arXiv:2303.09504v2 [math.GR] 3 Oct 2023

阿廷幺半群凯莱图

Rachael Boyd、Ruth Charney、Rose Morris-Wright 和 Sarah Rees

Abstract. 本文研究 Artin 幺半群 Cayley 图的性质。该图是相对于由相应 Artin 幺半群 A_Γ^+ 给出的（无限）生成集的 Artin 群 A_Γ 的 Cayley 图。在此前的一篇论文中，前三位作者引入了幺半群 Deligne 复形，并证明对于所有 Artin 群，该复形都是可缩的。本文证明，Artin 幺半群 Cayley 图与对 A_Γ 的 Deligne 复形所作的一种修改准等距；该修改是将幺半群 Deligne 复形的平移像锥化。随后，我们探讨幺半群 Cayley 图何时具有无限直径。我们猜想，对于所有无限型 Artin 群，这一结论都成立。我们给出一组蕴含无限直径的判据，并利用已有的大类型 Artin 群和 3-自由 Artin 群字问题解法，证明对于包含这两种类型之一的三生成元子群的任意 Artin 群，该猜想均成立。

1. Introduction

Artin 群（也称为 Artin-Tits 群）是一大类与 Coxeter 群密切相关的群。它们自然地出现在代数几何、拓扑学和表示理论中。这类群的经典例子是辫群，其对应的 Coxeter 群为对称群。辫群已通过组合方法和几何方法得到广泛研究。虽然其中许多技巧可以推广到所有球面型 Artin 群（即其对应的 Coxeter 群有限的 Artin 群），但与无限 Coxeter 群相关的 Artin 群面临着更大的挑战，至今仍大多令人费解。近年来，人们大力寻求研究这些群的新几何方法。本文探讨一些新的组合方法。

要定义一个 Artin 群，我们先取一个标记图 Γ，它有有限的顶点集 $X = \{x_1, \dots x_n\}$ 和边集 E，其中每条边 $\{x_i, x_j\} \in E$ 都标记着一个整数 $m_{i,\ j} = m_{j,\ i} \geq 2$。然后，我们将 Artin 群 A_Γ 定义为具有如下表示的群

$$A_\Gamma = \langle X \mid \underbrace{x_i x_j x_i \dots}_{\text{length } m_{i,j}} = \underbrace{x_j x_i x_j \dots}_{\text{length } m_{i,j}} \ \forall \{x_i, x_j\} \in E \rangle.$$

如果 Γ 中的 x_i 与 x_j 之间没有边，则设 $m_{i,j} = \infty$，并且在表示中 x_i 与 x_j 之间没有关系。相应的 Coxeter 群 W_Γ 是一个群，其表示与 A_Γ 相同，只是对所有 i添加了关系 $x_i^2 = e$，其中 e 是单位元。

如果我们只允许生成元的正幂，那么上面的表示便给出了一个幺半群，A_Γ^+。事实证明，对于 Artin 群来说似乎棘手的问题，在幺半群的情形下往往更容易解决。例如，由于表示中的所有关系都保持字的长度不变，因此可以轻松计算任意给定幺半群元素的长度函数。因此，幺半群中的字问题很容易解决。此外，幺半群 A_Γ^+ BS72, Mic 的元素还有一些很好的标准形。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 20F36（主要），20F55、20M32、20F65（次要）。
Key words and phrases. Artin 幺半群、Artin 群。

然而，解决 Artin 群中的字问题要困难得多；对于许多 Artin 群，甚至尚不清楚是否存在这样的解法。

根据 Paris 的一个定理 [Par02], ，从 A_Γ^+ 到 A_Γ 中由 X 的正词构成的子幺半群的自然映射是一个同构。因此，自然会产生这样的问题：能否以及如何利用关于幺半群的信息来理解 Artin 群。对于球面型 Artin 群，群与幺半群之间的联系是通过 Garside 元的存在性建立的。具体而言，Artin 幺半群中存在一个元素 Δ （对应于 Coxeter 群中的最长元素），使得对于任意 $g \in A_\Gamma$，当 n充分大时， $g\Delta^n$ 都可以表示为 A_Γ^+ 中的一个正词。此外， Δ^2 属于 A_Γ的中心。因此，关于 Artin 群性质的大多数问题都可以转化为关于 Artin 幺半群的问题。这个 Garside 元的存在是我们理解球面型 Artin 群的关键。（关于 Garside 群和 Garside 元的更多细节，请参阅 [DDG$^+$15] 和 [McC05] 。）

对于无限型 Artin 群，不存在 Garside 元，也没有明确的方法可以将 Artin 幺半群中的信息平移到 Artin 群中。本文通过研究 Artin 群 A_Γ 关于（无限）生成集 $M := A_\Gamma^+$ 的 Cayley 图 Cay(A_Γ, M)，开始着手解决这一问题。我们将其称为 A_Γ 的幺半群 Cayley 图。此 Cayley 图中的测地线对应于表示元素 $g \in A_\Gamma$ 的最小长度多重分式 $g = a_1 a_2^{-1} \dots a_k^{\pm 1}$, $a_i \in A_\Gamma^+$。理解这些测地线是为 A_Γ 中的元素定义标准形的第一步，也为以归纳方式回答关于这些群的一些问题提供了方法。对于球面型 Artin 群，Cay(A_Γ, M) 既无趣也无用，因为 Garside 结构意味着该图的直径为二；我们可以先沿着一条标记为单个幺半群元素的边，再沿着一条标记为 Δ 的某个幂（正向或反向）的边，到达任意元素。我们猜想，在其他所有情形下，也就是说，对所有无限型 Artin 群，Cay(A_Γ, M) 都具有无限直径。本文探讨的正是这个问题。令人惊讶的是，这一点并非显而易见。

第一步是注意到，如果 A_T 是 A_Γ 的特殊子群（也就是说，它由某个子集 $T \subset X$ 生成），那么将 A_T 的幺半群 Cayley 图包含到 A_Γ 的幺半群 Cayley 图中的嵌入是等距嵌入（见命题 2.2）。因此，要证明 Cay(A_Γ, M) 的直径无限，只需找到一个满足这一条件的特殊子群即可。由此，尽管我们主要关注三生成元 Artin 群，我们的结果也适用于任何包含其中一个群作为特殊子群的 Artin 群。我们的主要结果如下。

定理 6.1. 设 Cay(A_Γ, M) 表示 A_Γ 关于生成集$M := A_\Gamma^+$ 的 Cayley 图。那么，只要满足以下任一条件，Cay(A_Γ, M) 的直径就是无限的。

(1) Γ 中存在一对顶点，它们之间没有边相连（等价地，存在 i, j ，使得$m_{i,\ j} = \infty$）。(2) Γ 中包含一个所有边标签均为 ≥ 3 的三角形。(3) Γ 中包含一个三角形，其边标签均不等于 3，且等于 2 的边标签至多有一个。

请注意，本定理未涵盖的无限型三生成元 Artin 群，只有边标签为 $\{2, 3, n\}$ 且满足 $n \geq 6$的那些。本文发表后，Arye Juhasz 告知我们，他已证明了 $\{2, 3, n\}$ 情形。结合我们的结果，目前仅剩下这样一种情形尚未解决：所有三生成元特殊子群均为球面型的 Artin 群。本定理的证明涉及在 Cay(A_Γ, M) 中构造一列长度不断增加的测地线。为此，我们首先给出关于生成元 X中字的一些显式判据，以便构造这样的测地线。借助 Holt 与第四位作者在大型 Artin 群 [HR12] 情形下，以及 Blasco-Garc´ıa、Cumplido 与第三

