i2h_I(\nabla^{h_R}_X Y, Z) = 2h_R(\nabla^{h_R}_X Y, Z) + i2h_I(\nabla^{h_I}_X Y, Z) \\ &= (\text{Koszul formula for } h_R) + i(\text{Koszul formula for } h_I) \\ &= \text{Koszul formula for } h = 2h(\nabla^h_X Y, Z). \end{aligned}$$

因此，我们有：

$$h(\nabla^h_X Y - \nabla^{h_R}_X Y, Z) = 0.$$

原则上，最后一个方程并不强制要求 $\nabla^h = \nabla^{h_R}$，因为全纯度量$h$ 仅在 $T^{(1,0)}X$ 上非退化，但在 $T^{(0,1)}X$ 上为零。然而，由于 $\nabla^h$ 是全纯的，且 $\nabla^{h_R}$是复的，向量 $\nabla^h_X Y - \nabla^{h_R}_X Y$属于 $(1,0)$ 型，由此得证。

□

**注 29** （全纯联络作为实联络的复化）。局部地，每个定义在 $X$ 上的全纯联络 $\nabla$ 都可以解释为实联络 $\hat{}\nabla : \Gamma(TU) \times \Gamma(TU) \to \Gamma(TU)$ 的复化 $\hat{}\nabla : \Gamma(T_{\mathbb{C}}U) \times \Gamma(T_{\mathbb{C}}U) \to \Gamma(T_{\mathbb{C}}U)$，定义在

[58] 我们还将 $\nabla^{h_R} = \nabla^{h_I}$ 的复化记为 $\nabla^{h_R} = \nabla^{h_I}$。

坐标图域 $U \subset X$ 上。例如，我们可以如下定义 $\hat{\nabla}$ ：

$$\hat{\nabla}_{\partial_{z_i}}\partial_{z_j} = {}^{U}\nabla_{\partial_{z_i}}\partial_{z_j}, \quad \hat{\nabla}_{\partial_{\bar{z}_i}}\partial_{\bar{z}_j} = \overline{{}^{U}\nabla_{\partial_{z_i}}\partial_{z_j}}, \quad \hat{\nabla}_{\partial_{\bar{z}_i}}\partial_{z_j} = \hat{\nabla}_{\partial_{z_i}}\partial_{\bar{z}_j} = 0.$$

$H$然而，这样的联络$\hat{\nabla}$ 并不唯一。事实上，将最后一个方程替换为

$$\hat{\nabla}_{\partial_{\bar{z}_i}}\partial_{z_j} = \overline{\hat{\nabla}_{\partial_{z_i}}\partial_{\bar{z}_j}} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{k} \cdot \partial_{z_k} + g_{ij}^{k} \cdot \partial_{\bar{z}_k}$$

其中 $f_{ij}^{k}, g_{ij}^{k} \in C^{\infty}(U, \mathbb{C})$ 也能得到一个合适的联络$\hat{\nabla}$。

最后，我们想考察 $\nabla^{h}$ 的全纯正规坐标与 $\nabla^{h_R}$ 的正规坐标之间的关系。下面的公式将在接下来的讨论中发挥作用。

**命题 32.** 设$(X, J)$ 是一个带有全纯度量 $h = h_R + ih_I$ 和列维-奇维塔联络 $\nabla^{h} \equiv \nabla^{h_R} \equiv \nabla^{h_I}$ 的复流形。则：

$$\nabla^{h_R}_{J(X)} Y = i\nabla^{h_R}_{X} Y \quad \forall X \in \Gamma(TX)\ \forall Y \in \Gamma(T^{(1,0)}X).$$

证明. 采用上文的记号，并任取一点 $p \in X$。我们证明：

$$\nabla^{h_R}_{J(X)} Y(p) = i\nabla^{h_R}_{X} Y(p).$$

设 $(z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, z_n = x_n + iy_n)$ 是 $(X, \nabla^{h})$ 在 $p$ 附近的全纯正规坐标，并记

$$Y = \sum_{j=1}^{n} c_j \partial_{z_j}$$

对于某些局部定义的全纯函数 $c_j$。于是：

$$\begin{aligned}
\nabla^{h_R}_{J(X)} Y(p) &= \sum_{j=1}^{n} c_j(p) \cdot \nabla^{h_R}_{J(X)} \partial_{z_j}(p) + dc_j(J(X))(p) \cdot \partial_{z_j}|_p \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j(p) \cdot \nabla^{h_R}_{J(X)} \partial_{z_j}(p) + i \cdot dc_j(X)(p) \cdot \partial_{z_j}|_p \\
&= \sum_{j=1}^{n} i \cdot dc_j(X)(p) \cdot \partial_{z_j}|_p \\
&= i \sum_{j=1}^{n} c_j(p) \cdot \nabla^{h_R}_{X} \partial_{z_j}(p) + dc_j(X)(p) \cdot \partial_{z_j}|_p = i\nabla^{h_R}_{X} Y(p),
\end{aligned}$$

