arXiv:2303.09490v1 [math.GT] 16 Mar 2023

某些塞弗特纤维化流形上的紧接触结构的分类：I

TANUSHREE

ABSTRACT. 我们对具有四个例外纤维的某些塞弗特纤维化流形上的零 Giroux 扭转紧接触结构进行分类，$M = M(0; -q_1/p_1, -q_2/p_2, -q_3/p_3, -q_4/p_4)$，其中 $e_0 \leq -4$且 $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$ 满足条件， $p_i \geq 2$, $q_i \geq 1$。我们通过构造 Legendrian 手术得到接触结构，从而获得下界。我们利用凸曲面理论得到上界。

1. INTRODUCTION

Jean Martinet 证明，任意定向闭三维流形都存在接触结构 [JM]。紧接触结构与过扭接触结构之间的二分性最早由 Bennequin 发现 [B]。Eliashberg 证明，过扭接触结构与三维流形上切平面的同伦类之间存在等价关系 [Eli]。

Eliashberg 对 S^3 和 $\mathbb{R}^3$ 上的紧接触结构进行了分类。Kanda [Kan] 和 Giroux [Gir1] （独立地）给出了三维环面上的分类。Etnyre [Et1] 对一些透镜空间上的紧接触结构进行了分类。Honda 给出了具有凸边界的透镜空间、实心环面和环面环带上的紧接触结构的完整分类 [Hon1]，并给出了纤维化到圆上的环面丛以及纤维化到闭曲面上的圆丛中紧接触结构的完整分类结果 [Hon2]。Giroux 在 [Gir3]中也证明了几乎所有这些流形的分类。Etnyre 和 Honda 在[EH]中证明了某些塞弗特纤维化流形上不存在接触结构。Ghiggini 和 Sh¨onenberger 首次对某些小 Seifert 纤维化空间中的紧接触结构进行了分类，且其数量非零。Hao Wu 给出了具有 $e_0 \neq 0, -1, -2.$ 的小 Seifert 纤维化空间的分类。某些其余 Seifert 纤维化流形的分类由 Ghiggini [G], 、Ghiggini、Lisca 和 Stipicz [GLS1、GLS2], 以及 Matkovi˘c [M]给出。Jonathan Simone 对某些铅垂三维流形上的紧接触结构进行了分类 [Sim]。

我们以以上部分结果为基础，对具有四个例外纤维且 Giroux 扭转为零的一些 Seifert 纤维化流形上的紧接触结构进行分类。对于 Seifert 纤维化流形 $M(g; q_1/p_1, ..., q_4/p_4)$，其中 g是底曲面 B 的亏格，我们定义欧拉数，$e_0(M) = \lfloor \frac{-q_1}{p_1} \rfloor + \lfloor \frac{-q_2}{p_2} \rfloor + \lfloor \frac{-q_3}{p_3} \rfloor + \lfloor \frac{-q_4}{p_4} \rfloor$，其中 $\lfloor x \rfloor$ 是不大于 x的最大整数。我们用 $[a_0^i, a_1^i, ..., a_{m_i}^i]$表示$\frac{-q_i}{p_i}$的连分数展开。在证明一般结果之前，我们先详细考察一个示例情形。我们考察具有 $e_o = -4$的 $M(0; -1/2, -1/2, -1/2, -1/2)$ 上的紧接触结构。

定理 1. 在 $M(0; -1/2, -1/2, -1/2, -1/2)$ 上，除去接触同伦意义下的等价，共有三种无 *Giroux* 扭转的紧接触结构。这三种结构都是 *Stein* 可填充的。对于每个 $n \in \mathbb{Z}^+$，至少存在一种

在 M 上具有 *n-Giroux* 扭转的紧接触结构。这些紧接触结构都不是弱可填充的。

一旦我们计算出这个示例情形中的紧接触结构，将其推广到带有 $e_0(M) \leq -4$. 的流形 $M = M(0; -q_1/p_1, -q_2/p_2, -q_3/p_3, -q_4/p_4)$ 在计算上就很容易了。

定理 2. 设 $M = M(0; -q_1/p_1, -q_2/p_2, -q_3/p_3, -q_4/p_4)$，其中 $e_0 \leq -4$，且 $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$ 满足,$p_i \geq 2$, $q_i \geq 1$ 和 $gcd(p_i, q_i) = 1$。在 M 上，除接触同痕外，恰有 $|(e_0(M)+1)\Pi_{i=1}^{4}\Pi_{j=1}^{m_i}(a_j^i+1)|$ 个零 *Giroux* 扭转的紧接触结构。所有这些结构均可通过 *Legendrian*-1 手术构造，因此是 *Stein* 可填充的。对于每个 $n \in \mathbb{Z}^+$，在 M上至少存在一个具有 *n-Giroux* 扭转的紧接触结构。这些紧接触结构均不可弱可填充。

我们首先通过 Legendrian 手术构造 Giroux 扭转为零的紧接触结构，从而得到紧接触结构数量的下界。这些紧接触结构可能彼此同痕。为了区分不同痕的接触结构，我们使用 Lisca-Mati´c 的结果 4，该结果运用了陈数和 Stein 结构。为了得到紧接触结构数量的上界，我们使用凸曲面理论，并按照图 4 所示将流形分解。我们首先通过附加旁路，使例外纤维的扭转数最大化。然后，我们运用 Honda 对每个部分上的紧接触结构的分类 [Hon2, Hon1]。接着，我们将这些部分粘合起来，构造出 M。将两个具有紧接触结构的部分粘合时，可能得到过扭接触结构；我们找出并剔除这类组合。我们考察粘合处凸曲面上的分割曲线，以寻找过扭圆盘。在剩余的组合中，我们需要辨别哪些彼此同痕。我们利用相对欧拉类 [Hon1] 来区分不同痕的紧接触结构。

第 2 节中，我们简要介绍用于确定下界和上界的方法。随后，我们介绍几个用于对 Seifert 纤维化流形上的紧接触结构进行分类的分类定理。定理 1 和 2 的证明将在第 3 节给出。

作者在投稿前 6 个月得知，Elif Medetogullari 也得出了类似的结果，但这些结果从未发表。

2. Preliminaries

三维流形 M 上的平面场 ξ 称为 接触结构，如果存在一个 1-形式 α，使得ξ=ker(α) 且 $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$。

三维流形上的两个接触结构若作为切平面分布同伦，则称为同伦的。若它们之间存在一条经过接触结构的同伦，则称为接触同位。

若接触流形 M 是某个紧斯坦曲面的定向边界，则称其为全纯可填充的 。Eliashberg 和 Gromov 证明，全纯可填充结构是紧的[Eli2]。此外，Eliashberg 还提出了以下定理。

定理3 ([Eli2])。 若(M', ξ') 是通过 ***Legendrian*** 手术从全纯可填充接触流形 ***(M, ξ)*** 得到的接触流形，则 (M', ξ') 是全纯可填充的。

关于 Legendrian 手术的说明，可参阅 [Gei]。Eliashberg [Eli1] 证明了，带有标准接触结构的 S^3 是全纯可填充的。利用定理3，我们可以通过对带有标准接触结构的 S^3 中的纽结实施 Legendrian 手术，构造紧接触结构。下述定理确定了何时两个这样的紧接触结构同痕。

定理4 ([LM]). 设 ***X*** 是一个带边界的光滑四维流形。假设 J_1 和 J_2 是 ***X*** 上带边界的两个 ***Stein*** 结构。令 $c(J)$ 表示 ***Stein*** 结构 J的陈类。如果它们在 ∂X 上诱导的接触结构同痕，则 $c(J_1) = c(J_2)$。

现在我们陈述一些分类结果，这些结果将用于求得塞弗特纤维化流形上紧接触结构数量的上界。利用凸曲面理论可得到这些结果。关于凸曲面理论的基础知识，请参阅 [Pat, Hon1, Hon2, Siv, Etn] 。设 M 是一个带有紧接触结构 ξ的三维流形。令 Σ表示 M中的嵌入定向曲面（可以是闭曲面，也可以带有勒让德边界）。我们用 Γ_Σ表示 Σ 上的分界曲线集。在带有分界曲线的凸曲面上，术语 符号构型 指分界曲线补集上诱导的符号。注意，我们所说的分界集，是指 Σ 上的分界曲线及符号构型。设 T^2 是一个处于标准形式的凸环面。其分界曲线的斜率记为 s ；若要指明环面，则记为 $s(T^2)$，并称之为该环面的斜率。设有一个三维流形 M ，其边界为凸环面。边界斜率指边界环面上分界曲线的斜率，记为 $s(\partial M)$。若流形有多个边界环面，则用 $\partial(M)_i$为它们编序，并将斜率记为 $s(\partial(M)_i)$。Legendrian 叶状结构的斜率记为 r。设 $\gamma \in M$ 是一条勒让德曲线。曲线 γ 的扭转数记为 $t(\gamma)$，而 γ 的标准管状邻域记为 $N(\gamma)$。

