arXiv:2303.09526v1 [math.GN] 16 Mar 2023

微丛的结构与同态。

Sergey Victor Ludkovsky。

2023年3月16日

摘要

本文致力于研究微丛的结构与同态。微丛是流形的推广。对于流形，人们已经研究了何时可以为其同态族赋予流形结构。但对于微丛，这个问题尚未得到研究。本文研究微丛的连续同态，并考察微丛同态族上的拓扑及其结构与微丛之间的关系。本文还研究了必要且充分的条件；在这些条件下，微丛的同态族本身也可以具有微丛结构。[1]

地址：应用数学系，MIREA—俄罗斯技术大学，韦尔纳茨基大街78号，莫斯科119454，俄罗斯；电子邮件：sludkowski@mail.ru

1 引言。

拓扑流形和几何丛在数学及其应用中非常重要（例如，参见 [3, 8, 11, 13]-[17, 20, 21, 24, 25]）。它们的推广形式是微丛。微丛广泛应用于拓扑

[1]关键词和短语：微丛；结构；同态；集开拓扑 2020年数学主题分类：55R60；54B35；54H13

和代数拓扑 [5, 6, 9, 19, 23, 12]。已有一些关于 $\mathbf{R}^n$ 上的微丛以及 R 上巴拿赫空间的研究，但关于环上的拓扑模的研究则很少。对拓扑环上微丛的研究，受到一般拓扑学、代数拓扑、非交换几何、表示论、拓扑群和群环上的丛以及数学物理中的问题的推动 [1, 2, 7, 8], 。微丛的结构比流形或拓扑流形更加复杂。对于流形，已有研究探讨其同态族何时可以赋予流形结构。但对于微丛，这个问题尚未得到研究。

我们回顾其定义和记号（另见 [12]）。

记号 I1. 设 F 是一个拓扑环，其拓扑$\tau_{\mathbf{F}}$ 既非离散拓扑，也非反离散拓扑。在这种情况下，(F $\tau_{\mathbf{F}}$) 称为真拓扑环。F 上的拓扑左模记作 $X_{\mathbf{F}}$，若 F 已明确，则简记为 X 。假定环 F 关于加法是结合且交换的，但关于乘法可以是非交换或非结合的。

下文中，也将拓扑环或拓扑模简称为环或模。它们的同态均假定为连续的。若无另行说明，拓扑空间、模和环中的邻域均指开邻域；拓扑术语均按书籍 [4]中的含义使用。

定义 I2. 假设满足以下条件：

($I2.1$) 存在拓扑空间 A 和 E;

($I2.2$) 存在连续映射 $i: A \to E$ 和 $p: E \to A$ ，使得$p \circ i = id$, 其中 $id = id_A: A \to A$ 是恒等映射， $p \circ i$ 表示映射复合;

($I2.3$) 对于每个 $b \in A$ ，都存在 b 的邻域 U 和 i的邻域 V ，使得 $i(U) \subset V$且 $p(V) \subset U$，并且 V与 $U \times X$同胚，其中h_V: $V \to U \times X$ 是一个同胚;

($I2.4$) 存在连续映射：一个投影 $\hat{}\pi_1: U \times X \to U$，一个单射 $\iota_0: U \to U \times X$，以及另一个投影 $\hat{}\pi_2: U \times X \to X$ ，使得 $\hat{}\pi_1(d, x) = d$, $\iota_0(d) = (d, 0)$，并且对每个 $d \in U$ 和 $x \in X$，$\hat{}\pi_2(d, x) = x$ ；它们

应满足恒等式：$\hat{}\pi_1 \circ \iota_0|_U = p|_V \circ i|_U$，其中 $i|_U$ 表示 i 在 U 上的限制。

称条件 $(I2.1)$-$(I2.4)$ 定义了一个微丛 $\mathcal{B}$ $=\mathcal{B}(A, E, \mathrm{F}\ X, i, p)$，其纤维为 $X = X_{\mathbf{F}}$，底空间为 $\mathcal{B}$；其中，A 称为底空间，E 称为全空间。

如果指定了某些数据（例如 F 或 X），为了简化记号，可以在 $\mathcal{B}(A, E, \mathrm{F}\ X, i, p)$ 中省略它们。此前，文献 [12]已开始研究其某些拓扑性质。

本文致力于研究微丛同态。本文研究了微丛同态族的拓扑。关于这些内容的预备知识见定理4、命题 6、推论 7-10。命题 15 给出了典范微丛的存在性。定理12、22研究了拓扑环上微丛及其同态族的特定正则性。拓扑之间的比较见定理23。例24.(1)-(5)给出了一些拓扑类型。本文还深入考察了同态族结构与微丛之间的关系（见定理 28）。定理 30研究了微丛的嵌入。定理32、33、34、36研究了诱导同态。本文还研究了微丛同态族能够自身获得微丛结构的必要充分条件。

本文的所有主要结果均为首次获得，可用于拓扑、代数拓扑、非交换几何学、表示论、数学分析、数学物理及其应用的后续研究。

2 微丛的同态。

定义1. 设 $\mathcal{B}_j = \mathcal{B}(A_j, E_j, F_j, X_j, i_j, p_j)$为微丛，$j \in \mathbf{N}$。若 $A_2 \subset A_1$，$E_2 \subset E_1$，$F_2 \subset F_1$，$X_2 \subset X_1$，$i_1|_{A_2} = i_2$，$p_1|_{E_2} = p_2$，则对每个 $b \in A_2$ 邻域 U_j（属于 b 且包含于 A_j）以及 V_j 的 $i_2(b)$（属于 E_j），都存在使条件$(I2.3)$、$(I2.4)$成立的邻域；若 $U_2 = U_1 \cap A_2$，$V_2 = V_1 \cap E_2$，$h_{V_1,1}|_{V_2} = h_{V_2},2$，$\iota_{0,1}|_{U_2} = \iota_0,2$，$\hat{}\pi_{1,1}|_{U_2 \times X_2} = \hat{}\pi_1,2$，$\hat{}\pi_{2,1}|_{U_2 \times X_2} = \hat{}\pi_2,2$，则 $\mathcal{B}_2$ 是

称为微丛 $\mathcal{B}_1$中的子微丛，其中$h_{V_j,j}$, $\iota_{0,j}$, $\hat{}\pi_{1,j}$, $\hat{}\pi_{2,j}$对应于 $\mathcal{B}_j$。

如果 $\mathcal{B}_2$ 是微丛 $\mathcal{B}_1$ 中的子微丛，并且 A_2 在 A_1 中是开的，则设 $\alpha_1 = 1$，否则设 $\alpha_1 = 0$；如果 E_2 在 E_1 中是开的，则设 $\alpha_2 = 1$，否则设 $\alpha_2 = 0$；如果 F_2 在 F_1 中是开的，则设 $\alpha_3 = 1$，否则设 $\alpha_3 = 0$；如果 X_2 在 X_1 中是开的，则设 $\alpha_4 = 1$，否则设 $\alpha_4 = 0$。那么称 $\mathcal{B}_2$ 在 $\mathcal{B}_1$ 中是 β-开的，其中 $\beta = (\alpha_1, 2\alpha_2, 3\alpha_3, 4\alpha_4)$。类似地，定义 $\mathcal{B}_2$ 在 $\mathcal{B}_1$ 中的 β-闭（β-紧）子微丛。为简化记法，可以省略 β 的零坐标。对于 $\beta = (1, 2, 3, 4)$，可以简称开（闭、紧）子微丛，而不说 β-开（分别为 β-闭、 β-紧）子微丛。

假设对于固定的 j， $q = (b, e, f, x)$ 满足 $b \in A_j$, $e \in E_j$, $f \in F_j$, $x \in X_j$，且 $i_j(b) = e_1 \in E_j$、 $p_j(e_1) = b$，并且关于 A_j 中 b 的邻域 U 以及 E_j 中 e_1 的邻域 V，条件 $(I2.3)$ 、 $(I2.4)$ 均成立，$\hat{}\pi_1 \circ h_V(e) = b$, $\hat{}\pi_2 \circ h_V(e) = x$。那么 q 将称为 $\mathcal{B}_j$ 中的一个元素，记作 $q \in \mathcal{B}_j$。若 $(\forall q(q \in C_j) \to (q \in \mathcal{B}_j))$，则写作 $C_j \subset \mathcal{B}_j$，并称 C_j 为 $\mathcal{B}_j$ 中的一个子集。我们还令 $C_j = (C_j^1, C_j^2, C_j^3, C_j^4)$，其中 $C_j^1 \subset A_j$, $C_j^2 \subset E_j$,$C_j^3 \subset F_j$, $C_j^4 \subset X_j$。此外，若 C_j 是 $\mathcal{B}_j$ 的子微丛，也记作 $C_j \subset_M \mathcal{B}_j$；也就是说，存在一个从 C_j 到 $\mathcal{B}_j$ 的嵌入 π，使得 $\pi = id_{C_j}$。特别地，若 $C_j = \{q\}$，其中 $q = (b, i_j(b), 0, 0)$，则也记作 $q \in_M \mathcal{B}_j$。

注2. 如果子环 F_2 在环 F_1 中是开的（或者左 F_2-模 X_2 在左 F_1-模 X_1 中是开的），那么根据 [8], 中的定理5.5， F_2 在 F_1 中是闭的（或者 X_2 在 X_1 中是闭的），因为 F_j （或者 X_j）相对于加法具有交换拓扑群的结构。对于拓扑空间（拓扑环或左模） A 和 B，由 $B^A =$ 将 $\mathbf{C}(A, B)$ （分别将 $Hom(A, B)$ ）记作所有连续映射（分别为连续同态） $f : A \to B$ 的族。如果 A 和 B 是左 F- 模，那么 $Hom_F(A, B)$ 表示所有连续左 F-线性同态 $g : A \to B$ 的族。

如果环 F 是结合的，则通常假设对于左 F-模 $X = X_F$ 中的每个 a、 b，以及 F 中的每个 x，都有 $(ab)x = a(bx)$。如果 F 是结合且交换的，还假设对于 F 中的每个 a、 b，都有 $a(bx) = b(ax)$,

在 X
中。

用 $Hom(\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_k)$ 表示满足条件 (2.1) – (2.5) 的微丛的所有连续同态π_k^n 的族： $\mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_k$

(2.1) $\pi_k^n = (\pi_{1,k}^{1,n}; \pi_{2,k}^{2,n}; \pi_{3,k}^{3,n}; \pi_{4,k}^{4,n})$ with

(2.2) $\pi_{1,k}^{1,n} : A_n \to A_k$ and $\pi_{2,k}^{2,n} : E_n \to E_k$,

$\pi_{3,k}^{3,n} : \mathbf{F}_n \to \mathbf{F}_k$ and $\pi_{4,k}^{4,n} : X_n \to X_k$, where

(2.3) $\pi_{2,k}^{2,n} \circ i_n = i_k \circ \pi_{1,k}^{1,n}$ and $p_k \circ \pi_{2,k}^{2,n} = \pi_{1,k}^{1,n} \circ p_n$,

(2.4) $h_k \circ \pi_{2,k}^{2,n} \circ h_n^{-1}(a_n, u_n x_n + v_n y_n) =$

$\pi_{3,k}^{3,n}(u_n) h_k \circ \pi_{2,k}^{2,n} \circ h_n^{-1}(a_n, x_n) + \pi_{3,k}^{3,n}(v_n) h_k \circ \pi_{2,k}^{2,n} \circ h_n^{-1}(a_n, y_n)$,

(2.5) $\hat{\pi}_{2,k} \circ h_k \circ \pi_{2,k}^{2,n} = \pi_{4,k}^{4,n} \circ \hat{\pi}_{2,n} \circ h_n$ and

$\pi_{4,k}^{4,n}(u_n x_n + v_n y_n) = \pi_{3,k}^{3,n}(u_n) \pi_{4,k}^{4,n}(x_n) + \pi_{3,k}^{3,n}(v_n) \pi_{4,k}^{4,n}(y_n)$

对于 $\mathbf{F}_n$ 中任意的 u_n 和 v_n，以及 X_n 中的 y_n 和 $a_n \in A_n$，其中 h_n：$V_n \to U_n \times X_n$ 是开子集 V_n 上的局部同胚，该开子集对应于 A_n 中点 a_n 的一个开邻域 U_n；其中 $\pi^{3}{}_{,3\,k}^{\,n}$ 是环同态，也就是说 $\pi^{3}{}_{,3\,k}^{\,n}(u_n + v_n) = \pi^{3}{}_{,3\,k}^{\,n}(u_n) + \pi^{3}{}_{,3\,k}^{\,n}(v_n)$ 和 $\pi^{3}{}_{,3\,k}^{\,n}(u_n v_n) = \pi^{3}{}_{,3\,k}^{\,n}(u_n) \pi^{3}{}_{,3\,k}^{\,n}(v_n)$，对 $\mathbf{F}_n$ 中任意的 u_n 和 v_n 均成立（另见引言或 [12]）。若 $F_n = F_k = F$，则

$$Hom_F(\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_k) := \{\pi_k^n \in Hom(\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_k) : \pi^{4}{}_{,4}^{\,n}{}_{,k} \in Hom_F(X_n, X_k)\}。$$

若 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X, i, p)$ 是微丛，且 τ_A、τ_E、τ_F、τ_X 分别是底空间 A、全空间 E、拓扑环 F、拓扑左 F-模 X 上的拓扑，并满足条件 $(I2.1)$-$(I2.4)$，则称 $\tau_{\mathcal{B}} = (\tau_A, \tau_E, \tau_F, \tau_X)$ 是 $\mathcal{B}$ 上的拓扑。