位作者在 3-自由 Artin 群 [BGCMW22], 情形下所建立的字问题解法，我们进而证明，满足上述任一条件的任意三生成元 Artin 群都符合这些判据。

虽然主定理的证明涉及组合论论证，但最初的研究动机源于几何问题。一个在 Artin 群研究中发挥关键作用的几何构造是 Deligne 复形 $\mathcal{D}_\Gamma$，我们将在第 3 节中对其进行介绍。关于 Artin 群的一个核心猜想称为 $K(\pi,1)$-猜想，它可以归结为证明 Deligne 复形是可缩的。1972 年，Deligne [Del72] 利用 Garside 结构所提供的组合信息，证明该猜想对球面型 Artin 群成立。此后，人们运用更多几何论证，证明了该猜想对某些特殊类别的无限型 Artin 群成立（参见 Paris [Par 14]撰写的综述），但一般情形下的猜想仍难以攻克。在第一至第三位作者的一篇论文中，我们为幺半群引入了 Deligne 复形的一个类似物，称为幺半群 Deligne 复形 $\mathcal{D}_\Gamma^+$，并证明该复形对所有 Artin 幺半群都是可缩的。幺半群 Deligne 复形嵌入完整的 Deligne 复形中，其平移像覆盖了整个 $\mathcal{D}_\Gamma$。我们试图更深入地理解这一覆盖及这些平移像之间的交集，因此开始研究幺半群 Cayley 图。

幺半群 Cayley 图的几何与 Deligne 复形的几何之间存在直接联系。由于 $\mathcal{D}_\Gamma^+$ 是可缩的，在 $\mathcal{D}_\Gamma$ 中为 $\mathcal{D}_\Gamma^+$ 的每个平移附加一个锥不会改变其拓扑。在第 3 节中，我们定义“锥化 Deligne 复形” $C\mathcal{D}_\Gamma$，并证明，

定理 3.2. 对于任意无限型 Artin 群 A_Γ， $C\mathcal{D}_\Gamma$ 与 Cay(A_Γ, M) 准等距 .

本文结构如下。在第 2 节中，我们介绍幺半群 Cayley 图 Cay(A_Γ, M)，并证明特殊子群的幺半群 Cayley 图等距嵌入 A_Γ的幺半群 Cayley 图。在第 3 节中，我们研究锥化 Deligne 复形。主定理的证明见第 4 节和第 5 节。

致谢。作者感谢 Derek Holt 的宝贵交流和建议，也感谢匿名审稿人提出的有益意见。第一作者受 EPSRC Fellowship No. EP/V043323/2 资助。作者还感谢 ICERM 主办 2022 年辫子研讨学期，本项目的部分讨论正是在该学期期间进行的。

2. The monoid Cayley graph

本节将介绍一些基本记号，并讨论 Artin 群的幺半群 Cayley 图与其特殊子群的幺半群 Cayley 图之间的关系。

几何群论中研究有限生成群 G 的一种标准工具，是为 G 赋予度量。为此，先选取一个有限生成集 S，再考虑相对于 S 的 G 的 Cayley 图，记作 Cay(G, S)。这是一个图，其顶点是 G 的元素；当两个顶点 g 和 h 相差一个 S 中的元素时，它们之间就有一条边，也就是说，对于某个 $s \in S$，有 $h = gs$。随后，可以在 G 上定义一个度量：将从 g_1 到 g_2 的距离定义为该 Cayley 图中从 g_1 到 g_2 的最短路径长度；每条这样的路径都由一个 S 上的字标记（ $S \cup S^{-1}$ 上的字符串）。选取不同的（有限）生成集会得到准等距度量，因此这个度量在“粗略”意义上是良定义的。对于具有标准生成集 X 的 Artin 群 A_Γ，我们将这个 Cayley 图记作 Cay(A_Γ, X)。

本文将考虑一种不同类型的 Cayley 图，即相对于无限生成集 M 的 Cayley 图。如上所定义，M 由 Artin 幺半群 A_Γ^+ 中的所有元素组成。该 Cayley 图 Cay(A_Γ, M) 的顶点仍然是 A_Γ 的元素，但当存在某个 $m \in M$ 使得 $h = gm$ 时，两个顶点 g, h 之间便有一条边。注意，这些边具有从 g 到 h 的定向。不过，在该 Cayley 图中的路径可以沿着边的

任一方向行进。因此，从单位顶点 e 到顶点 g 的路径对应于一个由 M 中的元素组成的字（由 $M \cup M^{-1}$ 构成的字符串），该字表示 g。给定一个由标准生成集 X 中元素组成的字 w，我们可以将 w 划分为极大的子词，每个子词要么全为正，要么全为负。由此可确定一个由 M 中元素组成的字，它表示 A_Γ 中的同一个元素。我们将这个字的长度（将其视为 Cay(A_Γ, M) 中的一条路径）称为 w 的幺半群长度，并记作 $|w|_M$。

我们感兴趣的是了解 Cay(A_Γ, M) 的几何性质。以下是一些简单的观察。首先，若 A_Γ 是一个带有 Garside 元 Δ 的球面型 Artin 群，那么任何 $g \in A_\Gamma$ 都可以通过乘以 Δ 的足够高次幂平移到幺半群中；也就是说，存在 n 使得 $g\Delta^n = m \in M$。因此，从单位顶点 e 到 g 存在一条由两条边组成的路径：先经过从 e 到 m 的边，再经过从 g 到 m 的边的反向边。由此可知，在这种情况下，Cay(A_Γ, M) 的直径为二。因此，在球面型的情形下，幺半群 Cayley 图没有太大研究价值。我们将把注意力限制在无限型 Artin 群上。

C猜想 2.1. 对任意无限型 Artin 群，Cay(A_Γ, M) 的直径都是无限的。

这一猜想将是本文的主要研究重点。研究直径需要理解这个 Cayley 图中的测地线。这些测地线本身也值得研究。注意，若两个顶点之间存在一条路径，且路径上的所有边定向相同，那么它们也必然由一条边直接相连，因为幺半群元素的乘积仍是幺半群元素。因此，Cay(A_Γ, M) 中从 e 到 g 的任何测地线都必须是一条交替路径，换言之，它必须是形如 $g = a_1 a_2^{-1} a_3 \dots a_k^{\pm 1}$（或 $g = a_1^{-1} a_2 a_3^{-1} \dots a_k^{\pm 1}$）且满足 $a_i \in M$ 的表达式。

本文将重点研究三生成元 Artin 群的情形。不过，正如我们接下来将看到的，这对高秩阿廷群也有直接的影响。设 A_Γ 是一个标准生成集为 X 的 Artin 群。A_Γ 的一个特殊子群是由子集 $T \subseteq X$ 生成的子群 A_T。根据 van der Lek 的定理 [vdL83], ，该群本身是一个 Artin 群，其定义图是 Γ 中由 T 张成的全子图。

命题 2.2. 设 A_Γ 是一个生成集为 X 的 Artin 群，且 $T \subset X$ 是任意非空子集。设 M_T 是 A_T 中的正幺半群。存在一个从 Cay(A_Γ, M) 到 Cay(A_T, M_T) 的单纯复形收缩。因此，Cay(A_T, M_T) 到 Cay(A_Γ, M) 的自然包含是等距嵌入，也就是说，它将测地线映射为测地线。

证明。此结论源于 Godelle 和 Paris 的工作 [GP12] ，他们构造了从 A_Γ 的 Salvetti 复形到 A_T 的 Salvetti 复形的收缩映射。随后，Charney 和 Paris [CP14] 对这一收缩映射的万有覆盖进行了更深入的研究。A_Γ 的 Salvetti 复形的万有覆盖的 1-骨架，恰好是相对于标准生成集 X 的 A_Γ 的 Cayley 图。边带有首选定向，即对应于 X 中生成元正次幂的定向。在 [CP14], 的定理 1.2 的证明中，他们精确描述了这一收缩映射：它要么将一条边压缩为一个点，要么将其映射为一条具有相同定向的边。由此可知，它会将任意严格正路径（对应于 A_Γ 中的一个幺半群元素）映射为严格正路径（对应于 A_T 中的一个幺半群元素）。因此，它诱导出一个从 Cay(A_Γ, M) 到 Cay(A_T, M_T) 的收缩映射，将每条标记为 M 中元素的边映射为一个顶点，或映射为一条标记为 M_T 中元素的边。特别地，若 γ 是 Cay(A_Γ, M) 中连接 Cay(A_T, M_T) 两个顶点的一条边路径，那么它在收缩映射下的像是 Cay(A_T, M_T) 中连接这两个顶点的一条边路径，且长度不大于原路径。由此可知，Cay(A_T, M_T) 中的测地路径在 Cay(A_Γ, M) 中也必定是测地路径。□