这里陈述一些结果，用于得到紧接触结构数量的上界。Eliashberg [Eli3]给出了 3-球 B^3上紧接触结构的分类。

定理5. 在球 B^3 上、且在 ∂B^3 处重合的两个紧接触结构，相对于 ∂B^3同痕。

现在来看一些关于 $S^1 \times D^2$ 和 $T^2 \times I$ 的分类结果，这些结果将用于塞弗特纤维化流形上紧接触结构的分类。

定理6. （参见 [Hon1]中的定理 *2.3*）给定一个负整数 ***n***，在 $S^1 \times D^2$ 上存在唯一的紧接触结构，其凸边界固定，且具有 $\#\Gamma_{\partial(S^1\times D^2)}=2$和斜率 $s(\partial(S^1 \times D^2)) = \frac{1}{n}$ ，其中 n 是一个负整数。允许利用柔性引理修改边界上的特征叶状结构后，该紧接触结构同痕于一条扭转数为 $n.$ 的勒让德曲线的标准邻域。

现在来看 $T^2 \times I$ 上的紧接触结构。我们将 $T^2 \times 0$ 上分割曲线的斜率记为 s_0，将 $T^2 \times 1$ 上分割曲线的斜率记为 s_1。我们可以假设 s_0 是 -1。我们写作 $s_1 = -\frac{p}{q}$，其中 $p \geq q > 0$ 是整数，且 $(p, q) = 1.$

令 $-\frac{p}{q}$ 具有如下唯一的连分数展开：

$$-\frac{p}{q} = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 \cdots - \cfrac{1}{a_k}}},$$

满足所有 $a_i < -1$ 整数。我们将 $-\frac{p}{q}$ 与 $[a_0, \cdots, a_k]$ 等同。$T^2 \times I$ 上紧接触结构的分类是通过边界斜率的连分数展开来表述的。

定理 7。（参见 [Hon1] 中的定理 *2.2 (2a)*（最小扭转、旋转情形））令 Γ_{T_i}、$i = 0$、1满足$\#\Gamma_{T_i} = 2$，且 $s_0 = -1$、$s_1 = -\frac{p}{q}$，其中 $p > q > 0$。则 $|\pi_0(Tight^{\min}(T^2 \times I$、$\Gamma_{T_1} \cup \Gamma_{T_2}))| \leq (r_0 + 1)(r_1 + 1) \cdots ($ $r_{k-1} + 1)(r_k)|$。

定理 8。（参见 [Hon1]中的定理 *2.2 (3)*（最小扭转、非旋转情形））令 Γ_{T_i}、*i=0*、*1*满足$\#\Gamma_{T_i} = 2$，且 $s_0 = s_1 = -1.$。那么存在一个整体单值化映射 $k\colon \pi_0($紧$^{min}(T^2 \times I$、$\Gamma_{T_1} \bigcup \Gamma_{T_2})) \to \mathbb{Z}$，它是双射。

2.1. Giroux 扭转。设有一个接触流形 M, ξ。设 $T \in M$ 是一个处于标准形式的凸环面。若存在一个接触嵌入，将 $(T^2 \times I, \xi_n =$ker(sin$(2n\pi z)dx + \cos(2n\pi z)dy)$) 嵌入 (M, ξ)，且 $T^2 \times \{t\}$ 与 T 同痕，则称 (M, ξ) 沿 T 具有 *n*-扭转。若存在一个嵌入环面 T，使得 (M, ξ) 沿其具有 n-扭转，且不存在任何嵌入环面 T'，使得 (M, ξ) 沿其具有 $(n+1)$-扭转 [GH]，则称 M, ξ 具有 *n-Giroux* 扭转。

3. Tight structures on Seifert manifolds

本节将给出定理 1 和定理 2 的证明。有关塞弗特纤维化流形的构造细节，请参见 [Hat]

我们首先考察一个具体的塞弗特纤维化三维流形示例，其底曲面为 S^2，并有四条例外纤维：M **(0;** $-1/2$, $-1/2$, $-1/2$, $-1/2$**)**。

3.1. **一个示例情形**。

定理 9. 在接触同伦意义下，模去 *Giroux* 扭转后，$M(0; -1/2, -1/2, -1/2, -1/2)$ 上有三种紧接触结构。这三种结构均为 *Stein* 可填充。对于每个 $n \in \mathbb{Z}^+$，在 M 上至少存在一种具有 *n-Giroux* 扭转的紧接触结构。这些紧接触结构都不是弱可填充的。

为了构造这个流形，我们采用 [Hat] 中所示的方法。我们从曲面 S^2 开始。令 B' 为去掉四个圆盘内部后的 S^2，令 M' 为以 B' 为底空间的圆丛。粘接映射 $A_i\colon \partial V_i \to -\partial M'$ 由 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 给出。该流形 M 的手术表示见图1左侧。我们进行四次 (-1) Rolfsen 扭转，得到图1右侧的手术图。手术系数为 -2 的平凡结的 Legendrian 表示的 Thurston-Bennequin 数为 -1，因此旋转数为 0。这给出了图2所示的四个 -2 带框架平凡结的唯一 Legendrian 表示。对于手术系数为

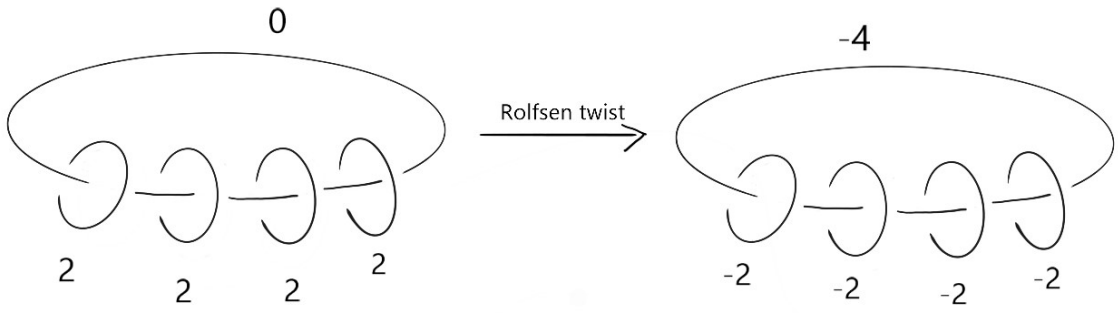


FIGURE 1. 塞弗特流形的手术描述。

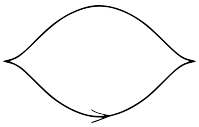


FIGURE 2. Thurston-Bennequin 数为 -1 的平凡结的勒让德实现。

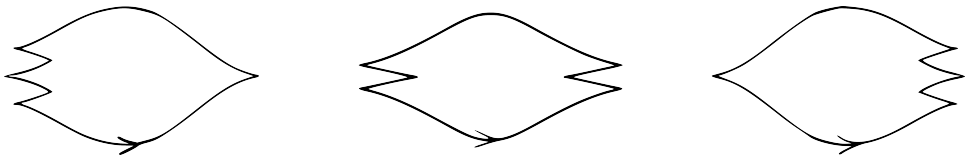


FIGURE 3. Thurston-Bennequin 数为 -3 的平凡结的勒让德实现 .

-4 的平凡结，其勒让德实现的 Thurston-Bennequin 数为 -3，因此旋转数可以是 -2，0，或 2。相应的勒让德实现见图3。由于这三个勒让德实现的旋转数各不相同，相应 Stein 结构的陈数也各不相同 [LM]。于是，根据定理4，这三个接触结构彼此不同痕。由于它们是 Stein 可填充的（利用引理3），其 Giroux 扭转为零 [Gay]。这表明，在 M 上，至多相差接触同伦，至少存在三个 Giroux 扭转为零的紧接触结构。

3.1.1. 上界。 若一个三维流形 M 的每个二维球面 $S^2 \subset M$ 都围成一个球$B^3 \subset M$，则称其为不可约的。一个不含 S^2 或 D^2 分支的双侧曲面 S 称为不可压缩的，如果对于每个满足 $D \cap S = \partial D$ 的圆盘$D \subset M$，都存在一个满足 $\partial D' = \partial D$的圆盘 $D' \subset S$。若一个不可约流形 M满足其内每个不可压缩环面都与 ∂平行，则称其为无环面的；否则，该流形称为含环面的。Honda、Kazez 和 Mati´c 在 [HKM1]中证明了：

定理 10. 设 M 是一个定向、闭、连通、含环面且不可约的三维流形，其中包含一个不可压缩环面。那么 M 上存在无穷多个紧接触结构同痕类。

其逆命题后来由 Colin、Giroux 和 Honda 在 [CGH] 中证明：

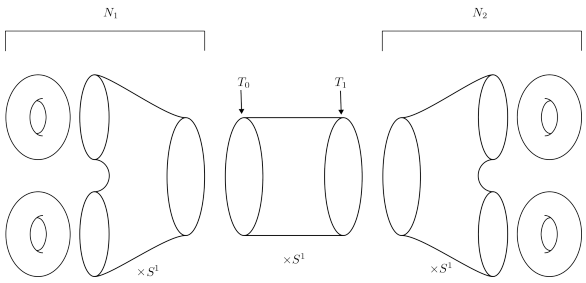


FIGURE 4. 具有四个例外纤维的塞弗特纤维化三维流形的分解。

定理 11。 每个闭、定向的无环面三维流形，在同痕意义下都承载有限个紧接触结构。

这告诉我们，在闭、连通、定向的三维流形中，不可压缩环面是产生无穷多个紧接触结构的唯一来源。定理 10 和定理 11 的证明告诉我们，这些无穷多个紧接触结构出现在不可压缩环面的一个邻域 $T^2 \times I$ 中。这个 $T^2 \times I$ 上有 $\mathbb{Z}^+$ 多个来自 Giroux$n$-扭转的非同痕紧接触结构。

