arXiv:2303.09533v1 [math.GT] 16 Mar 2023

直角双曲多面体的理想顶点

STEPAN ALEXANDROV

Abstract. 在本文中，我们针对直角双曲多面体改进了 Nikulin 不等式。这个新不等式使已知维数上界的证明大为简化。我们还改进了 Nonaka 下界，即直角双曲多面体理想顶点数的下界。

1. 引言

如果一个凸多面体的所有二面角都等于 $\pi/2$，则称其为直角多面体。与球面空间或欧几里得空间不同，双曲空间中直角多胞体的组合结构更为复杂。例如，可以从 $\mathbb{H}^3$ 中的一个正则直角十二面体开始。接着，将两个这样的十二面体的一对全等五边形面粘合起来，就能得到一个新的直角多胞体。通过归纳重复这一过程，可以得到一条十二面体链。在欧几里得情形下，唯一的直角多胞体是平行四边形，因此任何这样的链最终也只会是一个平行四边形。

然而，要证明任意 $n \geq 2$ 的 $\mathbb{H}^n$ 中存在直角双曲多面体并非易事（而在欧几里得情形下，这显而易见）。事实上， n存在上界，因此在高维中不存在直角双曲多面体（或更一般地说，不存在考克斯特双曲多面体）。

1.1. 直角双曲多面体的维数上界。 众所周知，在 $\mathbb{H}^{\geqslant 30}$ 中，不存在所有二面角均为 π ([Vin84])的整数约数倍的紧致多面体。这类有限体积多面体在$\mathbb{H}^{\geqslant 996}$ 中也不存在（参见 [Kho86、Pro86]）。对于直角多面体，可以将此上界大幅改进，具体如下。

定理 1.1 ([PV05])。 在 $\mathbb{H}^{\geqslant 5}$中不存在紧致直角多面体。

我们的第一个主要结果是为以下两个定理给出一个新的简短证明。

定理 1.2 ([Kol12])。 在 $\mathbb{H}^{\geqslant 7}$ 中不存在理想直角多面体。

定理 1.3 ([PV05，Duf10])。 在 $\mathbb{H}^{\geqslant 13}$ 中不存在有限体积直角多面体。

定理 1.1 中给出的界是精确的。其他界是否精确尚不清楚：目前已知的理想直角多面体实例仅存在于维数不超过 4 的情形，而已知的有限体积直角多面体实例仅存在于维数不超过 8 的情形。

Nikulin 不等式（[Nik81，定理 3.2。1]）指出，简单欧几里得多胞体的低维面，其面数的平均值不能过多。Khovanskii 证明了，Nikulin 不等式对棱处简单的多胞体也成立（[Kho86，定理 10]）。我们证明，Nikulin 不等式不仅适用于棱处简单的多胞体，有时还可以进一步加强。第 4 节讨论该不等式在 7 维理想有限体积直角双曲多面体中的情形，第 5 节讨论该不等式在 13 维直角双曲

多面体中的情形。我们的证明基于这样一个事实：每个理想顶点都包含在许多超面中。我们相信，更一般的情形也可以得到证明。

1.2. 直角双曲多面体的理想顶点数。 理想顶点数和直角多面体超面数的下界，对于证明高维中不存在此类多面体至关重要。令 $\mathcal{P}^n$ 表示有限体积非紧直角双曲多面体族，$a_k(P)$ 和 $v_\infty(P$分别表示多面体的 k维面数和理想顶点数 P。在 [Non15] Nonaka 得到了一些关于直角双曲多面体理想顶点数的估计。