推论 2.3. 若 A_Γ 包含一个特殊子群 A_T，其幺半群 Cayley 图的直径为无限，则 A_Γ的幺半群 Cayley 图也具有无限直径。

例如，设 $T=\{s,t\}$ 是两个没有边相连的生成元，因此 A_T 是由 $\{s,t\}$生成的自由群。容易看出，长度为 $2m$ 的字 $st^{-1}st^{-1}\dots st^{-1}$ 是 Cay(A_T, M_T) 中的测地线。由该推论可知，对于任意底层图不是团的 Γ，Cay(A_Γ, M) 的直径都是无限的。

3. Relationship to the monoid Deligne complex

本节将介绍锥化 Deligne 复形（这里说明一下，它与 Martin 和 Przytycki 的论文 [MP22]中定义的锥化 Deligne 复形不同），并证明所得复形与 Cay(A_Γ, M) 准等距。

我们先简要回顾一下历史。对于任意 Coxeter 群 W_Γ，都存在一个复超平面补空间，W_Γ 在其上自由作用。已知该空间关于 W_Γ 的商的基本群为 A_Γ。K(π,1) 猜想指出，事实上，这个商空间是一个 K(A_Γ,1) 空间。1972 年，Deligne [Del72] 通过构造一个与该超平面补空间的万有覆盖同伦等价的单纯复形，并证明该单纯复形可缩，从而证明球面型 Artin 群满足这一猜想。在 [CD95], 中，第二作者与 M. Davis 为无限型 Artin 群构造了这一复形的一个略微变体，即如今所称的 Deligne 复形；它对无限型 Artin 群发挥着类似的作用。K(π,1) 猜想等价于如下猜想：对于所有 A_Γ，Deligne 复形都是可缩的。在 [CD95] 中，这一猜想在一些特殊情形下（例如 FC 型）得到了证明；更近些时候，Paolini 和 Salvetti [PS21], 证明了仿射型 Artin 群满足这一猜想，但一般情形仍未解决。

要定义 Deligne 复形，首先注意，无限型 Artin 群 A_Γ 的特殊子群 A_T 可能是球面型，也可能是无限型。Deligne 复形 $\mathcal{D}_\Gamma$ 是由陪集 gA_T构成的偏序集 $\mathcal{P}$的几何实现，其中 A_T是球面型特殊子群，而偏序关系由包含关系给出。（注意，我们允许 $T=\emptyset$ 并定义 $gA_\emptyset=\{g\}$。）在 $\mathcal{D}_\Gamma$上可以赋予两种自然的分片欧几里得度量。第一种度量通过采用单纯结构，并规定每个单形都是所有边长均为 1 的标准欧几里得单形而得到。我们将赋予这种度量的 Deligne 复形记作 $\mathcal{D}_\Gamma^\Delta$。另一种度量则通过将 $\mathcal{D}_\Gamma$ 视为立方复形而得到。这里，立方体对应于偏序集$\mathcal{P}$ 中的区间 $[gA_T, gA_R]$，度量规定每个 k 维立方体都与 $\mathbb{R}^k$中的单位立方体 I^k 等距。由于 Deligne 复形中立方体的最大维数有限，因此 $\mathcal{D}_\Gamma$ 上的这两种度量是准等距的；将立方体视为单形的并会使度量产生有界扭曲。我们的论证采用 $\mathcal{D}_\Gamma^\Delta$ 上定义的单纯结构和度量，因为这样更方便。

我们也可以为 Artin 幺半群定义这一空间的一个类似物。具体来说，我们将 $\mathcal{D}_\Gamma^{\Delta+}$ 定义为由满足 $m\in A_\Gamma^+=M$ 的陪集 mA_T 组成的子偏序集 $\mathcal{P}$ 的几何实现。在 [BCMW22], 中，前三位作者证明，对于所有无限型 A_Γ，$\mathcal{D}_\Gamma^{\Delta+}$ 都是可缩的。复形 $\mathcal{D}_\Gamma^{\Delta+}$ 自然嵌入到 $\mathcal{D}_\Gamma^\Delta$中。$A_\Gamma$ 通过对陪集 $g\cdot mA_T=gmA_T$左乘，在 $\mathcal{D}_\Gamma^\Delta$上作用。我们称 $\mathcal{D}_\Gamma^{\Delta+}$ 在 $g\in A_\Gamma$ 的作用下的像为 $\mathcal{D}_\Gamma^{\Delta+}$ 的一个平移，并将其记为 $g\mathcal{D}_\Gamma^{\Delta+}$。

定义 3.1。将锥化 Deligne 复形 $C\mathcal{D}_\Gamma$ 定义为在每个 $\mathcal{D}_\Gamma^{\Delta+}$ 的平移处添加一个“锥点”的单纯 Deligne 复形 $\mathcal{D}_\Gamma^\Delta$，具体如下：对所有 $g\in A_\Gamma$，添加

(1) 一个顶点 v_g(2) $g\mathcal{D}_\Gamma^{\Delta+}$ 中的每个顶点与顶点 v_g之间的一条边

(3) 对每个 p-单形 $\sigma_p\in g\mathcal{D}_\Gamma^{\Delta+}$，都有一个 $p+1$ 单形 $v_g*\sigma_p$。

这又是一个单纯复形，我们在每个单形上赋予标准度量，使所有边的长度均为 1。

定义这个锥化复形的一个动机是，我们知道幺半群 Deligne 复形是可缩的，其平移像也同样可缩。因此，将它们锥化不会改变同伦类型。也就是说：

$$C\mathcal{D}_\Gamma \simeq \mathcal{D}_\Gamma^{\Delta}.$$

现在，我们定义一个从 Cay(A_Γ, M) 中的顶点到 $C\mathcal{D}_\Gamma$ 中的顶点的映射如下：

$$f : \mathrm{Cay}(A_\Gamma, M) \to C\mathcal{D}_\Gamma;\ g \mapsto v_g$$

定理 3.2. 上述映射 f 是一个拟等距，即 Cay(A_Γ, M) $\simeq_{q.i.}$ $C\mathcal{D}_\Gamma$。

证明。首先注意，由于 $\mathcal{D}_\Gamma^{\Delta+}$ 在 A_Γ 下的平移像覆盖了 $\mathcal{D}_\Gamma^{\Delta}$，$\mathcal{D}_\Gamma^{\Delta}$ 中的任意点都属于某个平移像 $g\mathcal{D}_\Gamma^{\Delta+}$，因此它到 $C\mathcal{D}_\Gamma$ 中该平移像对应的锥点 v_g 的距离至多为一。由此，$C\mathcal{D}_\Gamma$ 中的每个点到 f(Cay(A_Γ, M)) 中某个点的距离至多为一。

首先，我们断言，若 g 和 h 在 Cay(A_Γ, M) 中由一条边连接，则 $f(g) = v_g$ 和 $f(h) = v_h$ 在 $C\mathcal{D}_\Gamma$ 中由一条长度为 2 的边路径连接。不失一般性，可以假设该边的方向是从 h 指向 g，因此对于某个 $m \in M$，有 $g = h \cdot m$。现在，$f(g) = v_g$ 与 $gA_\emptyset$ 由一条边连接，而 $gA_\emptyset = h \cdot mA_\emptyset$ 属于 $h\mathcal{D}_\Gamma^{\Delta+}$，所以它与 $v_h = f(h)$ 由一条边连接。因此，我们构造出了一条从 $f(g)$ 到 $f(h)$、长度为 2 的路径，正如所断言的那样。