具有四个例外纤维的塞弗特纤维化三维流形 $M(0; -1/2, -1/2, -1/2, -1/2)$ 含有一个不可压缩环面。我们希望对这些 $\mathbb{Z}^+$ 个紧接触结构进行计数。考虑其中一个不可压缩环面的 $T^2 \times I$ 邻域。我们沿着 T_0和 T_1 切开，将流形分解为三个部分，其中一个是 $T^2 \times I$。另外两个部分分别记为 N_1 和 N_2。如图 4 所示，每个 N_i 都可以分解为 $\{$个裤子曲面$\}\times S^1$ 和两个实心环面。

我们先来考察其中一个部分，比如 N_1。我们将 $\{$裤子曲面$\}\times S^1$ 记为 $\Sigma \times S^1$，并将两个实心环面记为 V_1、V_2。 $\Sigma \times S^1$有三个边界分支，记为$\partial(\Sigma \times S^1)_i$，其中 $\partial(\Sigma \times S^1)_i$ 对应于 $i = 1$，2 对应于环面 ∂V_i， $i = 1$，2，而 $\partial(\Sigma \times S^1)_3$ 粘接到 $T^2 \times I$。注意， $\partial(\Sigma \times S^1)_3$ 与 ∂N_1相同。我们将两个奇异纤维记为F_1 和 F_2 ，其扭转数记为 n_1 和 n_2。由于 V_1 和 V_2 是F_1 和 F_2的标准邻域，假设将它们同时同痕至勒让德曲线，并进一步同痕，使其扭转数为负。 ∂V_i 上的分割曲线斜率（参见[W]中的例 1.4.12）为 $\frac{1}{n_i}$。根据 [Hat], 中的构造，两个粘接映射 $A_i\colon \partial V_i \to -\partial(\Sigma \times S^1)_i$分别由 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 给出，其中 $i = 1$，2。注意， $\partial(\Sigma \times S^1)$上的分割曲线斜率不是 ∞。利用 Legendrian 叶状结构的灵活性（参见 [Hon1]中的推论 3.6），我们可以假设，对于 $i = 1$，2，3， $\partial(\Sigma \times S^1)_i$ 的 Legendrian 叶状结构斜率为无穷大。

3.1.2. 最大化扭转数。我们使用与 [GS]中所示相同的方法来最大化扭转数。对于 $i = 1, 2$，有 $A_i.(n_i, 1)^T = (2n_i - 1, n_i)$。我们将 $-\partial(\Sigma \times S^1)_i$ 上的分割曲线斜率记为 $s(\partial(\Sigma \times S^1)_i) = \frac{n_i}{2n_i - 1}$。

引理 12. 我们可以将扭转数 n_1 和 n_2 增大至 0。

证明. 考虑 $\partial(\Sigma \times S^1)_1$ 到 $\partial(\Sigma \times S^1)_2$ 之间的环带 $I \times S^1$，其边界由环面上的 Legendrian 叶状曲线组成。此环带的边界分别与分割曲线相交于 $2(2n_i - 1)$ 个点。

若 $n_1 \neq n_2$，则根据不平衡原理，在其中一个边界上存在沿 Legendrian 叶状曲线的旁路。注意到 $A_i^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，因此 Legendrian 叶状结构在 ∂V_i. 上的斜率为 2。利用扭转数引理，我们可以附加一个旁路，并将 V_i 加厚至 V_i'，使扭转数增大，只要 $n_i < 0$.

设 $n_1 = n_2$，并且在 M 中，从 $\partial(\Sigma \times S^1)_1$ 到 $\partial(\Sigma \times S^1)_2$ 的环带 $A = I \times S^1$ 上不存在旁路。于是我们沿 A 剖开 $N_1 \setminus (V_1' \cup V_2')$。注意，$A \cup V_1' \cup V_2'$ 的一个邻域是一个带有四条棱的分片光滑实心环面。我们使用边缘圆化引理（引理 3.11, [Hon1]）将这四条棱圆滑化。由于每次圆化都会使斜率改变 $-\frac{1}{4}\frac{1}{2n_1-1}$，因此边界环面上分割曲线的斜率为

$$s(\partial(\Sigma \times S^1)_1) + s(\partial(\Sigma \times S^1)_2) - 4(\frac{1}{4}\frac{1}{2n_1 - 1})$$

$$\frac{n_1}{2n_1 - 1} + \frac{n_1}{2n_1 - 1} - \frac{1}{2n_1 - 1} = 1.$$

该边界环面与 ∂N_1 同痕，并以与 ∂N_1 相同的方式与 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 对应。因此，边界环面 $-\partial N_1$ 上的分界曲线的斜率为 -1.

现在取一个环带 $I \times S^1$，从 $\partial(\Sigma \times S^1)_1$ 到 ∂N_1。对于 $n_1 < 0$，我们有 $2n_1 - 1 < -1$。因此，根据不平衡原理，在 V_1 上存在一个旁路，直到我们将 n_1 增至 0。对 n_2. 也可以进行类似的计算。因此，我们可以增大 n_1 和 n_2，直到 $n_1 = n_2 = 0$.

□

3.1.3. 基本块上的紧接触结构的组合。我们有 $n_1 = n_2 = 0$。$-\partial N_1$ 上的分割曲线的斜率为 -1，$\partial(\Sigma \times S^1)_1$ 上的斜率为 0，而 $\partial(\Sigma \times S^1)_2$ 上的斜率为 0。现在我们来计算当三个边界环面上的分割曲线的斜率分别为 0、0、-1时，$\{$裤子曲面$\} \times S^1$ 上紧接触结构的数量。再次考虑一个环带 $I \times S^1$，从 $\partial(\Sigma \times S^1)_1$ 到 $\partial(\Sigma \times S^1)_2$。要么在两个边界分支上都存在旁路，要么都不存在。

情形 1：若不存在旁路，则有以下条件：根据 Honda 的分类引理 5.1，[Hon2] 中具有此类边界斜率的 $\Sigma \times S^1$ 有唯一的紧接触结构，如图 5 所示（注意，我们采用的符号约定与 Honda 的相反）。将其称为 ξ_A。利用

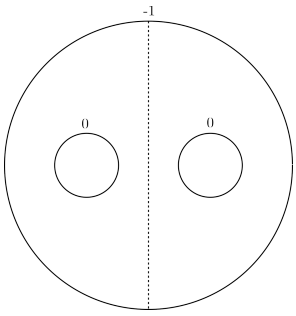


FIGURE 5. 位于 Σ 上的分割曲线，其中接触结构 ξ_A 位于 $\Sigma \times S^1$ 上。

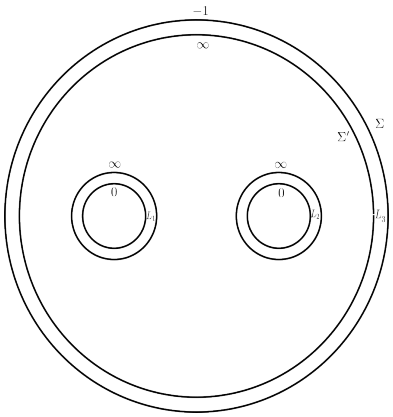


FIGURE 6. Σ 和 Σ' 及其边界斜率。

A_i^{-1} V_i 边界上的分割曲线斜率对于 $i = 1$，2 为 ∞. 。根据命题 6，V_i 对于 $i = 1$，2 存在唯一的紧接触结构。这给出了 N_1. 上唯一的紧接触结构

情形 2：若存在旁路，则经过旁路附着后，切割与圆化构造会得到一个斜率为无穷大的环面。接着，Honda 对 {裤子曲面}$\times S^1$ 上的紧接触结构的分类（引理 5.1, [Hon2]）表明，存在唯一的分解 $\Sigma \times S^1 = \Sigma' \times S^1 \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3$，其中 L_i 是 $T^2 \times I$ 且具有最小扭转，并且 $\Sigma' \times S^1$的所有边界分支（记为 $\partial(\Sigma' \times S^1)_i$）上的分割曲线斜率均为 ∞ 。图 6 展示了 Σ 和 Σ' 及其边界斜率。这里我们固定 Σ 为 $\Sigma \times \{0\}$ ，并令 Σ' 为 $\Sigma' \times \{0\}$.