若 π_1^2 是双射，$\pi_1^2 : \mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1$ 且 $(\pi_1^2)^{-1} : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ 是微丛的（连续）同态，则称 π_1^2 为微丛的同构（特别地，当 $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ 时为自同构）。

对于每个 $l \in \Lambda$，都有 $q \in C_l \subset \mathcal{B}_j$，根据定义1，自然可得 $C = \bigcup_{l \in \Lambda} C_l \subset \mathcal{B}_j$和 $P = \bigcap_{l \in \Lambda} C_l \subset \mathcal{B}_j$，其中 Λ 是一个集合。

定义 3. 对于微丛 $\mathcal{B}_j$，假设 $C_j \subset \mathcal{B}_j$，即$C_j^1 \subset A_j$, $C_j^2 \subset E_j$, $C_j^3 \subset F_j$, $C_j^4 \subset X_j$。我们将 $\mathbf{H}(C_j, C_l) = \mathbf{H}_{\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_l}(C_j, C_l)$ 定义为所有满足 $\pi^{k}{}_{k\,l}^{\,j}(C_j^k) \subset C_l^k$ for each $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ 的 $\pi_l^j \in Hom(\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_l)$ 所组成的族，$\mathbf{H}_k(C_j, C_l) := \{\pi_{k,l}^{k,j} : \pi_l^j \in \mathbf{H}(C_j, C_l)\}$。类似地，若 $F_j = F_l$，则 $\mathbf{H}^{F_j}(C_j, C_l) = \mathbf{H}_{F_j; \mathcal{B}_j, \mathcal{B}_l}(C_j, C_l) := Hom_{F_j}(\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_l) \cap \mathbf{H}(C_j, C_l)$。于是，所有族 $\mathbf{H}(C_j, C_l)$（或 $\mathbf{H}^{F_j}(C_j, C_l)$，若 $F_j =$

F_l)，其中 $\mathcal{B}_j$ 中的 C_j 是紧的，且 $\mathcal{B}_l$ 中的 C_l 是开的，构成了 $Hom(\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_l)$（或相应地 $Hom_{F_j}(\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_l)$）上的紧开拓扑 $\tau_{co} = \tau_{co}(\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_l)$ 的一个预基。若已指定微丛 $\mathcal{B}_j$ 和 $\mathcal{B}_l$，为简化记号，可在 $\mathrm{H}_{\mathcal{B}_j,\mathcal{B}_l}(C_j, C_l)$ 或 $\mathrm{H}_{F_j;\mathcal{B}_j,\mathcal{B}_l}(C_j, C_l)$ 中省略它们。

定理4. 若 $\mathcal{B}_3$ 是 T_2 微丛 $\mathcal{B}_1$中的子微丛， $\mathcal{B}_4$ 是微丛 $\mathcal{B}_2$中的闭子微丛， F_j 和 X_j 是 T_0，则 $\mathrm{H}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4)$ 在 $(Hom(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)\ \tau_{co})$ 中是闭的。此外，若 $F_1 = F_2 = F_3 = F_4$，则 $\mathrm{H}_{F_1}(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4)$ 在 $(Hom_{F_1}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)\ \tau_{co})$ 中是闭的。

证明. 设 C_1 和 C_3 分别在 $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_3$ 中是紧的， C_2 和 C_4 分别在 $\mathcal{B}_2$ 和 $\mathcal{B}_4$ 中是开的。另一方面，若 $\pi_4^3 \in \mathrm{H}(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4)$，则根据定义1和定义3，存在 $\pi_2^1 \in Hom(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$，使得 $\pi_2^1(\mathcal{B}_3) \subset \mathcal{B}_4$ 和 $\pi_2^1|_{\mathcal{B}_3} = \pi_4^3$。根据 [8] 中的定理4.8和 [4], 中的定理3.1.10、上述条件(2.1)、(2.2)、(2.5)（或参见 [12]）以及定义1， $C_1^3C_1^4$ 和 $C_3^3C_3^4$ 分别在 X_1 和 X_3 中是紧的， π^4,3 4 4, (C_3^4)， π^3,3 3 4, $(C_3^3)\pi^4$,3 4 4, $(C_3^4) = \pi^4$,3 4 4, $(C_3^3C_3^4)$ 和$_{\pi^4}$,1 4 2, (C_1^4), π^3,1 3 2, $(C_1^3)\pi^4$,1 4 2, $(C_1^4) = \pi^4$,1 4 2, $(C_1^3C_1^4)$ 分别在 X_4 和 X_2 中是紧的，其中 $C_1^3C_1^4 = \{x \in X_1 :\ \exists u \in C_1^3,\ \exists y \in C_1^4,\ uy = x\}$。于是我们推出 π^3,1 3 2, $(C_1^3) \subset C_2^3$, π^4,1 4 2, $(C_1^4) \subset C_2^4$, π^4,1 4 2, $(C_1^3C_1^4) \subset C_2^3C_2^4$, π^3,3 3 4, $(C_3^3) \subset C_4^3$,$_{\pi^4}$,3 4 4, $(C_3^4) \subset C_4^4$, π^4,3 4 4, $(C_3^3C_3^4) \subset C_4^3C_4^4$。

注意，$(Hom(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)\ \tau_{co})$ 是乘积拓扑空间 $A_2^{A_1} \times E_2^{E_1} \times F_2^{F_1} \times X_2^{X_1}$中的闭拓扑子空间，该空间赋予 Tychonoff 乘积拓扑，其中 $A_2^{A_1}$, $E_2^{E_1}$, $F_2^{F_1}$, $X_2^{X_1}$赋予相应的紧开拓扑（见注2和定义 3）。事实上，条件 (2.1)-(2.5) 对应于连续映射 π^1,1 1 2, , π^2,1 2 2 ,以及连续同态 π^3,1 3 2, , π^4,1 4 2 ，并且 $i_1, i_2, p_1, p_2, h_1, h_2$, $\hat{}\pi_2$,1, $\hat{}\pi_2$,2 连续。于是我们得到 $A_2^{A_1} \setminus A_4^{A_3} = \bigcup\{\mathrm{H}_1(\{b\}, A_2 \setminus A_4) :\ b \in A_3\}$, $E_2^{E_1} \setminus E_4^{E_3} = \bigcup\{\mathrm{H}_2(\{e\}, E_2 \setminus E_4) :\ e \in E_3\}$, $F_2^{F_1} \setminus \tilde{}\ \mathrm{H}_3(F_3, F_4) = \bigcup\{\tilde{}\mathrm{H}_3(\{f\}, F_2 \setminus F_4) :\ f \in F_3\}$,$X_2^{X_1} \setminus \tilde{}\mathrm{H}_4(X_3, X_4) = \bigcup\{\tilde{}\mathrm{H}_4(\{x\}, X_2 \setminus X_4) :\ x \in X_3\}$，其中 $\mathrm{H} = \mathrm{H}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$, $\tilde{}\mathrm{H}_k = \mathrm{H}_{k;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ 对每个 k成立，$\mathrm{H}_3(B_3, F_4) = \{\xi \in Hom(F_1, F_2) :\ \xi(B_3) \subset F_4\}\tilde{}$对每个 $B_3 \subset F_3$成立，$\mathrm{H}_4(P_3, X_4) = \{\eta \in Hom(X_1, X_2) :\ \eta(P_3) \subset X_4\}$ 对每个$P_3 \subset X_3$成立，其中 $F_2^{F_1} = Hom(F_1, F_2)$, $X_2^{X_1} = Hom(X_1, X_2)$，且通常 $A \setminus B = \{a \in A :\ a \notin B\}$ 表示集合 Ω 的子集 A, B。若 $q \in \mathcal{B}_3$,$q = (b, e, f, x)$, $b \in A_3$, $e \in E_3$, $f \in F_3$, $x \in X_3$，则单点集 $\{q\}$显然是紧的（见定义1）。因此，$\mathrm{H}_1(\{b\}, A_2 \setminus A_4)$ 是开集

在 $A_2^{A_1}$中，$\mathrm{H}_2(\{e\}, E_2 \setminus E_4)$ 在 $E_2^{E_1}$中是开集，$\mathrm{H}_3(\{f\}, F_2 \setminus F_4)$ 在 $F_2^{F_1}$中是开集，$\mathrm{H}_4(\{x\}, X_2 \setminus X_4)$ 在 $X_2^{X_1}$中是开集。因此，$A_2^{A_1} \setminus A_4^{A_3}$在 $A_2^{A_1}$中是开集，$E_2^{E_1} \setminus E_4^{E_3}$在 $E_2^{E_1}$中是开集，$\mathrm{H}_3(F_3, F_4)$ 在 $F_2^{F_1}$中是开集，$\mathrm{H}_4(X_3, X_4)$ 在 $X_2^{X_1}$中是开集，从而 $A_4^{A_3} \times E_4^{E_3} \times \tilde{}\mathrm{H}_3(F_3, F_4) \times \tilde{}\mathrm{H}_4(X_3, X_4)$ 在 $A_2^{A_1} \times E_2^{E_1} \times F_2^{F_1} \times X_2^{X_1}$中是闭集。因此，$\mathrm{H}(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4)$ 在 $Hom(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ 中是闭集，因为 $\mathrm{H}(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4) = (A_4^{A_3} \times E_4^{E_3} \times \tilde{}\mathrm{H}_3(F_3, F_4) \times \tilde{}\mathrm{H}_4(X_3, X_4)) \cap Hom(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$，并且$Hom(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ 在 $A_2^{A_1} \times E_2^{E_1} \times F_2^{F_1} \times X_2^{X_1}$中是闭集。

定义 5. 微丛 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X, i, p)$ 是 T_k 当且仅当A, E, F, X作为拓扑空间是 T_k，其中 $k \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 5, 6\}$。

命题 6. 存在一个从微丛范畴 $\mathcal{M}$ 到拓扑空间范畴 $\mathcal{T}$ 的（遗忘）协变函子 $\mathcal{F}$。

证明. 范畴 $\mathcal{M}$ 有一族对象 $Ob(\mathcal{M})$，其中每个对象都是一个微丛。对于 $Ob(\mathcal{M})$ 中的两个微丛 $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$，存在一族 $Mor(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = Hom(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$，包含从 $\mathcal{B}_2$ 到 $\mathcal{B}_1$ 的所有满足条件 (2.1)-(2.5) 的同态。

对于每个 $\mathcal{B}_j \in Ob(\mathcal{M})$, $j \in \{1, 2, 3\}$，存在一个映射 $m\colon Mor(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2) \times Mor(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) \to Mor(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1)$，使得对于每个 $\pi_2^3 \in Mor(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2)$ 和 $\pi_1^2 \in Mor(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$，$m(\pi_2^3, \pi_1^2) = \pi_1^2 \circ \pi_2^3 \in Mor(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1)$。对于每个 $\mathcal{B}_j \in Ob(\mathcal{M})$，存在一个单位态射 $1_{\mathcal{B}_j}$，使得 $1_{\mathcal{B}_j} \in Mor(\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_j)$，$1_{\mathcal{B}_1} \circ \pi_1^2 = \pi_1^2 \circ 1_{\mathcal{B}_2} = \pi_1^2$ 对于每个 $\pi_1^2 \in Mor(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$ 都成立。因此，$\mathcal{M}$ 是该范畴。

对于每个微丛 $\mathcal{B} \in Ob(\mathcal{M})$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X, i, p)$，我们考虑一个拓扑空间 $A \times E \times F \times X =: P_{\mathcal{B}}$，其上赋予蒂霍诺夫积拓扑。设 $\hat{\iota}\colon A \to P_{\mathcal{B}}$ 是一个映射，使得对每个$b \in A$，$\hat{\iota}(b) = (b, i(b), 0, \hat{}\pi_2(h_V(i(b))))$，其中 V 是 E 中 $i(b)$的一个邻域，并满足条件（$I2.3$）。再设 $\hat{}p\colon P_{\mathcal{B}} \to A$ 是一个映射，使得 $p \circ \theta_2 = \hat{}p$，其中 $\theta_2\colon P_{\mathcal{B}} \to E$ 是投影映射，且对每个 $b \in A$, $e \in E$, $f \in F$, $x \in X$，$\theta_2(b, e, f, x) = e$。因此，由（$I2.2$）可知 $\hat{}p \circ \hat{}\iota = id$，其中 $id = id_A\colon A \to A$ 是恒等映射。于是存在一个映射 $\mathcal{F}\colon Ob(\mathcal{M}) \to Ob(\mathcal{T})$，使得$\mathcal{F}(\mathcal{B}_j) = P_{\mathcal{B}_j}$, $j \in \mathbb{N}$，其中 $\mathcal{T}$是拓扑空间范畴。

考虑任意 $\pi_1^2 \in Mor(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$、$\pi_2^3 \in Mor(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2)$，其中 $\mathcal{B}_j \in Ob(\mathcal{M})$, $j \in \mathbb{N}$。由 (2.1)-(2.5) 可知，存在连续映射 $\pi^1{}_{,1}{}^{j+1}{}_{,j}\colon A_{j+1} \to A_j$；$\pi^2{}_{,2}{}^{j+1}{}_{,j}\colon E_{j+1} \to E_j$；$\pi^3{}_{,3}{}^{j+1}{}_{,j}\colon F_{j+1} \to F_j$；$\pi^4{}_{,4}{}^{j+1}{}_{,j}\colon X_{j+1} \to X_j$, $j \in \mathbb{N}$，因此，$\pi^1{}_{,1}{}^{j+1}{}_{,j} \circ \pi^1{}_{,1}{}^{j+2}{}_{,j+1}\colon A_{j+2} \to A_j$；$\pi^2{}_{,2}{}^{j+1}{}_{,j} \circ \pi^2{}_{,2}{}^{j+2}{}_{,j+1}\colon E_{j+2} \to E_j$；