定理 1.4 ([Non15，主定理 1。2])。 设 $P^n \in \mathcal{P}^n$。则 $v_\infty(P^n) \geqslant v_\infty^n$，其中 v_∞^n 由下表定义。

n	5	6	7	8	9	10	11	12
v_∞^n	–	3	17	36	91	254	741	2200

我们将 Nonaka 的估计改进如下。

定理 1.5。设 $P^n \in \mathcal{P}^n$。则 $v_\infty(P^n) \geqslant v_\infty^n$，其中 v_∞^n 由下表定义。

n	5	6	7	8	9	10	11	12
v_∞^n	2	6	23	135	1704	182 044	$1.67 \cdot 10^9$	$1.27 \cdot 10^{17}$

定理的证明及更精确的界见第6节。

致谢。作者感谢Nikolay Bogachev和Alexander Kolpakov的宝贵讨论与意见。

经费支持。本研究得到“BASIS”理论物理与数学促进基金会的资助。

2. Right–angled hyperbolic polytopes

闵可夫斯基空间 $\mathbb{R}^{n,\,1}$ 是实向量空间

$$\mathbb{R}^{n+1} = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \ldots, n\}$$

配备了不定标量积

$$\langle x, y\rangle = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

考虑双叶双曲面

$$H = \{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid \langle x, x\rangle = -1\}.$$

双曲空间是其上半叶

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid \langle x, x\rangle = -1,\ x_0 > 0\}$$

配备诱导度量。尽管闵可夫斯基标量积是不定的，但它在双曲空间 $\mathbb{H}^n$上诱导出黎曼度量。结果表明，该度量具有常截面曲率 -1。

$\mathbb{H}^n$ 到经过原点的平面 $x_0 = 1$ 的中心投影产生一个开球。它的边界称为双曲空间$\mathbb{H}^n$的理想边界 $\partial\mathbb{H}^n$。 $\partial\mathbb{H}^n$ 上的点与各向同性向量相对应

$$\{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid \langle x, x\rangle = 0,\ x_0 > 0\} \,/\, \mathbb{R}_{>0}.$$

并集 $\overline{\mathbb{H}^n} = \mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ 称为 $\mathbb{H}^n$的紧化。

任意满足 $\langle e, e\rangle = 1$ 的向量 $e \in \mathbb{R}^{n,\,1}$ 定义了相应的双曲超平面

$$H_e = \mathbb{H}^n \cap \{x \mid \langle e, x\rangle = 0\}$$

以及相应的闭双曲半空间

$$H_e^- = \mathbb{H}^n \cap \{x \mid \langle e, x\rangle \leqslant 0\}.$$

用 $\overline{H_e}$ 表示 H_e 在 $\overline{\mathbb{H}^n}$ 中的闭包。如果 $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = 1$ 和 $\langle e_1, e_2\rangle \leqslant 0$, 则有如下结论:

(1) 若 $\langle e_1, e_2\rangle > -1$, 则超平面 H_{e_1} 和 H_{e_2} 相交, 且角 $\phi = \angle(H_{e_1}^-, H_{e_2}^-)$ 可由方程 $\cos\phi = -\langle e_1, e_2\rangle$ 求得; (2) 若 $\langle e_1, e_2\rangle = -1$, 则超平面 H_{e_1} 和 H_{e_2} 不相交, 而它们的闭包 $\overline{H_{e_1}}$ 和 $\overline{H_{e_2}}$ 在边界 $\partial\mathbb{H}^n$ 上共有唯一一点; (3) 若 $\langle e_1, e_2\rangle < -1$, 则闭包 $\overline{H_{e_1}}$ 和 $\overline{H_{e_2}}$ 不相交, 且沿其唯一公垂线测得的 H_{e_1} 与 H_{e_2} 之间的距离 ρ 可由方程 $\cosh\rho = -\langle e_1, e_2\rangle$ 求得。

一个凸双曲 n维多面体 P 是 $\mathbb{H}^n$的有限个闭半空间的交集 P。我们还假设 $\mathbb{H}^n$ 的内部$\overline{P} \subset \overline{\mathbb{H}^n}$ 非空。在双曲空间 $P \subset \mathbb{H}^n$ 的克莱因模型中, 凸双曲多面体[的闭包93]是一个以原点为中心的单位球与某个凸欧几里得多胞体的交集（见 Vin）。因此, 我们基本上将通常的欧几里得术语（例如, 面和顶点）用于双曲多面体。