其中我们用到了 $\nabla^{h_R}$ 在两个分量上都是 $\mathbb{C}$-线性的，在第一分量上具有张量性，并且 $\nabla^{h_R}_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j}(p) = \nabla^{h_R}_{\partial_{x_i}} \partial_{y_j}(p) = \ldots = 0$（参见命题 29）。 □

[59]这些方程通过 $\mathbb{C}$-线性性确定了表达式 $\hat{\nabla}_{\partial_{x_i}}\partial_{x_j}$、$\hat{\nabla}_{\partial_{x_i}}\partial_{y_j}$、.....，进而确定了 $\hat{\nabla}$ 的 Christoffel符号。由于 $\hat{\nabla}$ 满足 $\hat{\nabla}_{\partial_{z_i}}\partial_{z_j} = \hat{\nabla}_{\partial_{\bar{z}_i}}\partial_{\bar{z}_j}$ 和 $\hat{\nabla}_{\partial_{\bar{z}_i}}\partial_{z_j} = \hat{\nabla}_{\partial_{z_i}}\partial_{\bar{z}_j}$，相对于坐标图 $(x_1, \ldots, y_n)$，$\hat{\nabla}$ 的 Christoffel符号是实数，这表明 $\hat{\nabla}$ 确实是 $U$ 上的实联络。

我们刚刚推导出的公式使我们能够将 $\nabla^h$ 的（全纯）测地线与 $\nabla^{h_R} = \nabla^{h_I}$的测地线联系起来。

**命题 33**。 设$(X, J)$为一个带有全纯度量 $h = h_R + ih_I$和列维-奇维塔联络 $\nabla^h \equiv \nabla^{h_R} \equiv \nabla^{h_I}$的复流形。此外，设 $U \coloneqq [t_0, t_1] + i[s_0, s_1]$是 $\mathbb{C}$ 中的一个定义域， $\gamma : U \to X$ 是一条全纯曲线。定义曲线 $\gamma_s : [t_0, t_1] \to X$和 $\gamma_t : [s_0, s_1] \to X$如下： $\gamma_s(t) \coloneqq \gamma(t + is) =: \gamma_t(s)$。那么，对于每个 $s \in [s_0, s_1]$， $\gamma$是 $\nabla^h$ 的一条（全纯）测地线，当且仅当 $\gamma_s$ 是 $\nabla^{h_R} = \nabla^{h_I}$ 的一条测地线；这又当且仅当对于每个 $t \in [t_0, t_1]$， $\gamma_t$ 是 $\nabla^{h_R} = \nabla^{h_I}$的一条测地线。

证明。 该结论主要由前面的公式以及$\nabla^{h_R}$是复数这一事实得出：对于 $z = t + is$，我们可以写成：

$$\gamma'(z) = \frac{1}{2}\left(\partial_t\gamma(z) - iJ(\partial_t\gamma(z))\right) = \frac{1}{2}\left(-J(\partial_s\gamma(z)) - i\partial_s\gamma(z)\right).$$

因此：

$$\begin{aligned}\frac{\nabla^h}{dz}\gamma' &= \nabla^h_{\gamma'}\gamma' = \nabla^{h_R}_{\gamma'}\gamma' = \nabla^{h_R}_{1/2(\partial_t\gamma - iJ(\partial_t\gamma))}\gamma' = \nabla^{h_R}_{\partial_t\gamma}\gamma' = \frac{1}{2}\left(\nabla^{h_R}_{\partial_t\gamma}\partial_t\gamma - iJ\left(\nabla^{h_R}_{\partial_t\gamma}\partial_t\gamma\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\nabla^{h_R}}{dt}\frac{d\gamma_s}{dt} - iJ\left(\frac{\nabla^{h_R}}{dt}\frac{d\gamma_s}{dt}\right)\right).\end{aligned}$$