$\pi^{3,3}{}_{,j}^{j+1} \circ \pi^{3}{}_{,3}^{j+2}{}_{,j+1}$: $F_{j+2} \to F_j$; $\pi^{4,4}{}_{,j}^{j+1} \circ \pi^{4}{}_{,4}^{j+2}{}_{,j+1}$: $X_{j+2} \to X_j$。微丛的同态π_k^n: $\mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_k$ 由 (2.1)、(2.2) 诱导映射 $\tilde{\pi}_k^n$: $P_{\mathcal{B}_n} \to P_{\mathcal{B}_k}$，其中 $\tilde{\pi}_k^n = \prod_{l=1}^4 \pi^{l,l}{}_k^n$ 表示乘积映射。由 (2.3) 可得 $\tilde{\pi}_j^{j+1} \circ \hat{\iota}_{j+1} = \hat{\iota}_j \circ \pi^{1,1}{}_{,j}^{j+1}$ 和 $\hat{p}_j \circ \tilde{\pi}_j^{j+1} = \pi^{1,1}{}_{,j}^{j+1} \circ \hat{p}_{j+1}$。条件 (2.5) 意味着 $\hat{\pi}_{2,j} \circ h_j \circ \pi^{2,2}{}_{,j}^{j+1} \circ \theta_{2,j+1} = \pi^{4,4}{}_{,j}^{j+1} \circ \hat{\pi}_{2,j+1} \circ h_{j+1} \circ \theta_{2,j+1}$。因此，存在一个协变函子 $\mathcal{F}$，使得 $\mathcal{F}(\pi_1^2 \circ \pi_2^3) = \mathcal{F}(\pi_1^2) \circ \mathcal{F}(\pi_2^3)$,$\mathcal{F}$: $\mathcal{M} \to \mathcal{T}$, $\mathcal{F}(\pi_j^{j+1}) \in Mor(\mathcal{F}(\mathcal{B}_{j+1}) \mathcal{F}(\mathcal{B}_j))$。特别地，$\mathcal{F}(id_{\mathcal{B}_1}) = id_{\mathcal{F}(\mathcal{B}_1)}$: $P_{\mathcal{B}_1} \to P_{\mathcal{B}_1}$，其中 $id_Y(y) = y$ 对每个 $y \in Y$ 都成立。

推论 7. 设 $\mathcal{B}$ 是一个微丛。那么，$\mathcal{B}$ 是 T_i，当且仅当 $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ 是 T_i，其中 $0 \le i \le 3\frac{1}{2}$。

推论 8. 假设 $\mathcal{B}$ 是一个微丛，且 $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ 是 T_i，其中 $0 \le i \le 6$。那么 $\mathcal{B}$ 是 T_i。

证明. 推论 7 和推论 8 的断言可由 [4] 中的定理 2.3.11 以及上文的命题 6、定义 5 得出。

推论 9. 微丛 $\mathcal{B}_2$ 中的子微丛 $\mathcal{B}_1$ 是开（闭或紧）的，当且仅当 $\mathcal{F}(\mathcal{B}_1)$ 在 $\mathcal{F}(\mathcal{B}_2)$ 中分别是开（闭或紧）的。

证明. 这由 [4], 中的命题 2.3.1、推论 2.3.4，以及上文的定义1和命题 6 得出。

推论 10. 若 $\pi_1^2 : \mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1$ 是微丛 $\mathcal{B}_2$与 $\mathcal{B}_1$的同构，则 $\mathcal{F}(\pi_1^2)$: $\mathcal{F}(\mathcal{B}_2) \to \mathcal{F}(\mathcal{B}_1)$ 是拓扑空间之间的同胚。

注11. 存在同胚 h_f^3: $F \to F$ 和 $h_x^4 : X \to X$，分别将拓扑环 F 和拓扑左 F-模 X 视为拓扑空间，使得对于每个 f, g，若F, x，且 y 属于 X，则 $h_f^3(g) = f + g$, $h_x^4(y) = x + y$。注意，在非平凡情形下，它们通常不是同态。因此，$h_{f,x} := (id_A, id_E, h_f^3, h_x^4)$: $A \times E \times F \times X \to A \times E \times F \times X$是同胚。另一方面，对于每个$b \in A$ 和 $e \in E$，$\mathcal{B}(\{b\}, \{i(b)\} \cup \{e\}, 0, 0, i, p)$ 是微丛 $\mathcal{B}(A, E, F, X, i, p)$ 中的平凡子微丛。鉴于此以及推论 10，我们定义 $\mathcal{F}_1(\{q\}) = h_{q_3,q_4}(\mathcal{F}(\mathcal{B}(\{q_1\}, \{i(q_1)\} \cup \{q_2\}, 0, 0, i, p)) \setminus h_{q_3,q_4}(\mathcal{F}(\mathcal{B}(\{q_1\}, \{i(q_1)\}, 0, 0, i, p))$，对于每个 $q \in \mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X, i, p)$，其中 $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$, $q_1 \in A$, $q_2 \in E$,$q_3 \in F$, $q_4 \in X$ 以及条件 $(I2.1)$-$(I2.4)$ 均成立（另见定义

1).

据此，我们定义 $\mathcal{B}(\{b\},\{e_1\},F,\{0\},i_y,p_y) =: L_y\mathcal{B}(\{b\},\{e\},F,\{0\},i,p)$ 当且仅当 $b \in A$, $e \in E$, $e_1 \in E$, $p(e) = b$, $i(b) = e$, $p_y(e_1) = b$,$i_y(b) = e_1$, $\hat{}\pi_2(h_V(e_1)) = y \in X$, $\hat{}\pi_2(h_V(e)) = 0 \in X$，其中 $\hat{}\pi_2(h_V \circ i_y) = h_y^4 \circ \hat{}\pi_2(h_V \circ i)$, $p_y \circ i_y = id$, $e \in V$ 且条件 $(I2.1)$-$(I2.4)$ 均成立，$\mathcal{B}(\{b\},\{e\},F,\{0\},i,p) \subset_M \mathcal{B}(A,E,F,X,i,p)$。这意味着 $L_y \circ L_{-y} =\hat{} L_{-y} \circ L_y = id_{\mathcal{B}}$.。因此，存在由平移算子 L_{-y} 诱导的嵌入 L_y: $\mathcal{B}(\{b\},\{e_1\},F,\{0\},i_y,p_y) \hookrightarrow \mathcal{B}(A,E,F,X,i,p)$。

定理 12. 如果微丛 $\mathcal{B}_1$ 是 $T_1 \cap T_3$，那么 $(Hom(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1)\ \tau_{co})$ 是 $T_1 \cap T_3$。

证明。任取 $\pi_1^2 \in \mathrm{H}(C_2,C_1)$，其中 C_2 在 $\mathcal{B}_2$ 中是紧的，且 C_1 在 $\mathcal{B}_1$ 中是开的。根据命题 6 和推论 9，存在一个开子集 V，它包含于 $\mathcal{B}_1$，使得 $\pi_1^2 \in \mathrm{H}(C_2,V)$ 且 $cl_Y[\mathrm{H}(C_2,V)] \subset \mathrm{H}(C_2,C_1)$，其中$cl_Y[\mathrm{H}]$ 表示 H 在 $Y = (Hom(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1)\ \tau_{co})$ 中的闭包；$cl_{\mathcal{B}_1}V \subset C_1$，因为根据 [4]中的定理 3.1.10, $\pi_1^2(C_2)$ 是紧的。我们有 $\pi_1^2(C_2) \subset C_1$，并且 $\mathcal{B}_1$ 是$T_1 \cap T_3$。

对每个 $q \in \mathcal{B}_2$，都对应着 $q = (q_1,q_2,q_3,q_4)$，其中 $q_1 \in A_2$, $q_2 \in E_2$, $q_3 \in F_2$, $q_4 \in X_2$，因此，根据命题 6 和注11，$\mathcal{F}(\{q\}) \in \mathcal{F}(\mathcal{B}_2)$。于是，对每个 $q \in C_2$，存在一个开集 W_q，属于 $\mathcal{B}_1$，使得 $\pi_1^2(q) \in W_q$且 $cl_{\mathcal{B}_1}W_q \subset C_1$，由推论 9 可得。$\{W_q{:}q \in C_2\}$ 对 $\pi_1^2(C_2)$ 的开覆盖包含一个有限子覆盖 $\{W_{q_1},...,W_{q_n}\}$，其中 $n \in \mathbf{N}$。令 $W = \bigcup_{k=1}^n W_{q_k}$，于是 $\pi_1^2(C_2) \subset W$ 且 $cl_{\mathcal{B}_1}W = \bigcup_{k=1}^n cl_{\mathcal{B}_1}W_{q_k} \subset C_1$。这意味着 $\pi_1^2 \in \mathrm{H}(C_2,W)$，并且 $\mathrm{H}(C_2,cl_{\mathcal{B}_1}W) \subset \mathrm{H}(C_2,C_1)$。根据定理4，$\mathrm{H}(C_2,cl_{\mathcal{B}_1}W)$ 是闭的，因此，$cl_{Hom(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1)}\mathrm{H}(C_2,W) \subset cl_{Hom(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1)}\mathrm{H}(C_2,cl_{\mathcal{B}_1}W) = \mathrm{H}(C_2,cl_{\mathcal{B}_1}W) \subset \mathrm{H}(C_2,C_1)$。这意味着 $(Hom(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1)\ \tau_{co})$ 是 $T_1 \cap T_3$。

推论 13. 对每个 $j \in \{1,2,3\}$，令 $\mathcal{B}_j$ 为一个微丛；令 $\pi_1^2 \in Hom(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1)$，并且对每个 $\pi_2^3 \in Hom(\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2)$，令 $\eta(\pi_2^3) := \pi_1^2 \circ \pi_2^3$。那么 $\eta: Hom(\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2) \to Hom(\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_1)$ 是连续映射，相对于 $Hom(\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2)$ 和 $Hom(\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_1)$ 上的紧开拓扑而言。

证明。若对每个 $j \in \{1,2,3\}$，都有 $C_j \subset \mathcal{B}_j$，则包含映射 $\pi_1^2(\pi_2^3(C_3)) \subset C_1$ 等价于 $\pi_2^3(C_3) \subset (\pi_1^2)^{-1}(C_1)$，因为 $\pi^{k,k\,1}{}^{2},(\pi^{k,k\,2}{}^{3},(C_3^k)) \subset C_1^k$ 等价于 $\pi^{k,k\,2}{}^{3},(C_3^k) \subset (\pi^{k,k\,1}{}^{2},)^{-1}(C_1^k)$ 对每个 $k \in \{1,2,3,4\}$ 均成立。因此，

$\eta^{-1}(\mathsf{H}_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_1}(C_3,C_1))=\mathsf{H}_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_1}(C_3,(\pi_1^2)^{-1}(C_1)).$

定义14。假设微丛 $\mathcal{B}=\mathcal{B}(A,E,F,X,i,p)$ 满足以下条件：对每个 $e\in E$，都存在 e 在 E 中的一个开邻域 V_e，以及 $b=p(e)$ 在 A 中的一个开邻域 U_b，使得 V_e 与 $U\times X$ 同胚，其中条件（$I2.1$）-（$I2.4$）均成立。则称 $\mathcal{B}$ 为典范微丛。

命题 15. 若 $\mathcal{B}_2=\mathcal{B}(A,E_2,F,X,i_2,p_2)$ 是一个微丛，则存在一个典范微丛 $\mathcal{B}_1=\mathcal{B}(A,E_1,F,X,i_1,p_1)$，它与 $\mathcal{B}_2$ 和 $\mathcal{B}_1\subset_M\mathcal{B}_2$ 基邻域同构。

证明。令

(15.1) $E_1=\bigcup\{e\in E_2$：$\exists b\in A,\exists U\in\tau_A,b\in U,\exists V\in\tau_{E_2},e\in V$，$\exists h_V$:$V\to U\times X$ 是一个同胚，&($I2.3$)&($I2.4$) 满足 $\}$,

其中 τ_A 和 τ_{E_2} 分别表示 A 和 E_2 上的拓扑。因此，$E_1\subset E_2$ 和 $i_2(A)\subset E_1$，故令 $i_2=i_1$。由微丛 $p_2\circ i_2=id_A$ 的定义，$p_2(E_2)=A$。赋予 E_1 从 E_2 继承的拓扑 τ_{E_1}，并令 $p_1=p_2|_{E_1}$。因此，$p_1\circ i_1=id_A$，id_A：$A\to A$，$p_1(E_1)=A$，$p_1|_V\circ i_1|_U=\hat{}\pi_1\circ\iota_0|_U$，其中 U 和 V 如上文 (15.1) 所述。于是条件 ($I2.1$)-($I2.4$) 得到满足，且 $\mathcal{B}_1$ 是该微丛。由于 $A_2=A_1=A$，$X_2=X_1=X$，$F_2=F_1=F$，$E_1\subset E_2$，因此 $\mathcal{B}_1$ 是 $\mathcal{B}_2$，$\mathcal{B}_1\subset_M\mathcal{B}_2$ 中的子微丛。结合 $V_1=E_1=V_2$，$g=id_{V_1}$ 和 $s=id_A$，根据定义 4 可知，$\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 在 [12] 中基邻域同构。

