arXiv:2303.09537v1 [math.AG] 16 Mar 2023

导出动机谱范畴导论

Renaud Gauthier *

2023年3月17日

摘要

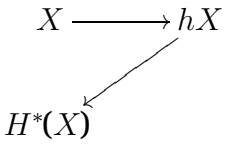
我们将格罗滕迪克的动机哲学抽象化并形式化，并在 Segal 范畴 $\mathbb{R}\mathrm{Hom}((\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F}, \mathrm{Top})$（$\mathrm{dSt}_k$ 是 sk-Alg 上导出层叠的 Segal 范畴，$\mathrm{Top} = L\mathrm{Set}_\Delta$ 是单纯集合的 Segal 范畴）中构造导出动机谱范畴，从而为在 Segal 框架下构造稳定动机同伦范畴奠定基础。

*2020 数学主题分类：14C15, 18N60, 55P42, 18N55, 14F42。关键词：动机、Segal topos、导出层叠、谱。

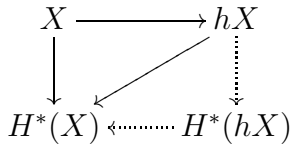
1 引言

格罗滕迪克指出，在代数几何中，人们有大量看似彼此不同的上同调理论，但它们有时会给出相同的群。这使他认为，这些上同调理论或许应当有一个共同的底层理论，他将其称为动机（[Gr]），即介于空间与上同调之间的一种对象。将这一想法形式化后，可以构造层的导出范畴，以期建立动机范畴（[CD]）；如果这些范畴定义得足够完善，其中便会有表示上同调的对象；此外，若这些范畴还具有六函子形式体系——从某种意义上说，这是上同调性质的一种映影——那么就应当将它们视为动机范畴。至此，研究焦点已从上同调转向先于上同调而存在的动机的导出范畴，我们将借此为自己的方法提供动机。如今，Khan 利用这样一个事实：经典代数几何中的许多问题在导出代数几何中都能得到简化（对我们而言，最重要的是交叉理论，它涉及代数循环，而代数循环本身又是定义韦伊上同调所必需的；韦伊上同调与动机概念密切相关），据此主张在这一背景下发展动机理论，并在 [K] 中付诸实践。我们将沿用相同的观点，并以 Segal 范畴为此服务。

最重要的是，我们目前所做的是提出一种理解动机及其由来的不同方式。传统上，与空间 X 相关联的动机 hX 如下图所示：

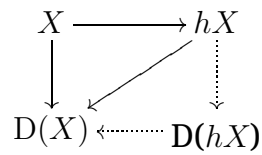


其中 $H^*(X)$ 表示一种韦伊上同调；我们提出一种初看起来像是函子形式体系的方案，如下所示：



其中 $H^*(hX)$ 可以捕捉来自某个动机的上同调信息。正如我们上文所论证的，既然我们可以将注意力从上同调转向

对导出范畴的研究，我们转而寻求以下形式的图表：



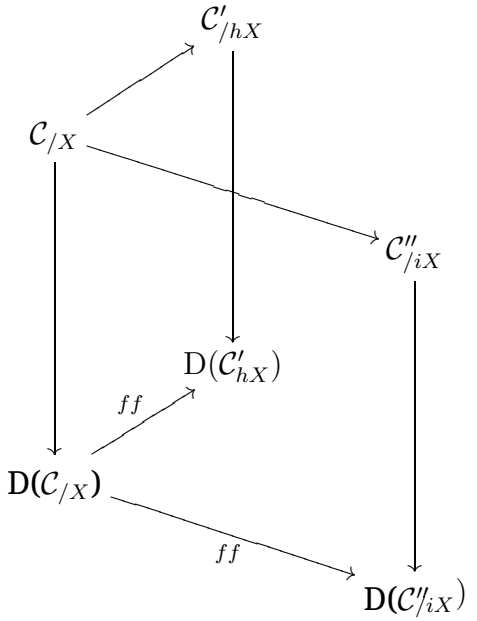
(1)

确实存在一种与此图示形式上相似的情形，其中用到了层的导出范畴。在这种情形下，上图中的底部映射可视为特化函子，因此促使我们将顶部映射视为推广。事实上，例如从 [CD] 我们有：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sch}_{/X}^{ft,sm} & \longrightarrow & \mathrm{Sch}_{/X}^{ft} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}_{\acute{e}t}(\mathrm{Sch}_{/X}^{ft,sm},\mathbb{Q}) & \longleftarrow & \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}_{t}(\mathrm{Sch}_{/X}^{ft},\mathbb{Q}) \end{array}$$

其中 $t = h$ 或 qfh。回到（1），我们将其中的层的导出范畴视为概形 X 及相应动机 hX的上同调表现。公平地说，这些都是以切片范畴 $\mathcal{C}_{/X}$ 和 $\mathcal{C}'_{/hX}$ 为基范畴的函子范畴。这促使我们将动机哲学视为一个多层次过程：第一步是找到一个大的环境范畴 $\mathcal{C}'$，使对象 X 能够嵌入其中，并借助诸如切片范畴 $\mathcal{C}'_{/hX}$这样的范畴性表征，将该对象与该范畴中的其他对象联系起来；其意图是让对象 X 在这一设置中得到充分呈现。第二步是将切片范畴转化为位点。我们认为，在范畴上赋予格罗滕迪克拓扑，就是为这些范畴提供一个滤子；其意图是让恰当的滤子使这些范畴中的对象得到有利的呈现。下一步是研究这些位点的表现形式。要连贯地做到这一点，恰当的方法当然是使用层，因此需要采用层的导出范畴。最后，要凸显几何对象 X 的某一特定特征，就必须选择对此类导出范畴进行适当的修改，以凸显这一特征；我们将此视为该特征的一种表现形式。我们将最后这一步称为约化。

因此，我们考虑由范畴构成的多层图表，其中每一步都被视为一个滤化过程，例如以下图表：



每个连接相邻两层的竖直映射。这些图表关于 X 具有函子性。

为了构造此类多层图表，在最初阶段，我们将嵌入视为揭示几何对象 X各个侧面的基本起点。给定一个嵌入$h : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}'$，满足 $X \in \mathcal{C}$ 和 $hX \in \mathcal{C}'$，诱导映射 $\mathcal{C}_{/X} \hookrightarrow \mathcal{C}'_{/hX}$ 中体现的范畴感知，使我们得以观察在每个阶段，人们感知到了原始对象 X 的多少。用 (1) 中导出范畴的语言来说，如果对于任何其他嵌入 $i : \mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C}''$，研究将 hX 嵌入 $\mathcal{C}''$并不能获得任何信息，也就是说 $\mathrm{D}'(hX) \cong \mathrm{D}''(ihX)$，其中 $\mathrm{D}'(hX)$ 是 $\mathcal{C}'_{/hX}$上的层的导出范畴，$\mathrm{D}''(ihX)$ 是 $\mathcal{C}''_{/ihX}$上的层的导出范畴，并且这对任意 D''都成立，那么我们就说 $\mathrm{D}'(hX)$通过 hX充分展现了 X 的本质，或者说 hX是与 X 相关联的完备对象。要达到这一点，我们必须在此类范畴 $\mathcal{C}'$和 $\mathcal{C}''$上使用适当的滤子和表现形式；每一次这样的修改都会为我们的构造增添相应的一层。若要突出几何对象 X的某个特征 T，若 $\mathfrak{R}_T$ 表示它在导出范畴上的相应约化

例如，若指的是层的导出范畴，并且约化后，对于任意 $\mathfrak{R}''_T$，我们有与$\mathfrak{R}'_T$ D′(hX) ≅ $\mathfrak{R}''_T$D″(ihX)类似的陈述，那么就称 $\mathfrak{R}'_T$D′(hX)通过 hX展现了 X的T特征，它捕捉了其 T性。按照约定，若 $T = \emptyset$,$\mathfrak{R}_\emptyset = id$，则对象 X已在 hX中得到充分展现，因此 hX也就成为与 X相关联的完备对象。若考虑那些能够使我们得到动机范畴的约化 $\mathfrak{R}_{mot}$，即将形如 $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}_\tau(\mathcal{C}_{/X}, \mathbb{Q})$、例如 (1) 中的层的导出范畴，转化为满足六函子形式体系的范畴，那么在我们看来，所得范畴 $\mathfrak{R}_{mot}\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}_\tau(\mathcal{C}_{/X}, \mathbb{Q})$展现了 X的动机特征。这是对动机哲学的一种形式化启发式理解，我们认为它有助于理清思路。然而，为了构造导出动机谱的 Segal 范畴——这正是本文的主要目标——我们将依据通常意义下的动机概念开展工作。我们将借助关于动机的启发式理解，自然地引出导出动机谱所源自的 Segal 范畴。

我们从一个概形 $X \in \mathrm{Sch}_k$ 开始，首先将它嵌入导出概形 $iX \in \mathrm{dSch}_k$ 中，然后利用模型 Yoneda 嵌入将其嵌入导出层叠 $F = h_{iX} \in \mathrm{dSt}_k$ 中（见 [TV]）。接着，我们聚焦于切片范畴 $(\mathrm{dSt}_k)_{/F}$。如果传统动机研究中的大多数层的导出范畴都具有 $\mathrm{DSh}_\tau(\mathcal{C}_{/X}, \mathcal{A})$ 的形式，那么我们认为，在我们的语境中，此类对象的正确推广应由 Segal 范畴 $\mathbb{R}\mathrm{Hom}((\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F}, \mathrm{Top})$ 构造而成。我们为这一范畴中的对象发展导出动机谱的形式体系；在我们的设定中，这相当于 [K] 中的动机谱。我们将导出动机谱定义为满足 $\mathbb{A}^1$-不变性（或者更确切地说，满足其推广）并满足 Nisnevich 切除、而非 Nisnevich 下降的谱。不过，我们没有发展六函子形式体系；为求简洁，也没有使用基点空间。

关于记号，同态集用 Hom 表示，内Hom 用 Hom 表示，单纯映射空间用 Map 表示，而同伦函数复形用 map 表示。Cat_Δ 表示单纯范畴的范畴，Set_Δ 表示单纯集合的范畴。我们将 $\mathrm{Hom}(-, X)$称为 X 的函子性感知，将 $\mathcal{C}_{/X}$ 称为范畴性感知；将 $\mathrm{Hom}(X, -)$称为 X 的函子性体现，将 $\mathcal{C}_{X/}$ 称为范畴性体现。

2 从嵌入到比较定理

2.1 具体实现与抽象

研究动机（[Gr], [S], [A]）尤其意味着研究韦伊上同调（[J]），因为韦伊上同调经由动机分解；而韦伊上同调要求我们考虑代数循环等对象。这使得标准猜想成为我们必须面对的问题，它们对我们的上同调理论提出了非常具体的要求，因此这些理论便表现为其所属的总体动机理论的实现（[M2]）。由此可见，以韦伊上同调为出发点发展动机理论，只能展现动机理论的一个侧面。采取这种观点，意味着将动机视为基本对象，并置于上同调理论之上。因此，我们的目标是提出经典动机概念的先导，从中可以导出上同调。

为了说明为何需要寻求一种抽象的动机理论，请回想一下，动机 hX 这一概念与几何对象 X 相关联。之所以引入这一概念，是因为不同的上同调 $H^*_{(i)}(X)$可能得到相同的结果，从而表明这些上同调是同一类的代表，即动机hX。我们有如下图示：