由于 Cay(A_Γ, M) 中的任意测地线都是由这类边组成的路径，对于 Cay(A_Γ, M) 中的 x 和 y，我们可得

$$d_{C\mathcal{D}_\Gamma}(f(x), f(y)) \le 2 \cdot d_{Cay}(x, y).$$

特别地，这意味着对于任意满足 $A \ge 2$ 的 $A \in \mathbb{R}$，都有 $d_{C\mathcal{D}_\Gamma}(f(x)\ f(y)) \le A \cdot d_{Cay}(x, y)$。还需证明，对于某个 A，有 $d_{Cay}(x, y) \le A \cdot d_{C\mathcal{D}_\Gamma}(f(x)\ f(y))$。

以下论证请参见图 1。取 $C\mathcal{D}_\Gamma$ 中连接 $f(x)$ 与 $f(y)$ 的一条测地线 γ。我们可以将 γ 变形为一条边路径 γ'，它从 x 到 y，且包含在与 γ 相同的单形中。由于 $\mathcal{D}_\Gamma^{\Delta}$ 中单形的最大维数有限，存在一个仅取决于该维数的常数 $B \ge 1$，使得 $B\,\mathrm{lg}(\gamma) \ge \mathrm{lg}(\gamma')$，其中 lg( ) 表示 $C\mathcal{D}_\Gamma$ 中路径的长度。将 γ' 的边标记为 e_1、.....、e_k。γ' 的每条边 e_i 要么是连接锥点的边，要么是 $\mathcal{D}_\Gamma^{\Delta}$ 中的一条边。由于 $\mathcal{D}_\Gamma^{\Delta+}$ 的平移像覆盖了 $\mathcal{D}_\Gamma^{\Delta}$，$\mathcal{D}_\Gamma^{\Delta}$ 中的任意边都位于 $\mathcal{D}_\Gamma^{\Delta+}$ 的某个平移像中。不失一般性，我们可以假设只有首尾两条边的顶点是锥点（其顶点分别为 v_x 和 v_y）；否则，我们可以对锥点顶点之间边路径的每一段应用此证明。于是，除了 e_1 和 e_k 以外，每条边都位于由某个 $g_i \in A_\Gamma$（$2 \le i \le k-1$）作用于 $\mathcal{D}_\Gamma^{\Delta+}$ 所得的平移像中。我们用两条边 d_i^1、d_i^2 替换边 e_i，其中 d_i^1 从 e_i 的起始顶点通向锥点 v_{g_i}，而 d_i^2 从该锥点通向 e_i 的终止顶点。边 e_i 和 e_{i+1} 相交于平移像 $g_i\mathcal{D}_\Gamma^{\Delta+}$ 与 $g_{i+1}\mathcal{D}_\Gamma^{\Delta+}$ 的重叠部分中的一个顶点；也就是说，该顶点满足：对于 M 中的 m_i 和 m_{i+1}，有 $g_i m_i A_T = g_{i+1} m_{i+1} A_T$。由于 A_T 是球面型，这尤其意味着存在 a_i、$b_i \in A_T^+$，使得

$$g_i m_i a_i b_i^{-1} = g_{i+1} m_{i+1} \implies g_i m_i a_i = g_{i+1} m_{i+1} b_i.$$

因此，在 Cay(A_Γ, M) 中，顶点 g_i和 g_{i+1}之间存在一条长度至多为 2 的边路径。类似地，顶点 x 和 g_2 之间存在一条长度为 2 的边路径，顶点 g_{k-1}和 y之间也是如此。这是因为，例如，v_x 通过边 e_1 与一个同时位于边 e_2中的顶点相连，因此也位于 $g_2\mathcal{D}_\Gamma^{\Delta+}$ 中。所以，这个顶点满足 $xm_1A_T = g_2m_2A_T$，其中 m_1 和 m_2 属于 M；如前所述，我们可以论证这对应于一条长度为 2 的边路径。根据修改后的路径

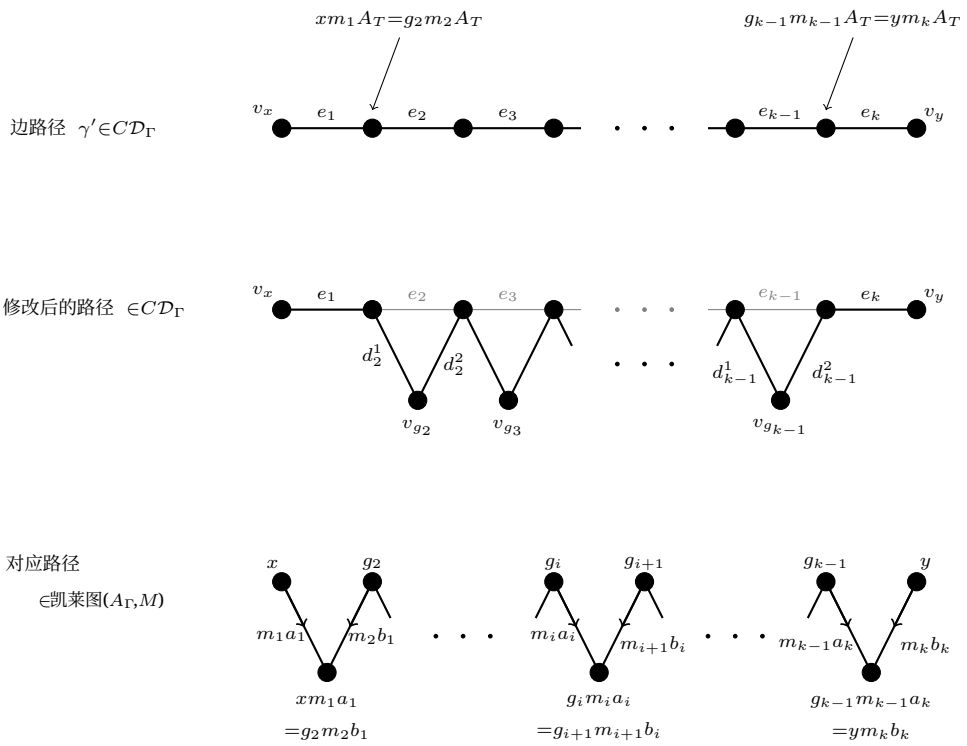

FIGURE 1. $C\mathcal{D}_\Gamma$ 中连接 v_x 和 v_y的边路径 γ'、 $C\mathcal{D}_\Gamma$ 中的相应修改后边路径（其中 γ' 以灰色显示），以及 Cay(A_Γ, M) 中从 x到 y的路径。

在 $C\mathcal{D}_\Gamma$ 中，因此我们能够在 Cay(A_Γ, M) 中构造一条连接 x和 y的路径，如图 3 所示。由此可知

$$d_{\mathrm{Cay}(A_\Gamma,M)}(x,y) \le 2k-2 \le 2k = 2\lg(\gamma'),$$

因此

$$d_{\mathrm{Cay}(A_\Gamma,M)}(x,y) \le 2B\lg(\gamma) = 2B\cdot d_{C\mathcal{D}_\Gamma}(f(x),f(y)).$$

取 $A = 2B \ge 2$，证明即告完成。 □

4. CRITERIA FOR INFINITE DIAMETER

本节将介绍 Artin 群可能满足也可能不满足的两个判据，并证明：若一个 Artin 群 A_Γ 满足这两个判据，那么 Cay(A_Γ, M) 的直径便是无限的。为说明这些判据，我们将列举一些满足和不满足这些判据的简单 Artin 群示例。更多示例见第 5 节；我们将在该节证明，无限型大型 Artin 群和 3-自由 Artin 群满足这两个判据。

假设 Artin 群 A_Γ 满足两个判据，我们证明 Cay(A_Γ, M) 具有无限直径的策略如下。首先，我们取标准生成集 X 上的一个特定词序列 $w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$，其中 $|w_n|_M$ 等于 n。根据判据

2。利用判据 1，我们现在证明：当在 w_n 左侧乘以一个幺半群长度小于 n 的字时，所得的字不可能约化为空词，因此也不可能表示单位元。由此可知， w_n 是 Cay(A_Γ, M) 中的测地线，因此词序列 $\{w_n\}$ 表示 Cay(A_Γ, M) 中长度递增的一系列测地线。这表明 Cay(A_Γ, M) 具有无限直径。