定义 16. 设 X_1 和 X_2 是拓扑左 F-模，其中 F 是拓扑环。所有连续左 F-线性同态f：$X_2\to X_1$ 构成的族记为 $Hom_F(X_2,X_1)$。

设 $q:X_{2,F_2}\to X_{1,F_1}$ 是满足 (16.1)- (16.3) 的连续同态:

(16.1) $q(x+y)=q(x)+q(y)$,
(16.2) $q(ax)=g(a)q(x)$

对 X_2 中的每个 $a\in F_2$、x 和 y，其中 $g=g_q$：$F_2\to F_1$ 是一个连续同态

(16.3) $g(a+b)=g(a)+g(b)$, $g(ab)=g(a)g(b)$

对于每个 a 和 b，其中 F_2 中的 $X_j=X_{j,\ F_j}$ 是拓扑左 F_j-模 ,

F_j 是拓扑环 $j \in \{1,2\}$。满足条件 (16.1)-(16.3) 的所有连续同态构成的族记为 $Hom(X_2, X_1)$。

我们回顾一下：若 X 是拓扑空间，δ 是 X 的非空子集族，且对每个 $x \in X$ 及其开邻域U，都存在 $B \in \delta$ 使得 $x \in B \subset U$，则称 δ 为X上的网。若网 δ 中的每个 $B \in \delta$ 在 X中都是闭集（或紧集），则称该网为闭网（或紧网）。

设 δ_j 是 X_j 上的闭网（或紧网），α_j 是 F_j上的闭网（或紧网）。那么，赋予集合开拓扑（或紧开拓扑）$\tau(F_2, F_1, X_2, X_1, \alpha_2, \delta_2)$后，$Hom^{\alpha_2, \delta_2}(X_{2,F_2}, X_{1,F_1})$是$Hom(X_{2,F_2}, X_{1,F_1})$。类似地，赋予集合开拓扑（或紧开拓扑）$\tau(F, X_2, X_1, \alpha_2, \delta_2)$后，$Hom^{\alpha_2, \delta_2}_F(X_{2,F}, X_{1,F})$是 $Hom_F(X_{2,F}, X_{1,F})$。若指定了某些数据，为简化记号，可以省略这些数据。

固定一个拓扑环 F。今后，除非另有说明，均考虑典范微丛。设 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X_F, i, p)$ 为该微丛。设 α 是 $\mathcal{B}$ 中子集的一个族（特别地，它们可以是基于同一环 F 的子微丛）。若 δ 是 $\mathcal{B}$ 中由非空子集组成的非空族，且对每个 $C \in \alpha$ 以及 $\mathcal{B}$ 中的开子集 $\mathcal{U}$，都存在 $\mathcal{Q} \in \delta$ 使得 $C \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{U}$，则称其为 $\mathcal{B}$ 上的 α-M-网。

若一个 M-网满足以下条件：$((C \in \alpha_0) \leftrightarrow (\exists q \in \mathcal{B}, C = \{q\}))$（见定义1），则称其为 $\mathcal{B}$ 上的 α_0-M-网。若每个成员都是 γ-闭的（或分别为 γ-紧的），则称该 α-M-网为 γ-闭的（或 γ-紧的）。

若 $C_k \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{A}_k \subset_M \mathcal{B}$, $D_j \subset \mathcal{R}$, $\mathcal{B}_j \subset_M \mathcal{R}$，其中 $\mathcal{A}_k$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_j$, $\mathcal{R}$ 是定义在同一拓扑环 F上的微丛 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X_F, i, p)$,$\mathcal{R} = \mathcal{B}(A', E', F, X'_F, i', p')$, $\mathcal{B}_j = \mathcal{B}(A'_j, E'_j, F, X'_{j,F}, i'_j, p'_j)$，那么对于 $\mathcal{A}_k = \mathcal{B}(A_k, E_k, F, Y_k, i, p)$，我们定义

(16.4) $\mathcal{A}_1 \uplus \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}(A_1 \cup A_2, E_1 \uplus E_2, F, Y, i, p)$,

其中，对于每个 k, $Y = cl_X(Y_1 + Y_2)$，$A_k \subset A$, $E_k \subset E$, $Y_k \subset X_{,F}$, $Y = Y_F$;

(16.5) $E_1 \uplus E_2 = \bigcup\{h_V^{-1}((U_1 \cup U_2) \times Y)$: $b \in A_1 \cup A_2, U_j \subset A_j$, $U_j \subset U, i(b) \in V, j \in \{1,2\}\}$，其中满足条件 $(I2.1)$-$(I2.4)$。在

特别地，$\mathrm{H}(L_y\mathcal{B}(\{b\},\{e\},F,\{0\},i,p))\ \mathcal{B}_j)$ 也可简记为 $\mathrm{H}((b,y)\ \mathcal{B}_j)$。

引理 17. 设 $\mathcal{A}_k$ 和 $\mathcal{B}_j$ 如定义 16 所述。则

(17.1) $\mathrm{H}(\mathcal{A}_k,\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2)\ =\mathrm{H}(\mathcal{A}_k,\mathcal{B}_1)\ \cap\mathrm{H}(\mathcal{A}_k,\mathcal{B}_2)$; (17.2) $\mathrm{H}_F(\mathcal{A}_k,\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2)$ $=\mathrm{H}_F(\mathcal{A}_k,\mathcal{B}_1)\ \cap\mathrm{H}_F(\mathcal{A}_k,\mathcal{B}_2)$; 此外，若 X' 是完备的拓扑交换群，则 (17.3) $\mathrm{H}(\mathcal{A}_1\uplus\mathcal{A}_2,\mathcal{B}_j)\ =\mathrm{H}(\mathcal{A}_1,\mathcal{B}_j)\ \cap\mathrm{H}(\mathcal{A}_2,\mathcal{B}_j)$ 且 (17.4) $\mathrm{H}_F(\mathcal{A}_1\uplus\mathcal{A}_2,$ $\mathcal{B}_j)\ =\mathrm{H}_F(\mathcal{A}_1,\mathcal{B}_j)\ \cap\mathrm{H}_F(\mathcal{A}_2,\mathcal{B}_j)$。

证明。我们考虑 $\mathcal{R}=\mathcal{B}(A',E',F,X',i',p')$ 和 $Y'_{1,2}=X'_{1,F}\cap X'_{2,F}$，其中 $X'_{j,F}\subset X'_F$和 $\mathcal{B}_j=\mathcal{B}(A'_j,E'_j,F,X'_j,i'_j,p'_j)\ \subset_M\mathcal{R}$对每个 j都成立，因此 $FY'_{1,2}\subset Y'_{1,2}$ 和 $Y'_{1,2}$ 是交换群，进而 $Y'_{1,2}$ 是拓扑左 F-模。令 $A'_{1,2}=A'_1\cap A'_2$ 和 $E'_{1,2}=E'_1\cap E'_2$，因此$p'_j\circ i'_j|_{A'_{1,2}}=id|_{A'_{1,2}}$, $i'_j|_{A'_j}=i'|_{A'_j}$, $p'_j|_{E'_j}=p'|_{E'_j}$对每个 $j\in\{1,2\}$都成立，进而 $p'_1|_{E'_{1,2}}=p'_2|_{E'_{1,2}}$, $i'_1|_{A'_{1,2}}=i'_2|_{A'_{1,2}}$。若 $b_j\in A'_j$, $i'_j(b'_j)=e'_j\in E'_j$,$e'_j\in V'_j$, $h_{V'_j}$: $V'_j\to U'_j\times X'_j$是同胚，其中对每个 j， U'_j在 A'_j中是开集，则 $h_{V'}|_{V'_j}=h_{V'_j}$, $V'_j\subset V'$, $V'_{1,2}=V'_1\cap V'_2$, $h_{V'}|_{V'_{1,2}}:V'_{1,2}\to U'_{1,2}\times Y'_{1,2}$ 是同胚，且条件 $(I2.1)$-$(I2.4)$ 成立，因为 $(U'_1\times X'_1)\ \cap(U'_2\times X'_2)=U'_{1,2}\times Y'_{1,2}$，其中$U'_{1,2}=U'_1\cap U'_2$。因此 $\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2=\mathcal{B}(A'_{1,2},E'_{1,2},F,Y'_{1,2},i',p')\ \subset_M\mathcal{R}=\mathcal{B}(A',E',F,X',i',p')$。这意味着

$\mathrm{H}(\mathcal{A}_k,\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2)\ =\mathrm{H}(\mathcal{A}_k,\mathcal{B}_1)\ \cap\mathrm{H}(\mathcal{A}_k,\mathcal{B}_2)$ 并且

$\mathrm{H}_F(\mathcal{A}_k,\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2)\ =\mathrm{H}_F(\mathcal{A}_k,\mathcal{B}_1)\ \cap\mathrm{H}_F(\mathcal{A}_k,\mathcal{B}_2)$.

我们有 $\mathcal{A}_1\uplus\mathcal{A}_2\subset_M\mathcal{B}$。由 [12] 中的定义26和定理27可得 $f(\mathcal{A}_k)$ $\subset_M\mathcal{B}_j$。若对每个 $k\in\{1,2\}$，都有 $\pi\in Hom(\mathcal{A}_k,\mathcal{B}_j)$，则 $\pi_1^1(A_1\cup A_2)$ $=\pi_1^1(A_1)\cup\pi_1^1(A_2)\subset A'_j$，其中 $\mathcal{B}_j=\mathcal{B}(A'_j,E'_j,F,X'_j,i'_j,p'_j)\ \subset_M\mathcal{R}$。另一方面，$\pi_3^3(F)\subset F$, $\pi_4^4(Y_1)\subset X'$，且 $\pi_4^4(Y_2)\subset X'$，因此，由连续延拓可得 $\pi_4^4(Y)\subset X'$ [4, 8]，因为对每个 $j\in\{1,2\}$ ，都有 $\pi_4^4\in Hom(Y_j,X')$，并且 X' 作为拓扑交换群是完备的，其中 $Y=cl_X(X_1+X_2)$。因此，$\pi_2^2(E_1\uplus E_2)\subset E'$，从而 $\pi(\mathcal{A}_1\uplus\mathcal{A}_2)\subset\mathcal{R}$。于是，$\pi\in\mathrm{H}(\mathcal{A}_1,\mathcal{B}_j)\ \cap$ $\mathrm{H}(\mathcal{A}_2,\mathcal{B}_j)$ 蕴含 $\pi\in\mathrm{H}(\mathcal{A}_1\uplus\mathcal{A}_2,\mathcal{B}_j)$。

反之，若 $\pi\in\mathrm{H}(\mathcal{A}_1\uplus\mathcal{A}_2,\mathcal{B}_j)$，则对每个 $k\in\{1,2\}$，都有 $\pi|_{\mathcal{A}_k}\in$ $\mathrm{H}(\mathcal{A}_k,\mathcal{B}_j)$，因为 $\mathcal{A}_k\subset_M\mathcal{A}_1\uplus\mathcal{A}_2$。因此

$\mathrm{H}(\mathcal{A}_1 \uplus \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_j) = \mathrm{H}(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_j) \cap \mathrm{H}(\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_j)$，类似地

$\mathrm{H}_F(\mathcal{A}_1 \uplus \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_j) = \mathrm{H}_F(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_j) \cap \mathrm{H}_F(\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_j)$.

定义 18. 如果存在一个 β-闭 M-网 α，定义在 $\mathcal{B}$ 上，使得$\{\mathrm{H}(C_k, D_j)$：$C_k \in \alpha, D_j$ 是 $\gamma-$开子集，那么 $Hom(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ 上的拓扑称为 M-集-(β, γ)-开拓扑，且该集合族是该拓扑的子基 $\mathcal{R}\}_{,\ \beta,\ \gamma}$。赋予拓扑 $\tau_{\alpha,\ \beta,\ \gamma}$ 的 $Hom(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ 将记为 $Hom_{\alpha,\ \beta,\ \gamma}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$。若 $\beta = (1, 2, 3, 4)$ 或 $\gamma = (1, 2, 3, 4)$，则可省略以简化记号。

注 19. 若 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X_F, i, p)$ 和 $\mathcal{R} = \mathcal{B}(A', E', F', X'_{F'}, i', p')$ 是微丛，$B \subset \mathcal{B}, C \subset \mathcal{B}, D \subset \mathcal{R}, G \subset \mathcal{R}$，则由定义 3 可得，

(19.1) $\mathrm{H}_{\mathcal{B},\mathcal{R}}(C, D \cap G) = \mathrm{H}_{\mathcal{B},\mathcal{R}}(C, D) \cap \mathrm{H}_{\mathcal{B},\mathcal{R}}(C, G)$,

(19.2) $\mathrm{H}_{\mathcal{B},\mathcal{R}}(B \cup C, D) = \mathrm{H}_{\mathcal{B},\mathcal{R}}(B, D) \cap \mathrm{H}_{\mathcal{B},\mathcal{R}}(C, D)$.

此外，若微丛 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{R}$ 的环相同，即 $F = F'$，则

(19.3) $\mathrm{H}_{F;\mathcal{B},\mathcal{R}}(C, D \cap G) = \mathrm{H}_{F;\mathcal{B},\mathcal{R}}(C, D) \cap \mathrm{H}_{F;\mathcal{B},\mathcal{R}}(C, G)$,

(19.4) $\mathrm{H}_{F;\mathcal{B},\ \mathcal{R}}(B \cup C, D) = \mathrm{H}_{F;\ \mathcal{B},\ \mathcal{R}}(B, D) \cap \mathrm{H}_{F;\ \mathcal{B},\ \mathcal{R}}(C, D)$.