我们先考察 $\Sigma' \times S^1$ 上的紧接触结构，然后加入 L_i ，从而得到 $\Sigma \times S^1$ 上的紧接触结构。 Σ' 的每个边界分支与相应环面上的分界集相交两次。

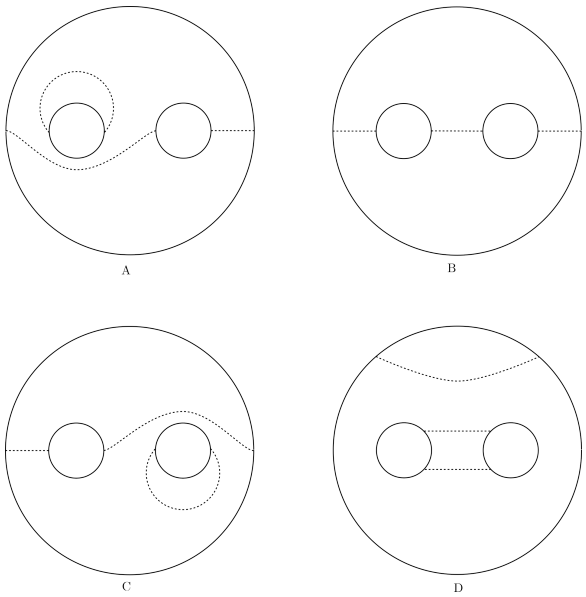


FIGURE 7. 裤子曲面上可能的分界曲线。

引理13。 Σ' 上的每条分界曲线都连接两个不同的边界分支；或者，一条分界曲线从 $\partial(\Sigma \times S^1)_3$ 出发并回到自身，而另外两条分界曲线从 $\partial(\Sigma \times S^1)_1$ 延伸至 $\partial(\Sigma \times S^1)_2$。这些情形见图7 *C,D*。

证明。 假设边界分支一或边界分支二上存在一条边界平行分界弧，如图7 A、B所示。设这条边界平行分界弧横跨 $\partial(\Sigma \times S^1)_1$。这意味着沿着 $\partial(\Sigma \times S^1)_1$ 存在一条旁路。附加这条旁路后，我们可以加厚 $V_1 \cup L_1$，得到 V_1'。V_1' 的边界斜率在 $\Sigma' \times S^1$ 的基下为 0。因此，我们得到一个边界斜率为 0 和 ∞ 的环面环带 L_1；对这个环面环带作延拓，可得到另一个边界斜率为 ∞ 和 0 的环面环带。因此，V_1' 中的径向扭转过多，故 V_1' 上的接触结构是过扭转的。类似地，如果边界分支二上存在一条边界平行分界弧，我们也会得到过扭接触结构。不含边界分支一或边界分支二上的边界平行分界弧的可能分界曲线构型，正是本引理所述的形式。

□

根据引理13的结果，我们可以将分析分为两种情形，分别对应图7 C或D。这是两种不同的分割集，对应于 $\Sigma \times S^1$上的不同接触结构。我们首先统计对应于图7 C的所有紧接触结构。我们将这一分析称为情形2A。然后，我们对图7 D进行同样的分析，并将其称为情形2B。

情形2A：考虑这样一组分界曲线：如图7 C所示，Σ' 上的每条曲线都连接一个边界分支与另一个边界分支。以下引理由 Honda 和 Etnyre [EH] 证明。为清楚起见，我在此重述。

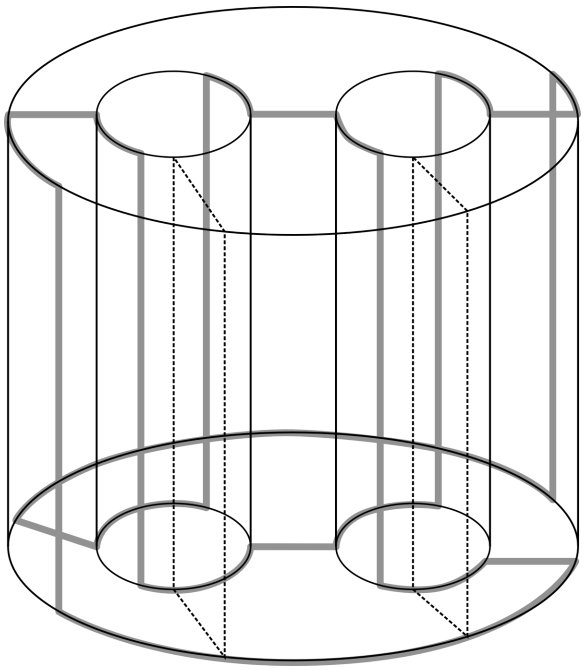


FIGURE 8. $\Sigma' \times I$边界上的分割曲线。

引理14. 图*7 C*中由两种不同符号配置给出的两个分割集，在 $\Sigma' \times S^1$.上确定唯一的接触结构

证明。 我们先沿着 $\Sigma' \times S^1$ 切开 Σ' ，然后将棱修圆。由此得到一个实心二亏格把手体。我们可以安排边界上的分界曲线，使得两个经向圆盘与分界集恰好相交两次。（见图8。）因此，在这两个圆盘上，存在一条唯一的分界曲线，将这两个交点分隔开。我们沿这两个圆盘切开，得到一个3-球。在给定边界曲面上的限制条件下，这个3-球上存在唯一的接触结构（定理5）。由于我们所沿着切开的曲面上的分界曲线由初始的分界曲线配置确定，因此在 $\Sigma' \times S^1$上得到唯一的接触结构。□

情形2B：来看这样一种情况：一条分割曲线从 $\partial(\Sigma \times S^1)_3$ 出发并返回自身，另有两条分割曲线从 $\partial(\Sigma \times S^1)_1$ 出发，通向 $\partial(\Sigma \times S^1)_2$ ，如图7 D所示。对于情形2B，这至多给出 $\Sigma \times S^1$ 上的两个紧接触结构，每种符号配置对应一个。

现在我们来看 $\Sigma \times S^1 = \Sigma' \times S^1 \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3$. 上的分界曲线。令 $A_i = \Sigma \cap L_i$。要使 $\Sigma \times S^1$ 上的接触结构是紧的， A_3 的分界集将有两条弧连接各边界分支。根据基本切片L_3的符号，有两种可能的构型。 A_1 和 A_2 的分界集由一条边界平行弧组成，该弧位于具有

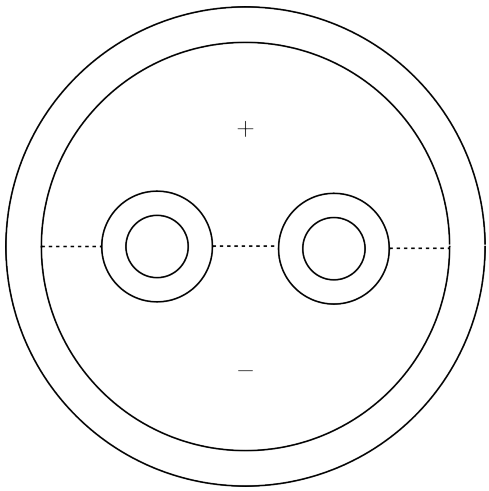


FIGURE 9. Σ上的可能分界集。

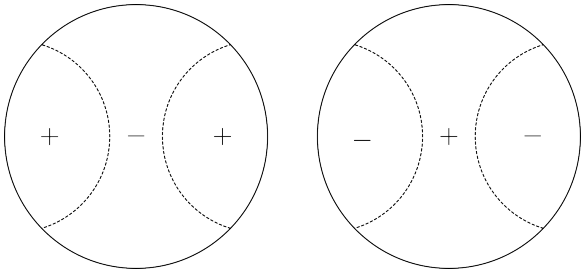


FIGURE 10. $\mathbb{D}^2$ 上两种可能的分割曲线，其 $\mathrm{t}(\partial\mathbb{D}) = -2$ [H 为 1]。

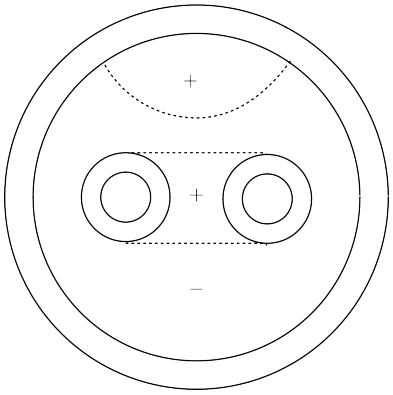


FIGURE 11. Σ上的可能分界集。

无限斜率分界曲线的边界分支上。根据相应基本切片的符号，有两种可能的构型。如图12所示。同样，虚线表示分界曲线。现在，我们像之前一样，分别来看情形2A和情形2B中 $\Sigma \times S^1$ 上的分界曲线。