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & hX \\ & \searrow & \\ & & H_i^*(X) \end{array} \tag{2}$$

鉴于动机是介于空间与上同调理论之间的对象，不妨假设我们能够通过函子 H^* 将动机中的上同调信息分离出来，使得（2）可以补全为如下交换方形图：

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & hX \\ \downarrow & \swarrow & \vdots \\ H_i^*(X) & \dashleftarrow & H^*(hX) \end{array}$$

其中，每个对角映射都经由特化函子 $H_i^*(X) \leftarrow H^*(hX)$ 分解，从而将 $X \to hX$ 呈现为一种推广。我们拥有这样一种形式体系，并不像看起来那么牵强，因为稍后我们将看到

上同调谱是某些切片范畴上的层（或代数栈）的导出范畴中的对象，而上述关于上同调对象的陈述应写作 $\mathbf{DSh}_\tau(\mathcal{C}_{/X},\mathcal{A}) \leftarrow \mathbf{DSh}_{\tau'}(\mathcal{C}'_{/hX},\mathcal{A})$，这是某种预比较函子，它源于一个映射 $X \to hX$。作出这样的陈述，已经清楚表明我们偏离了标准动机同伦论：在标准动机同伦论中，$\mathbf{DSh}_\tau(\mathcal{C}_{/X},\mathcal{A})$ 是一个动机范畴；而对我们而言，几何对象 $X \in \mathcal{C}$ 的动机特征，显然体现在它嵌入另一个范畴 $\mathcal{C}'$ 中的方式 hX，正如引言中所讨论的那样；相应切片范畴上的各种导出范畴，则以不同方式彰显这类几何对象的动机特征。本文其余部分的目标之一，是介绍这种替代形式体系，为动机理论提供动力，并希望由此推动新的研究。

2.2 嵌入

如果从代数簇或概形出发构造动机，我们认为，只有先将几何对象嵌入更大的范畴，并将它与该范畴中的其他对象进行对比，才能揭示其“动机核心”。因此，迈向真正抽象的第一步，是考察一系列嵌入：

$$\mathrm{Var}_k \hookrightarrow \mathrm{Sch}_k \xrightarrow{i} \mathrm{dSch}_k \xrightarrow{h} \mathrm{dSt}_k \tag{3}$$

对于 k 交换环，如果从代数簇出发，则有从代数簇到概形，再到导出概形，继而到导出代数栈的过程。准确地说，如果 k是代数闭域，则有一个全忠实函子 $\mathbf{Var}_k \hookrightarrow \mathbf{Sch}_k$。从 [T], 我们有一个全忠实函子，它将 k-概形范畴 $\mathbf{Sch}_k$ 映到 Segal 范畴 $\mathbf{dSch}_k$，即 k上的导出概形范畴；而 $\mathbf{dSch}_k$ 本身嵌入在导出代数栈的 Segal 范畴 $\mathbf{dSt}_k$中。更准确地说，我们有一个米田嵌入 $h : \mathbf{dSch}_k \to \mathbf{dSt}_k$，它将导出概形$iX$, $X \in \mathbf{Sch}_k$映到 $h_{iX} = \mathbf{Map}^{\mathrm{dSch}_k}(-, iX)$。

关于后一个嵌入，回顾 [TV]: 若 M 是一个模型范畴，Γ_*: $M \to M^\Delta$ 是 M 上的余纤维化解消函子，令 $\underline{h}_x(y) = \mathbf{Hom}_M(\Gamma_* y, x) = \mathbf{Map}_M(y, x)$，则函子 $\underline{h}$: $M \to M^\wedge$（其中 $M^\wedge$ 是相对于 M 中的弱等价对 $\mathbf{sPr}(M)$ 作左 Bousfield 局部化所得）可右导出到 $\mathbb{R}\underline{h}$ 中。此外，我们有 $h_x \cong \mathbb{R}\underline{h}_x \in \mathbf{Ho}\,(M^\wedge)$。

现在，要证明 h_x 是一个层，只需证明 $\mathbb{R}\underline{h}_x$ 也是如此。回顾：若 M 上的模型预拓扑 τ 满足对所有 $x \in M$， $\mathbb{R}\underline{h}_x$ 都是一个层，则称其为子正则的。形式上，这意味着 $\mathbb{R}\underline{h}$: Ho (M) $\to$Ho ($M^\wedge$) 可经由层范畴 Ho ($M^{\sim,\tau}$) 分解。由于这正是我们需要的，因此要求 τ 为子正则的。具体而言，这里我们处理 $M = \mathrm{D}^-k\text{-Aff} = \mathrm{s}k\text{-Alg}^{\mathrm{op}}$。由 [TV], 的假设 1.3.2.2 可知， τ 一般是子正则的；该假设在 D^-k-Aff 上存在 $\tau =$ ´et 的特殊情形下成立。因此，$\mathbb{R}\underline{h}$: Ho (D^-k-Aff) $\to$Ho (D^-k-Aff $^{\sim,\ \acute{e}t.}$) 是全忠实的，而它与 h 同构。因此，当我们说经模型范畴的单纯局部化后， h: $\mathrm{dSch}_k \to \mathrm{dSt}_k = L\mathrm{D}^-k\text{-Aff}^{\sim,\ \acute{e}t.}$ 是全忠实的，我们真正指的是它在同伦意义下全忠实。

为完整起见，回顾一下 dSt_k 的构造；如 [TV] 和 [T2], 中所述，首先取一个对称幺半模型范畴 $\mathcal{C}$，而在导出代数几何中，我们实际上考虑的是 $\mathcal{C} = \mathrm{s}k$-模。于是 Comm($\mathcal{C}$) $=\mathrm{s}k$-代数。对其进行 Dwyer-Kan 单纯局部化（[DK]），得到单纯形范畴 L(sk-代数)，进而得到一个 Segal 范畴（[TV2]）。其反 Segal 范畴记为 dk-Aff $= L$(sk-代数)^{op}。将 $L\mathrm{Set}_\Delta$ 记为拓扑空间 Top，我们考虑预栈的 Segal 范畴 dk-Aff $= \widehat{\mathbb{R}\mathrm{Hom}(\mathrm{d}k\text{-Aff}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Top})}$，而 $\mathrm{dSt}_k \subset$ dk-Aff 是由导出代数栈构成的子 Segal范畴，所取拓扑为 ´étale 拓扑。它也可以表示为 $\mathrm{dSt}_k = L\overline{\mathrm{D}^-k}^{\sim\ \acute{e}t.}$ $\mathrm{D}^-k^{\sim\ \acute{e}t.}$ (D -Aff ,)，其中 D -Aff , 是定义在 sk-代数上的导出代数栈模型范畴，如前一段所述。

(3) 给出了一条嵌入链（还可以继续延伸），我们要寻找的是几何对象 X 可以嵌入其中的最一般范畴。其思路是：如果难以找到一个最优范畴 $\mathcal{C}'$，使得任何其他嵌入 $\mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C}''$ 都无法增加关于对象 X 的信息（如引言中所述），那么，假设 X 的 T性已存在于 $hX \in \mathcal{C}'$中，此后的任何进一步嵌入都会保留 X的 T特性，因此，采用所能想到的最一般范畴应该就足够了。目前，为了定义动机，我们将采用 dSt_k；这已经足够，因为光滑概形范畴已为构造动机范畴提供了基础。将 X 与更大范畴 dSt_k中的其他对象进行比较，实质上意味着考察函子性表征 Hom($-, X$)，或诸如切片范畴 $(\mathrm{dSt}_k)_{/X}$这样的范畴性表征。

为明确起见，利用上面的 (3)，对于 $X \in \mathbf{Sch}_k$，切片范畴的嵌入形式如下：

$$(\mathrm{Sch}_k)_{/X} \hookrightarrow (\mathrm{dSch}_k)_{/iX} \hookrightarrow (\mathrm{dSt}_k)_{/h_{iX}} \tag{4}$$

采用切片范畴的动机，源于格罗滕迪克的相对观点哲学：根据这一哲学，一旦将某个对象置于其所在范畴中与其他对象的关系之中，该对象的各个方面便能显现出来，我们将此称为感知。特别是，(4)相当于运用范畴感知。接下来，人们在这类切片范畴上赋予拓扑，我们将其视为滤子。至此，我们已经开始构建分层图表：以切片范畴为底层，其上依次是滤化范畴层，也就是位点。然后，人们研究这类位点上的层，因为它们能提供相干显现，由此便形成了另一个层次。对此还有一种看法：层范畴在形式上对应于将给定的底范畴与各种目标范畴进行外在比较，这一点我们将在下一节讨论。最后，人们在由此得到的拓扑斯上研究适当的函子，以考察 X的某些方面；正如引言中所说，我们将此称为约化。如果希望聚焦于 X的动机方面，就要采用能产生上同调函子的约化；我们所说的上同调函子，是指满足六函子形式体系的函子，它们在某种意义上能从 X 中提取其上同调特征。这实质上就是我们将遵循的计划。

2.3 表现形式/外在表示

遵循格罗滕迪克关于研究相对对象的哲学，我们引入了范畴感知 $(\mathbf{Sch}_k)_{/X}$ 和 $(\mathbf{dSt}_k)_{/F}$，其中 $F = h_{iX}$。在我们的哲学中，范畴感知及其相对嵌入至关重要，因为一旦恰当地选定它们，就能为确定给定几何对象在何处显现其 T 性质奠定基础。正如上一节末尾简要提到的，下一步是在这些切片范畴上赋予拓扑，也就是进行某种滤化过程；我们假设此时这一步已经完成。

仍然遵循格罗滕迪克的相对观点哲学，对这些位的分析应涉及其他范畴。一种实现方式是研究它们的外在表示，我们可以例如通过层函子性地做到这一点。经过约化的适当调整后，这些函子性表现形式可以展现几何对象的某个方面，而由此得到的约化表现形式则能告诉我们，是否已在嵌入塔中到达最优的环境范畴 $\mathcal{C}'$，还是需要沿着这座塔继续深入。

这实际上非常一般：为了凸显几何对象 $X \in \mathcal{C}$ 的 T 类型特征，我们寻求带有相应嵌入 i 的环境范畴 $\mathcal{C}'$： $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}'$，使得对于适当选取的函子 F_T，若对任意其他范畴 $\mathcal{C}''$ 及任意其他嵌入 j： $\mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C}''$，对于任意其他 T-函子 G_T，$F_T(\mathcal{C}'_{/iX}) \cong G_T(\mathcal{C}''_{/jiX})$，便称 X 的 T-特征在 $iX \in \mathcal{C}'$ 中得以显现；此时我们也会说 $F_T(\mathcal{C}'_{/iX})$ 展示了 X 的 T 类型。如果 T 是一个动机，而 F_T 对应于 $\mathcal{C}'_{/iX}$ 上满足六函子形式体系的层的导出范畴，那么在此设定下，$F_T(\mathcal{C}'_{/iX})$ 是传统意义上的动机范畴；在我们的形式体系中，它展现了 X 的动机特征，换言之，它捕捉了 iX 的动机方面。