推论 20. 设 $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(A_1, E_1, F_1, X_1, i_1, p_1)$ 是一个微丛，其中$X_1 = X_{1,F_1}$。设 F_2 是一个拓扑环，且 $X_2 = X_{2,F_2}$ 是拓扑左F_2-模，$f = (\pi^3$,1 3 2, , π^4,1 4 2,)：$X_1 \to X_2$ 是一个单同态，使得 π^3,1 3 2 , ：$F_1 \to F_2$ 是一个环同态，π^4,1 4 2 , ：$X_1 \to X_2$，π^4,1 4 2, $(u_1x_1 + v_1y_1) = \pi^3$,1 3 2, $(u_1)\pi^4$,1 4 2, $(x_1) + \pi^3$,1 3 2, $(v_1)\pi^4$,1 4 2, (y_1) 对每个 u_1, v_1 属于 F_1，以及 x_1, y_1 属于X_1 都成立。则存在一个微丛 $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}(A_2, E_2, F_2, X_2, i_2, p_2)$，以及一个单同态 π_2^1：$\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$，其中 $A_2 = A_{1\circ}$

证明。根据 [12] 中的定理 32，存在微丛 $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}(A_2, E_2, F_2, X_2, i_2, p_2)$ 和同态 π_2^1：$\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$，满足条件 (2.1)-(2.5)，使得 $\pi^{1,\ 1\ 1,\ 2} = id_{A_1}$，其中 $A_2 = A_{1\circ}$ 显然，若 f 是单射，则 π_2^1 是单射，因为 $\pi^{1,\ 1\ 1,\ 2} = id_{A_1}$，并且 $\pi^{2,\ 1\ 22\ ,}$ 根据 [12] 中的 (32.2)-(32.5) 及 (2.3)、(2.4) 是单射。

定义21。设 X 是一个拓扑空间，F 是一个拓扑环，$r \in F, r \neq 0_\circ$ 若对每个属于 X 的 $q \neq s$，都存在一个连续映射 μ：$F \to X$，使得 $\mu(0) = s, \mu(r) = q$，则称 X 为 (F, r)-弧连通。

拓扑左 F-模 $X = X_F$称为完全 (F, r)-

正则，当且仅当对每个 $x \neq 0 \in X$，存在 $\psi \in Hom_F(X, X)$，使得 $\psi(x) = r, X = (Fx) + Ker(\psi), (Fx) \cap Ker(\psi) = \{0\}$，其中 $r \neq 0, r \in F, r$ 固定，且 F 和 X 非平凡。微丛 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X, i, p)$ 称为完全 (F, r)-正则，当且仅当 $\mathcal{B}$ 是 T_1，且对每个闭子集 $G \in \mathcal{B}$ 以及每个 $q \in \mathcal{B}, q \notin G$，都存在 $\phi_{G,q} = \phi \in Hom(\mathcal{B}, \mathcal{F})$，使得 $\phi(G) = \{(0, 0, 0, 0)\}, \phi(q) = (0, r, q_3, r)$，并且 X 完全 (F, r)-正则，其中 $\mathcal{F} = \mathcal{B}(0, F, F, F, i_F, p_F)$，且对每个 $v \in F$，$i_F(v) = v$，而 $p_F(v) = v$，其中 $r \neq 0, r \in F$，$0 \in F$，r 固定。

如果对每个$q \neq s$，满足 $s_3 = 0$ 且 $s_4 = 0$ 属于 $\mathcal{R}$，都存在$\mu_{q,s} = \mu \in Hom(\mathcal{F}, \mathcal{R})$，使得 $\mu(0, 0, 0, 0) = s$ 且 $\mu(0, r, q_3, r) = q$，其中 $r \neq 0$, $r \in F$, r 固定，$s = (s_1, s_2, s_3, s_4)$（见注11），则称微丛 $\mathcal{R}$ 为$(\mathcal{F}, r)$-弧连通。若 F 含幺且 $r = 1$，则也简写为 F-弧连通和 F-正则，分别代替(F, r)-弧连通和(F, r)-正则。

定理22. 微丛 $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(A, E, F, X, i, p)$是完全$(F, r)$-正则的，当且仅当 $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}(A, A, F, 0, i_2, p_2)$和 X 是完全(F, r)-正则的，其中 $i_2 = id_A$, $p_2 = id_A$, $X = X_F$。

证明。由本定理的条件可知，$\mathcal{B}_2$ 同构于 $\mathcal{B}_1$中的子微丛 $\mathcal{B}_3 = \mathcal{B}(A, i(A), F, 0, i, p|_{i(A)})$，$\mathcal{B}_3 \subset_M \mathcal{B}_1$中存在一个同构 π_3^2：$\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_3$，因为 $p \circ i = id_A$：$A \to A$。对于每个$b \in A$，存在 A 中 b 的一个开邻域 U_b，以及 E 中 $i(b)$的一个开邻域 V_b，还有一个同胚 h_{V_b}：$V_b \to U_b \times X$，其中$X = X_F$，由（$I2.3$）可知。因此，$V_b \setminus \{i(b)\}$是 E中的开集，因为 $\mathcal{B}_1$是 T_1。故$\mathcal{B}_3$ 是 $\mathcal{B}_1$ 中的闭集，使得 $i_3 = i$, $p_3 = p|_{i(A)}$, $E_3 = i(A)$。

如果 $\mathcal{B}_1$ 是完全(F, r)-正则的，那么由定义21可得，$\mathcal{B}_3$是完全(F, r)-正则的，因此，$\mathcal{B}_2$是完全(F, r)-正则的。

反之，假设 $\mathcal{B}_2$ 和 X 是完备的（F, r）-正则，$\mathcal{G} = \mathcal{B}(A_4, E_4, F, Y_F, i_4, p_4)$ 是 $\mathcal{B}_1$, $q \in \mathcal{B}_1$, $q \notin \mathcal{G}$ 中的闭子微丛，其中 $i_4 = i|_{A_4}$, $p = p|_{E_4}$, $A_4 \hookrightarrow A$, $E_4 \hookrightarrow E$, $Y_F \hookrightarrow X_F$。

根据 [12] 中的定理 32和推论 20，存在由 $f = (id_F, \pi^{4,\ 1\,43,}\ )$诱导的连续满同态 π_3^1：$\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_3$，使得$\pi^{1,\ 1\ 1,\ 3} = id_A$，其中 $\pi^{4,\ 1\ 43,}(x) = 0$ 对每个 $x \in X$都成立。若 $A_4 \neq A$, $q_1 \notin A_4$，其中$q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$，则根据 $\mathcal{B}_3$的完备(F, r)-正则性，利用 π_3^1

我们推知存在 $\phi \in Hom(\mathcal{B}_1, \mathcal{F})$，使得 $\phi(\mathcal{G}) = \{(0, 0, 0, 0)\}$且 $\phi(q) = (0, r, q_3, r)$。若 $q_1 \in A_4$，则存在一个同胚$h_{V_{q_1}}(q_2) = q_4$，使得根据$(I2.3)$、$(I2.4)$，q_4非零，因为 $q \notin \mathcal{G}$。由定义21，存在 $\psi \in Hom_F(X, X)$，使得$\psi(q_4) \neq 0$，$X = (Fq_4) + Ker(\psi)$，且$(Fq_4) \cap Ker(\psi) = \{0\}.$。注意，$(q_1, i(q_1)\ q_3, 0) \in \mathcal{B}_3$。利用 $f = (id_F, \psi)$、[12], 中的定理 32、注11和推论 20，我们推得存在 $\phi \in Hom(\mathcal{B}_1, \mathcal{F})$，使得$\phi(\mathcal{G}) = \{(0, 0, 0, 0)\}$ 且 $\phi(q) = (0, r, q_3, r)$。

定理23. 设 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X_F, i, p)$ 和 $\mathcal{R} = \mathcal{B}(A', E', F, Y_F, i', p')$ 是完全 (F, r)-正则微丛，且 $\mathcal{R}$ 也是 (F, r)-弧连通的。设 α 和 δ 是 $\mathcal{B}$ 上的闭 M-网。则 $\tau_\alpha \subset \tau_\delta$ 对 $Hom(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ 上的 M-集开拓扑成立，当且仅当对每个 $C \in \alpha$，存在 C_1,...,C_n 属于 δ, $n \in \mathbf{N}$，使得 $C \subset C_1 \cup ... \cup C_n$。

证明. 假设对每个 $C \in \alpha$，存在 C_1,...,C_n 属于 δ, $n \in$N，使得 $C \subset C_1 \cup ... \cup C_n$。那么根据定义1、16、18以及注11、19可知 $\tau_\alpha \subset \tau_\delta$。

反之，假设 $\tau_\alpha \subset \tau_\delta$。根据本定理的条件，微丛 $\mathcal{R}$ 是（F, r）-弧连通的。取 $q \in \mathcal{R}$, $s \in \mathcal{R}$，使得 $s_3 = 0$,$s_4 = 0$, $q \neq s$,（q_1, q_2）$\neq$（s_1, s_2）。于是，根据定义21，存在$\mu = \mu_{q,s} \in Hom$（$\mathcal{F}, \mathcal{R}$），使得 $s = \mu(0, 0, 0, 0)$，且 $q = \mu(0, r, q_3, r)$。我们任取 $C \in \alpha$ 和开子微丛 $\mathcal{G} = \mathcal{B}$（$A_0, E_0, F, X_{0,F}, i_0, p_0$），其中 $\mathcal{R}$，使得 $s \in \mathcal{G}$ 且 $q' =$（q_1, q_2, q_3', q_4）$\notin \mathcal{G}$ 对每个 $q_3' \in F$ 都成立，其中 $i_0 = i'|_{A_0}$, $p_0 = p'|_{E_0}$。因此，H$(C, \mathcal{G})$ 是 $\psi \in Hom_\delta$（$\mathcal{B}, \mathcal{R}$）的一个邻域，使得 ψ（$\mathcal{B}$）=（$s_1, s_2, 0, 0$），其中 ψ_1^1（A）$= \{s_1\}$, ψ_2^2（E）$= \{s_2\}$, ψ_3^3（F）$= \{0\}$, ψ_4^4（X_F）$= \{0\}$，其中 $s_1 \in A$, $s_2 \in E$, i（s_1）$= s_2$。

由条件 $\tau_\alpha \subset \tau_\delta$ 可知，存在 C_1,...,$C_n \in \delta, n \in \mathbf{N}$，以及开子集 D_1,..., $D_n \in \mathcal{R}$，使得 $P \subset$ H$(C, \mathcal{G})$，$\psi \in P$, $P :=$ H$(C_1, D_1) \cap .. \cap$ H(C_n, D_n)。假设存在 $g \in C$, $g \notin \mathcal{J}$，其中 $\mathcal{J} := C_1 \cup .. \cup C_n$。微丛 $\mathcal{B}$是完全（F, r）-正则的，因此，存在 $\phi \in Hom(\mathcal{B}, \mathcal{F})$，使得 $\phi(\mathcal{J}) = \{(0, 0, 0, 0)\}$ 且 $\phi(g) = (0, r, g_3, r)$。那么 $\mu \circ \phi \in P$, $\mu \circ \phi \notin$ H$(C, \mathcal{G})$，从而得到矛盾。因此 $C \subset \mathcal{J}$。

例 24.(1). 设 $\mathcal{B}$ 是 T_1-微丛，并设 p 是由 $\mathcal{B}$ 的所有形如 $C = C_1 \cup ... \cup C_n$ 的闭子集 C 构成的闭 M-网，

其中对每个 j， $n \in \mathbb{N}$，且 $\beta = (1, 2, 3, 4)$（参见定义1、18，注记2、19）。那么 $Hom_{p,\ \beta,\ \gamma}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ 配备了拓扑$\tau_{p,\ \beta,\ \gamma}$，它可以自然地称为 M-点 γ-开拓扑，记作 $\tau_{p,\ \gamma}$；或者简称 M-点开拓扑，对于 $\gamma = \{1, 2, 3, 4\}$，分别记作$Hom_p(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ 和 τ_p。

(2). 若 c 是由 β 的所有紧子集组成的 β-闭 M-网，则 $\tau_{co,\ \beta,\ \gamma}$ 是 $Hom_{co,\ \beta,\ \gamma}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ 上的 M-β-紧-γ-开拓扑，简称 $\beta = \gamma = \{1, 2, 3, 4\}$ 的紧开拓扑。

(3). 设 $\mathcal{B}^\tau = \mathcal{B}(A, E, F, X_F, i, p)$ 是具有如下拓扑的微丛： A 上的 τ_A 、 E 上的 τ_E 、 F 上的 τ_F 、 X 上的 τ_X。假设 ξ_A 是 A 上比 τ_A, $\tau_A \subset \xi_A$ 更细的拓扑。那么，在集合 E 上存在最粗拓扑 ξ_E，使得 $\tau_E \subset \xi_E$, $i : (A, \xi_A) \to (E, \xi_E)$ 连续；对每个 $b \in A$，存在 b 的开邻域 U_b, $\xi \in \xi_A$ 和 $i(b)$ 的开邻域 $V_{b,\xi} \in \xi_E$，以及一个同胚 $h_{V_{b,\xi}} : V_{b,\xi} \to U_{b,\xi} \times X$，其中 $\xi_F = \tau_F, \xi_X = \tau_X$。于是存在微丛 $\mathcal{B}^\xi$，其底空间为 (A, ξ_A)，全空间为 (E, ξ_E)，定义在拓扑环 (F, τ_F) 和拓扑左 F-模 (X_F, τ_X) 上，并且 $id = \pi : \mathcal{B}^\xi \to \mathcal{B}^\tau$ 是连续同态，其中 $\pi_1^1 = id_A$, $\pi_2^2 = id_E$, $\pi_3^3 = id_F$, $\pi_4^4 = id_X$。