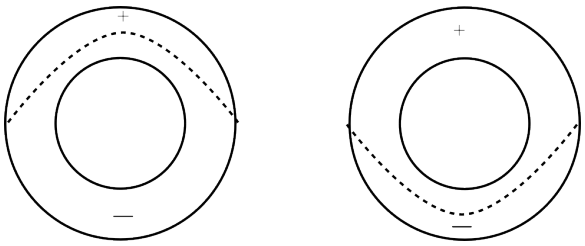


FIGURE 12. 正（左）和负（右）的分界集符号构型，位于A_2 和 A_1上。

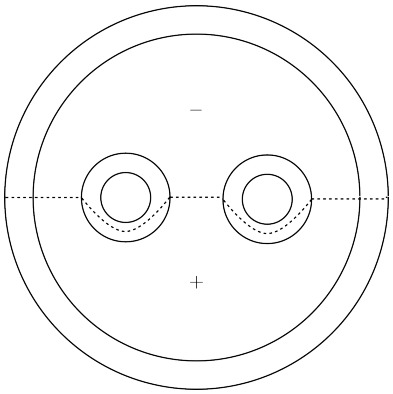


FIGURE 13. ξ_B 在 Σ上的分界集。

情形2A：我们固定 $\Sigma' \times S^1$ 上接触结构的一种符号构型，如图9所示。这也确定了 L_3上接触结构的符号构型。在我们的情形中，它是正的。我们用（$\pm$，$\pm$，$\pm$）表示 $i = 1$对应的基本切片 L_i 的符号依次为正/负、2、3。现在，我们可以选择 L_1 和 L_2上接触结构的符号。这总共给出四种构型，分别为：（$+$，$+$，$+$）、（$-$，$-$，$+$）、（$-$，$+$，$+$）、（$+$，$-$，$+$）。Hon 在 [2] 中证明（引理 5.1 的证明中的第9段），如果三个基本切片的符号都相同，则会得到一个过扭圆盘。因此，（$+$，$+$，$+$）对应于 $\Sigma' \times S^1$上的过扭接触结构。

我们可以得到一种具有（$-$，$-$，$+$）配置的接触结构。这对应于 $\Sigma \times S^1$ 上的一种紧接触结构，其边界环面上的分割曲线斜率为 0，0，-1.。分界集如图13所示。与 $\Sigma \times S^1$ 上的这一分界集对应的紧接触结构记为 ξ_B。如果我们在情形2A中从符号相反的配置开始，那么 Σ 上的分界集将如图14所示。这对应于 $\Sigma \times S^1$ 上另一种紧接触结构。我们称之为 $\xi_{B'}$。

同样，我们也可以有 $(-,+,+)$ 和 $(+,-,+)$ 这样的构型。与这些带符号构型对应的分界集如图15所示。每一种都对应于 $\Sigma \times S^1$ 上的一种紧接触结构。我们将它们记为 ξ_C 和 ξ_D。如果我们在情形2A中一开始采用相反的

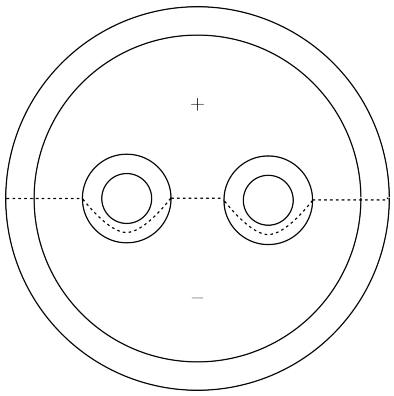
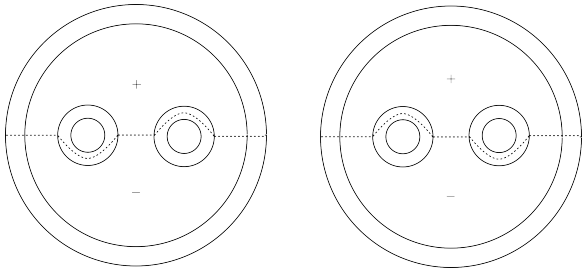
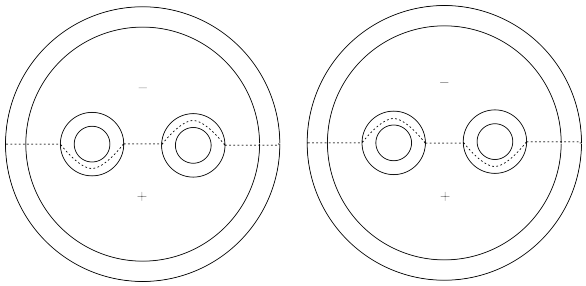


FIGURE 14. $\xi_{B'}$ 在 Σ上的分界集。



ξ_C 和 ξ_D 在 Σ上的分界集。



$\xi_{C'}$ 和 $\xi_{D'}$ 在 Σ上的分界集。

带符号构型，那么在 Σ 上就会得到图16所示的分界集。它们对应于 $\Sigma \times S^1$ 上不同的紧接触结构。我们将它们称为 $\xi_{C'}$ 和 $\xi_{D'}$。

情形2B：我们已固定 $\Sigma' \times S^1$ 的一种符号构型，如图11所示。这也固定了 L_3的符号构型。现在可以选择 L_1 和 L_2上的符号，因此共有四种构型，如图17所示。当 L_1 和 L_2 都取正号时，会得到过扭接触结构。图17 A中的虚线表示分界曲线。过扭圆盘的边界位于这些分界曲线所围成的圆盘之外。现在考虑

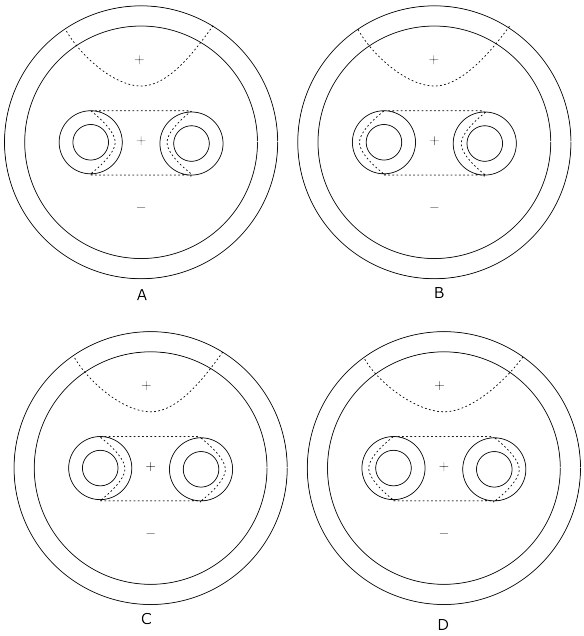


FIGURE 17. Σ上的四种可能的分界曲线构型。

L_1 和 L_2 符号相反的情形。此时，在带负号的 L_i 上会得到一个旁路，如图17 B、C所示。设该旁路位于 L_1上。附加这个旁路并加厚实心环面后，可得到边界斜率为0的实心环面。因此，我们有一个边界斜率为0和 ∞ 的环面环带 L_1 ，而该环面环带的延拓是另一个边界斜率为∞ 和0的环面环带。因此，V_1'中的径向扭转过多，故 V_1'上的接触结构是过扭转的。同样，如果第二个边界分支上有一条边界平行分界弧，也会得到过扭接触结构。因此，剩下的情形是 L_1 和 L_2 都取负号，如图17 D所示。
$\Sigma \times S^1$ 上的这种接触结构记为 ξ_E。如果情形2B一开始采用另一种符号构型，就会得到符号相反的构型，记为 ξ_E' ，如图18所示。

在 $\Sigma \times S^1$ 上，我们有九种紧接触结构，记为 ξ_A、 ξ_B、 $\xi_{B'}$、 ξ_C、 $\xi_{C'}$、 ξ_D、 $\xi_{D'}$、 ξ_E、 $\xi_{E'}$。每个 V_i 上都有唯一的紧接触结构。我们沿着环面环带粘合这两个 $\Sigma \times S^1$（参见第 3.1.1 节）。粘合这两个 $\Sigma \times S^1$ 时，我们使用反定向微分同胚，因此必须用边界斜率分别为 -1 和 $+1$ 的 $T^2 \times I$ 将它们粘合起来。粘合后，我们得到一个带四个孔的球面 {，也就是一个裤形曲面 {，我们将其称为 Y。下面考察 Y 上所有零 Giroux 扭转的可能紧接触结构。图19展示了带四个孔的球面上的所有可能分割曲线构型；将两条裤形曲面粘合后，这些构型可能得到零 Giroux 扭转的紧接触结构。将两条裤形曲面用 ξ_E 和 $\xi_{E'}$ 粘合后，在 Y 上得到的紧接触结构如图20所示。该接触结构具有非零 Giroux 扭转（第 2.1 节）。其他所有粘合两条裤形曲面的方式，都会在 Y 中显然地产生一个过扭圆盘。