我们称 v 的 $\overline{P} \subset \overline{\mathbb{H}^n}$ 顶点为有限顶点, 当且仅当 $v \in \mathbb{H}^n$; 称其为理想顶点, 当且仅当 $v \in \partial\mathbb{H}^n$。双曲多面体具有有限体积, 当且仅当它与其顶点的凸包重合。有限体积双曲多面体是紧致的, 当且仅当其所有顶点都是有限顶点。若一个有限体积双曲多面体 P 仅有理想顶点, 则称 P 为理想多面体。

直角双曲多面体是所有二面角均等于 $\frac{\pi}{2}$ 的凸双曲多面体。考虑一个 n 维有限体积直角双曲多面体 P。已知, P 的每个有限顶点和理想顶点的邻域分别等于单纯形和立方体上的锥。因此, 多面体 P 在棱处简单, 即每条棱恰好包含于 $n-1$ 个超面中。

3. Combinatorics of convex Euclidean polytopes

考虑一个 n 维凸欧几里得多胞体 P。如果 P 的每个面都是单纯形, 则称其为单纯的。如果 P 的每个顶点都是恰好 n 个超面的交集, 则称其为简单的。单纯多胞体的极对偶是简单多胞体, 反之亦然。

令 f_k 表示 P 的 k 维面的数量（在此处及下文中, 我们假设 $f_{-1} = f_n = 1$）。

定理3.1（Dehn–Sommerville方程）。对于每个 n维单纯凸欧几里得多胞体, 以下方程成立:

$$\sum_{j=k}^{n-1}(-1)^j\binom{j+1}{k+1}f_j = (-1)^{n-1}f_k,$$

其中 $k = -1,\ 0,\ \ldots,\ n-2$。

推论3.2. 对于每个7维单纯凸欧几里得多胞体, 以下等式成立:

$$\begin{aligned}
f_3 &= 5f_2 - 15f_1 + 35f_0 - 70,\\
f_4 &= 9f_2 - 34f_1 + 84f_0 - 168,\\
f_5 &= 7f_2 - 28f_1 + 70f_0 - 140,\\
f_6 &= 2f_2 - 8f_1 + 20f_0 - 40.
\end{aligned}$$

推论3.3. 对于每个13维单纯凸欧几里得多胞体，以下等式成立：

$$\begin{aligned}
f_6 &= 8f_5 - 36f_4 + 120f_3 - 330f_2 + 792f_1 - 1716f_0 + 3432,\\
f_7 &= 27f_5 - 159f_4 + 585f_3 - 1683f_2 + 4125f_1 - 9009f_0 + 18018,\\
f_8 &= 50f_5 - 325f_4 + 1252f_3 - 3685f_2 + 9130f_1 - 20\,020f_0 + 40\,040,\\
f_9 &= 55f_5 - 374f_4 + 1474f_3 - 4389f_2 + 10\,934f_1 - 24\,024f_0 + 48\,048,\\
f_{10} &= 36f_5 - 250f_4 + 996f_3 - 2982f_2 + 7448f_1 - 16\,380f_0 + 32\,760,\\
f_{11} &= 13f_5 - 91f_4 + 364f_3 - 1092f_2 + 2730f_1 - 6006f_0 + 12\,012,\\
f_{12} &= 2f_5 - 14f_4 + 56f_3 - 168f_2 + 420f_1 - 924f_0 + 1848.
\end{aligned}$$