(4). 对于微丛 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X_F, i, p)$ 和 $\mathcal{R} = \mathcal{B}(A', E', F, X'_F, i', p')$，假设 $\xi_A = d_A$ 是 A 上的离散拓扑。那么 $Hom(\mathcal{B}^d, \mathcal{R})$ 包含于 $\Omega_{\mathcal{B},\mathcal{R}}$: $= A'^A \times E'^E \times Hom(F, F) \times Hom(X, X')$，而后者包含于 $\Upsilon_{\mathcal{B},\mathcal{R}}$: $= A'^A \times E'^E \times F^F \times X'^X$。通常，对于每个 $\lambda \in \Lambda$, S， $S_\lambda = S$ 是一个拓扑空间， S^Λ 配备蒂霍诺夫积拓扑。因此， $\Upsilon_{\mathcal{B},\mathcal{R}}$ 上的蒂霍诺夫积拓扑在 $Hom(\mathcal{B}^d, \mathcal{R})$ 上诱导出一个拓扑，记作 $t_y = t_y(\mathcal{B}, \mathcal{R})$。

(5). $Hom(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ 上最细（即最大的） M-集-β, γ-开拓扑记为 $\tau_{l,\beta,\gamma}$，因此 $\tau_{\alpha,\beta,\gamma} \subset \tau_{l,\beta,\gamma}$ （另见定义 18）。

推论 25. 假设 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{R}$ 是 T_1 微丛。那么 $Hom_p(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ 在 $Hom_{t_y}(\mathcal{B}^d, \mathcal{R})$ 中稠密。

证明。由例 24 (3)、(4) 和定义 18 可知，$C_p(A, A')$ 在 A'^A 中稠密，其中 $C_p(A, A')$ 表示从 A 到 A' 的所有连续映射组成的空间，并赋予点开拓扑。

推论 26. 假设定理23的条件成立，且 α 是 $\mathcal{B}$ 上的一个闭 M-网。那么 $\tau_{p,\ \gamma} \subset \tau_{\alpha,\ \gamma}$。

证明。由定理23和例 24 (1) 可得。

定义 27. 若 α 是微丛 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X_F, i, p)$ 上的 β-闭 M-网，且对于每个 $\mathcal{G} \in \alpha$，若 $\mathcal{H} \subset_M \mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 在 $\mathcal{B}$ 中是 β-闭的，则 $\mathcal{H} \in \alpha$，那么 α 称为遗传 β-闭 M-网（另见定义 16，其中 $\mathcal{B}$、$\mathcal{G}$、$\mathcal{H}$ 定义在同一个拓扑环 F 上）。

对于微丛 $\mathcal{R} = \mathcal{B}(A', E', F, X'_F, i', p')$，若 η 是由 γ-开子集构成的族，且对于 $\mathcal{R}$ 中每个 γ-开子集 $\mathcal{K}$，都存在一个族 $\{\mathcal{A}_\lambda \in \eta : \lambda \in \Lambda\}$，其中 Λ 是一个集合，并且 $\mathcal{K} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$，则称 η 为 γ-开 M-基。若 ζ 是 $\mathcal{R}$ 中由 γ- 开子集构成的族，且族 $\{\mathcal{A}_1 \cap ... \cap \mathcal{A}_n \neq \emptyset : n \in \mathbb{N}$ $\forall j \in \{1, ..., n\}, \mathcal{A}_j \in \zeta\}$ 是 $\mathcal{R}$ 的 γ-开 M-基，则称 ζ 为 γ-开 M-子基。

定理 28. 设 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A, E, F, X, i, p)$ 和 $\mathcal{R} = \mathcal{B}(A', E', F, X', i', p')$ 是 T_2 微丛，并且拓扑环 F 是交换且结合的，其中 X 和 X' 是拓扑左 F-模。那么 $(Hom_F(\mathcal{B}, \mathcal{R})\ \tau_{co})$ 是 T_2 微丛；$(Hom(\mathcal{B}, \mathcal{R})\ \tau_{co})$ 是 T_2 拓扑空间。

证明. 注意，对于 T_2 拓扑空间 J, K，由从 J 到 K 的所有连续映射构成的拓扑空间 $\mathsf{C}(J, K)$，赋予紧开拓扑 τ_{co} 后是 T_2（见 [10] 中第 44.I 节、注 1）。因此，关于 τ_{co} 拓扑的 $Hom_F(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ 和 $Hom(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ 作为拓扑空间是 T_2。

还需证明 $Hom_F(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ 可以赋予微丛结构。回顾一下，对于每个 f, g in $Hom_F(X, X')$，x和 $y$in X, a and$b$in F，以下恒等式

$$
\begin{aligned}
&f(ax + by) = af(x) + bf(y),\\
&(f + g)(x) = f(x) + g(x),\\
&(bf)(x) = b(f(x)),\\
&(a + b)f(x) = af(x) + bf(x),\\
&(ab)f(x) = a(bf(x)),\\
&b(f(x)) = bf(x),\\
&af(bx) = b(af(x))
\end{aligned}
$$

这意味着 $Hom_F(X, X')$ 是左 F-模，因为 X和 X'是左F-模，而 F 是交换结合环。

根据定理 1.1.7, [18] (C(X, X') τ_{co}) 具有加法交换拓扑群的结构。由包含关系 $Hom_F(X, X')$ ⊂C(X, X') 以及上述证明可知, ($Hom_F(X, X')$ τ_{co}) 也具有加法交换拓扑群的结构。

对于拓扑左 F-模, X' 乘法 $F \times X' \to X'$ 是（联合）连续的, 因此对于 X' 中 0 的每个开邻域 U' , 都存在 X' 中 0 的一个开邻域 V' 和 F 中 0 的一个开邻域 S, 使得 $SV' \subset U'$。对于 F 中 d 的开邻域基 B_d（F）和 $e \in F$, B_d（F）$+e$是 F 中 $d+e$ 的开邻域基。对于 X' 中 y 的开邻域基 B_y（X'）和 X' 中 z, B_y（X'）$+z$是 X' 中 $y+z$ 的开邻域基。注意, 对于每个 $b_0 \in F$ 以及 X' 中 0 的每个开邻域 U_1' , 都存在 X' 中 0 的一个开邻域V_{b_0}' , 使得 $b_0 V_{b_0}' \subset U_1'$. 。另一方面, 对于每个 $y_0 \in X'$ 以及 X' 中 0 的每个开邻域 U_2' , 都存在 F 中 0 的一个开邻域S_{y_0}, 使得 $S_{y_0} y_0 \subset U_2'$。于是

(28.1) $(b_0 + S_1)(y_0 + V_1') = b_0 y_0 + S_1 V_1' + b_0 V_1' + S_1 y_0 \subset b_0 y_0 + U' + U_1' + U_2'$对于 $S_1 = S \cap S_{y_0}$, $V_1 = V_{b_0}' \cap V'$。

设 Q是 X'中 0 的任意开邻域, W是 F中的任意紧子集。对每个 $b \in W$, 存在 F中 b 的一个开邻域 J_b, 以及 X'中 0 的一个开邻域 P_b, 使得由 (28.1) 可得 $J_b P_b \subset Q$, 其中 U', U_1', U_2', 且 $U' + U_1' + U_2' \subset Q$, 因为 X'是拓扑左 F-模。开覆盖 $\{J_b : b \in W\}$ 有一个有限子覆盖 $\{J_{b_j} : j = 1, ..., n\}$,$n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{j=1}^{n} J_{b_j} \supset W$。于是 $P = \bigcap_{j=1}^{n} P_{b_j}$ 是X'中 0 的开邻域, 并可得 $(\bigcup_{j=1}^{n} J_{b_j})P \subset Q$, 因此 $WP \subset Q$。

对于每个满足 $f - g \in$H$_4(B, P)$ 的 $f, g \in Hom_F(X, X')$, 存在开子集 Ω_f、Ω_g ⊂($Hom_F(X, X')$ τ_{co}), 使得 $\Omega_f - \Omega_g \subset$H$_4(B, P)$。因此, $W(\Omega_f - \Omega_g) \subset$H$_4(B, WP) \subset$H$_4(B, Q)$, 因为根据 f 和 g 的左 F-线性, $(f - g)(WB) = W(f - g)(B)$。根据定理 31, 这意味着 ($Hom_F(X, X')$ τ_{co}) 是拓扑左 F-模。类似地可以证明, 若 Y 是拓扑左 F-模, 则 (C(A, Y) τ_{co}) 是拓扑左 F-模, 其中对每个 $b_1, b_2 \in F$ 以及 $y_1, y_2 \in$C(A, Y), 有 $(b_1 y_1 + b_2 y_2)(a) = b_1 y_1(a) + b_2 y_2(a)$, $a \in A$。特别地, 可取 $Y =$($Hom_F(X, X')$ τ_{co})。

接下来我们考虑 $Hom_F(E,E') := \{\pi_2^2 \colon \pi = (\pi_1^1, \pi_2^2, id_F, \pi_4^4) \in Hom_F(\mathcal{B},\mathcal{R})\}$.
~ ~对于每个 $f \in \mathsf{C}(A,A')$，令 $i(f) = i' \circ f \circ p$，因此 $i(f) \in \mathsf{C}(E,E')$。然后，对每个 $g \in \mathsf{C}(E,E')$，令 $\tilde{p}(g) = p' \circ g \circ i$，于是 $\tilde{p}(g) \in \mathsf{C}(A,A')$。

~若 $f \in \mathsf{C}(A,A')$ 且 $g = i(f)$，则由连续映射的复合可知 $g \in \mathsf{C}(E,E')$。设 C^2 在 E 中紧，且 V' 在 E' 中开，并满足 $g \in \mathsf{M}(C^2,V') := \{t \in \mathsf{C}(E,E') \colon t(C^2) \subset V'\}$。由 [4]中的定理 3.1.10 可知，$p(C^2) = C^1$ 在 A 中紧。对于满足 $V' \supset i'(U')$ 且在 A'中开的 U'，包含关系 $\tilde{i}(\mathsf{M}(C^1,U')) \subset \mathsf{M}(C^2,V')$ 成立，其中 $\mathsf{M}(C^1,U') = \{s \in \mathsf{C}(A,A') \colon s(C^1) \subset U'\}$, $f \in \mathsf{M}(C^1,U')$, $\tilde{i}(f) = g$。根据 [4] 中的命题 1.4.1，映射 i 从 $(\mathsf{C}(A,A')\ \tau_{co})$ 到 $(\mathsf{C}(E,E')\ \tau_{co})$ 连续。类似地，若 $g \in \mathsf{C}(E,E')$、$f = \tilde{p}(g)$，C^1 是 A中的紧子集，U' 是 A'中的开子集，V' 是 E' 中的开子集且满足 $U' \supset p'(V')$，并且 $g \in \mathsf{M}(C^2,V')$，$C^2 = i(C^1)$，则 $\tilde{p}(\mathsf{M}(C^2,V')) \subset \mathsf{M}(C^1,U')$。再次根据 [4] 中的定理 3.1.10 和命题 1.4.1，映射 $\tilde{p}$ 从 $(\mathsf{C}(E,E')\ \tau_{co})$ 到 $(\mathsf{C}(A,A')\ \tau_{co})$ 连续。

~注意到，对于每个 $f \in \mathsf{C}(A,A')$，$\tilde{p} \circ i(f) = p' \circ i' \circ f \circ p \circ i = f$。若 $f_1 \neq f_2$属于 $\mathsf{C}(A,A')$，则 $f_1 \circ p \neq f_2 \circ p$属于 $\mathsf{C}(E,A')$，因此 $i' \circ f_1 \circ p \neq i' \circ f_2 \circ p$~ ~属于 $\mathsf{C}(E,E')$，从而 $i(f_1) \neq i(f_2)$。

由条件 (2.3) 可得

(28.2) $\pi_1^1 = p' \circ \pi_2^2 \circ i$

对每个 $\pi \in Hom_F(\mathcal{B},\mathcal{R})$，由于 $p' \circ i' = id_{A'}$。条件 (2.4) 蕴含

(28.3) 对每个 u 以及属于 F 的 v、属于 X 的 y，都有 $h' \circ \pi_2^2 \circ h^{-1}(a, ux + vy) = uh' \circ \pi_2^2 \circ h^{-1}(a,x) + vh' \circ \pi_2^2 \circ h^{-1}(a,y)$，因为在所考虑的情形中 $\pi_3^3 = id_F$，其中 $h' = h'_{V'}$ 对应于 $\mathcal{R}$，$h = h_V$ 对应于 $\mathcal{B}$。由条件 (2.5) 可得 $\hat{}\pi_2' \circ h' \circ \pi_2^2 = \pi_4^4 \circ \hat{}\pi_2 \circ h$，其中 $\hat{}\pi_2 \colon U \times X \to X$，$\hat{}\pi_2' \colon U' \times X' \to X'$（由 (2.4)），因此