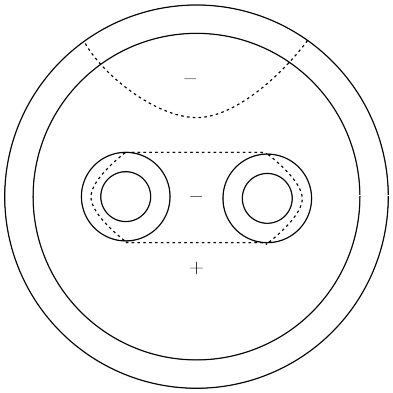


FIGURE 18. $\xi_{E'}$ 在 Σ上的分界集。

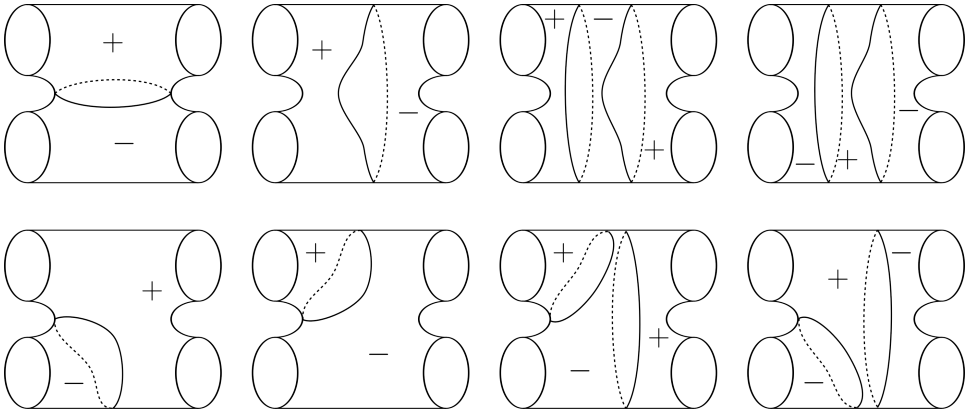


FIGURE 19. 四孔球面上的分割曲线构型，表示 Y 上所有零 Giroux 扭转的紧接触结构。

将四个实心环面粘到带有接触结构的 Y 上，该接触结构由图19中的图片5、6、7和8所示的分割曲线确定，得到 $M(0;-1/2,-1/2,-1/2,-1/2)$ 上的过扭接触结构。事实上，在所有这些情形下，裤形曲面上都有一条边界平行分界曲线，例如 γ_1。存在一个边界平行环面，例如包含 γ_1 的 T_1。我们将这个边界环面记为 T_0，并将其上的分割曲线记为 γ_0。考虑从 T_0 到 T_1 的 $T^2\times[0,1]$。分割曲线 γ_0 和 γ_1 的斜率为零，因此在该 $T^2\times I$ 中，每个斜率都对应一个边界平行环面。特别地，我们有一个斜率为 $_1{}_2$ 的环面。根据 A_i^{-1}，这对应于粘入的实心环面之基中的零斜率。因此，这条分割曲线围成实心环面中的一张经向圆盘，也就是我们的过扭圆盘。

我们利用相对欧拉类（参见 [Hon1]中的第4.2节）证明，图3和图4（如图19所示）在 Y上给出非同位的紧接触结构。我们将图19中的第 i个紧接触结构记为 ξ_i。我们有，相对欧拉类 $e(\xi_3)=-2$，而 $e(\xi_4)=2$。通过类似于第3.2节所讨论的截面变换，可以证明图1和图2（如图19所示）等价。因此，我们得到 $\{\text{shirt}\}\times S^1$上至多有三个可能为紧的接触结构。

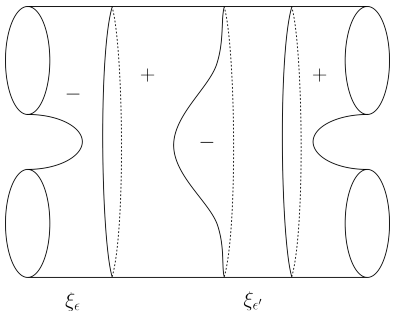


FIGURE 20. 四孔球面上的分割曲线构型。

由于上界和下界（我们在第3.1节中计算得出）均为三，因此我们得到 $|\pi_0$(紧的$^{min}(M))| = 3$。这些接触结构都是 Stein 可填充的，因为我们可以在$(S^3,\ \xi_{std})$中的 Legendrian 链上进行一次 -1 Legendrian 手术，从而得到 M 上的这三个接触结构。

由于 M 含环面，因此 M 上存在 $\mathbb{Z}$ 个对应于整数 Giroux 扭转的非同位紧接触结构。Gay 在 [Gay] 中证明，强辛可填充的紧接触结构不存在 Giroux 扭转。此外，Gei 在 [Gei]中证明，有理同调球上的弱可填充紧接触结构是强可填充接触结构。Seifert 纤维化流形 M 是一个有理同调球。因此，M 上具有非零 Giroux 扭转的紧接触结构不具备弱可填充性。

3.2 一般情形。考虑流形 $M = M(0;\ -q_1/p_1, -q_2/p_2, -q_3/p_3, -q_4/p_4)$，其中 $e_0 \leq -4$（此处为欧拉数，$e_0(M) = \lfloor \frac{-q_1}{p_1} \rfloor + \lfloor \frac{-q_2}{p_2} \rfloor + \lfloor \frac{-q_3}{p_3} \rfloor + \lfloor \frac{-q_4}{p_4} \rfloor$，其中 $\lfloor x \rfloor$ 是不大于 x 的最大整数），且 $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$ 满足，$p_i \geq 2$，$q_i \geq 1$，并且 $gcd(p_i, q_i) = 1$，$\frac{-q_i}{p_i} = [a_0^i, a_1^i, ..., a_{m_i}{}^i]$，其中所有 a_j^i 都是整数，$a_0^i = \lfloor \frac{-q_i}{p_i} \rfloor \leq -1$，且对于 $j \geq 1$，有 $a_j^i \leq -2$。我们为 $j = 0$、1、...、m_i 定义 $p_j^i = -a_j^i p_{j-1}^i - p_{j-2}^i$，并且 $p_{-2}^i = -1$ 和 $p_{-1}^i = 0$。类似地，我们为 $j = 0$、1、...、m_i 定义 $q_j^i = -a_j^i q_{j-1}^i - q_{j-2}^i$，并且 $q_{-2}^i = -1$ 和 $q_{-1}^i = 0$。在先前考虑的示例（第 3.1 节）中，我们有 $e_0(M) = -4$ 和 $\frac{-q_i}{p_i} = \frac{-1}{2}$。一旦计算出此示例情形中的紧接触结构，将其推广到所有满足 $e_0(M) \leq -4$. 的流形 M 在计算上就很容易了。

定理15。在 M上，恰有 $|(e_0(M)+1)\Pi_{i=1}^4 \Pi_{j=1}^{m_i}(a_j^i+1)|$ 种零 ***Giroux*** 扭转的紧接触结构（按接触同伦分类）。这些结构均可通过 ***Legendrian*** -1 手术构造，因此都是 ***Stein*** 可填充的。对每个 $n \in \mathbb{Z}^+$，在 M上都至少存在一种具有 ***n-Giroux*** 扭转的紧接触结构。这些紧接触结构都不是弱可填充的。

为证明这一定理，我们沿用研究示例情形时采用的类似方法（见第 3.1 节）。我们还需要一种额外的截面变换操作，以证明某些可能的紧接触结构彼此同痕。

构造 $M = M(0;\ -q_1/p_1, -q_2/p_2, -q_3/p_3, -q_4/p_4)$ 的手术图见图21左上方。我们进行 Rolfsen 扭转，得到右上方的手术图。我们进行

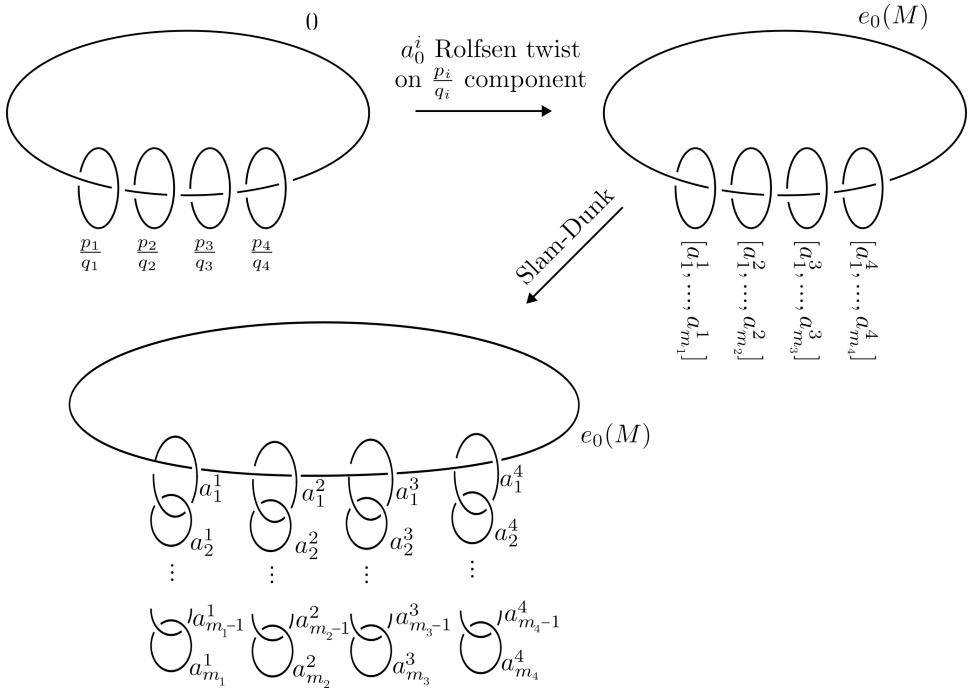


FIGURE 21. 流形 $M(0;\,-q_1/p_1,\ -q_2/p_2,\ -q_3/p_3,\ -q_4/p_4$ 的手术图表示).