4. Ideal hyperbolic right–angled polyhedra

考虑一个理想的 7 维直角双曲多面体 P。令 a_k 表示其 k 维面的数量（为避免混淆，我们仅对单纯多胞体使用 f_k）。多面体 P 与一个欧几里得多胞体组合等价。将该欧几里得多胞体的所有顶点截去，并将所得截断多胞体记为 P'。令 a'_k 表示 P' 的 k 维面的数量。以下等式成立：

$$\begin{aligned}
&a'_0 = 64a_0, && a'_1 = a_1 + 192a_0, && a'_2 = a_2 + 240a_0,\\
&a'_3 = a_3 + 160a_0, && a'_4 = a_4 + 60a_0, && a'_5 = a_5 + 12a_0,\\
& && a'_6 = a_6 + a_0.
\end{aligned}$$

多面体 P 在棱处简单。因此，多胞体 P' 是简单多胞体，其对偶是单纯多胞体。这一事实使我们能够应用 Dehn–Sommerville方程：

$$\begin{aligned}
a_3 + 160a_0 &= 5(a_4 + 60a_0) - 15(a_5 + 12a_0) + 35(a_6 + a_0) - 70,\\
a_2 + 240a_0 &= 9(a_4 + 60a_0) - 34(a_5 + 12a_0) + 84(a_6 + a_0) - 168,\\
a_1 + 192a_0 &= 7(a_4 + 60a_0) - 28(a_5 + 12a_0) + 70(a_6 + a_0) - 140,\\
64a_0 &= 2(a_4 + 60a_0) - 8(a_5 + 12a_0) + 20(a_6 + a_0) - 40.
\end{aligned}$$

化简后，我们得到：

$$\begin{aligned}
a_3 &= 5a_4 - 15a_5 + 35a_6 - 5a_0 - 70,\\
a_2 &= 9a_4 - 34a_5 + 84a_6 - 24a_0 - 168,\\
a_1 &= 7a_4 - 28a_5 + 70a_6 - 38a_0 - 140,\\
0 &= 2a_4 - 8a_5 + 20a_6 - 20a_0 - 40.
\end{aligned}$$

于是， P 的二维面中顶点的平均数为

$$\begin{aligned}
\varkappa = \frac{192a_0}{a_2} &= \frac{{}^{192}\!/_{20}(2a_4 - 8a_5 + 20a_6 - 40)}{9a_4 - 34a_5 + 84a_6 - 24a_0 - 168} =\\
&= \frac{{}^{192}\!/_{20}(2a_4 - 8a_5 + 20a_6 - 40)}{9a_4 - 34a_5 + 84a_6 - {}^{24}\!/_{20}(2a_4 - 8a_5 + 20a_6 - 40) - 168} =\\
&= \frac{32}{11}\left(1 - \frac{2a_5 - 6a_6 + 12}{a_2}\right).
\end{aligned}$$

我们断言 $a_5 > 3a_6$，因此 $\varkappa < \frac{32}{11} < 3$。后者很容易推出不存在 7 维双曲理想直角多面体，因为每个 2 维面都至少包含三个顶点。

事实上，理想直角双曲多面体的每个面本身都是理想直角双曲多面体。每个 6 维有限体积直角双曲多面体至少有 27 个超面 [Duf10，引理 1 和命题 4]。另一方面， P 的每个 5 维面恰好包含在 P的两个 6 维面中。因此， $2a_5 \geqslant 27a_6$。

5. Finite volume hyperbolic right–angled polyhedra

设 P 是一个有限体积的 13 维直角双曲多面体。用 a_k 表示其 k 维面的数量，用 v_0 表示其有限顶点的数量，用 v_∞ 表示其理想顶点的数量。显然，$a_0 = v_0 + v_\infty$。多面体 P 与一个欧几里得多胞体组合等价。我们将欧几里得多胞体中对应于 P 的理想顶点的所有顶点截去，并将所得多胞体记为 P'。用 a'_k 表示 P' 的 k 维面的数量。以下等式成立：