现在，为了映照这样一个事实：在 [CD]中，我们处理的是切片范畴上的层，而这些切片范畴本身又是这类基范畴的表现形式，因此在当前语境下，我们要寻找 $(\mathrm{dSt}_k)_{/F}$ 的某些表现形式；它们将是 Segal 范畴 $\mathbb{R}\mathrm{Hom}((\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F}, \text{拓扑空间})$ 的对象。这在 Segal 语境下，相当于我们在 [CD] 中使用的层范畴。请注意，我们不会在 $(\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F}$ 上赋予拓扑，因为这会在其上引入一个滤子，而我们希望在尽可能广泛的范围内开展研究。

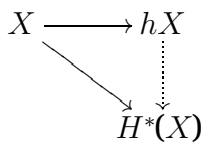
2.4 上同调研究——解构

回想一下，若紧流形上的上同调理论基于埃伦伯格–斯廷罗德公理，那么可以为其赋予各种能导出相同群的上同调理论。这表明，这些上同调理论是那些公理的实现，因此从某种意义上说，公理显得更为基础、更具动机性。这也说明，我们应当与上同调

理论本身保持距离，因为它们似乎处于次要地位；相反，我们应当着眼于上同调理论的先导，其中最主要的便是动机。为了进一步说明为何必须将关注点从上同调转向更抽象的理论，不妨注意到某些情形下，上同调会被当作工具使用。层上同调便是这样一个例子。正如[M] 中所述，例如，回想一下，若 $\mathrm{Sh}_{ét}(X)$ 表示概形 X 上 ´étale 层的范畴，那么函子 $\mathrm{Sh}_{ét}(X) \to \mathrm{Ab}$，$\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X,\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ 在某种意义上是 X 到 Ab 中的一阶体现，当然是相对于 $\mathcal{F}$ 而言。由于整体截面函子 $\Gamma(X,-)$ 是左正合的，我们可以求出它的右导出函子。为此，由于 $\mathrm{Sh}_{ét}(X)$ 有足够多的内射对象，我们可以找到 $\mathcal{F}$ 的内射分解 $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}^0 \to \mathcal{I}^1 \to \cdots$。由于复形 $\Gamma(X,\mathcal{I}^0) \to \Gamma(X,\mathcal{I}^1) \to \cdots$ 通常并非正合，我们可以求其上同调，而这正是 X 的 ´étale 上同调。请注意，研究 $\Gamma(X,\mathcal{I}^\bullet)$ 的上同调，弥补了它的不正合性，使其恢复某种连贯性。由此可见，为了完整呈现 X，必须借助上同调来研究 $X \in \mathrm{Sch}_k$ 到 Ab 的体现，即通过 $\mathcal{F} \in \mathrm{Sh}_{ét}(X)$，但除此之外，上同调并非关注的中心。因此，若希望发展一种将动机视为基础对象的动机理论，似乎更合适的做法不是直接使用有时显得次要的上同调，而是以更抽象的理论为基础来建立动机理论。

2.5 从上同调转向研究导出范畴

正如我们在上一小节指出的，从我们的视角来看，上同调有助于研究几何对象。然而，要构建一套上同调理论，就应当以早于上同调理论的理论为目标。动机理论便是这样的理论之一。动机最初的引入方式，是将其描述为介于空间与上同调对象之间的一种对象，因为任何良好的上同调都可以分解为如下形式：



动机 hX 的出现因此意味着它们必须承载某些上同调信息，为此通常要求动机是满足六函子形式体系的范畴中的对象。这并非我们关注的重点；我们不会要求我们的系数范畴（后文将如此称呼）满足六函子形式体系。我们稍后会解释其中缘由。这样一来，我们的任务就大大简化了；而且仍然可以从我们的导出动机谱范畴出发，构建六函子形式体系。

系数范畴是早于上同调理论出现的导出范畴。尤其是在 [CD] 中，许多与动机相关的系数范畴都是层的导出范畴，其中一些以作为对象的上同调谱来表示上同调理论。这正是我们所期望的抽象。如此一来，我们便可以不再研究上同调理论，转而研究这类导出范畴及其相互之间的比较。通常的做法正是如此，因为这些导出范畴就是动机范畴。在本文中，我们稍稍拓宽视野，将这些导出范畴视为几何对象的表现形式。因此，它们旨在展现这类对象的动机特征，正如引言中所述。

2.6 动机范畴

我们采用 [CD] 中给出的表述来处理我们感兴趣的各种动机范畴。对我们而言，核心是 Beilinson动机的导出范畴 $\mathrm{DM}_B(X)$，它是 $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sh}_{Nis}$(光滑态射类/$X, \mathbb{Q}$)) 关于无环对象子范畴的 Verdier 商。值得再次指出的是，尽管通常认为这提供了一种动机范畴，我们仍提出另一种看待动机研究的方式：先将给定的几何对象 X 置于它能够作为对象存在的最一般环境范畴中，再考察它与该范畴中其他对象的相对关系。因此，我们考察的是切片范畴 $\mathcal{C}_{/X}$。这些范畴可以通过我们所说的滤子来分析，即将它们转化为位的格罗滕迪克拓扑。此时，我们利用层将这些位投射到其他范畴中，从而得到拓扑斯。我们最初所讨论的几何对象 X 的各种方面，或 T 类型的特征，可以借助特定于 T 的表现形式——称为约化——来研究；这些约化聚焦于几何对象的 T 特征。从这一视角来看，我们可以将 $\mathrm{DM}_B(X)$ 视为一种约化

它通过使用具有有理系数的 Nisnevich层，呈现了 $X \in$光滑态射类的动机特征。请注意，这丝毫不会改变迄今为止关于动机所做的一切工作，只是为动机哲学提供了另一种途径；如果 $DM_B(X)$ 在传统意义上是一个动机范畴，我们只是建议将其视为展现 X 的动机特征。

回到 $\mathrm{DM}_B(X)$，Sm 指的是在一开始固定的概形 S 上、概形范畴中的有限型光滑态射类。对于某个范畴 $\mathcal{A}$，$\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{A})$ 指 $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{A}) = \mathrm{D}(\mathrm{Sp}(\mathcal{A}))[\mathcal{W}^{-1}{}_{\Omega\,\mathbb{A}^1}]$，其中 $\mathrm{D}(\mathcal{C})$ 是某个范畴 $\mathcal{C}$的通常导出范畴，$\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$中的谱范畴；这里的局部化是相对于一个类$\mathcal{W}_{\Omega,\,\mathbb{A}^1} = \mathcal{W}_\Omega \cup \mathcal{W}_{\mathbb{A}^1}$进行的，该类由Tate谱的两个族态射组成。读者可参阅 [CD] 了解更多详情。我们对这些内容的介绍极为简略，仅旨在呈现主要对象并说明其背景；在本书其余部分，我们不会超出这一介绍层次讨论细节。对我们而言，重要的是记住，Beilinson动机的导出范畴是概形 X的光滑位点上的有理 Nisnevich层的导出范畴。

我们还有 Voevodsky动机范畴 $\mathrm{DM}_{t,\,\mathbb{Q}}(X)$，其拓扑为 $t = h$ 或 qfh，定义为 $\mathrm{DM}_{t,\,\mathbb{Q}}(X)$ 的局部化子范畴，由形如 $\Sigma^\infty \mathbb{Q}^t_X(S)(n)$ 的对象生~~成，~~ 其中 $S \in \mathrm{Sm}/X$，$n \leq 0$，而$\mathbb{Q}^t_X(S)$ 是由 S 表示的自由 $\mathbb{Q}$-线性 t-层，$\mathrm{DM}_{t,\,\mathbb{Q}}(X) = \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sh}_t(\mathcal{S}^{ft}_{/X}, \mathbb{Q}))$，$\mathcal{S}^{ft}$ 是满足某些条件的 X 上诺特~~概形~~范畴 $\mathcal{S}$ 中的有限型态射类（详见 [CD]）。

另一个动机范畴是 $\mathrm{DM}_{\mathbb{Q}}(X)$，定义为带转移层的导出范畴 $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sh}^{tr}(X, \mathbb{Q})) = \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sh}_{Nis}(\mathrm{Sm}^{cor}_{\mathbb{Q}}{}_{,\,X}))$。

Morel动机的范畴 $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(X, \mathbb{Q})^+$ 是 $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(X, \mathbb{Q}) = \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sh}_{Nis}(\mathrm{Sm}/X, \mathbb{Q}))$ 的一个子范畴，由投影得到（详情参见 [CD]）。

2.7 实现函子

我们可以从以下结果开始讨论实现函子的概念，该结果见于 [CD]: 对于具有结构态射 $f: X \to S$, E 的概形 $X \in \mathrm{Sch}/S$，以及给定的、具有相关环谱 $\mathcal{E}$ 的稳定上同调，我们有一个实现函子 $\mathrm{DM}_B(X) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{E}_X\text{-模})$，其中$\mathcal{E}_X = \mathbb{L}f^*\mathcal{E}$ 是一个将 M 关联到 $\mathcal{E}_X \otimes^{\mathbb{L}}_X M$ 的映射。

在 [CD], 中，这种情形的抽象表述如下。若 $\mathcal{M}$ 和$\mathcal{M}'$ 是满足 [CD] 中详述的一系列条件的幺半模型范畴，且 $\phi^*: \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{M}': \phi_*$ 是一个左 Quillen 伴随，$\mathcal{E}'$ 是 $\mathcal{M}'(\mathrm{Spec}\ k)$ 中 $\mathbb{I}$ 的纤维化的替代，$\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{M}(\mathrm{Spec}\ k)$ 中 $\phi_*(\mathcal{E}')$ 的余纤维替代，那么根据 [CD], 的定理 17.1.5，我们得到一个实现函子 $\mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{M}') \cong \mathrm{Ho}(\mathcal{E}\text{-模})$, $M \mapsto \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}} M$。请注意，$\mathrm{Ho}(\mathcal{M}') \cong \mathrm{Ho}(\mathcal{E}\text{-模})$ 意味着 $\mathcal{E}$的表示论由$\mathcal{M}'$给出；若 $\mathcal{E}$ 表示一种上同调理论，那么 $\mathcal{M}'$ 便是开展上同调理论 $\mathcal{E}$ 所表示的内容时所处的环境范畴。要实现这一点，$\mathcal{M}$ 必须在某种意义上是一个参考范畴；而它能为 $\mathrm{Ho}(\mathcal{E}\text{-模})$ 等上同调提供“整洁”的表示，这足以证明可以将其视为与动机理论相关联。

在介绍了这一抽象框架之后，注意，如果$H_{B,\ X}$ 是贝林森动机上同调谱，那么根据 [CD] 的定理 14.2.9，函子 $\mathrm{DM}_B(X) \to \mathrm{Ho}(H_{B,\ X}\text{-模})$是三角单幺范畴之间的等价，因此我们得到了一个平凡的实现函子，说明 $\mathrm{DM}_B(X)$ 是一个最优的动机范畴。通过这种方式，实现函子使我们得以论证，诸如 $DM_B(X)$ 这样的导出范畴实际上可以是动机范畴。当然，这并不是什么新鲜事；不过，在我们的形式体系中，这还有一个额外的好处：它表明，在两种上同调表现形式 $DM_B(X)$ 和 $\mathrm{Ho}(\mathcal{E}_X\text{-模})$ 中，前者表现为 X 的一个最优函子，展现了其动机特征。