(28.4) $\hat{\pi}_2' \circ h' \circ \pi_2^2 \circ h^{-1} = \pi_4^4 \circ \hat{\pi}_2$,

其中，对于每个 x 和 y，有 $\pi_4^4(ux + vy) = u\pi_4^4(x) + v\pi_4^4(y)$；对于每个 $d \in U$ 和 $x \in X$，有 u 和 v 属于 F，X 中的 $\pi_2(d,x) = x$。

由于 $\mathcal{B}$和 $\mathcal{R}$是 T_2，因此 $X \setminus \{0\}$ 在 X中是开集，$X' \setminus \{0\}$ 在 X' 中是开集。分别利用 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{R}$ 的局部同胚 $h_V \colon V \to U \times X$和 $h'_{V'} \colon V' \to U' \times X'$，由（$I2.2$）、（$I2.3$）可得，$i(A)$在 E中是闭集，$i'(A')$在 E'中是闭集。

设 $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(A, E_1, F, X', i_1, p_1)$ 是一个 T_2-微丛。由（28.2）—（28.4）可推得，每个 $g \in \mathsf{C}(A, A')$ 都诱导出 $\pi \in Hom_F(\mathcal{B}_1, \mathcal{R})$，使得$\pi_1^1 = g$, $\pi_3^3 = id_F$, $\pi_4^4 = id_{X'}$, $\pi = (\pi_1^1, \pi_2^2, \pi_3^3, \pi_4^4)$，其中 $id_{X'}(y) = y$对每个$y \in X'$都成立，因为 $\{V_{1,i_1}(b) : b \in A\}$ 是 E_1的开覆盖，$\{V'_{i'}(b') : b' \in A'\}$ 是 E'的开覆盖，其中 $h_{1,V_1,i_1(b)} : V_{1,i_1}(b) \to U_b \times X'$ 是 $\mathcal{B}_1$的同胚，U_b 是 b 在 A中的开邻域，$V_{1,i_1}(b)$是 $i_1(b)$在 E_1 中的开邻域（见条件（$I2.3$））。

后者以及上述证明表明，存在一个映射 $\zeta : \mathsf{C}(A, A') \to Hom_F(\mathcal{B}_1, \mathcal{R})$, 使得 $\zeta(g) = (g, \pi_2^2, id_F, id_{X'})$。条件 (2.1)-(2.5) 表明，若 $\pi = (\pi_1^1, \pi_2^2, id_F, \pi_4^4) \in Hom_F(\mathcal{B}, \mathcal{R})$，则 $\pi_4^4 \in Hom_F(X, X')$。利用 ζ、同态的复合、[12] 中的定理 32 以及推论 20（其中 $G = F$ 和 $X_G = X'$, $X_F = X$），我们推得

(28.5) $Hom_F(X, X') = \{(id_F, \pi_4^4) : \pi = (\pi_1^1, \pi_2^2, id_F, \pi_4^4) \in Hom_F(\mathcal{B}, \mathcal{R})\}$.

对于每个满足条件 ($I2.2$)-($I2.4$) 的 $q = (q^1, q^2, q^3, q^4) \in \mathcal{B}$ 和 $s = (s^1, s^2, s^3, s^4) \in \mathcal{R}$

(28.6) $p \circ i(q^1) = q^1$, $p' \circ i'(s^1) = s^1$,

(28.7) $\iota_0(q^1) = (q^1, 0)$, $\iota'_0(s^1) = (s^1, 0)$,

(28.8) $\hat{\pi}_1(q^1, x) = q^1$, $\hat{\pi}_2(q^1, x) = x$ 对每个 $x \in X$,

$\hat{\pi}_1 \circ h_{V_{i(q^1)}}(q^2) = q^1$, $\hat{\pi}_2 \circ h_{V_{i(q^1)}}(q^2) = q^4$,

对每个 $y \in X'$, $\hat{\pi}'_1(s^1, y) = s^1$, $\hat{\pi}'_2(s^1, y) = y$

$\hat{\pi}'_1 \circ h'_{V'_{i'(s^1)}}(s^2) = s^1$, $\hat{\pi}'_2 \circ h'_{V'_{i'(s^1)}}(s^2) = s^4$,

其中 $\hat{\pi}_1$、$\hat{\pi}_2$、ι_0、$h_{V_{i(q^1)}}$ 对应于 $\mathcal{B}$，$\hat{\pi}'_1$、$\hat{\pi}'_2$、ι'_0、$h'_{V'_{i'(s^1)}}$ 对应于 $\mathcal{R}$，其中 $h_{V_{i(q^1)}} : V_{i(q^1)} \to U_{q^1} \times X$、$h'_{V'_{i'(s^1)}} : V'_{i'(s^1)} \to U'_{s^1} \times X'$是同胚，$V_{i(q^1)}$ 是 $i(q^1)$ 在 E中的开邻域，U_{q^1} 是 q^1 在 A中的开邻域；类似地，$V'_{i'(s^1)}$ 是 $i'(s^1)$ 在 E'中的开邻域，U'_{s^1} 是 s^1 在 A'中的开邻域。

因此，对于每个 $B \subset \mathcal{B}$、$D \subset \mathcal{R}$、$g \in$，由（28.4）中的 H（B、D）可得

$\hat{\pi}'_2 \circ h'_{V'} \circ g_2^2(B^2 \cap V) = g_4^4 \circ \hat{\pi}_2 \circ h_V(B^2 \cap V) \subset D^4$，因为 $\hat{\pi}_2 \circ h_V(B^2 \cap V) \subset B^4$，$\hat{\pi}'_2 \circ h'_{V'}(D^2 \cap V') \subset D^4$。另请注意，由 (28.6)-(28.8) 可知 $\hat{\pi}_1 \circ h_V(B^2 \cap V) = B^1 \cap U$，$\hat{\pi}'_1 \circ h'_{V'}(D^2 \cap V') = D^1 \cap U'$，因为 $i(U) \subset V$且 $i'(U') \subset V'$。鉴于 [4] 中的定理 3.4.1、3.4.7 以及上文的 (28.3)-(28.5)，存在一个同构

$\xi_{U,U'}$: $(Hom_F(U\times X,U'\times X')\ \tau_{co})\to(\Upsilon_{U,U'},\tau_{co})$，其中 $\Upsilon_{U,U'}=\{f=(f_1,f_2)\in \mathsf{C}(U,U'\times Hom_F(X,X')):\ f_1\in\mathsf{C}(U,U')\ f_2\in\mathsf{C}(U,Hom_F(X,X'))\}$，使得对于 A 中的每个开集 U 和 A' 中的每个开集 U'，$\Upsilon_{U,U'}\subset \mathsf{C}(U,U')\times\mathsf{C}(U,Hom_F(X,X'))$。对于 $\mathcal{B}$ 中的紧集 B 和 $\mathcal{R}$ 中的开集 D，我们定义

$\tilde{V}=\{\pi_2^2\colon \pi_2^2=\nabla_{b\in B^1,b'\in D^1}(^{h'_{V'_{i'}(b')}})^{-1}\circ g_2^2\circ h_{V_{i(b)}}|_{V_{i(b)}\cap((g_2^2)^{-1}(U'_{b'}\times X'))}\ g_2^2\in \xi_A^{-1},_{A'}(\Xi(B^1,D^1))\}$ 其中 $\Xi(B^1,D^1)=\{f=(f_1,f_2)\in\Upsilon_{A,A'}:\ f_1\in \mathsf{M}(B^1,D^1)\ f_2\in \mathsf{C}(A,Hom_F(X,X'))\}$，其中 ∇ 表示映射的组合（见 [4] 中的命题 2.1.1），因为对于每个 b，以及 A 中的 b_1，还有 A' 中满足 $P\neq\emptyset$ 的 b'_1，都有 $(^{h'_{V'_{i'}}(b')})^{-1}\circ g_2^2\circ h_{V_{i(b)}}|_P=(^{h'_{V'_{i'}}(b'_1)})^{-1}\circ g_2^2\circ h_{V_{i(b_1)}}|_P$其中 $P=P_{b,b',b_1,b'_1}(g_2^2)=V_{i(b)}\cap((g_2^2)^{-1}(U'_{b'}\times X'))\cap V_{i(b_1)}\cap((g_2^2)^{-1}(U'_{b'_1}\times X'))$。

因此，对于 $\pi\in \mathbf{H}_{F;\mathcal{B},\mathcal{R}}(B,D)$，我们得到 $\pi_1^1\in\mathsf{M}(B^1,D^1)=:\tilde{U},\tilde{i}(\pi_1^1)=\pi_2^2\in\tilde{V}$，并且存在一个同胚 $\tilde{h}_{\tilde{V}}\colon \tilde{V}\to\tilde{U}\times\mathsf{C}(A,Hom_F(X,X'))$。接着，对于每个 $\tilde{d}\in\mathsf{M}(B^1,D^1)$ 和 $\tilde{x}\in\mathsf{C}(A,Hom_F(X,X'))$，我们令 $\tilde{}\hat{}\pi_1(\tilde{d},\tilde{x})=\tilde{d}$，$\tilde{}\hat{}\pi_2(\tilde{d},\tilde{x})=\tilde{x}$，$\tilde{\iota}_0(\tilde{d})=(\tilde{d},0)$，$\tilde{i}(\tilde{d})=\tilde{h}_{\tilde{V}}^{-1}(\tilde{d},0)$。因此，$\tilde{}\hat{}\pi_1\circ\tilde{\iota}_0|_{\tilde{U}}=\tilde{p}|_{\tilde{V}}\circ i|_{\tilde{U}}$。于是，$(Hom_F(\mathcal{B},\mathcal{R})\ \tau_{co})$ 与微丛 $\mathcal{B}=\mathcal{B}(A_1,E_1,F,X_1,i,\tilde{p})$ 同构，其中 $A_1=\mathsf{C}(A,A')$，$E_1=Hom_F(E,E')$,$X_1=\mathsf{C}(A,Hom_F(X,X'))$，它们取紧开拓扑。

定义 29. 设 $\mathcal{B}=\mathcal{B}(A,E,F,X,i,p)$ 和 $\mathcal{R}=\mathcal{B}(A',E',F',i',p')$ 是微丛，且 $P\subset Hom(\mathcal{B},\mathcal{R})$，$P=\{\pi_\lambda\in Hom(\mathcal{B},\mathcal{R}):\ \lambda\in\Lambda\}$，其中$\Lambda$是一个集合。我们将 $\mu_P\in Hom(\mathcal{B},\mathcal{B}_1)$ 与 $\mathcal{B}_1=\mathcal{B}(A_1,E_1,F_1,X_1,i_1,p_1)$ 定义为 $\mu_P((b,e,f,x))=\{(\pi^1_{1,\lambda}(b)\,\pi^2_{2,\lambda}(e)\,\pi^3_{3,\lambda}(f)\,\pi^4_{4,\lambda}(x)):\ \lambda\in\Lambda\}$，对每个 $(b,e,f,x)\in\mathcal{B}$ 均成立，其中 $A_1=A'^{\Lambda}$, $E_1=E'^{\Lambda}$, $F_1=F'^{\Lambda}$, $X_1=X'^{\Lambda}$，且 Y^Λ赋予拓扑空间 Y上的蒂霍诺夫积拓扑。若对 $\mathcal{B}$中的每个闭子集 C（或子微丛）以及 $q\in\mathcal{B}\backslash C$，都存在 $\pi_\lambda\in P$ 使得 $\pi_\lambda(q)\notin cl_{\mathcal{R}}\pi_\lambda(C)$，其中 $cl_{\mathcal{R}}\pi_\lambda(C)$ 表示 $\pi_\lambda(C)$ 在 $\mathcal{R}$中的闭包，则称 P将 $\mathcal{B}$ 的元素与闭集（或子微丛）分离。于是，若对 $\mathcal{B}$中的每个 $q\neq s$，都存在 $\pi_\lambda\in P$ 使得 $\pi_\lambda(q)\neq\pi_\lambda(s)$，则称 P 分离 $\mathcal{B}$ 的元素。

定理 30. 假设 $P\subset Hom(\mathcal{B},\mathcal{R})$、$\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{R}$ 是 T_1 微丛，P 分离 $\mathcal{B}$ 中的元素与闭集（见定义 29 ）。那么 $\mu_P\colon\mathcal{B}\to\mathcal{B}_1$ 是一个嵌入。

证明。根据定理 27 和 29，[12] $\mathcal{R}^\Lambda$ 与 $\mathcal{B}_1$同构，

其中$\mathcal{R}^{\Lambda}=\prod_{\lambda\in\lambda}\mathcal{R}_{\lambda}$，其中 $\mathcal{R}_{\lambda}=\mathcal{R}$ 对每个 $\lambda\in\Lambda$成立。任取$\mathcal{B}$ 中的一个开子集 W 和 $q\in W$。因此，根据本定理的条件，存在 $\pi_{\lambda}\in P$ 使得 $\pi_{\lambda}(q)\notin cl_{\mathcal{R}}\pi_{\lambda}(\mathcal{B}\setminus W)$。令 $S=\mathcal{R}\setminus cl_{\mathcal{R}}\pi_{\lambda}(\mathcal{R}\setminus W)$，并令 $T=\rho_{\lambda}^{-1}(S)$，其中 $\rho_{\lambda}\in Hom(\mathcal{R},\mathcal{B}_1)$由 $\mathcal{R}^{\Lambda}$ 与 $\mathcal{B}_1$ 的同构以及从 $\mathcal{R}^{\Lambda}$ 到 $\mathcal{R}_{\lambda}$的投影同态所诱导。任取满足 $\mu_P(s)\in T$的 $s\in\mathcal{B}$。