$$\begin{aligned}
a'_0 &= 4096\,v_\infty + v_0, & a'_1 &= 24\,576\,v_\infty + a_1, & a'_2 &= 67\,584\,v_\infty + a_2,\\
a'_3 &= 112\,640\,v_\infty + a_3, & a'_4 &= 126\,720\,v_\infty + a_4, & a'_5 &= 101\,376\,v_\infty + a_5,\\
a'_6 &= 59\,136\,v_\infty + a_6, & a'_7 &= 25\,344\,v_\infty + a_7, & a'_8 &= 7920\,v_\infty + a_8,\\
a'_9 &= 1760\,v_\infty + a_9, & a'_{10} &= 264\,v_\infty + a_{10}, & a'_{11} &= 24\,v_\infty + a_{11},\\
& & a'_{12} &= v_\infty + a_{12}. & &
\end{aligned}$$

多面体 P 棱处简单。因此，多胞体 P' 是简单的，其对偶是单纯的。这一事实使我们可以应用 Dehn–Sommerville方程。化简后得到：

$$\begin{aligned}
a_6 &= -1716a_{12} + 792a_{11} - 330a_{10} + 120a_9 - 36a_8 + 8a_7 - 132v_\infty + 3432,\\
a_5 &= -9009a_{12} + 4125a_{11} - 1683a_{10} + 585a_9 - 159a_8 + 27a_7 - 1089v_\infty + 18\,018,\\
a_4 &= -20\,020a_{12} + 9130a_{11} - 3685a_{10} + 1252a_9 - 325a_8 + 50a_7 - 3740v_\infty + 40\,040,\\
a_3 &= -24\,024a_{12} + 10\,934a_{11} - 4389a_{10} + 1474a_9 - 374a_8 + 55a_7 - 6864v_\infty + 48\,048,\\
a_2 &= -16\,380a_{12} + 7448a_{11} - 2982a_{10} + 996a_9 - 250a_8 + 36a_7 - 7116v_\infty + 32\,760,\\
a_1 &= -6006a_{12} + 2730a_{11} - 1092a_{10} + 364a_9 - 91a_8 + 13a_7 - 3958v_\infty + 12\,012,\\
v_0 &= -924a_{12} + 420a_{11} - 168a_{10} + 56a_9 - 14a_8 + 2a_7 - 924v_\infty + 1848.
\end{aligned}$$

令 $\alpha_0 = \binom{13}{2}$ 和 $\alpha_\infty = 12\cdot 2^{11}$ 分别表示包含有限顶点和理想顶点的二维面数量。有限体积直角双曲 13 维多面体的二维面中顶点的平均数等于

$$\varkappa = \frac{\alpha_0 v_0 + \alpha_\infty v_\infty}{a_2}.$$

根据尼库林不等式，$\varkappa < \frac{13}{3}$。考虑以下差值：

$$\left(\alpha_0 v_0 + \frac{10309}{6144}\cdot\alpha_\infty v_\infty\right) - \frac{13}{3}\cdot a_2 = 2184 - \frac{26}{3}a_8 + 52a_9 - 182a_{10} + \frac{1456}{3}a_{11} - 1092a_{12}.$$

系数 13 3 和 $10309-6144$ 的选取使得右边的 a_7 和 v_∞ 相互抵消。

我们断言该差值为负。事实上，双曲有限体积直角多面体的每个面本身都是双曲有限体积直角多面体。每个 9 维双曲有限体积直角多面体至少有 152 个超面，每个 11 维双曲有限体积直角多面体至少有 564 个超面（[Duf10，引理 1 和命题 4]）。然而，每个 8 维面恰好包含于五个 9 维面中，每个 10 维面恰好包含于三个 11 维面中。因此，$152a_9 \leqslant 5a_8$ 且 $564a_{11} \leqslant 3a_{10}$。于是，$52a_9 - \frac{26}{3}a_8 < 0$ 且 $\frac{1456}{3}a_{11} - 182a_{10} < 0$。最后，$a_{12} > 2$，因此 $2184 - 1092a_{12} < 0$。