4.1. 判据 1. A_Γ 保持带符号后缀

定义 4.1. 设 A_Γ 是一个以 X为生成集的 Artin 群。令 w 是 X 上的一个测地词，且以正（分别为负）字母结尾；令 u 表示 w最长的正（分别为负）真后缀。令 a 是一个正（分别为负）生成元。若能保证群元素 aw 存在一个在 X 中为测地词且以 u 为后缀的表示，则称 A_Γ 保持正（分别为负）后缀。若 A_Γ 同时保持正后缀和负后缀，则称该群保持带符号后缀。

例如，自由群保持带符号后缀。在自由群中，若 w 是关于标准生成元的测地词（即一个自由约化词），而 aw 不是，这意味着 w必定以字母 a^{-1}开头。因此，可以通过对 aa^{-1} 进行自由消去，得到群元素 aw 的一个测地代表；这样处理后， w 的其余部分（尤其是最长正后缀 u）保持不变。

类似地，自由阿贝尔群 $\mathbb{Z}^n$ 也保持带符号后缀。若 w 是关于标准生成元的测地词，而 aw 不是，这意味着 w 可分解为 $w = w_1 a^{-1} w_2$，并且可以通过让 a 与 w_1 中的每个字母逐一交换，得到字 $w_1 a a^{-1} w_2$，从而得到表示群元素 aw 的测地词。在最后消去 aa^{-1} 后，便得到一条测地线，而后缀 w_2 保持不变。 w 的最长正后缀也必定是 w_2 的后缀，因此这个正后缀得以保持。对称论证表明， $\mathbb{Z}^n$ 也保持负后缀，因此保持带符号后缀。

在我们的结果中，我们采用了 [HR12] 给出的大类型 Artin 群的字问题解法，以及 [BGCMW22] 给出的 3-自由 Artin 群的字问题解法。在第 5 节中，我们将更详细地说明，这些字问题解法如何保证大型和 3-自由 Artin 群保持带符号后缀。

4.2. 判据 2。 A_Γ 包含一个交替阻塞序列 $\{\alpha_n\}$

本小节将介绍构造所需词序列 $\{w_n\}$所需的判据。

定义 4.2。设 A_Γ 是一个以 X为生成集的 Artin 群。设 u 是一个字，且 $x \in X \cup X^{-1}$。我们称(u, x)为阻塞对，若对于 X 上任意形如 wu的测地词，都可推出字 wux 也是 X上的测地词。

直观来说，子词 u 会阻止 w 中的任何字母抵消字母 x。

例如，在自由群中，若 $a, x \in X$ （均为正），则(a, x)是一个阻塞对。在自由阿贝尔群中，若 a, $x \in X$ 且 $a \neq x$，则(a, x)不是阻塞对，因为字 $x^{-1}a$ 是测地的，但字 $x^{-1}ax$ 不是。

现在，我们利用阻塞对构造由 X 中的字组成的词序列，用它们标记 Cay(A_Γ, M) 中任意长的路径。

定义 4.3. 假设 $\{\alpha_n\}$ 是由 X 上的字组成的无限序列，其中若 i 为奇数，则 α_i 是 X 上的非空正词；若 i 为偶数，则 α_i 是非空负词。我们称该

序列 $\{\alpha_n\}$ 为交替阻塞序列，若对于 α_n 中的任意字母 x，都存在 $\alpha_{n-1}\alpha_n$ 中紧邻在 x 之前的某个子词 u，使得 (u,x) 是一个阻塞对。

我们的第二个判据指出，A_Γ 必须包含这样一个交替阻塞序列。

注 4.4. 若 A_Γ 是球面型，则 A_Γ 不含交替阻塞序列。事实上，设 u 是任意正词，且 $x^{-1}\in X^{-1}$。那么 (u,x^{-1}) 不可能是阻塞对。为证明这一点，我们先回顾 Garside 理论中关于球面型 Artin 群的以下事实：Garside 元 Δ^2 的平方属于 A_Γ 的中心，并且对所有 $x\in X$，x 都是 Δ 的右因子。现在考虑字 $\Delta^2 u$，它表示幺半群中的一个元素，因此是 X 上的测地词。另一方面，$\Delta^2 u x^{-1}$ 表示与 $u\Delta^2 x^{-1}$ 相同的群元素，而后者并非自由约化（因为 x 是 Δ^2 的右因子）。因此，(u,x) 不是阻塞对。由此可知，没有任何词的交替序列 $\{\alpha_n\}$ 能满足交替阻塞序列的条件。

4.3. 这些判据的充分性。在本小节中，我们证明，若 Artin 群 A_Γ 满足判据 1 和判据 2，则幺半群 Cayley 图 Cay(A_Γ, M) 的直径为无限。

定理 4.5. 设 A_Γ 是一个 Artin 群，其标准生成集为 X，正幺半群为M。假设 A_Γ 保持带符号后缀，且 A_Γ 包含一个词 $\{\alpha_n\}$的交替阻塞序列。那么幺半群 Cayley 图 Cay(A_Γ, M) 的直径为无限。

证明。令 $w_n=\alpha_1\cdots\alpha_n$。我们将证明，词 $\{w_n\}$ 在 Cay(A_Γ, M) 中标记长度为 n 的测地路径。由此可得 Cay(A_Γ, M) 的直径为无限。

考虑任意一个词 $v_m=\beta_m\ldots\beta_2\beta_1$，其中，若 i 为奇数，则 β_i 是 X 上的正词；若 i 为偶数，则 β_i 是 X 上的负词。我们允许 β_1 为空词，但对于 $i>1$，假设 β_i 非空；因此，v_m 在 Cay(A_Γ, M) 中标记一条长度为 m 或 $m-1$ 的路径。

要证明 w_n 是关于 M 的测地词，只需证明对于所有满足 $m\le n$ 的 v_m，字 $v_m w_n$ 在 A_Γ 中不表示单位元。由于无论使用哪个生成集，空词都表示单位元，因此我们只需证明将 $v_m w_n$ 视为关于 X 的字时，无法将其约化为空词。这由下面的断言得出。

断言。若 $m\le n$，则字 $v_m w_n$ 所表示的群元素有一个关于 X 的测地表示，其末尾为 $\alpha_m\cdots\alpha_{n-1}\alpha_n$。

我们通过对 m 使用归纳法来证明此断言。

基础情形：假设 $m=1$。我们证明，对于所有 n，$v_1 w_n$ 都是关于 X 的测地词，因而正是我们所需的表示。若 $n=1$，则 $v_1 w_1=\beta_1\alpha_1$ 是关于 X 的正词，因此必定是关于 X 的测地词；所以它是一个以后缀 α_1 结尾的测地词，符合要求。

现在我们构造字 $v_1 w_n$，并证明它是测地的。我们假设 $j>1$，且$v_1 w_{j-1}$ 是一个测地词，然后从 $v_1 w_{j-1}$ 出发，通过每次追加 $\alpha_j=x_{j、1}x_{j、2}\ldots x_{j、k_j}$中的一个字母来构造字 $v_1 w_j$，并对已追加字母的数量使用归纳法。作为基础情形，我们追加第一个字母$x_{j、1}$。接着，由于 $\{\alpha_n\}$ 是一个交替阻塞序列，因此可以保证字 $v_1 w_{j-1}$ 存在某个后缀$u_{j、1}$，使得（$u_{j、1}$，$x_{j、1}$）是一个阻塞对。由于我们假设 $v_1 w_{j-1}$ 是 X上的测地词，阻塞对条件意味着$v_1 w_{j-1}x_{j、1}$也必须是 X上的测地词。现在假设归纳假设$v_1 w_{j-1}x_{j、1}\ldots x_{j、i-1}$是 X上的测地词，并追加字母$x_{j、i}$。同样，由于 $\{\alpha_n\}$是一个交替阻塞序列，字$v_1 w_{j-1}x_{j、1}\cdots x_{j、i-1}$存在某个后缀$u_{j、i}$，使得