对于 $\gamma_t$ 也可以得到类似的表达式，从而完成证明。 □

现在我们可以证明以下引理：

**引理 11**。 设 $(X, J)$是一个带有全纯度量 $h = h_R + ih_I$ 的复流形。设$p \in X$ 为任意一点。那么， $(X, \nabla^h)$ 在 $p$ 附近的全纯正规坐标$(z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, z_n = x_n + iy_n)$可导出 $(X, \nabla^{h_R})$ 在 $p$ 附近的正规坐标 $(x_1, \ldots, y_n)$。

证明。 结合本节前面的所有结果。请注意，只有经过线性变换后，同样的结论才对 $h_I$ 成立，因为

$$h_R|_p = \sum_{j=1}^{n} dx_j^2|_p - dy_j^2|_p$$

在坐标（$x_1$，... ， $y_n$）下， $p$处为标准形式，而对于

$$h_I|_p = \sum_{j=1}^{n} dx_j|_p \otimes dy_j|_p + dy_j|_p \otimes dx_j|_p.$$

□

# 参考文献

[1] A. Kyuldjiev、V. Gerdjikov 等人，《复化哈密顿动力学的实形式》，载于第三届几何、可积性与量子化国际会议论文集，第318–327页，Coral Press Sofia，2001年。[2] V. Gerdjikov、A. Kyuldjiev 等人，《哈密顿结构的复化与实形式》，《欧洲物理学杂志B：凝聚态与复杂系统》，第29卷，第2期，第177–181页，2002年。[3] V. Gerdjikov、A. Kyuldjiev 等人，《哈密顿系统的实哈密顿形式》，《欧洲物理学杂志B：凝聚态与复杂系统》，第38卷，第4期，第635–649页，2004年。[4] P. Arathoon 和 M. Fontaine，《全纯哈密顿系统的实形式》，2020年。此处引用的版本为 v2。论文已于2023年2月7日修订。[5] S. Sun 和 P. You，《复化平面开普勒问题的单值化》，《中国科学：数学》，第52卷，第3期，第257页，2020年。原论文为中文。译文可见 arXiv：https://arxiv.org/abs/ 2209.00146。[6] J. Moser，《环面上的伪全纯曲线》，载于《爱尔兰皇家科学院院刊 A辑：数学与物理科学》，第13–21页，JSTOR，1995年。[7] S. Kobayashi 和 K. Nomizu，《微分几何基础》，第II卷，《国际科学纯粹与应用数学丛书》第15卷，Interscience Publishers，纽约，1969年。[8] C. Voisin，《霍奇理论与复代数几何 I》，《剑桥高等数学研究丛书》第1卷，剑桥大学出版社，2002年。[9] C. Ehresmann，《可微纤维空间中的无穷小联络》，S´eminaire Bourbaki，1952年。[10] T. Fuller，《四维流形的 Lefschetz 纤维化》，2003年。[11] P. Naylor，《Lefschetz纤维化》，2016年。硕士论文。[12] M. Audin，《辛流形上的环面作用》，第93卷。施普林格科学与商业媒体，2004年。[13] M. Symington，《辛拓扑中由二维构造四维》，2002年。[14] N. C. Leung 和 M. Symington，《近似环面辛四维流形》，2003年。[15] M. Audin 和 M. Damian，《莫尔斯理论与弗洛尔同调》。Springer，2014年。

[16]F. Bogomolov、R. Deev 和 M. Verbitsky，《全纯辛流形上的拉格朗日纤维化截面与退化扭子变形》，2020年。[17] M. Verbitsky，《超凯勒流形的退化扭子空间》，2015年。[18] S. Kobayashi 和 K. Nomizu，《微分几何基础》第一卷。Interscience Publishers，纽约，1963年。[19] O. Muˇskarov，《几乎复流形上全纯函数的存在性》，《数学杂志》，第192卷，第2期，第283–295页，1986年。[20] A. Soldatenkov 和 M. Verbitsky，《全纯辛结构与 C-辛结构的莫瑟同伦》，2021年。[21] K. Cieliebak，《余切丛上的伪全纯曲线与周期轨道》，《纯粹与应用数学杂志》，第73卷，第3期，第251–278页，1994年。[22] H. I. Eliasson，《映射流形的几何》，《微分几何杂志》，第1卷，第1-2期，第169–194页，1967年。[23] M. Grueneberg，《关于黎曼流形切丛上的自然几乎复结构的可积性》，2001年。在 Kai Cieliebak（当时任职于斯坦福大学）指导下完成的未发表学生项目。[24] D. Huybrechts，《复几何》。Springer，2005年。