2.8 比较函子

比较定理使我们能够联系起所有感兴趣的动机范畴。在此之前，值得指出的是，如果我们有这样的范畴等价，

这表明所涉及的每个范畴在某种意义上都不是绝对的，而只是一个尚待确定的终极动机范畴的不同侧面；这些比较定理中的每个范畴，在某种意义上都是与某种普适动机同伦论相对应的类的代表。这一观点说明，有必要寻求一种高阶理论，以提取一个动机范畴，所有下文提及的范畴都是它的代表。不过，就目前而言，请注意，我们将要讨论的比较定理中涉及的所有动机范畴，都来自各种层的导出范畴的约化；我们也将据此展示 X 在我们形式体系中的动机特征。

第一个比较定理由以下结果给出，即[CD], 的定理 16.1.2，该定理指出 $\mathrm{DM}_B(X) \cong \mathrm{DM}_{t,\mathbb{Q}}(X)$，其中 $t = h$ 或 $t = qfh$。我们会特别注意清楚地说明，在我们将给出的每个比较定理中， X 应满足什么性质，原因将在下文阐述。这里， X 是一个有限维优良诺特 схем。

如果现在 X 除了是诺特且有限维之外，还优良且几何单分支，那么我们就得到三角幺半范畴 $\mathrm{DM}_B(X) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{DM}_{\mathbb{Q}}(X)$ 之间的等价。

根据 [CD], 的定理 16.2.13，对于任意有限维诺特概形 X，我们有三角幺半范畴 $\mathrm{DM}_B(X) \simeq \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(X, \mathbb{Q})^+$ 之间的典范等价。

最后，对于任意有限维诺特概形 X，我们也有一个范畴的典范等价：$\mathrm{DM}_{\mathbb{Q}}(X) \simeq \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1,\acute{e}t}(X, \mathbb{Q}) = \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sh}_{\acute{e}t}(\text{光滑态射类}/X, \mathbb{Q}))$。

需要注意的是，如果我们改变基概形 X 的特征，我们的视角也会随之改变，因此，以传统意义理解的动机也会有所不同。因此，为了说明问题并明确思路，我们只考虑一种类型的概形。为使上述所有比较定理能够一并使用，我们固定 X 为一个有限维、优良且几何单分支的诺特概形。

3 动机谱范畴的抽象

3.1 约化的一般形式

上述比较定理中使用的所有三角单幺动机范畴，都是从某个概形 X 的小站点上的层的导出范畴构造而来。因此，我们将寻求一种抽象的动机范畴，使其保留相同的形式，即某个切片范畴上的层或代数栈范畴。

为了说明我们所讨论的动机范畴本质上就是所谓的层的导出范畴的约化，我们将其逐项列出：

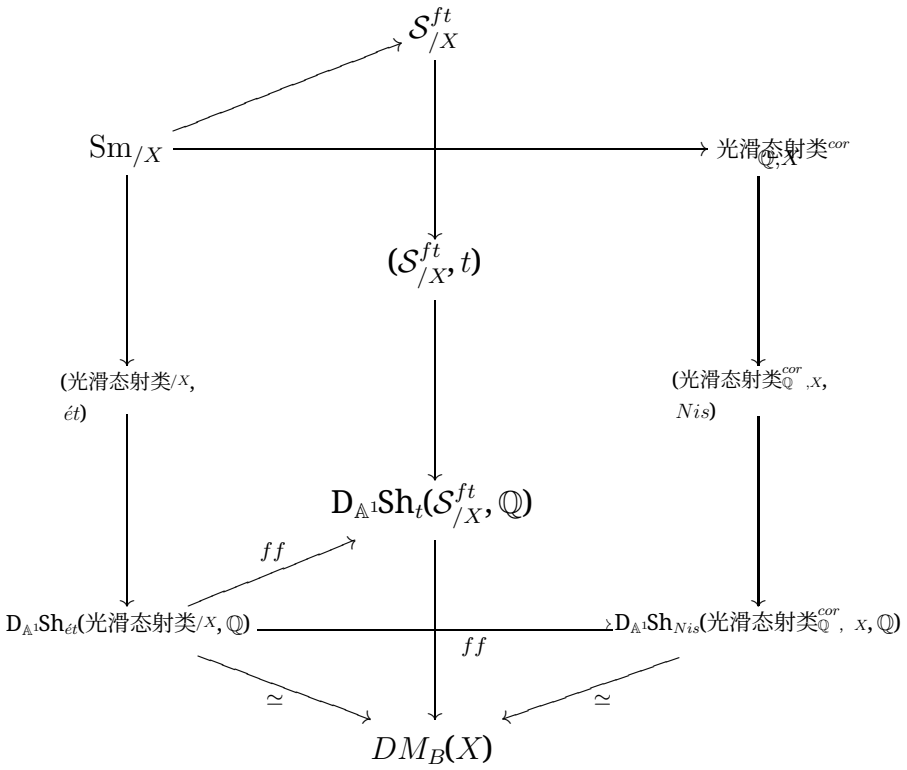
- $\mathrm{DM}_B(X) = \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sh}_{Nis}(\mathrm{Sm}_{/X}, \mathbb{Q}))_{/\{\mathrm{H}_B\text{-acyclic}\}}$
- $\mathrm{DM}_{t,\mathbb{Q}}(X) = \langle \Sigma^\infty \mathbb{Q}^t_X(S)(n) \rangle \subset \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sh}_t(\mathcal{S}^{ft}_{/X}, \mathbb{Q}))$
- $\mathrm{DM}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sh}_{Nis}(\mathrm{Sm}^{cor}_{\mathbb{Q},X}))$
- $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(X, \mathbb{Q})_+ \subset \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sh}_{Nis}(\mathrm{Sm}_{/X}, \mathbb{Q}))$
- $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1,\acute{e}t}(X, \mathbb{Q}) = \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sh}_{\acute{e}t}(\mathrm{Sm}_{/X}, \mathbb{Q}))$

若符号 $\mathfrak{R}$表示约化，则上述所有范畴都可以写成 $\mathfrak{R}\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sh}_\tau(\mathcal{C}_{/X}, \mathbb{Q}))$ 的形式，其中 $\mathfrak{R}$ 表示 Verdier 商、投影、子集或恒等映射。范畴 $\mathcal{C}_{/X}$ 是概形 X上的切片范畴。较大的范畴 $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sh}_\tau(\mathcal{C}_{/X}, \mathbb{Q}))$ 是环境范畴，传统意义上的动机存在于其中。

3.2 范畴的多层图表

现在我们已经介绍了比较定理和约化，接下来暂且岔开话题，展示一个多层图的示例。它首先在一层中给出切片范畴，接着是位点，然后是层的导出范畴，最后一层则给出这类导出范畴到

从而提供动机范畴。以下是一个示例，其中我们用到了这一事实： $DM_B(X) \simeq \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}\mathrm{Sh}_{ét}(\mathrm{Sm}/X, \mathbb{Q})$:



其中底层的对角映射都是等价，最后一个垂直映射是约化，由取局部化子范畴后再作等价构成。最后一层表明，Beilinson动机凸显了 X的动机特征。不过，我们将在不受限、未经约化的层的导出范畴层面上工作，这一层是倒数第二层，此处未显示。

此时，适合阐述几何对象的最优呈现这一概念。对于任意嵌入 $i\colon \mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C}''$、任意拓扑 τ''（定义在 $\mathcal{C}''_{/ihX}$ 上）、任意范畴 Λ''，以及任意能产生满足六函子形式体系的层的导出范畴的约化 G，若有一个关于约化的陈述，形式为$F\mathrm{Sh}_{\tau'}(\mathcal{C}'_{/hX}, \Lambda') \cong G\mathrm{Sh}_{\tau''}(\mathcal{C}''_{/ihX}, \Lambda'')$，这意味着$F\mathrm{Sh}_{\tau'}(\mathcal{C}'_{/hX}, \Lambda')$ 是传统意义上的动机范畴；从我们的角度来看，这种范畴最能凸显 X 的动机特征，途径是

$hX \in \mathcal{C}'$，它对应于上方那种多层范畴图中的一条最优垂直线。现在，切片范畴依据嵌入构成一个序列。因此，在这一点上，首个具有约化同构的切片范畴是最优的。固定 $\mathcal{C}'$ 后，拓扑 τ' 也构成一个序列；如果较粗的拓扑能导出约化的同构，那么它就是最优的。然而，固定 $\mathcal{C}'$ 和 τ' 后，各种范畴 Λ' 及其约化 F 可能难以比较，因此我们看到，正是在层范畴及其约化这一层面上，我们开始得到动机范畴的若干类，但尚无法明确指出一个最优的动机范畴。

3.3 系数范畴的抽象

第 3.1 节引入的动机的导出范畴，正是 Khan 所称的系数范畴。这些范畴遵循六函子形式体系，从抽象层面编码了上同调理论之所以成为上同调理论的特征。因此，后者应当能够从这样的系数范畴中导出。

由于我们正在构造的范畴最终将用于产生上同调理论，因此我们有兴趣建立一个可据以发展六函子形式体系的背景。不过，我们真正关注的是启发式图景中动机对象的函子性表现，而非上同调本身。因此，我们认为没有必要为系数范畴发展六函子形式体系，并将这项任务留给有兴趣的读者。

对于具有纤维积的 $\mathcal{C}$ an ∞-范畴，$\mathrm{Cat}_\infty^{Pres}$这一可呈现 ∞-范畴的 ∞-范畴，Khan 将系数范畴定义为一个对称幺半函子 $D\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}_\infty^{Pres}$。如果 $\mathcal{C}$ 是一个概形范畴，$X \in \mathcal{C}$，那么 $D(X)$ 是一个可呈现的 ∞-范畴，其对象称为 X 上的层。我们之前考察过的约化 $\mathfrak{R}\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sh}_\tau(\mathcal{C}_{/X}, \mathbb{Q}))$ 具有 $D(X)$ 的形式，并且被视为系数范畴（尽管这只是宽泛意义上的说法，且是在转到同伦范畴之后）。此处提及系数范畴，是因为它们为动机范畴这一概念提供了清晰的形式化表述。

由于我们有嵌入 $\mathrm{Sch}_k \hookrightarrow \mathrm{dSch}_k \hookrightarrow \mathrm{dSt}_k$，将一个 k-概形 X 转为导出概形 iX，再转为导出代数栈 $F = h_{iX}$，因此自然会考虑基于如下形式的 Segal 范畴的系数范畴：$\mathbb{R}\mathrm{Hom}((\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F}, \text{拓扑空间})$，其中 $\mathrm{Top} = L\mathrm{Set}_\Delta$，$\mathrm{dSt}_k = L(\mathrm{D}^- k\text{-Aff}^{\sim, \acute{e}t.})$，$\mathrm{D}^- k\text{-Aff}^{\sim, \acute{e}t.}$ 是 $\mathrm{s}k$-Alg 上代数栈的模型范畴，L 表示 Dwyer-Kan 的单纯局部化，从而产生 Segal 范畴；dSt_k 是 $\mathrm{s}k$-Alg 上导出代数栈的 Segal 范畴，也是 $\widehat{\mathrm{d}k\text{-Aff}} = \mathbb{R}\mathrm{Hom}(\mathrm{d}k\text{-Aff}^{\mathrm{op}}, \text{拓扑空间})$ 的子 Segal范畴，其中 $\mathrm{d}k\text{-Aff} = L(\mathrm{s}k\text{-Alg})^{\mathrm{op}}$。使用取值于拓扑空间的函子的原因将在第4.2节给出。