（$u_{j,\,i}$、 $x_{j,\,i}$）是一个阻塞对。由于$v_1w_{j-1}x_{j,\,1}\cdots x_{j,\,i-1}$是 X上的测地词，阻塞对条件意味着$v_1w_{j-1}x_{j,\,1}\cdots x_{j,\,i}$也必须是 X上的测地词。重复这一方法，将 $\alpha_2\ldots\alpha_n$追加到 $v_1w_1=v_1\alpha_1$，我们看到在每一步中都会追加一个字母$x_{j,\,i}$，且该字在 X上仍然是测地的。因此， v_1w_n是 X上的测地词，后缀为 $\alpha_1\cdots\alpha_n$。

归纳假设：假设 $m>1$。我们假定，对于所有 $m\le n$，由 $v_{m-1}w_n$ 表示的 A_Γ 元素都可以用一个以 $\alpha_{m-1}\cdots\alpha_n$ 结尾、由 X 构成的测地词 ξ 表示。

归纳步骤：考虑 $n=m$ 的情形。根据归纳假设，由 $v_{m-1}w_m$ 表示的群元素可以用一个以 $\alpha_{m-1}\alpha_m$ 结尾、由 X 构成的测地词 ξ 表示。我们假定 m 是奇数，并注意到，对 m 为偶数的情形，可以进行对称论证。回忆一下，词 v_m 满足 $v_m=\beta_mv_{m-1}$，因此 $v_mw_n=\beta_mv_{m-1}w_n=\beta_m\xi$。假设 $\beta_m=b_{l_m}\cdots b_2b_1$，即 β_m 是由 X 构成的长度为 l_m 的词。由于 m 是奇数， α_m 和 β_m 都是由 X 构成的正词，因此每个 $b_i\in X$。从 b_1开始，我们将这些字母逐个添加到 ξ 的左侧。群 A_Γ 保持带符号后缀，因此当我们将正字母 b_1 添加到测地词 ξ 的左侧时，可以得到一个新的测地词，它以与 ξ 相同的正后缀结尾，即后缀α_m。对每个 b_i 重复这一过程，我们便得到一个由 X 构成的测地词，它表示元素 v_mw_m ，并且具有后缀 α_m。

对于 $n>m$，我们重复基础情形中的论证：当时我们从群元素 v_1w_{j-1} 的测地代表出发，并构造了 v_1w_j的测地代表。在这种情况下，我们从刚刚构造的测地词出发，它表示元素 v_mw_m ，并以 α_m结尾。与基础情形一样，对于 $m<j\le n$，我们将字母 $x_{j,\,i}$ 逐个从右侧接上；由于 $\{\alpha_n\}$ 是一个交替阻塞序列，这个字在每一步都仍是X 上的测地词。接上所有 $x_{j,\,i}$ 后，我们便得到 v_mw_n的一个测地代表，它以 $\alpha_m\ldots\alpha_n$ 结尾，正如所需。□

注 4.6。在上述证明中，我们允许这样的可能性： v_n 中提供最后一个字 β_1 的 $|v_n|_M=|w_n|_M$，其符号与 w_n中第一个字 α_1 的符号相同。因此，我们也证明了：由 w_n 表示的 A_Γ 中的元素，不可能由 Cay(A_Γ, M) 中一个以符号相反的字开头的测地 v_n^{-1}表示。

5. The large type and 3-free case

本节将证明，大类型 Artin 群以及非球面型的 3-自由 Artin 群满足第 4 节中为应用定理 4.5 所需的判据。

如果一个 Artin 群的所有关联参数 m_{ij} 都至少为 3（也可以是无穷大），则称其为大型。若一个 Artin 群的参数 m_{ij}均不等于 3，则称其为 3-自由 Artin 群。

引理 5.1. 设 A_Γ 是一个无限型 3-自由 Artin 群，其生成集为 X。那么，要么某个 $m_{ij}=\infty$，要么 Γ 包含一个至多有一条标记为 2 的边的三角形。

证明. 假设 A_Γ 没有 $m_{ij}=\infty$。由于 A_Γ 是无限型，它至少包含 3 个生成元，即 $|X|\ge3$。我们将对 $|X|$ 使用归纳法，证明 Γ 包含一个至多有一条标记为 2 的边的三角形。设 $X=\{a,b,c\}$。如果 a与 b和 c都可交换，那么 $A_\Gamma\cong\mathbb{Z}\times A_{\{b,c\}}$，这与我们的假设 A_Γ 是无限型相矛盾。

现在假设 $X=\{x_1,\ldots x_n\},n>3$。由于 A_Γ是无限型，它必定包含一条边，连接某些 x_i,x_j ，且标记为 $m_{ij}\ne2$。如果包含这条边的每个三角形的另外两条边都标记为 2，那么 x_i和 x_j就与所有其他生成元 x_k交换。因此， $A_\Gamma\cong A_R\times A_T$，其中 $R=\{x_i,x_j\}$且 $T=X\backslash R$。由于 A_R是球面型，A_T必定是无限型，因此根据归纳法，由 T 张成的子图包含一个至多有一条边标记为 2 的三角形。□

从现在起，我们将假设我们的 Artin 群 A_Γ 都是无限型。

HR12] 给出了大类型 Artin 群字问题的一种解法，我们将大量依赖该算法的推论。该算法通过对非测地词的子词进行连续操作，直到可以进行自由消去为止。在 [BGCMW22], 中，通过添加两个生成元之间特定的交换关系，对该算法作了修改，使其适用于 3-自由 Artin 群。

如果两个测地词表示 A_Γ 中的同一个元素，我们就称它们等价。我们将利用这些论文中的以下关键结论来证明判据 1。

命题 5.2。向右约简序列的性质 [HR12，命题 3.3],[BGCMW22，命题5.1]

设 A_Γ 是一个大型或 3-自由 Artin 群， w 是 X上的一个测地词，且 x 是$x \in X \cup X^{-1}$ 中的一个字母，使得 wx 不是测地词。那么，存在 w 的一个后缀 ζ 以及一个称为向右约简序列（RRS）的算法，使得将 RRS 应用于 w时， ζ 会变换为一个以 x^{-1}结尾的等价词 ζ' 。此外，如果 ζ 以正字母（分别为负字母）开头，那么 ζ' 就以正字母（分别为负字母）结尾。

5.1. 判据 1：保持带符号后缀。

引理 5.3. 设 A_Γ 是大型 Artin 群或 3-自由型 Artin 群。那么 A_Γ 保持带符号后缀。

证明。假设 w 是 A_Γ 中关于 X 的一个测地词，其最长正后缀为 u，并假设 a 是 X 中的一个正生成元。

如果 aw 是测地的，那么 u 也是测地词 aw 的一个后缀。

如果 aw 不是测地的，但也不是自由约化的，那么 w 的第一个字母必定是 a^{-1} ，并且这次消去必须产生 aw 的一个测地代表元，且 u 是其后缀。

现在假设 aw 是自由约化的，但不是测地的。将 aw 分解为 aw_1w_2 ，其中 aw_1 是 aw 的最大测地前缀。用 x 表示 w_2 的第一个字母。根据命题 5.2，对 aw_1 的一个后缀 ζ 应用 RRS，所得新测地词以 x^{-1} 结尾。后缀 ζ 必须以正字母 a 开头，否则就可以对 w_1 应用 RRS，而 w 将不是测地的。因此 $\zeta = aw_1$，执行 RRS 算法后，我们得到一个与 aw_1 等价的字 ζ' 。根据命题 5.2， ζ' 以正字母结尾，因为 a 是正的。我们知道这个字母是 x^{-1}，所以得出 x 是负字母。这意味着，作为 aw 的正后缀， u 必须是 w_2 的真后缀。

还要注意， w 是测地线，因此，任何表示与 aw相同群元素的字，其长度都至少为 $|w|_X - 1$。反设存在一个更短的字ξ ，表示与 aw相同的元素。那么， $a^{-1}\xi$ 是一个表示与w相同元素的字，但其长度小于 $|w|_X$，这与 w 是测地线相矛盾。这意味着，对 aw 应用一次 RRS，再对 x^{-1} 和 x 进行自由消去后，我们便得到一个表示与 aw相同群元素的测地代表。正如上一段所述，除了第一个字母被消去之外，后缀 w_2 在该算法中不受影响，因此我们构造出了一个以 u结尾的 aw 的测地代表。□