slam dunk 操作，得到下方的图示。这两种操作均可参见 [GoS]。根据 Thurston-Bennequin 数和旋转数，平凡结各自的勒让德实现数量为 (a_i^j+1) 或 $(e_0(M)+1)$。然后由定理4可知，在 M 上，至少存在$|(e_0(M)+1)\Pi_{i=1}^4\Pi_{j=1}^{m_i}(a_j^i+1)|$ 个零 Giroux 扭转的紧接触结构，且这些结构在接触同伦意义下互不相同。这给出了 M 上紧接触结构数量的下界。

3.2.1. 上界。 我们从示例情形中先前所述的 Seifert 纤维化流形分解开始。流形 $M=M(0;\,-q_1/p_1,\ -q_2/p_2,\ -q_3/p_3,\ -q_4/p_4)$ 含有不可压缩环面。我们将首先统计 M 上零 Giroux 扭转的紧接触结构。

采用图4 中示例情形所用的相同构造和记号，可得两个粘接映射 $A_i\colon\ \partial V_i \to -\partial(\Sigma\times S^1)_i$ 为 $\begin{pmatrix} p_i & u_i \\ q_i & v_i \end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})$，其中 $i=1,\ 2$，且 $u_i=p^i_{m_i-1}$ 和 $v_i=q^i_{m_i-1}$。利用 Legendrian 叶状结构的灵活性，我们假设对于 $\partial(\Sigma\times S^1)_i$，其中 $i=1,\ 2,\ 3$，其叶状结构斜率为无穷大。假设纤维 F_i 同时经过同位变形成为勒让德曲线，且其扭转数特别负。对于 $i=1,\ 2$，我们有 $A_i(n_i,\ 1)^T=(n_ip_i+u_i,\ n_iq_i+v_i)$。我们将 $-\partial(\Sigma\times S^1)_i$ 上分割曲线的斜率记作 $s_i=\dfrac{n_iq_i+v_i}{n_ip_i+u_i}=\dfrac{q_i}{p_i}+$ ($n_ip_i+u_i$)。

注意，我们所研究的流形 $M(0;\,-q_1/p_1,...,-q_4/p_4)$ 是 L-空间（见定理 1.1 [LS]）。我们考察 Seifert 纤维化流形 $M'=(0;\,-q_1/p_1,...,-q_3/p_3)$，它是一个 L-空间，且满足$e_0\le -2$。 M' 上的任意紧接触结构都含有一条扭转数为 -1 的勒让德曲线，位于

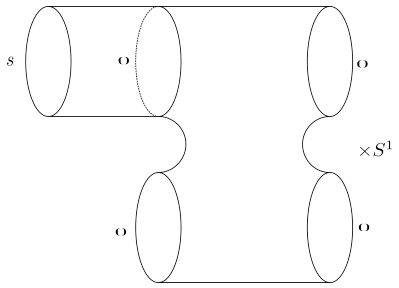


FIGURE 22. Y 的分解。

{裤子曲面} $\times S^1$ （使用 [G]中的推论 5.2）。我们将这条曲线称为 L，将其邻域称为 V。通过对一条不在 V中的纤维做手术，可以由 M' 构造出 M。因此，我们的流形 M中有一条扭转数为 -1 的勒让德曲线。我们可以假设，对于 $i = 1,2$， $\partial(\Sigma \times S^1)$ 上的 Legendrian 叶状结构的斜率为 ∞。取一条环带 A_i，它位于 ∂V与 $\partial(\Sigma \times S^1)$ 之间，其中 $i = 1, 2$。根据不平衡原理， $\partial(\Sigma \times S^1)$ 上可能存在一些旁路。附加这些旁路后，对于 $i = 1, 2$， $\partial(\Sigma \times S^1)$ 上的分割曲线斜率为 $\lfloor \frac{q_i}{p_i} \rfloor$。类似地可以证明，对于 $i = 3, 4$， $\partial(\Sigma \times S^1)$ 上的分割曲线斜率为 $\lfloor \frac{q_i}{p_i} \rfloor$。

3.2.2. 组合基本块上的紧接触结构。 将两个 {裤子曲面}$\times S^1$ 沿环面环带粘合后，我们得到一个 {衬衫} $\times S^1$，记作 Y'。 Y' 边界环面上的分割曲线斜率分别为 $\lfloor \frac{q_i}{p_i} \rfloor$、 $i = 1$，2，3，4。我们对 {衬衫} $\times S^1$ 取一个合适的微分同胚，将边界斜率标准化为：一个边界环面上的斜率为 $\Sigma_{i=1}^4 \lfloor \frac{q_i}{p_i} \rfloor = s$，其余三个边界环面上的斜率为 0。这相当于进行一次截面变换（参见 [Hat]中的命题 2.1）。我们将这个 {衬衫} $\times S^1$记为 Y。截面变换前的流形上，按接触同伦分类的紧接触结构数量，与截面变换后的流形上按接触同伦分类的紧接触结构数量相同。由于 $s \geq 0$，我们可以将 Y分解为一个四个边界斜率均为 0 的 {衬衫} $\times S^1$ 和一个边界斜率分别为 0 和 s的环面环带。如图 22 所示。

在 {衬衫} $\times S^1$ 上，四条边界斜率均为 0 时，有三种 Giroux 扭转为零的紧接触结构（如第 3.1.3 节所证）。在边界斜率为 0 和 s [Hon1] 的环面环带上，有 $(s + 1)$ 种紧接触结构。将这个环面环带粘到 {衬衫} $\times S^1$ 上时，我们需要边界上的各区域符号相匹配。可以画出所有组合并检查，其中 $3s+3$ 只有 $2s+3$ 种可能。因此，我们得到 {衬衫} $\times S^1$ 上由分割曲线表示的潜在紧接触结构数量的上界为 $2s+3$。

我们将 Y 上的边界斜率记为 (s_1, s_2, s_3, s_4)，其中斜率 s_i 为 $s(\partial Y)_i$。设 Y 上的边界斜率为 (2，0，0，0)。我们将证明，图 23 中衬衫上的两个分割曲线构型（右上和左上）表示同一衬衫 { 上接触结构的两个不同截面（如 [Hat] 中的命题 2.1 所述）。我们从一个紧接触结构开始，它在边界斜率为 2 的边界分支上有一个正旁路和一个负旁路。这个分割曲线

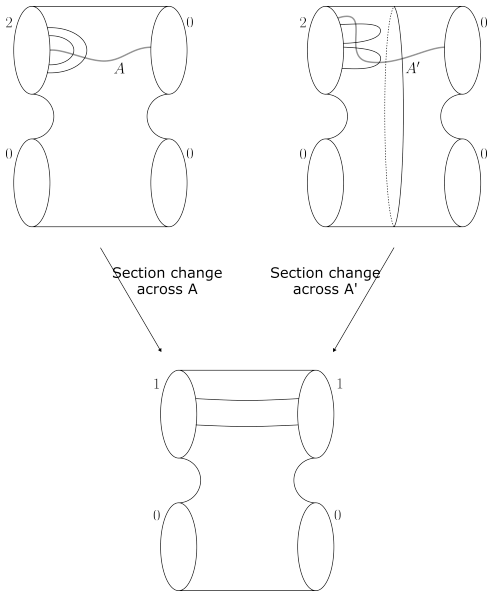


FIGURE 23. 衬衫上的紧接触结构的不同截面 $\{\} \times S^1$。

构型如左上图所示。考虑一个环带 A，它连接斜率为 2 和 0 的边界分支，如图 23 所示。我们沿环带 A 进行截面变换（如 [Hat] 中的命题 2.1 所述），得到边界斜率为 (1，1，0，0) 的 Y''。我们如下得到 Y'' 新截面上的分割曲线：从 $\{\text{shirt}\} \times S^1$ 上边界斜率为 (2，0，0，0) 的旧截面开始，在衬衫上以及全部四个边界环面上画出分割曲线。按照 [Hat] 中命题 2.1 所述的构造方法，在边界斜率为 (1，1，0，0) 的新截面上作图；这个新截面位于边界斜率为 (2，0，0，0) 的旧 $\{\text{shirt}\} \times S^1$ 中。标出分割曲线与新截面边界的所有交点。由于新衬衫嵌入旧 $\{\text{shirt}\} \times S^1$ 中，我们从斜率为 1 的一个边界分支处开始画分割曲线，并沿新衬衫穿过旧截面。由此得到连接两个边界斜率为 1 的边界分支的分割曲线。该分割曲线构型见图 23 下方。接下来，我们考察另一种分割曲线构型：在斜率为 2 的边界分支上有两个符号相同的旁路，并且不可压缩环面上有半个扭转。该分割曲线构型如右上图所示。我们沿跨过半个扭转、连接斜率为 2 和 0 的边界分支的环带 A' 进行截面变换。按照上述相同的方法，我们得到连接两个边界斜率为 1 的边界分支的分割曲线。截面变换后，得到图 23 下方所示的分割曲线构型。因此，通过对 $\{\text{shirt}\} \times S^1$ 进行截面变换，可以从左上方的分割曲线构型得到右上方的分割曲线构型。由此，右上方和左上方的分割曲线构型是 Y 上同一紧接触结构的两个不同截面。