Gallauer 另行在 [Ga], 函子 F 中定义了系数系统：$(\mathrm{Sch}_k)^{\mathrm{op}}_{/X} \to \mathrm{Cat}^{st\otimes,}_\infty$ 它们满足某些条件，并且与 Khan 的系数范畴密切相关，因为可呈系数系统对应于 Khan 意义下的动机系数范畴。我们采用 Khan 的覆盖，因为就我们的目的而言，将其推广到 Segal 范畴的情形更为容易。不过，系数系统弥合了 Khan 与 [CD] 工作之间的差距，因为系数系统的同伦函子范畴 Ho (F) F尤其给出了 [CD] 所称的动机三角范畴。提及 Gallauer 的工作还有另一个原因：泛系数系统——也就是我们所要寻找的动机范畴——恰恰就是稳定动机同伦范畴。我们以此为蓝本，在为其配备六函子形式体系之前，尝试在我们的框架中初步构造这样一个范畴，并将其称为导出动机谱范畴。随后，我们转向 [K] ，以 Khan 对稳定动机同伦范畴的定义为参考来构造这样一个范畴。

需要明确的是，Khan 将稳定动机同伦范畴 $\mathcal{SH}(X)$定义为动机 $\mathbb{P}^1_X$-谱的范畴，随后对其进行增强，以使其支持六函子形式体系。由于这同样不是我们的目标，我们就止步于动机谱范畴；因此，在我们的设定中，实际考察的只是导出动机谱范畴。

为了进一步凸显稳定同伦范畴所发挥的核心作用（我们暂时将其记为 SH asin [Ga], ），可以将此范畴与任意系数系统 C 联系起来，所用函子ρ^* 本质上是唯一的：$\mathrm{SH} \to C$，并且对于 $S \in (\mathrm{Sch}_k)_{/X}$，存在 $\rho^*(S)$ 的右伴随：

$\rho_*(S)$: $C(S) \to \mathrm{SH}(S)$，使得 $\rho_*(S)\mathbb{I} := \mathcal{E} \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{SH}(S))$ 是一个表示 C-上同调的动机谱。

4 派生动机谱范畴的构造

4.1 Khan 的构造

为了说明我们为何如此定义导出动机谱范畴，我们简要回顾 Khan 在 [K] 中的构造。他将动机谱范畴定义为 $\mathcal{SH}(S) = \mathcal{SH}_{\mathbb{P}^1}(S)$，即对于概形 S 而言的动机 $\mathbb{P}^1_S$-谱范畴。这里， $\mathbb{P}^1_S$ 是 $M_S(\mathbb{P}^1_S)$ 的简写（完整定义见第 4.3.3 节），其基点为 ∞； $\mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(S)$ 表示动机$\mathcal{T}$-谱范畴，其对象是定义在 S 上、满足 Nisnevich 下降和 $\mathbb{A}^1$-同伦不变性的 $\mathcal{T}$-谱，并且该范畴是逐层定义的。回顾一下， $\mathcal{T}$-谱由一列 $\{F_n\}_{n\geq 0}$ 构成，这些是定义在 S 上的纤维化基点空间， $\tilde{}$ 连同同构 $F_n \xrightarrow{\simeq} \Omega_{\mathcal{T}}(F_{n+1})$（对所有 $n \geq 0$ 均成立），并且这些同构与谱的态射相容。这里，$\Omega_{\mathcal{T}}$是 $\mathcal{T}$-环路函子 $\mathrm{Hom}_S(\mathcal{T}, -)$，其中 Hom_S 是光滑纤维化空间范畴的内 Hom；这些空间是函子 $F : \mathrm{Sm}_{/S}^{\mathrm{op}} \to$Spc，其取值属于 ∞-范畴的空间。

纤维化空间 F over S 满足 Nisnevich 下降，等价于满足 Nisnevich 切除；这意味着对于任意形如以下形式的光滑派生 S-概形的笛卡尔方块：

$$\begin{array}{ccc} U \times_X V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ U & \xrightarrow[j]{} & X \end{array}$$

其中 p 为 étale， j 是开浸入，其补为闭浸入$Z \hookrightarrow X$，使得 $p^{-1}Z \xrightarrow{\cong} Z$，以下 Spc 中的交换方块是笛卡尔的：

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, F) & \longrightarrow & \Gamma(U, F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(V, F) & \longrightarrow & \Gamma(U \times_X V, F) \end{array}$$

4.2 推广

由于我们有一个嵌入 $(\mathrm{Sch}_k)_{/X} \hookrightarrow (\mathrm{dSt}_k)_{/F}$，因此对我们而言，概形 S 上的纤维化空间，也就是函子 $F : \mathrm{Sm}_{/S}^{\mathrm{op}} \to$Spc，所起的作用将由函子 $\mathcal{F} : (\mathrm{dSt}_k)_{/F}^{\mathrm{op}} \to$ Top 来承担。由于我们研究的是 Segal 范畴，因此考察的是 Segal 范畴 $\mathbb{R}\mathrm{Hom}((\mathrm{dSt}_k)_{/F}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Top})$，它包含所有~~此类~~函子，是 $(\mathrm{dSt}_k)_{/F}$ 在 Top $= L\mathrm{Set}_\Delta$ 中的范畴性体现。这是一个 Segal 范畴，可据此构造导出动机谱的范畴。利用严格化（[TV2]），它表明$\mathbb{R}\mathrm{Hom}((\mathrm{dSt}_k)_{/F}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Top}) \cong L\mathrm{Fun}((\mathrm{dSt}_k)_{/F}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}_\Delta)$，我们用单纯函子 $\mathcal{F}: (\mathrm{dSt}_k)_{/F}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}_\Delta$ 对象化表示 $\mathcal{F} \in \mathbb{R}\mathrm{Hom}((\mathrm{dSt}_k)_{/F}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Top})$ 中的对象；我们将使用这些对象。这里的 L 指 Dwyer-Kan 的单纯局部化函子（ [DK] ），它生成一个单纯形范畴，我们将其视为 Segal 范畴。

回顾其定义：若 $B \in \mathrm{Cat}_\Delta, V \subset B$ 是一个子范畴，则定义 $L(B,V) = \mathrm{diag} F_* B[F_* V^{-1}] = (F_* B_n[F_* V_n^{-1}])_n$，其中，对于某个 $C \in$ Cat，标准分解 $F_* C \in \mathrm{Cat}_\Delta$ 定义为 $F_n C = F^{n+1} C$；这里的 FC 是由 C 生成的自由范畴，并且对于 C 中每个非恒等态射 c，都有一个生成元 Fc。这个定义对我们很重要，因为它表明 LB 和 B 的对象相同，且 V-态射会被依次压缩，而其他态射则保持原样。在将 $\mathrm{D}^- k$-Aff $^\sim$,$\acute{e}t.$ 层面的态射概念投射到 $\mathrm{dSt}_k = L\mathrm{D}^- k$-Aff $^\sim$,$\acute{e}t.$ 层面时，我们会频繁使用这一点；本质上就是说，若 dSt_k 中的态射的提升在 $\mathrm{D}^- k$-Aff $^\sim$,$\acute{e}t.$ 中具有某个性质 P，那么该态射也具有这一性质。这里我们用 $L\mathcal{C}$ 作为 $L(\mathcal{C}, W)$ 的简写。

4.3 导出动机谱范畴

我们将导出动机谱的范畴定义为 $\mathbb{R}\mathrm{Hom}((\mathrm{dSt}_k)_{/F}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Top})$ 中的动机 $\mathbb{P}^1_X$-谱（$\mathbb{P}^1_X$ 将在后文第 4.3.3 小节中定义）。其中的对象 $\mathcal{F}$ 称为动机对象，如果它们是 $\mathbb{A}^1$-局部的（或者更确切地说，是我们即将看到的一种推广），并且按照下文定义的意义是 Nisnevich 局部的。与经典情形的区别在于，我们不要求函子满足 Nisnevich 下降：一方面，经典情形下这等价于满足 Nisnevich 切除；另一方面，Goodwillie 微积分中的同伦函子（[G1], [G2]）已经满足某种形式的切除，而

由于 $\mathcal{F} \in \mathbb{R}\mathrm{Hom}((\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F}, \mathrm{Top})$ 中的对象是同伦函子，因此自然会要求它们满足某种形式的切除。

为了定义 $\mathbb{P}^1_X$，在我们的语境中，除了 Nisnevich 局部化，还需要 $\mathbb{A}^1$-局部化的概念。因此，我们先在当前设定下定义 $\mathbb{A}^1$ 的推广，以及 Nisnevich 方块的概念，并介绍相应的左 Bousfield 局部化。

4.3.1 $\mathbb{A}^1$-局部化

- $\mathbb{A}^1$ 的推广。回顾 [K]，若空间 F 在 S 上是 $\mathbb{A}^1$-同伦不变的，则对所有光滑态射类中的 $X \in \mathrm{Sm}/S$，典范空间态射 $\Gamma(X, F) \to \Gamma(X \times \mathbb{A}^1, F)$ 都是同构，其中 $\mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[t]$ 是通常的仿射直线。现在我们将其推广到 $\mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}\ k[x]$，并将其视为 $\mathrm{s}k\text{-}\mathrm{Alg}_{\mathrm{op}}$ 中的常值单纯对象。接着令 $\underline{\mathbb{A}^1_k} = \mathbb{R}\underline{h}_{\mathbb{A}^1_k}, \mathbb{R}\underline{h}$: $\mathrm{Ho}\,(\mathrm{s}k\text{-}\mathrm{Alg}_{\mathrm{op}}) \to \mathrm{Ho}\,(\mathrm{D}^-k\text{-}\mathrm{Aff}^{\sim,ét.})$ 为米田嵌入，$\mathrm{D}^-k\text{-}\mathrm{Aff}^{\sim,ét.} \subset \mathrm{Fun}(\mathrm{s}k\text{-}\mathrm{Alg}, \mathrm{Set}_\Delta)$ 为位点 $(\mathrm{s}k\text{-}\mathrm{Alg}\ ét)$ ([TV]) 上的代数栈模型范畴。

- $\mathbb{A}^1_k$-同伦不变性。若对所有 $X \in (\mathrm{dSt}_k)_{/F}$，其提升 $\mathcal{F} : (\mathrm{dSt}_k)_{\mathrm{op}\,/F} \to \mathrm{Set}_\Delta$ 满足 $\mathcal{F}(X) \simeq \mathcal{F}(X \times \underline{\mathbb{A}^1_k})$，则称 $\mathcal{F} : (\mathrm{dSt}_k)_{\mathrm{op}\,/F} \to$ 拓扑空间是 $\underline{\mathbb{A}^1_k}$- 同伦不变的。我们将 $\underline{\mathbb{A}^1_k}$ 视为 dSt_k 的一个对象，这是因为 $\mathrm{Ho}\,(\mathrm{D}^-k\text{-}\mathrm{Aff}^{\sim,ét.})$ 与 $\mathrm{D}^-k\text{-}\mathrm{Aff}^{\sim,ét.}$ 的对象相同，并且 $\mathrm{dSt}_k = L\mathrm{D}^-k\text{-}\mathrm{Aff}^{\sim,ét.}$ 与 $\mathrm{D}^-k\text{-}\mathrm{Aff}^{\sim,ét.}$ 的对象也相同。