因此，$s\in\pi_{\lambda}^{-1}(S)$ 和 $\pi_{\lambda}^{-1}(S)=\mathcal{B}\setminus\pi_{\lambda}^{-1}(cl_{\mathcal{R}}\pi_{\lambda}(\mathcal{B}\setminus W))\subset W$。这意味着 $T\cap\mu_P(\mathcal{B})$ 是 $\mu_P(q)$ 的开邻域，且 $T\cap\mu_P(\mathcal{B})\subset\mu_P(W)$，因此 $\mu_P(W)$ 在 $\mu_P(\mathcal{B})$ 中是开的。

定义 31. 设 $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3$ 为微丛，对每个 j，都有 $\mathcal{B}_j=\mathcal{B}(A_j,E_j,F_j,X_j,i_j,p_j)$。对于每个 $\pi_2^1\in Hom(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$，$\pi_3^2\in Hom(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3)$，我们令 $\Phi(\pi_2^1,\pi_3^2)=\pi_3^2\circ\pi_{2^\circ}^1$ 那么，$(\pi_3^2)_*(\pi_2^1)=\pi_3^2\circ\pi_2^1$ 和 $(\pi_2^1)^*(\pi_3^2)=\pi_3^2\circ\pi_2^1$ 称为诱导同态，其中 $(\pi_3^2)_*:\ Hom(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)\to Hom(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3)$，且 $(\pi_2^1)^*:\ Hom(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3)\to Hom(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3)$。

定理 32。设 $\mathcal{B}_1$、$\mathcal{B}_2$、$\mathcal{B}_3$ 是 T_2 微丛，设 α_1 是 $\mathcal{B}_1$上的紧M-网，且 α_2是 $\mathcal{B}_2$上的闭 M-网，并构成一个邻域基。那么映射 $\Phi:\ Hom_{\alpha_1}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)\times Hom_{\alpha_2}(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3)\to Hom_{\alpha_1}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3)$是连续的。

证明。任取 $C\in\alpha_1$ 和在 $\mathcal{B}_3$中开且满足 $\pi_2^1\in Hom(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$的 D，以及 $\pi_3^2\in Hom(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3)$，使得 $\Phi(\pi_2^1,\pi_3^2)\in\mathrm{H}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(C,D)$。因此，$\pi_3^2(\pi_2^1(C))\subset D$，且 $\pi_2^1(C)\subset(\pi_3^2)^{-1}(D)$。注意，对每个 $q\in\pi_2^1(C)$，存在 $B_q\in\alpha_2$使得 $q\in Int_{\mathcal{B}_2}(B_q)$且 $B_q\subset(\pi_3^2)^{-1}(D)$，其中$Int_{\mathcal{B}_2}(B_q)=\{s\in\mathcal{B}_2:s\in(Int_{A_2}(B_q^1)\ Int_{E_2}(B_q^2)\ Int_{F_2}(B_q^3)\ Int_{X_2}(B_q^4))\}$，$B_q=(B_q^1,B_q^2,B_q^3,B_q^4)$，表示拓扑空间 P 中 S 的内部，其中 $S\subset P$（见定义1、18及注2）。由定理 3.1.10，[4] $\pi_2^1(C)$是紧的，因此存在 q_1、...、q_n属于 $\pi_2^1(C)$，$n\in\mathbf{N}$，使得$\pi_2^1(C)\subset\bigcup_{i=1}^n Int_{\mathcal{B}_2}B_{q_i}=:W$。这意味着$(\pi_2^1,\pi_3^2)\in\Upsilon$，其中 $\Upsilon:=\mathrm{H}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(C,W)\times(\bigcap_{i=1}^n\mathrm{H}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(B_{q_i},D))$，且 $\Phi(\Upsilon)\subset\mathrm{H}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(C,D)$。

定理 33. 假设 $\pi_3^2\in Hom(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3)$。若 α_1 是 $\mathcal{B}_1$ 上的闭 M-网，则 $(\pi_3^2)_*:Hom_{\alpha_1}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)\to Hom_{\alpha_1}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3)$ 是连续的。

证明。任取在 $\mathcal{B}_3$ 中开集的 $C\in\alpha_1$ 和 D，$C\subset\mathcal{B}_1$、$D\subset\mathcal{B}_3$。那么 $\pi_2^1\in(\pi_3^2)_*^{-1}(\mathrm{H}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(C,D))$ 当且仅当 $\pi_3^2(\pi_2^1(C))\subset D$。后一个包含关系等价于 $\pi_2^1\in\mathrm{H}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(C,(\pi_3^2)^{-1}(D))$。因此 $(\pi_3^2)_*^{-1}(\mathrm{H}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(C,D))=$

$\mathrm{H}_{\mathcal{B}_1,\ \mathcal{B}_2}(C, (\pi_3^2)^{-1}(D))$。

定理 34. 设 $\pi_3^2 \in Hom(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$ 是从一个微丛$\mathcal{B}_2$ 到微丛 $\mathcal{B}_3$的嵌入。设 α_1 是 $\mathcal{B}_1$ 上的一个闭 M- 网。那么 $(\pi_3^2)_*$: $Hom_{\alpha_1}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \to Hom_{\alpha_1}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$ 是一个嵌入。

证明。由于 π_3^2 是一个单射，因此 $(\pi_3^2)_*$ 也是一个单射，也就是说，对于 $Hom(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ 中的每个 $\xi \neq \eta$，都有 $(\pi_3^2)_*(\xi) \neq (\pi_3^2)_*(\eta)$，因为存在 $s \in \mathcal{B}_1$使得 $\xi(s) \neq \eta(s)$。任取 $C \in \alpha_1$ 以及在 $\mathcal{B}_2$, $C \subset \mathcal{B}_1$,$B \subset \mathcal{B}_2$ 中开集 B ，使得 $\mathrm{H}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(C, B)$ 属于 $Hom(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ 上拓扑的一个子基。存在在 $\mathcal{B}_3$, $D \subset \mathcal{B}_3$ 中的开集 D，使得 $D \cap \pi_3^2(\mathcal{B}_2) = \pi_3^2(B)$，因为 π_3^2 是从微丛 $\mathcal{B}_2$ 到微丛$\mathcal{B}_3$的嵌入。因此，$(\pi_3^2)_*^{-1}(\mathrm{H}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(C, D)) = \mathrm{H}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(C, (\pi_3^2)^{-1}(D)) = \mathrm{H}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(C, B)$，所以，$(\pi_3^2)_*(\mathrm{H}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(C, B)) = \mathrm{H}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(C, D) \cap (\pi_3^2)_*(Hom_{\alpha_1}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2))$。

定义 35. 微丛同态 π_2^1： $\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ 是几乎满射，当且仅当 $\pi_2^1(\mathcal{B}_1)$ 在 $\mathcal{B}_2$ 中稠密，也就是说 $\pi^{1,\ 1\ 12,}(A_1)$ 在 A_2 中稠密， $\pi^{2,\ 1\ 22,}(E_1)$ 在 E_2中稠密， $\pi^{3,\ 1\ 32,}(F_1)$ 在 F_2 中稠密， $\pi^{4,\ 1\ 42,}(X_1)$ 在 X_2 中稠密。

定理 36. 假设 $\pi_2^1 \in Hom(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$，其中 $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 是 T_2微丛。

(i)。如果 π_2^1 是几乎满射，那么 $(\pi_2^1)^*$ 是单射。

(ii)。如果 α_1 是 $\mathcal{B}_1$ 上的闭 M-网， $Hom(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$ 分离 $\mathcal{B}_1$ 中的元素，并且 $(\pi_2^1)^*$： $Hom(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) \to Hom_{\alpha_1}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$ 是几乎满射，那么 π_2^1是单射。

证明。任取 ξ 和 η 属于 $Hom(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$，使得 $(\pi_2^1)^*(\xi) = (\pi_2^1)^*(\eta)$。对于每个 $s \in \pi_2^1(\mathcal{B}_1)$，都存在 $q = q_s \in \mathcal{B}_1$ 使得 $\pi_2^1(q) = s$，因此， $\xi(s) = (\pi_2^1)^*(\xi)(q) = (\pi_2^1)^*(\eta)(q) = \eta(s)$。因此， $\xi = \eta$，因为$\pi_2^1(\mathcal{B}_1)$在 $\mathcal{B}_2$中稠密，而且因为 $\mathcal{B}_1$、 $\mathcal{B}_2$ 和 $\mathcal{B}_3$ 是 T_2 微丛。

(ii)。任取 $s_1 \neq s_2$ in $\mathcal{B}_1$。由于 $Hom(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$ 能分离 $\mathcal{B}_1$ 中的元素，因此存在 $\xi \in Hom(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$，使得 $\xi(s_1) \neq \xi(s_2)$。在 $\mathcal{B}_3$ 中，为 $\xi(s_1)$ 和 $\xi(s_2)$ 选取不相交的开邻域 W_1 and W_2 。这样的邻域存在，因为 $\mathcal{B}_3$ 是微丛。因此，$\mathrm{H}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(\{s_1\}, W_1) \cap \mathrm{H}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(\{s_2\}, W_2) =: \Psi$ 是 $Hom_{\alpha_1}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$ 中 ξ的一个开邻域。存在 η in $Hom(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$，使得 $(\pi_2^1)^*(\eta) \in \Psi$，因为 $(\pi_2^1)^*$ 几乎满射。这意味着 $\eta(\pi_2^1(s_1)) \in W_1$ 且 $\eta(\pi_2^1(s_2)) \in W_2$，因此，$\pi_2^1(s_1) \neq \pi_2^1(s_2)$。

结论 37。本文的结果可用于进一步研究微丛的拓扑结构及其连续同态族，并可应用于几何学、抽象调和分析、数学物理、动力系统、数学的其他分支以及其他科学领域。这些结果也可用于研究算子丛、群丛、层、流形的叶状结构或微丛。

参考文献

[1] V.I. Arnautov、M.I. Vodinchar、S.T. Glavatsky、A.V. Mihalev，《拓扑环与模的构造》，Stinitsa，基希讷乌（1988）。

[2] V.I.Arnautov、M.I. Vodinchar、A.V. Mihalev，《拓扑环与模理论导论》，Stinitsa，基希讷乌（1981）。

[3] N. Bourbaki，《代数》，施普林格出版社，柏林（1989）。[4] R. Engelking，《一般拓扑学》，Heldermann-Verlag，柏林（1989）。

[5] V.V. Fedorchuk、A.Ch. Chigogidze，《绝对收缩与无限维流形》，Nauka，莫斯科（1992）。

[6] V.V. Fedorchuk，柔性映射、多值收缩与函子，《数学科学进展》41：6（1986），121–159。

[7] J.M.G. Fell, R.S. Doran，《 $*$代数、局部紧群及 Banach $*$代数丛的表示》，第1、2卷，学术出版社，波士顿（1988）。

[8]E. Hewitt, K.A. Ross，《抽象调和分析》，第1、2卷，施普林格出版社，柏林（1963）。

[9] N.H. Kuiper, R.K. Lashof，微丛与丛，《数学发明》1（1966），1–17。

[10] K. Kuratowski，《拓扑学》，第1、2卷，学术出版社，纽约（1968）。

[11] H. Liang，S.-Q. Huang，《赋范环上拓扑模的对偶性》，《拓扑学及其应用》243（2018），124-134。[12] S.V. Ludkovsky，《拓扑环上的微丛》，《拓扑学及其应用》260（2019），126-138。[13] S.V. Ludkovsky，《巴拿赫空间中的拟不变测度与伪可微测度》，Nova Science Publishers, Inc.，纽约，ISBN 978-1- 60692-734-2，（2009）。[14] S.V. Ludkovsky，《非阿基米德流形上的随机过程与反导数方程》，《国际数学与数学科学杂志》31: 1（2004），1633-1651。[15] S.V. Ludkovsky，《非阿基米德巴拿赫空间上取值于非阿基米德域的拟不变与伪可微测度》，《数学科学杂志》，纽约，128: 6（2005），3428-3460。[16] S.V. Ludkovsky，《局部域上的线反导数及其应用》，《国际数学与数学科学杂志》2005: 2（2005），263-309。[17] S.V. Ludkovsky，《函数的可微性：非阿基米德域上的近似可微性、全局可微性及沿曲线的可微性》，《数学科学杂志》，纽约，157: 2（2009），311-366。[18] R.A. McCoy，I. Ntantu，《连续函数空间的拓扑性质》，《数学讲义》第1315卷，施普林格出版社，柏林（1988）。[19] J. Milnor，《微丛》，《拓扑学》3.1（1964），53-80。[20]A.C.M. van Rooij，《非阿基米德泛函分析》，Marcel Dekker Inc.，纽约（1978）。[21] W.H. Schikhof，《超度量微积分》，剑桥大学出版社，剑桥（1984）。[22] E.V. Scepin，《紧空间的函子与不可数幂》，《数学科学进展》36: 3（1981），3-62。

[23] R. Sulanke, P. Wintger, 《微分几何与纤维丛》, 德国科学出版社, 柏林（1972）。

[24] W.-F.Xuan, Y.-K. Song, W.-X. Shi, 《链条件与星覆盖性质》, 《拓扑学及其应用》255（2019）, 148-156。

[25] A. Weil, 《基础数论》, 施普林格出版社, 柏林（1973）。