因此，我们证明了

$$\frac{\alpha_0 v_0 + \frac{10309}{6144}\cdot\alpha_\infty v_\infty}{a_2} < \frac{13}{3}.$$

不等式左侧是二维面的顶点数的加权平均：每个有限顶点的贡献为 1，而每个理想顶点的贡献为 $\frac{10309}{6144} > 1.6778$。同时，$2 \cdot \frac{10309}{6144} > 3.3557$和 $3 \cdot \frac{10309}{6144} > 5.03369$。有限体积直角多面体的每个二维面，要么至少包含 3 个理想顶点，要么包含 2 个理想顶点和 1 个有限顶点，要么包含 1 个理想顶点和 3 个有限顶点，要么包含 5 个有限顶点。因此，二维面顶点数的加权平均大于 $4.34 > \frac{13}{3}$。这与我们得到的界限矛盾。

6. Number of ideal vertices

回顾一下，$\mathcal{P}^n$ 表示有限体积非紧直角双曲多面体族，$a_k(P)$和 $v_\infty(P)$分别表示有限体积直角双曲多面体 P的 k面数和理想顶点数。对于多面体 P，用 $a_k^l(P)$表示一个 k面中 l面的平均数。换言之，

$$a_k^l(P) = \frac{1}{a_k(P)} \sum_{\dim F = k} a_l(F),$$

其中 F 遍历 P的所有 k面。

命题 6.1 ([Nik81], [Kho86，定理 10])。设 P 是一个 n–多胞体，且棱处简单。那么

$$a_k^l(P) < \binom{n-l}{n-k} \frac{\binom{\lceil n/2 \rceil}{l} + \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{l}}{\binom{\lceil n/2 \rceil}{k} + \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{k}}.$$

在 [Non15] Nonaka研究了具有一个理想顶点的直角双曲三维多面体，并得到了以下结果。

命题 6.2 ([Non15，推论 3.6])。若 P^3 是一个有限体积的直角双曲 3–多面体，且 $v_\infty(P^3) \leqslant 1$，则 $a_2(P^3) \geqslant 12$。

推论 6.3。若 $P^5 \in \mathcal{P}^5$，则 $v_\infty(P^5) \geqslant 2$。

证明。假设 $v_\infty(P^5) \leqslant 1$。$P^5$ 的每个 3–面都是一个有限体积的直角双曲 3–多面体，且至多有一个理想顶点。因此，根据命题 6.2，P 的每个 3–面至少包含 12 个超面，且 $a_3^2(P^5) \geqslant 12$。同时，根据命题 6.1，$a_3^2(P^5) < 12$。□

令 $\nu(P) = a_{n-1}(P) + v_\infty(P)$，若 $\mathcal{P}^n \neq \varnothing$，令

$$\nu_n = \min_{P^n \in \mathcal{P}^n} \nu(P^n).$$

Dufour 用这个值证明了定理 1.3。他发现了以下关系。

命题 6.4 ([Duf10，命题 4])。$\nu_5 \geqslant 26$。

命题 6.5 ([Duf10，引理 1])。设 $P^n \in \mathcal{P}^n$ 满足 $n \geqslant 3$。则

$$a_{n-1}(P^n) \geqslant 1 + \nu_{n-1}.$$

命题 6.6 ([Duf10，引理 2])。设 $n \geqslant 3$。则

$$\nu_n \geqslant 5 - 2n + 2\nu_{n-1}.$$

使用双重计数法，可以得到有限体积直角双曲多面体的理想顶点数的如下下界。

引理 6.7。设 $P^n \in \mathcal{P}^n$。

$$v_\infty(P^n) \geqslant \frac{a_{n-1}(P^n)\cdot v'_\infty(P^n)}{2\,(n-1)},$$

其中， $v'_\infty(P^n)$ 是 P^n 的一个面所包含的理想顶点的最小数目。

证明。由于多胞体 P^n 的每个理想顶点恰好属于 2 个（$n-1$）面，因此有以下不等式:

$$v_\infty(P^n)\cdot 2\,(n-1) \;=\; \sum_{\dim F=n-1} v_\infty(F) \;\geqslant\; a_{n-1}(P^n)\cdot v'_\infty(P^n),$$