- $\mathbb{A}^1_k$-局部化。回顾 [K]，中完成的工作，可以清楚地看到，稍作扩充后，便可用左 Bousfield 局部化这一等价形式体系重新表述。由于 [Hi]，Set_Δ 是一个左 proper 胞腔模型范畴，因此 $\mathrm{Fun}((\mathrm{dSt}_k)_{反\,/F}, \mathrm{Set}_\Delta) := \mathcal{M}$ 也是如此；于是，作为其中的一个态射类，$\mathcal{C}$ 可用于定义相对于 $\mathcal{C}$ 的这个函子范畴的左 Bousfield 局部化；它是 $\mathcal{M}$ 上的一个模型结构，其中弱等价是 $\mathcal{C}$-局部等价，余纤维化是 $\mathcal{M}$ 中的余纤维化，而纤维化是那些对于 $\mathcal{C}$-局部等价具有右提升性质的映射，且这些等价

同时也是余纤维化。此外，由于 $\mathcal{M}$ 是一个模型范畴，可以在其上定义同伦函数复形映射。回忆一下，若 $\mathcal{M}$ 是一个模型范畴，且 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{M}$ 中的一个态射类，则称 $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ 是 $\mathcal{C}$-局部的，若它是纤维化的，并且对于 $\mathcal{C}$ 中所有的 $f\colon A \to B$，诱导映射 $\mathrm{map}(B,W) \to \mathrm{map}(A,W)$ 是 Set_Δ 中的弱等价。然后，称 $\mathcal{M}$ 中的态射 $g\colon X \to Y$ 为 $\mathcal{C}$-局部等价，若对于 $\mathcal{M}$ 中所有的 $\mathcal{C}$-局部对象 W，诱导映射 $\mathrm{map}(Y,W) \to \mathrm{map}(X,W)$ 都是弱等价。最后，根据 [Hi], 的定理 4.1.1，相对于 $\mathcal{C}$ 对 $\mathcal{M}$ 作左 Bousfield 局部化所得的 $L_{\mathcal{C}}\mathcal{M}$ 中，纤维化对象就是 $\mathcal{C}$-局部对象；并且模型范畴中的对象都有纤维化替换。因此，$L_{\mathcal{C}}\mathcal{M}$ 实质上是一个 $\mathcal{C}$-局部对象的模型范畴，而 $\mathrm{Ho}(L_{\mathcal{C}}\mathcal{M})$ 相应地是一个 $\mathcal{C}$-局部对象的范畴。

定义 $\underline{\mathbb{A}^1_k}$-局部等价很容易；若 $\mathcal{C} = \{X \times \underline{\mathbb{A}^1_k} \to X\}$ 是 $(\mathrm{dSt}_k)_{/F}$中的一个态射类，它便在 $\mathbb{R}\mathrm{Hom}((\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F}, \mathrm{Top})$ 中诱导出一个类 $h_{\mathcal{C}} = \{h_{X \times \underline{\mathbb{A}^1_k}} \to h_X\}$。事实上，由于 $(\mathrm{dSt}_k)_{/F}$是一个单纯模型范畴，它有自身的单纯映射空间 $\mathrm{Map}_F := \mathrm{Map}_{(\mathrm{dSt}_k)_{/F}}$。这使我们能够定义 $h_X = \mathrm{Map}_F(-,X) : (\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F} \to \mathrm{Set}_\Delta$。作为初步近似，若一个对象 $\mathcal{F}$ 属于 $\mathbb{R}\mathrm{Hom}((\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F}, \mathrm{Top})$，并且它是$\underline{\mathbb{A}^1_k}$-同伦不变的，也就是说，对于所有 $X \in (\mathrm{dSt}_k)_{/F}$，$\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X \times \underline{\mathbb{A}^1_k})$ 都是单纯集合的弱等价，则称它为 $\mathbb{A}^1_k$-局部对象。运用米田引理以及 $\mathrm{Fun}((\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F}, \mathrm{Set}_\Delta)$ 的单纯映射空间，这可写为 $\mathrm{Map}(h_X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Map}(h_{X \times \underline{\mathbb{A}^1_k}}, \mathcal{F})$；我们将其推广为 $\mathrm{map}(h_X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{map}(h_{X \times \underline{\mathbb{A}^1_k}}, \mathcal{F})$，其中 map 是 $\mathrm{Fun}((\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F}, \mathrm{Set}_\Delta)$ 的同伦函数复形。我们以此作为 $\underline{\mathbb{A}^1_k}$-局部对象的定义。于是，若一个态射 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ 对所有 $\underline{\mathbb{A}^1_k}$-局部对象 $\mathcal{G}$ 都满足 $\mathrm{map}(\mathcal{F}', \mathcal{G}) \to \mathrm{map}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 是弱等价，则称它为 $\underline{\mathbb{A}^1_k}$-局部等价。

4.3.2 Nisnevich 局部化

- 选择 Nisnevich 切除而非 Nisnevich 下降——Goodwillie 微积分。我们将 Hoyois 在 [H] 中以及 Hall 和 Rydh 在 [HR] 中关于代数栈所做的工作推广到导出层叠的层面。我们遇到的问题是，要使一个定义在代数栈上的预层 $\mathcal{F}$ 满足 Nisnevich

下降，自然需要使用 Nisnevich 覆盖，而这需要借助剩余 gerbe 的概念；要将这一概念推广到定义在导出层叠上的函子，似乎非常困难。不过，Hoyois 证明了，定义在代数栈上的预层 $\mathcal{F}$ 满足 Nisnevich 下降，当且仅当它满足 Nisnevich 切除。因此，鉴于这一等价关系在代数栈上的预层层面成立，我们将重点研究满足 Nisnevich 切除的函子 $\mathcal{F}$：$(\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F} \to$拓扑空间，具体含义将在下文说明。

现在我们简要提及 Goodwillie 微积分（[G1]，[G2]）。Goodwillie 研究同伦函子，即从空间到空间或谱的函子，它们保持弱等价；对我们而言，这相当于处理预层。如果这类函子将同伦推出方块映射为同伦拉回方块，就称其为可切除的；这再次令人联想到 Nisnevich 切除条件。然而，可切除函子对于发展函子演算确实很有帮助。函子演算是一种以函子性的微分方法来处理预层的途径，这与我们研究变形息息相关。特别是在 [G1],中，Goodwillie 证明，对任意给定的同伦函子 F，都可以为其赋予他所称的 n-可切除函子 P_nF，以及一个映射$F \to P_nF$；后者可视为 F的某种 n 阶泰勒多项式，并且二者在 n 阶上相符。此外，我们还有一列这样的多项式近似，并带有映射 $F \to \lim P_nF$。如果 F是 ρ-解析的（这是一个基于切除的条件），且 $X \to Y$在某种意义下是连通的，那么映射 $F(X) \to (P_nF)(X)$ 的连通度会随 n 增大而趋于无穷。因此，切除是 Goodwillie 微积分的核心。由于我们研究的动机对象本质上具有微分性质，这也为我们选择将切除作为函子的要求提供了另一个理由。

我们将采用 [H] 中针对代数栈给出的定义，并对其加以调整，以定义代数栈的 Nisnevich 方块；也就是说，我们考虑如下形式的代数栈笛卡尔方块：

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow f \\ U & \xrightarrow[e]{} & X \end{array}$$

具有 f ´etale、 e一个具有约化补 Z 的开浸入

~那样 $Z \times_X V \overset{=}{\to} Z$。事实证明，我们会对导出代数栈使用扎里斯基开浸入，但其他所有态射概念都将保留。对 Hoyois 而言，代数栈范畴上的空间预层或谱 $\mathcal{F}$ 满足 Nisnevich 切除，当且仅当其诱导的方块：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{e^*} & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(W) \end{array}$$

是同伦笛卡尔的。我们将对函子$\mathcal{F}$: (dSt$_k$)$^{\mathrm{op}}_{/F}$ →Top 使用相同的形式体系，只需将开浸入替换为 [TV] 中定义的扎里斯基开浸入。与往常一样，我们将通过严格化定理 $\mathbb{R}$Hom((dSt$_k$)$^{\mathrm{op}}_{/F}$, Top) ≅ LFun((dSt$_k$)$^{\mathrm{op}}_{/F}$, Set$_\Delta$)，使用这类函子 $\mathcal{F}$: (dSt$_k$)$^{\mathrm{op}}_{/F}$ → Set$_\Delta$ 的代表元。

- Nisnevich 方块。

  - 光滑态射。经典做法是在 Sm$_{/S}$ 中使用 Nisnevich 方块；对我们而言，(dSt$_k$)$_{/F}$ 是其对应物，因此我们需要在 dSt$_k$ 中定义光滑性的概念。首先，[K] 和 [TV] 中单纯代数层面的光滑性概念是一致的。然后使用模型 Yoneda 嵌入。根据 [TV], ，对于 (sk-Alg)^{op} = D^-k-Aff 中一类在等价、同伦拉回和复合下稳定的态射，米田嵌入 $\mathbb{R}\underline{h}$: Ho (D^-k-Aff) → Ho (D^-k-Aff $^{\sim,\ ét.}$) 允许将 Q-态射的概念扩展到可表栈层面。根据 [TV], 的定义 1.2.7.2，以及命题 1.2.3.3 和命题 1.2.7.3，Q = Sm 是这样一类态射。因此可以讨论可表栈之间的光滑态射。最后，利用 dSt$_k$ = L(D^-k-Aff $^{\sim,\ ét.}$) 这一事实。因此，(dSt$_k$)$_{/F}$ 中的光滑态射是良定义的。

  - 扎里斯基开浸入。在 [TV] 中论证了，如果我们在底层模型范畴的交换幺半群对象范畴上取平凡模型结构，那么扎里斯基开浸入就归结为经典意义下的开浸入。因此，在

同伦代数中，扎里斯基开浸入似乎是经典开浸入概念的正确推广，我们将采用这一概念。根据 [TV] 的命题 2.2.2.5，sk-Alg 中的态射 $f\colon A \to B$ 是扎里斯基开浸入，当且仅当它所诱导的仿射概形态射 $\mathrm{Spec}\,\pi_0 B \to \mathrm{Spec}\ \pi_0 A$ 是扎里斯基开浸入，且 $A \to B$ 是强的，也就是说，$\pi_* A \otimes_{\pi_0 B} \pi_0 A \to \pi_* B$ 是同构。这里我们采用 [TV] 中的标准定义：$|A| = \mathrm{Map}^{\mathrm{s}k\text{-Alg}}(1, A) \in \mathrm{Ho}\,(\mathrm{Set}_\Delta)$，$\pi_i A = \pi_i(|A|, *)$。称仿射概形态射 $\mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\ A$ 为扎里斯基开浸入，意味着 $A \to B$ 是 k-Alg 中的扎里斯基开浸入，也就是说，它是平坦的、有限表示的，并且满足$B \cong B \otimes_A B$。接着，我们利用这样一个事实：我们将 sk-Alg 与其上的可表栈范畴等同，从而把 sk-Alg 层面上的扎里斯基开浸入概念转移到代数栈层面。具体而言，若 Q 是 sk-Alg 中一个对等价、同伦拉回和复合稳定的态射类^{op}，那么米田嵌入 $\mathbb{R}\underline{h}\colon \mathrm{Ho}\,(\mathrm{s}k\text{-Alg}^{\mathrm{op}}) \to \mathrm{Ho}\,(\mathrm{D}^- k\text{-Aff}^{\ \sim, \acute{e}t.})$ 允许我们将 sk-Alg 层面的 Q 中态射的概念提升为可表栈之间态射的概念；我们此前已经用过这一事实。扎里斯基开浸入正是如此：根据 [TV] 的定义 1.2.6.7，它们是有限表示的形式扎里斯基开浸入。根据命题 1.2.3.3 和命题 1.2.6.3，这两类态射都对等价、复合和同伦推出稳定。因此，我们可以讨论可表栈之间的扎里斯基开浸入。我们用记号 $\mathbb{R}\mathrm{Spec}\, A = \mathbb{R}\underline{h}_{\mathrm{Spec}\, A}$ 表示 $A \in \mathrm{s}k\text{-Alg}$。