我们得到由 $\{\text{衬衫}\} \times S^1$上的分割曲线表示的潜在紧接触结构数量的上界 $2s+3$。可以画出分割曲线来验证，s个紧接触结构在上界中由两种不同的截面表示（一种带有一个正旁路和一个负旁路，另一种带有相同符号的

旁路，并在不可压缩环面上有半个扭转），见上界 $2s+3$。因此我们得到一个更紧的上界 $s+3$。由于 $s=\Sigma_{i=1}^{4}\lfloor\frac{q_i}{p_i}\rfloor$ 和 $e_0(M)=\lfloor\frac{-q_1}{p_1}\rfloor+\lfloor\frac{-q_2}{p_2}\rfloor+\lfloor\frac{-q_3}{p_3}\rfloor+\lfloor\frac{-q_4}{p_4}\rfloor$，我们得到 $s+3=|e_0(M)+1|$。因此，$\{$衬衫$\}\times S^1$ 上的潜在紧接触结构数量的上界为 $|e_0(M)+1|$。

实心环面 V_i 的边界斜率为 $-\frac{q_i-\lfloor\frac{q_i}{p_i}\rfloor p_i}{v_i-\lfloor\frac{q_i}{p_i}\rfloor u_i}=-\frac{q_i+(a_0^i+1)v_i+a_0^i u_i}{p_i}$。对于此边界斜率，$V_i$ 上恰有 $\Pi_{j=1}^{m}(a_j^i+1)$ 个紧接触结构（ [Hon1] 中的定理 2.3）。因此，在接触同伦意义下，$M=M(0;-q_1/p_1,-q_2/p_2,-q_3/p_3,-q_4/p_4)$ 上具有 $e_0(M)\leq -4$的零 Giroux 扭转紧接触结构至多有 $|(e_0(M)+1)|\Pi_{i=1}^{4}\Pi_{j=1}^{m}(a_j^i+1)$ 个。

由于上界和下界相同，我们得到 $|\pi_0(\text{紧的}^{min}(M))|=|(e_0(M)+1)|\Pi_{i=1}^{4}\Pi_{j=1}^{m}(a_j^i+1)$。这些结构全都是 Stein 可填充的，因为这些接触结构可通过对（ S^3,ξ_{std} ）中的 Legendrian 链进行 -1 Legendrian 手术而在 M 上得到。

由于 M 是含环面的，$\mathbb{Z}^+$ 上存在许多彼此不同痕的紧接触结构，它们对应于整数 Giroux 扭转。正如示例情形所示，M 上具有非零 Giroux 扭转的紧接触结构并非弱可填充。

3.3. 总结 remarks。可以尝试对 Seifert 纤维化流形$M=M(0;-q_1/p_1,\ -q_2/p_2,\ -q_3/p_3,\ -q_4/p_4)$ 上的紧接触结构进行分类，其中 $e_0>-4$ 和 $p_i,\ q_i\in\mathbb{Z}$ 满足，$p_i\geq 2$、$q_i\geq 1$ 和$gcd(p_i,\ q_i)=1$。我们可以通过 Legendrian 手术构造 Giroux 扭转为零的紧接触结构，从而得到紧接触结构数量的下界。为得到紧接触结构数量的上界，我们使用凸曲面理论。这两个界并不一致。目前，作者既无法找到凸曲面理论所发现的接触结构之间的接触同伦，也无法找到能说明这些接触结构彼此不同痕的不变量。

References

[B] Bennequin D. 交缠与 Pfaff 方程（巴黎第七大学博士论文）。[Col] Colin V. 紧接触结构的扭转。载于《高等师范学院科学年刊》2001 年（第 34 卷，第 2 期，第 267–286 页）。[CGH] Colin V, Giroux E, Honda K. 紧接触结构的粗分类。arXiv 预印本 math/0305186。2003 年 5 月 13 日。[Eli] Eliashberg, Y., 1989. 三维流形上过扭接触结构的分类，《数学发明》，98(3)，第 623–637 页。[Eli1] Eliashberg Y. 由全纯圆盘填充及其应用。低维流形几何：第 2 卷：辛流形与琼斯-维滕理论。1990;2:45。[Eli2] Eliashberg, Y., 1990. 维数大于等于 2 的 Stein 流形的拓扑刻画。《国际数学杂志》，1(01)，第 29–46 页。[Eli3] Eliashberg Y. J. Martinet 工作二十年后的接触三维流形。载于傅里叶研究所年刊 1992（第 42 卷，第 1–2 期，第 165–192 页）。[Eli4] Eliashberg Y. 紧接触三维流形中的 Legendrian 结与横截结。现代数学中的拓扑方法（纽约州石溪，1991）。1993;171193。[Et1]Etnyre JB. 透镜空间上的紧接触结构。《当代数学通讯》。2000 年 11 月；2(04):559–77。[EH] Etnyre JB, Honda K. 紧接触结构的不存在性。《数学年刊》。2001 年 5 月 1 日：749–66。[Etn] Etnyre, J.B., 2001. 接触几何入门讲座。arXiv 预印本 math/0111118。

[Gay]Gay DT. 含有三柄的四维辛余 bordism。《几何与拓扑》。2006 年 10 月 28 日；10(3):1749–59。[Gei] Geiges H. 接触拓扑导论。剑桥大学出版社；2008 年 3 月 13 日。[GS] Ghiggini, P. 和 Schönenberger, S., 2002. 紧接触结构的分类。arXiv 预印本 math/0201099。[GLS1] Ghiggini P, Lisca P, Stipsicz A. 小塞弗特三维流形上紧接触结构的分类。《美国数学会会刊》。2006 年 3 月 1 日：909–16。[GLS2] Ghiggini P, Lisca P, Stipsicz A. 某些小塞弗特纤维化三维流形上的紧接触结构。《美国数学杂志》。2007;129(5):1403–47。[G] Ghiggini P. 小塞弗特流形上具有负最大扭转数的紧接触结构。《代数与几何拓扑》。2008 年 5 月 12 日；8(1):381–96。[GH] Ghiggini P, Honda K. Giroux 扭转与扭曲系数。arXiv 预印本 arXiv:0804.1568。2008 年 4 月 9 日。[Gir3] Giroux E. 三维接触结构与曲面叶状结构的分岔。arXiv 预印本 math/9908178。1999 年 8 月 23 日。[Gir1] Giroux E. 接触几何：从三维到更高维。国际数学家大会论文集，第 II 卷（北京，2002），405–414 页，高等教育出版社，北京，2002。[Giroux E. 接触拓扑中的凸性。《瑞士数学会评论》。1991 年 1 月 1 日；66:637–77。[GoS] Gompf RE, Stipsicz AI. 四维流形与基尔比演算。美国数学会；1999。[Hat] Hatcher, A., 2007. 三维流形拓扑基础笔记。https://pi.math.cornell.edu/ hatcher/3M/3M.pdf[Hon1] Honda, K., 2000 《紧接触结构的分类 I：透镜空间、实心环面及 $T^2 \times I$。Geom. Topol. 309–368（电子版）。[Hon2] Honda, K., 2000. 紧接触结构的分类 II。《微分几何杂志》，55(1)，第 83–143 页。[HKM] Honda K, Kazez WH, Matić G. 紧接触结构与紧叶状结构。《几何与拓扑》。2000 年 9 月 12 日；4(1):219–42。[HKM1] Honda K, Kazez WH, Matić G. 凸分解理论。《国际数学研究通知》。2002 年 12 月；2002(2):55–88。[Hon]Honda K. 数学 599 讲义：接触几何。讲义可见 http://www-bcf. usc. edu/ khonda/math599/notes. pdf。[LM] Lisca, P. 和 Matić, G., 1998. 带边界的 Stein 四维流形与接触结构。《拓扑及其应用》，88(1-2)，第 55–66 页。[LiM] Makar-Limanov S. 实心环面上的紧接触结构。《美国数学会汇刊》。1998;350(3):1013–44。[LS] Lisca P, Stipsicz AI. Ozsváth-Szabó 不变量与紧接触三维流形，III。《辛几何杂志》。2007 年 12 月；5(4):357–84。[JM] Martinet J. 三维流形上的接触形式。载于《利物浦奇点研讨会 II 论文集》1971（第 142–163 页）。施普林格，柏林，海德堡。[Pat] Massot, P., 2014. 三维接触几何中的拓扑方法。载于《接触与辛拓扑》（第 27–83 页）。施普林格，尚。[M] Matkovič I. 小塞弗特纤维化 L–空间上紧接触结构的分类。《代数与几何拓扑》。2018 年 1 月 10 日；18(1):111–52。[Sim] Simone J. 某些铅垂三维流形上的紧接触结构。arXiv 预印本 arXiv:1710.06702。2017 年 10 月 18 日。[Siv] Steven Sivek 接触拓扑笔记 http://wwwf.imperial.ac.uk/∼ssivek/courses/12s-math273.php。[Wan] Wand A. Legendrian 手术保持紧性。《数学年刊》。2015 年 9 月 1 日：723–38。[W] Wu H. 小塞弗特空间上的紧接触结构（麻省理工学院博士论文）。[Kan] Kanda, Y., 1997. 三维环面上紧接触结构的分类。《分析与几何通讯》，5(3)，第 413–438 页。