其中， F 遍历 P^n的所有面。 □

由 $P^n \in \mathcal{P}^n$、命题 6.4 和命题 6.6 可知 $\nu_5 \geqslant 26$， $\nu_6 \geqslant 45$， 以及 $\nu_7 \geqslant 81$。命题 6.5、推论 6.3和引理 6.7 给出

$$a_5(P^6) \geqslant 27, \qquad v_\infty(P^6) \geqslant \left\lceil \frac{27\cdot 2}{10} \right\rceil = 6,$$
$$a_6(P^7) \geqslant 46, \qquad v_\infty(P^7) \geqslant \left\lceil \frac{46\cdot 4}{12} \right\rceil = 23,$$
$$a_7(P^8) \geqslant 82, \qquad v_\infty(P^8) \geqslant \left\lceil \frac{82\cdot 23}{14} \right\rceil = 135.$$

现在应用 ν_n的定义、命题6.5和引理 6.7 ， 得到

$\nu_8 \geqslant 217$, $a_8(P^9) \geqslant 218$, $v_\infty(P^9) \geqslant 1704$,
$\nu_9 \geqslant 1922$, $a_9(P^{10}) \geqslant 1923$, $v_\infty(P^{10}) \geqslant 182\,044$,
$\nu_{10} \geqslant 183\,967$, $a_{10}(P^{11}) \geqslant 183\,968$, $v_\infty(P^{11}) \geqslant 1\,674\,504\,428$,
$\nu_{11} \geqslant 1\,674\,688\,396$, $a_{11}(P^{12}) \geqslant 1\,674\,688\,397$,
$v_\infty(P^{12}) \geqslant 127\,466\,960\,740\,760\,088$.

References

[Duf10] G. Dufour. 关于双曲空间中直角考克斯特多面体的札记。 *Geom. Dedicata*, 147 277: –282, 2010.[Kho86] A. G. Khovanskii. 多面体的超平面截面、环面流形以及罗巴切夫斯基空间中的离散群。 *Funct. Anal. Appl.*, 20:41–50, 1986.[Kol12] A. Kolpakov. 关于理想直角 24 胞体的最优性。 *Algebr. Geom. Topol.*, 12 4 1941( ): –1960, 2012. [Nik81] V. V. Nikulin. 关于由罗巴切夫斯基空间中反射生成的算术群的分类。 *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 45:113–142, 1981. [Non15] J. Nonaka. 双曲空间中直角多面体的尖点数。 *Tokyo J. Math.* 38 2 539 560, 2015 , ( ): – . [

Pro86] M. N. Prokhorov. 高维罗巴切夫斯基空间中不存在具有非紧致有限体积基本多面体的离散反射群。 *Izv. Akad. NaukSSSR Ser. Mat.*, 50(2):413–424, 1986. [PV05] L. Potyagailo and E. B. Vinberg. 关于双曲空间中的直角反射群。*Comment. Math. Helvetici*, 80:63–73, 2005. [Vin84] E. B. Vinberg. 高维罗巴切夫斯基空间中不存在反射晶体群。 *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 47:68–102, 1984.[Vin 93] E. B. Vinberg, 编。 *Geometry II. Spaces of constant curvature* 29 *Ency-* , *clopaedia of Mathematical Sciences* 1993

*Tr. Mosk. Mat. Obs.*卷。Springer Berlin Heidelberg, 。

Department of Discrete Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology
Email address: aleksandrov.sa@phystech.edu*URL*: cyanprism.github.io