注意，Toen 和 Vezzosi 将 D^--代数栈之间的态射定义为扎里斯基开浸入，当且仅当它是局部有限表示的平坦单态射。由于这些概念无法为定义代数栈的 Nisnevich 方块提供清晰的约化补概念，为简便起见，我们改用可表栈。如果这看起来有些限制，请记住，动机可以从概形出发定义，而概形通过其点函子对应于可表栈，因此在 $(\mathrm{dSt}_k)_{/F}$ 中使用可表栈足以满足我们的需要。

- 约化补。为了构造 Nisnevich 方块，我们需要有一个关于可表栈之间扎里斯基开浸入的约化补概念。按照 [TV5], ，如果 $A \to B$ 是交换环之间的有限表示态射，那么 Spec $B \to$Spec A 是开浸入，当且仅当限制函子$D^-(B) \to D^-(A)$ 在导出范畴之间是全忠实的。现在从 $\mathbb{R}$Spec $B \to \mathbb{R}$Spec A 是可表栈之间的扎里斯基开浸入这一点出发，意味着 Spec $B \to$ Spec A 是扎里斯基开浸入，即 $A \to B$ 是 sk-Alg 中的扎里斯基开浸入，因此它是强的，并且 Spec $\pi_0 B \to$ Spec $\pi_0 A$ 是扎里斯基开浸入，也就是说 $\pi_0 A \to \pi_0 B$ 是扎里斯基开浸入；因此它是有限表示的，并且根据[TV], 的定义 1.2.6.7，它是形式扎里斯基开浸入，这意味着它是平坦的，而且 f_*: Ho ($\pi_0 B$-Mod) $\to$ Ho ($\pi_0 A$-Mod) 是全忠实的，从而在导出范畴层面诱导出一个全忠实映射。因此，Spec $\pi_0 B \to$ Spec $\pi_0 A$ 是开浸入。

回顾一下，$\mathbb{R}$Spec$B \to \mathbb{R}$Spec A 扎里斯基开浸入是指 Spec $\pi_0 B \to$ Spec $\pi_0 A$ 是一个开浸入，因此 $|$Spec $\pi_0 B|$ $\cong U^{\text{open}} \subset$ Spec $\pi_0 A$，且它有一个闭补 $Z = |$Spec $\pi_0 A| - U$ ，我们可以在其上赋予约化闭子概形结构。

现在，由于 Z 是仿射概形 Spec $\pi_0 A$的一个闭子概形，它本身也是仿射的，$Z =$ Spec C，将 $C = \pi_0 C_\bullet$, $C_\bullet \in$ sk-Alg 视为 C k-Alg 中的常值单纯对象，并配有可表层 $\mathbb{R}$Spec$C_\bullet$，以及一个到 $\mathbb{R}$Spec A的态射；我们将其视为扎里斯基开浸入 $\mathbb{R}$Spec $B \to \mathbb{R}$Spec A的约化补。

- ´étale 态射。根据 [TV] 的定义 1.2.6.7， ´étale 态射是有限表示且形式 ´étale 的；根据命题 1.2.3.3 和命题 1.2.6.3，它们分别在等价、复合和同伦推出下稳定。因此，我们可以通过通常的论证，将 sk-Alg 层次上的 ´étale 态射概念提升到 D^-k-Aff $^{\sim,\ \acute{e}t.}$ 中可表栈的层次。最后，我们利用 dSt$_k$ $= L$D^-k-Aff $^{\sim,\ \acute{e}t.}$ 这一事实，说明 ´étale 态射在 (dSt$_k$)$_{/F}$ 中定义良好。

• Nisnevich 局部化。在当前考虑函子 $\mathcal{G}:(\mathrm{dSt}_k)_{\mathrm{op}\ /F}\ \overset{\rightarrow}{}\ \mathrm{Set}_\Delta$ 的情形下，初步而言，若 $\mathcal{G}$ 满足 Nisnevich 切除，就称其为 Nis-局部；若态射 $\mathcal{F}\to\mathcal{F}'$ 是函子范畴 $\mathrm{Fun}((\mathrm{dSt}_k)_{\mathrm{op}/F},\mathrm{Set}_\Delta)$ 中对象之间的态射，则称其为 Nis-局部等价，当且仅当对该函子范畴中所有 Nis-局部的 $\mathcal{G}$，$\mathrm{map}(\mathcal{F}',\mathcal{G})\to\mathrm{map}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ 都是单纯集合的弱等价。

相较于定义相对于形如 $X\times\underline{\mathbb{A}^1_k}\to X$ 的映射的左 Bousfield 局部化，定义相对于 Nisnevich 方块的左 Bousfield 局部化要困难得多。难点在于，在左 Bousfield 局部化中，我们要将方块类作为态射类。下面我们将说明如何做到这一点。

回顾一下，满足 Nisnevich 切除意味着对于任意 Nisnevich 方块：

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & X \end{array}$$

该方块：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(W) \end{array}$$

是同伦笛卡尔的，这意味着 $\mathcal{F}(X)\ \overset{\simeq}{\to}\ \mathcal{F}(V)\times^h_{\mathcal{F}(W)}\mathcal{F}(U)$。现在，[Hi] 的定理 18.1.10 表明，若 $\mathcal{M}\in\mathrm{Cat}_\Delta$ 是一个小范畴，$\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{M}$ 中的一个 $\mathcal{C}$-图表，且 Y 是 $\mathcal{M}$ 的一个对象，则有同构 $\mathrm{Map}(\mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}}\mathcal{X},Y)\ \cong\ \mathrm{holim}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}\mathrm{Map}(\mathcal{X},Y)$；其中 Map 是 $\mathcal{M}$ 的单纯映射空间。将此应用于 $\mathcal{M}\ =\mathrm{Fun}((\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F},\mathrm{Set}_\Delta)$，令 $\mathcal{C}\ =\ \{U\leftarrow W\to V\}$、$Y\ =\ \mathcal{F}$ 和 $h\ =\ \mathcal{X}$: $\mathcal{C}\to\mathcal{M}$，便有 $\mathcal{F}(U)\times^h_{\mathcal{F}(W)}\mathcal{F}(V)\ \simeq\ \mathcal{F}(V\coprod^h_W U)$。由此可见，满足 Nis- nevich 切除可以重新表述为：$\mathcal{F}$ 关于由 Nisnevich 方块诱导的 $\mathcal{C}=\{V\coprod^h_W U\to X\}$ 中的映射是局部的。因此，满足 Nisnevich 切除等价于关于 Nisnevich 方块是局部的，我们将其简称为 Nis-局部。这是一个初步的近似。为了使用左 Bousfield 局部化，我们将其推广

如下。令 $h_{\mathcal{C}} = \{h_{U \coprod^h_W V} \to h_X\}$ 为 $\mathrm{Fun}((\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F}, \mathrm{Set}_\Delta)$ 中由上述 $(\mathrm{dSt}_k)_{/F}$ 中的态射类 $\mathcal{C} = \{U \coprod^h_W V \to X\}$ 诱导的态射类，并将该陈述替换为：

$$\mathrm{Map}(h_X, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{F}(U \coprod^h_W V) \simeq \mathrm{Map}(h_{V \coprod^h_W U}, \mathcal{F})$$

通过 $\mathrm{map}(h_X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{map}(h_{V \coprod^h_W U}, \mathcal{F})$。我们将此作为 Nis-局部的定义。于是，$\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ 是 Nis-局部等价，当且仅当对于任意 Nis-局部对象 $\mathcal{G}$，$\mathrm{map}(\mathcal{F}', \mathcal{G}) \to \mathrm{map}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 是单纯集合之间的弱等价。

4.3.3 $\mathbb{P}^1_S$的推广

回顾一下 $\mathbb{P}^1_S$ 在 [K] 中的构造：$\mathbb{P}^1_S = (M_S(\mathbb{P}^1_S)\ \infty)$，其中若 $X \in \mathrm{Sm}_{/S}$，则 $M_S(X) = \mathrm{L}_{mot}(h_S(X))$；对于一个在 S 上方的空间 F，$\mathrm{L}_{mot}(F) = \mathrm{lim}(\mathrm{L}_{\mathbb{A}^1} \circ \mathrm{L}_{Nis})^n(F)$，其中 $\mathrm{L}_{\mathbb{A}^1}$ 是到 $\mathbb{A}^1$-同伦不变空间上的可达局部化，L_{Nis} 是到 Nisnevich 局部空间上的左正合局部化。我们还有 $h_S(X) = \mathrm{Map}_S(-, X) : \mathrm{Sm}^{\mathrm{op}}_{/S} \to \mathrm{Spc}$。回顾 $\mathbb{P}^1_S$ 在 [K], 中的构造后便会发现，可以将其推广到我们在 dSch_k 中处理导出概形的情形，因此 $\mathbb{P}^1_{iX} \in \mathrm{dSch}_k$ 是良定义的。

接着，我们利用 $\mathrm{dSch}_k \in \mathrm{Cat}_\Delta$ 这一事实，因此它具有单纯映射对象，进而 $(\mathrm{dSch}_k)_{/iX}$ 也具有单纯映射对象。我们将其单纯映射空间记为 Map_X。这使我们可以将 $h_{\mathbb{P}^1_{iX}} = \mathrm{Map}_X(-, \mathbb{P}^1_{iX}) : (\mathrm{dSch}_k)^{\mathrm{op}}_{/iX} \to \mathrm{Set}_\Delta$ 视为 $(\mathrm{dSt}_k)_{/F}$ 中的一个对象。现在，我们需要将其视为一个函子 $(\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F} \to \mathrm{Set}_\Delta$。为此，我们取其点函子 $\mathrm{Map}_F(-, h_{\mathbb{P}^1_{iX}}) = h_F \circ h_{\mathbb{P}^1_{iX}}$。接着，我们对该对象取动机局部化 $\mathrm{L}_{mot} = \mathrm{L}_{\underline{\mathbb{A}^1_k} \cup Nis}$。这里，$\mathrm{L}_{\underline{\mathbb{A}^1_k} \cup Nis}$ 是 $\mathrm{Fun}((\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F}, \mathrm{Set}_\Delta)$ 关于类 $\{h_{X \times \underline{\mathbb{A}^1_k}} \to h_X\} \cup \{h_{U \coprod^h_W V} \to h_X\}$ 的左 Bousfield 局部化，其中第一个子类非正式地称为 $\underline{\mathbb{A}^1_k}$，第二个子类称为 Nis；同样，它由 Nisnevich 方块 $W \rightrightarrows U, V \rightrightarrows X$ 诱导。