5.2. 判据 2：构造交替阻塞序列。本节将解释如何为至少有 3 个生成元的大型 Artin 群和 3-自由 Artin 群构造交替阻塞序列。构造出该序列后，我们即可应用定理 4.5 和推论 2.3，得出任何属于大型或 3-自由类型的无限型 Artin 群 A_Γ ，其幺半群 Cayley 图 Cay(A_Γ, M) 都具有无限直径。

为证明判据 2，我们依赖以下结果：

命题 5.4. 等价测地词的后缀

(1) [HR12，命题 4.5] 设 A_Γ 是大型 Artin 群，且 a、$b \in X$ 是不同的生成元。给定一个测地词 $wb^{\pm}a^{\pm}$，任何等价的测地词都必须以 $a^{\pm}$ 或 $b^{\pm}$ 结尾。(2) 设 A_Γ 是 3-自由 Artin 群，且 a、b、$c \in X$ 是不同的生成元，使得$m_{a,\ b} > 3$ 和 $m_{b,\ c} > 3$(a) 给定一个测地词 $wb^{\pm}a^{\pm}$，任何等价的测地词都必须以 $a^{\pm}$、$b^{\pm}$ 或一个与 a 可交换的字母结尾。(b) 给定一个测地词 $wb^{\pm}c^{\pm}b^{\pm}a^{\pm}$，任何等价的测地词都必须以 $a^{\pm}$ 或一个与 a 可交换的字母结尾。

上述命题的第 (2) 部分是新的。我们将假设这一结果，证明大型 Artin 群和 3-自由 Artin 群都满足判据 2，并在本节末尾回到第 (2) 部分的证明。

5.2.1. 大类型 Artin 群。

引理 5.5. 设 A_Γ 是一个大型 Artin 群。那么 A_Γ 含有一个交替阻塞序列。

证明。设 A_Γ 是一个大型 Artin 群，且 a、b、$c \in X$ 是三个不同的正生成元。我们定义一个交替阻塞序列如下：

$$\alpha_1 = ab, \alpha_2 = c^{-1}a^{-1}, \alpha_3 = bc, \alpha_4 = a^{-1}b^{-1}, \alpha_5 = ca, \alpha_6 = b^{-1}c^{-1}$$

以及对于 $i > 6$、$\alpha_i = \alpha_{i-6}$。

这是一个由标准生成元构成的词序列，其中当 i 为奇数时，α_i 是正词；当 i 为偶数时，α_i 是负词。还需验证，对于 α_i 中的任意字母 x，都存在 $\alpha_{i-1}\alpha_i$ 的某个子词 u，紧邻在 x 之前，使得（u，x）是一个阻塞对。不失一般性，假设 $i = 2$ 模 6，因为其他情况的论证具有对称性。因此，只需证明（ab，c^{-1}）和（bc^{-1}，a^{-1}）都是阻塞对。

反设存在某个字 w，使得 wab 是测地线，但 $wabc^{-1}$ 不是。根据命题 5.2，字 wab 存在一个向右约化序列，可将其变为字w'，且 w' 的末字是 c。然而，由于 w' 是 wab的测地代表，这与命题 5.4 的第 (1) 部分矛盾；该部分要求 wab的每个测地代表都必须以集合 $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$中的一个字母结尾。因此，(ab, c^{-1}) 是一个阻塞对。注意，在上述论证中，我们只用到了 a、b、c是大型 Artin 群中互不相同的生成元这一事实，因此可以用完全相同的论证证明 (bc^{-1}, a^{-1}) 是一个阻塞对。这说明给定序列 $\{\alpha_i\}$ 是一个交替阻塞序列。□

5.2.2. 3-自由 Artin 群。

引理 5.6. 设 A_Γ 是一个无限型的 3-自由 Artin 群，且没有 $m_{ij} = \infty$。那么 A_Γ 包含一个交替阻塞序列。

证明。根据引理 5.1，Γ 包含三个生成元 a、b、c，其中至多有一个关系是对易关系。我们也已经讨论过大类型 Artin 群，因此可以假设

$$m_{a,b} > 3, \quad m_{b,c} > 3, \quad m_{a,c} = 2.$$

我们定义如下的交替词序列

$$\alpha_i = babc \text{ if } i \text{ is odd}, \quad \alpha_i = b^{-1}a^{-1}b^{-1}c^{-1} \text{ if } i \text{ is even}.$$

该序列在标准生成元中的正词与负词之间交替，因此只需证明：对于任意字母 $x \in \alpha_i$，在 $\alpha_{i-1}\alpha_i$ 中紧邻 x 之前存在某个子词 u，使得 (u, x) 是一个阻塞对。不失一般性地假设 i 为偶数，仿照引理 5.5 的证明可得，$(babc, b^{-1})$、(cb^{-1}, a^{-1})、$(bcb^{-1}a^{-1}, b^{-1})$ 和 $(a^{-1}b^{-1}, c^{-1})$ 都是阻塞对，其中用命题 5.4 的第 (2) 部分代替第 (1) 部分。请注意，在某些情况下，命题 5.4 的第 (2) 部分应用于按 c、b、a 排序的三个生成元，而非按 a、b、c 排序；由于三元组 $\{m_{a,b}, m_{a,c}, m_{b,c}\}$ 具有对称性，这样做是有效的。□

我们以证明命题 5.4 的第 (2) 部分结束本节。为此，我们需要用到 [BGCMW22] 中给出的字问题解法中的更多技术性内容。请注意，除了此处使用子词 ξ_i，而 [BGCMW22], 中使用子词 w_i 以避免与我们先前定义的序列 w_n 混淆外，我们基本沿用了 [BGCMW22], 中的记号。

回想一下，给定一个字 u，我们可以写成 $u = x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$，其中假设该字是自由约化的，并且 $x_i \neq x_{i+1}$。我们称 n 为该字的音节长度。

备注 5.7。为证明命题 5.4 的第 (2) 部分，我们将使用 [BGCMW22] 中的以下关键事实。这些事实直接来自该文中定义字问题解法的方式。设字 w 可以通过一个向右约化序列变为新字 w'。那么 w 有一个后缀 $\xi_1\xi_2\cdots\xi_{k+1}$，满足以下性质。

F1 对于 $1 \leq i \leq k$，算法的前 i 步会对 $\xi_1\cdots\xi_i$ 进行修改，而不影响后缀 $\xi_{i+1}\cdots\xi_{k+1}$。F2 算法的最后（$k+1$）st 步仅涉及单个字母之间的交换。因此，如果 w' 以字母 x结尾，那么 x 要么与 ξ_{k+1}中的所有字母交换，要么 ξ_{k+1}是空词；后一种情况下，算法仅涉及 k 步。F3 3-自由条件与 [BGCMW22，引理 3.11]共同意味着，对于所有 $i \leq k$，ξ_i 的音节长度至少为 2。F4 如果 ξ_i 以 $x^{\pm}y^{\pm}$ 为后缀，且 $m_{x,\ y} > 3$，那么应用算法的 i^{th} 步后，所得字的后缀为 $\mu\xi_{i+1}\cdots\xi_{k+1}$，其中 μ 是 x, y中的一个字，音节长度为 2。F5 子词 ξ_i 不能以 $x^{\pm}y^{\pm}z^{\pm}$ 结尾，其中 $m_{y,\ z} > 3$ 且 $m_{x,\ y} > 3$。

命题 5.4（2）的证明。为证明 (a) 部分，设 u 是一个以字母 x 结尾、且表示与 $wb^{\pm}a^{\pm}$ 相同群元素的测地词。则 $wb^{\pm}a^{\pm}x^{-1}$ 不是测地线，由命题 5.2 可知，要么 $wb^{\pm}a^{\pm}x^{-1}$ 不是自由约化的，此时 $x = a^{\pm}$，证明完毕；要么字 $wb^{\pm}a^{\pm}$ 可以通过一个向右约化序列变为一个以 x 结尾的新字 u'。