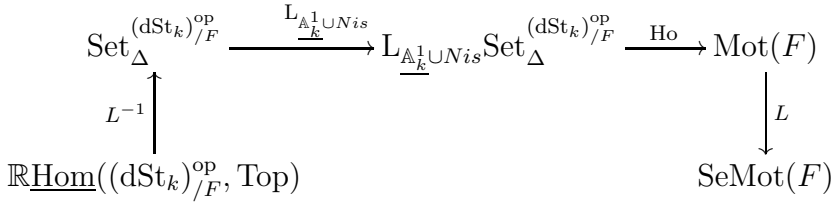
我们将导出动机空间范畴定义为:

$$\mathrm{Mot}(F) = \mathrm{Ho}\left(\mathrm{L}_{\underline{\mathbb{A}^1_k}\cup Nis}\mathrm{Set}_{\Delta}^{(\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F}}\right)$$

我们将 $\mathrm{L}_{mot}h_F \circ h_{\mathbb{P}^1_{iX}}$ 视为此范畴中的一个对象，为简便起见，仍将其记作 $\mathbb{P}^1_X$。

4.3.4 局部化

目前，我们有如下图示:



其中，$\mathrm{SeMot}(F) = L\mathrm{Mot}(F)$ 是定义在 F 上的导出动机空间的 Segal 范畴，其对象也正是 $\mathbb{R}\mathrm{Hom}((\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F}, \mathrm{Top})$ 的对象。之所以成立，是因为上述图中左侧单纯局部化所用的 $\mathrm{Fun}((\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F}, \mathrm{Set}_{\Delta})$ 中的等价并未涉及左 Bousfield 局部化 $\mathrm{L}_{\underline{\mathbb{A}^1_k}\cup Nis}$，因此在整个过程中都得以保留，之后也可像右侧那样使用。这也意味着，Segal 范畴 $\mathrm{SeMot}(F)$ 的对象可以在 $\mathrm{Mot}(F)$ 中由函子 $\mathcal{F}: (\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F} \to \mathrm{Set}_{\Delta}$ 建模。我们将在下一小节中使用这一事实。

4.3.5 $\mathcal{T}$-谱

回顾 [K]，动机 $\mathcal{T}$-谱的范畴 $\mathcal{SH}_{\mathcal{T}}(S)$ 中的对象是由纤维化基点空间 $\{F_n\}_{n\geq 0}$ 组成的序列，并带有结构同构 $F_n \to \Omega_{\mathcal{T}}(F_{n+1})$，其中 $\Omega_{\mathcal{T}} = \mathrm{Hom}(\mathcal{T}, -)$，这里使用的是 S ~~上空~~间范畴的内 Hom。顺便提一下，我们不会使用基点空间，因为在我们的工作中并不需要它；不过，认真负责的读者不难将相关内容适当地改为基点情形。

我们在本文的语境中将其推广，定义导出动机 $\mathcal{T}$-谱范畴，记作 $\mathrm{MotSp}_{\mathcal{T}}(F)$，$F = h_{iX} \in \mathrm{dSt}_k$ if $X \in \mathrm{Sch}_k$，其中 $\mathcal{T}$ 是 $\mathrm{SeMot}(F)$ 的一个对象。$\mathrm{MotSp}_{\mathcal{T}}(F)$ 的对象是由 $\mathrm{SeMot}(F)$ 中的对象 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ 组成的序列，并带有结构同构 $\mathcal{F}_n \cong \Omega_{\mathcal{T}}(\mathcal{F}_{n+1})$，其中 $\Omega_{\mathcal{T}} = \mathrm{Hom}_F(\mathcal{T}, -)$，而 Hom_F 表示 $\mathrm{SeMot}(F)$ 的内 $\underline{\mathrm{Hom}}$，其定义如下。

Set_Δ 是一个对称幺半模型范畴，其内 Hom 定义如下。对于 $K, L \in \mathrm{Set}_\Delta$，定义 n 次的函数复形 $\mathrm{Map}(K, L)$ 为 $\mathrm{Map}(K, L)_n = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}_\Delta}(K \times \Delta_n, L)$。对于 $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ 这三个由函子 $(\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F} \to \mathrm{Set}_\Delta$ 建模的 $\mathrm{SeMot}(F)$ 对象，我们有：

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}_\Delta}(\mathcal{F}(U) \times \mathcal{G}(U), \mathcal{H}(U)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}_\Delta}(\mathcal{F}(U), \mathrm{Map}(\mathcal{G}(U), \mathcal{H}(U))$$

对于 $U \in (\mathrm{dSt}_k)_{/F}$。给定函子 $\mathcal{F}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$，定义 $\mathcal{F}^{/\mathrm{op}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$。现在逐点定义 $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ 和 ~~$\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{H})(U)$~~ $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{H})(U) = \mathrm{Map}(\mathcal{G}^{/\mathrm{op}}(U)\ \mathcal{H}(U))$。如此一来，我们得到 $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ ~~和 $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$~~，它们是函子 $(\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F} \to \mathrm{Set}_\Delta$。定义完毕后，我们有：

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mot}(F)}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mathcal{H}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mot}(F)}(\mathcal{F}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{G}, \mathcal{H}))$$

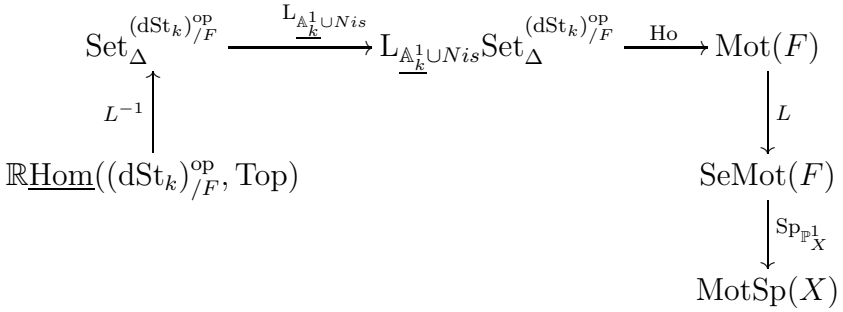
在单纯局部化后，这会投影为 $\mathrm{SeMot}(F)$ 层面上的同一陈述；如果考察这些同态集中的各个元素，并利用 $\mathrm{Mot}(F)$ 的对象也是 $\mathrm{SeMot}(F)$ 的对象这一事实，则有：

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{SeMot}(F)}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mathcal{H}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{SeMot}(F)}(\mathcal{F}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{G}, \mathcal{H}))$$

4.3.6 $\mathrm{MotSp}(X)$ 的构造。

我们将 $\mathrm{MotSp}(X) = \mathrm{MotSp}^{\mathbb{P}^1_X}(F)$ 定义为 $X \in \mathrm{Sch}_k$ 上导出动机谱的范畴，其中 $F = h_{iX}$，其对象是函子 $\mathcal{F}\colon (\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F} \to \mathrm{Set}_\Delta$ - 的 $\mathbb{P}^1_X$-谱，这些函子将对象 $\mathbb{R}\mathrm{Hom}((\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F}$, 拓扑空间)-建模为既 $\underline{\mathbb{A}^1_k}$-~~局部~~又 Nis-局部的对象。$\mathrm{MotSp}(X)$ 首先表现为一种去局部化，随后进行左 Bousfield 局部化；接着取相应的同伦范畴，再进行单纯局部化，最终得到一种

谱化，如下图所示：



展望未来，若想与动机理论建立联系，就必须在 $(\mathrm{dSt}_k)^{\mathrm{op}}_{/F}$ 上找到一种合适的拓扑，以便定义 $\mathrm{MotSp}(X)$ 中的代数栈，取其导出范畴，并在我们的情形中构造 $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}$ 局部化的对应物，从而得到与 [CD], 的层的导出范畴等价的对象；还可能需要采用适当的约化，以获得一个与 $DM_B(X)$ 等价的范畴。请注意，这也意味着要在当前框架下发展六函子形式体系，而这是我们尚未涉及的内容。

参考文献

[A] Y.Andre, 《Une introduction aux Motifs (Motifs Purs, Motifs Mixtes, Pe- riodes)》, 《Panoramas et Syntheses》第17卷，法国数学学会，巴黎，2004年。[CD] D.C.Cisinski andF.Deglise, 《混合动机的三角范畴》, Springer 数学专著，Springer，2019年。[DK] W.G.Dwyer, D.M.Kan, 《范畴的单纯局部化》, 纯粹与应用代数杂志 17（1980年）, 267-284。[Ga]M.Gallauer, 《六函子形式体系导论》, arXiv:2112.10456[math.AG][G1] T.Goodwillie, 《微积分 II：解析函子》, 《K理论》5（1991/1992年）, 4, 295-332。[G2] T.Goodwillie, 《微积分 III：泰勒级数》, 《几何与拓扑》7（2003年）, 645-711。

[Gr] A.Grothendieck, 《Recoltes et Semailles》，朗格多克科学与技术大学，蒙彼利埃，法国国家科学研究中心，1986年。[HR] J.Hall, D.Rydh，补遗： ´etale Devissage, Descent and Pushouts of Stacks, 《代数杂志》498（2018年），398-412。[Hi] P.S.Hirschhorn, 《模型范畴及其局部化》，《数学综述与专著丛书》第99卷，美国数学学会，普罗维登斯，2003年。[H] M.Hoyois and A.Krishna, 《层的负K理论消失定理》，《K理论年刊》4（2019年），第3期，439-472。[J] A.J. de Jong, 《韦伊上同调理论》，笔记见 math. columbia.edu/˜ dejong/seminar/[K] A.Khan, 《导出代数几何中的动机同伦论》，博士论文，杜伊斯堡-埃森大学，2016年。[Kl] S.L.Kleiman, 《代数循环与韦伊猜想》，《关于上同调的十篇讲座》，359-386, 《纯数学高级研究》第3卷，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1968年。[M]J.Milne, 《Etale 上同调讲义》，见 jmilne.org/math/CourseNotes。[M2] J.Milne, 《动机——格罗滕迪克之梦》，《当代数学公开问题与综述》，325-342, 《现代数学综述》第6卷，国际出版社，萨默维尔，马萨诸塞州，2013年。[R] J.Riou, 《实现函子》，见 imo.universite-paris- saclay.fr/˜ joel.riou/doc/realizations.pdf[S] J.P.Serre, 《动机》，《Asterisque》第198-200卷（1991年），第333-349页。[T] B.Toen, 《导出代数几何》，《EMS 数学科学综述》1（2014年），153-240。[T2]B.Toen, 《高阶与导出层：全局概述》，arXiv:math.AG/0604504。[TV2]B.Toen, G.Vezzosi, 《Segal topos 与 Segal 范畴上的层》，arXiv:math/0212330v2 [math.AG]。

[TV5] B.Toen，G.Vezzosi，《勇敢新代数几何与环谱的全局导出模空间》，arXiv:math/0309145v2 [math.AT]

[TV]B.Toen，G.Vezzosi，《同伦代数几何 II：几何堆栈及其应用》，arXiv:math.AG/0404373。

电子邮件地址：rg.mathematics@gmail.com。