我们的目标是证明 $x = a^{\pm}$、$x = b^{\pm}$ 或 $m_{x,\ a} = 2$ 其中一种情况成立。我们考虑 $wb^{\pm}a^{\pm}$ 的一个分解，其后缀为 $\xi_1\xi_2\cdots\xi_{k+1}$。如果 ξ_{k+1} 非空，那么它以 $a^{\pm}$ 结尾，于是由 (F2) 可知，x 必须与 a 交换。否则，ξ_{k+1} 为空。由 (F3) 可知，ξ_k 以 $b^{\pm}a^{\pm}$ 为后缀；再由 (F4) 可知，经过算法中的 k^{th} 和最后一步后，结果是一个以 $a^{\pm}$ 或 $b^{\pm}$ 结尾的字。

现在我们证明 (b) 部分。与 (a) 部分类似，我们考虑一个以 x 结尾且等价于$wb^{\pm}c^{\pm}b^{\pm}a^{\pm}$的字 u。如果 $wb^{\pm}c^{\pm}b^{\pm}a^{\pm}x^{-1}$ 不是测地线，那么要么 $wb^{\pm}c^{\pm}b^{\pm}a^{\pm}x^{-1}$ 不是自由约化的，并且 $x = a^{\pm}$，要么我们可以使用向右约化序列，得到一个以 x 结尾且

根据命题 5.2 等价于 $wb^{\pm}c^{\pm}b^{\pm}a^{\pm}$ 的新字。我们将证明，后缀 $b^{\pm}c^{\pm}b^{\pm}a^{\pm}$ 意味着不存在这样的序列。

我们已经在 (a) 部分的证明中表明，若 ξ_{k+1} 非空，则 x 必须与 a 交换；若 ξ_{k+1} 为空，则 $b^{\pm}a^{\pm}$ 必须是 ξ_k 的后缀。现在我们还需要考虑 ξ_{k+1} 为空的情形，并考虑 $c^{\pm}$ 是 ξ_k 的一部分以及 $c^{\pm}$ 是 ξ_{k-1} 的一部分这两种情况。在第一种情况下， $c^{\pm}b^{\pm}a^{\pm}$ 是字 ξ_k 的后缀；然而，由于 $m_{b,\ c} > 3$ 和 $m_{a,\ b} > 3$，根据 (F5)，算法无法继续执行并得到以 x 结尾的字，这就产生了矛盾。

另一方面，若 $c^{\pm}$ 是 ξ_{k-1} 的一部分，则 ξ_{k-1} 必须以 $b^{\pm}c^{\pm}$ 为后缀。于是 (F4) 表明，算法执行完第 $(k-1)^{st}$ 步后，字仍以 $\mu b^{\pm}a^{\pm}$ 结尾，其中 μ 是 b 中一个音节长度为 2 的字，即 $\mu b^{\pm}a^{\pm}$ 的形式要么是 $c^ib^ja^{\pm}$ ，要么是 $b^jc^ib^{\pm}a^{\pm}$。无论哪种情况，(F5) 都表明算法无法继续执行，这再次产生了矛盾。□

6. Conclusions

结合定理 4.5 与引理 5.3、5.5 和 5.6，我们得出结论：大型且 3-自由的 Artin 群（无限型）的幺半群 Cayley 图具有无限直径。再结合推论 2.3，我们便得到主定理。

定理 6.1. 设 Cay(A_Γ, M) 表示 A_Γ 关于生成集$M := A_\Gamma^+$ 的 Cayley 图。那么，只要满足以下任一条件，Cay(A_Γ, M) 就具有无限直径。

(1) Γ 包含一对不以边相连的顶点（等价地，存在 i, j ，使得$m_{i,\ j} = \infty$）。(2) Γ 包含一个所有标号均为 ≥ 3 的三角形。(3) Γ 包含一个没有标号等于 3 且至多一个标号等于 2 的三角形。

回顾一下，猜想 2.1 声称，对于所有无限型 Artin 群，Cay(A_Γ, M) 都具有无限直径。要完成该猜想的证明，尚需考虑这样的情形： A_Γ 的所有 3-生成元特殊子群要么是球面型，要么对应于标记为 (2, 3, n) $n \geq 6$ 的三角形。我们认为，后一种情形可以用与大型和 3-自由情形类似的论证解决。

References

[BCMW22] Rachael Boyd、Ruth Charney 和 Rose Morris-Wright。Artin 幺半群的 Deligne 复形。

J. , (B 部分): –。[BGCMW

Algebra 607 53 78, 2022

22] Rub´en Blasco-Garc´ıa、Mar´ıa Cumplido 和 Rose Morris-Wright。3-自由 Artin 群的字问题可解，2022 年。[BS72] Egbert Brieskorn 和 Kyoji Saito。Artin 群与 Coxeter 群。 *Invent. Math.*，17 271，1972 年 245: –。[CD95] Ruth Charney 和 Michael Davis。与无限反射群相关的超平面补空间的 K(π,1) 问题。 *Journal of the American Mathematical Society*，8(3):597–627，1995 年。[CP14] Ruth Charney 和 Luis Paris。Artin 群中抛物子群的凸性。

Bull. Lond. Math. , ( ): –。[DDG+15]

Soc. 46 6 1248 1255, 2014

Patrick Dehornoy、Fran *Foundations of*

Garside theory 22 *EMS Tracts in Mathematics*

cois Digne、Eddy Godelle、Daan Krammer 和 Jean Michel。

Foundations of , 第 卷。欧洲数学会（

Garside theory 22 *EMS Tracts in Mathematics*

EMS），苏黎世，2015 年。标题页上的作者姓名为：Daan Kramer。[Del72] Pierre Deligne。广义辫群的建筑。 *Invent. Math.*，17:273–302，1972 年。[GP12] Eddy Godelle 和 Luis Paris。无限型 Artin-Tits 群的 $K(\pi, 1)$ 与字问题，以及在虚辫群中的应用。 *Math. Z.*，272(3-4):1339–1364，2012 年。[HR12] Derek F. Holt 和 Sarah Rees。大类型 Artin 群是短字典序自动的，且具有正则测地线。*Proceedings of the London Mathematical Society*，104:486–512，2012 年 3 月。

[McC05] Jon McCammond。Garside 结构简介，2005 年。
https://web.math.ucsb.edu/~jon.mccammond/papers/intro-garside.pdf。[Mic99] Jean Michel。关于辫群幺半群中字的注记。 *J. Algebra*，215(1):366–377，1999 年。[MP22] Alexandre Martin 和 Piotr Przytycki。双曲型二维阿廷群的圆柱作用。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(17):13099–13127，2022 年。[Par02] Luis Paris。Artin 幺半群嵌入其群中。 *Comment. Math. Helv.*，77(3):609–637，2002 年。[Par14] Luis Paris。Artin 群的 $K\ \pi\ 1$ 23 2 361 415, (,) 猜想。2014
Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), ( ): –。[PS21] Giovanni Paolini 和 Mario Salvetti。仿射阿廷群的 $K\ \pi\ 1$ *Invent.* (,) 猜想的证明。, ( ): –。[vdL83] Harm van der Lek。复超平面补空间的同伦类型，1983 年。博士论文，奈梅亨。
Math. 224 2 487 572, 2021

School of Mathematics and Statistics, University of Glasgow, Glasgow G12 8QQ, UK
Email address: rachael.boyd@glasgow.ac.uk

Department of Mathematics, Brandeis University, 415 South St., Waltham, MA 02421, USA
Email address: charney@brandeis.edu

Department of Mathematics, Middlebury College, 14 Old Chapel rd, Middlebury VT, 05753, USA
Email address: rmorriswright@middlebury.edu

School of Mathematics, Statistics and Physics, University of Newcastle, Newcastle NE1 7RU, UK
Email address: Sarah.Rees@newcastle.ac.uk