带比例延迟微分方程的存在唯一性定理

Prajakta Rajmane[a*], Jayvant Patade[b], M. T. Gophane[a]

[a]数学系，*Shivaji University*，*Kolhapur - 416004*，印度。[b]数学系，*Jaysingpur College*，*Jaysingpur - 416101*，印度。

arXiv:2303.09543v1 [math.CA] 16 Mar 2023

摘要

带比例延迟的微分方程（DE）是时变时滞微分方程（DDE）的一种特殊情形。本文采用逐次逼近法（SAM）求解带比例延迟的非线性微分方程。我们利用 SAM 证明了带比例延迟微分方程解的存在唯一性和稳定性。借助利普希茨条件，我们推导了这些方程的收敛性结果。我们将这些结果推广到含 Caputo 分数阶导数的分数阶微分方程（FDE）及其方程组。此外，我们将伸缩方程和 Ambartsumian 方程的级数解表示为幂级数，并证明其对所有实数均收敛。最后，我们通过实例展示了 SAM 的有效性。我们将 SAM 得出的结果与精确解及其他迭代方法进行了比较。结果表明，与其他方法相比，SAM 更为简单，且利用 SAM 得到的解与精确解一致。

关键词： 逐次逼近法；利普希茨条件；Caputo 导数；存在唯一性；比例延迟；伸缩方程；Ambartsumian 方程。*2020*年数学主题分类： 26A33；34A08；34K06；34K20。

1. 引言

时滞微分方程（DDE）包含过去时刻 $t-\tau$ 的状态变量项。引入延迟 τ 使 DDE 成为一个无限维动力系统。尽管这类方程极难分析和求解，但由于其在众多领域中的应用，这一研究分支受到应用科学家的广泛关注。

另一方面，如果微分方程中导数的阶数可以是任意数值（而非正整数），那么该方程就称为分数阶微分方程（FDE）。尽管分数阶导数算子有多种彼此不等价的定义

通讯作者电子邮件地址： prajaktarajmane@gmail.com（Prajakta Rajmane[a]），dr.jayvantpatade@gmail.com（Jayvant Patade[b]），mtg_math@unishivaji.ac.in（M. T. Gophane[a]）

，人们仍可选择适用于所研究模型的导数。这种灵活性是分数阶微积分广受欢迎的一个关键原因。

Daftardar-Gejji 及其同事提出了用于求解分数阶时滞微分方程（FDDE）的数值方法 [1, 2] 。修正拉盖尔小波法 [3], 、谱配置法 [4], 和分数阶斐波那契混合函数 [5] 也是求解 FDDE 的一些其他方法。文献 [6, 7, 8, 9]提出了 FDDE 的稳定性分析。文献 [10, 11, 12, 13]介绍了 FDDE 的应用。

一般而言，时滞微分方程（DDE） $x'(t) = f(t,\ x(t)\ x(t-\tau))$ 中的时滞 τ并非常数。当 τ 依赖于时间或状态时，分析会更加困难。比例延迟微分方程 $x'(t) = f(t,\ x(t)\ x(qt))$ 或伸缩方程，是具有 $\tau(t) = (1-q)t$的时变 DDE 的一个特例。Ockendon 和 Tayler 在开创性著作 [14]中提出了这些方程，用于模拟架空电车线的运动。文献 [15, 16]讨论了这些方程的一些其他应用。文献 [17] 将 Daftardar-Gejji–Jafari方法（DJM）应用于求解伸缩方程的解析解。此外，作者还给出了该解级数与现有特殊函数之间的各种关系。Patade 和 Bhalekar 使用 DJM 提出了 Ambartsumian 方程的幂级数解 [18] 。文献 [19]讨论了伸缩方程的解析解。本文将文献 [20] 关于常微分方程（ODE）存在唯一性的结果推广到具有比例延迟的微分方程、具有比例延迟的分数阶微分方程（FDE），以及具有比例延迟的 FDE 系统。我们采用逐次逼近法（SAM）证明所得结果。

本文结构安排如下。第 2 节给出分数阶导数和积分的定义与记号。第 3 节介绍比例时滞微分方程。第 4 节讨论逐次近似解和存在性定理。第 5 节介绍稳定性分析。第 6 节介绍受电弓方程和阿姆巴楚米扬方程的级数解。第 7 节和第 8 节分别将这些结果推广到分数阶微分方程及其方程组。第 9 节给出一个示例，第 10 节总结全文。

2. 预备知识与记号

定义 2.1. *[21]* 阶数为 $\alpha > 0$ 、作用于 $f \in C[0,\infty)$的黎曼–刘维尔分数阶积分定义为

$$I^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\zeta)^{\alpha-1} f(\zeta) d\zeta, \quad t > 0. \tag{2.1}$$

定义 2.2. *[21]* $f, f \in C_{-1}^{m}, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 的（左侧）*Caputo* 分数阶导数定义如下：

$$\begin{aligned} D^{\alpha} f(t) &= \frac{d^m}{dt^m} f(t), \quad \alpha = m \\ &= I^{m-\alpha} \frac{d^m}{dt^m} f(t), \quad m-1 < \alpha < m, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

注意，对于 $0 \leq m-1 < \alpha \leq m$ 和 $\beta > -1$

$$\begin{aligned} I^{\alpha} x^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} x^{\beta+\alpha}, \\ \left(I^{\alpha} D^{\alpha} f\right)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

定义 2.3。 *[21]* 米塔格-莱夫勒函数定义为

$$E_{\alpha}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(\alpha n+1)}, \quad \alpha > 0. \tag{2.4}$$

定义 2.4。 *[21]* 多参数米塔格-莱夫勒函数定义为:

$$E_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),\beta}(z_1, z_2, \cdots, z_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_n=k \\ l_j \geq 0}} (k; l_1, \cdots, l_n) \left[\frac{\prod_{j=1}^{n} z_j^{l_j}}{\Gamma(\beta + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j l_j)} \right].$$

其中，$(k;\, l_1, l_2, \cdots, l_n)$ 是按如下方式定义的多项式系数

$$(k; l_1, l_2, \cdots, l_n) = \frac{k!}{l_1! l_2! \cdots l_n!}. \tag{2.5}$$

3. 比例时滞微分方程

考虑如下比例时滞微分方程

$$y'(t) = f(t, y(t), y(qt)), y(0) = y_0, 0 < q < 1, \tag{3.1}$$

其中 f 是在某个矩形区域上定义的连续函数

$$R = \{|t| \leq a, |y(t) - y_0| \leq b, |y(qt) - y_0| \leq b, a > 0,\, b > 0\}.$$

定理1. 函数 ϕ 是区间 I 上初值问题 ***(3.1)*** 的一个解，当且仅当它是下列积分方程的解

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(x, y(x), y(qx)) dx \quad \textit{on} \quad I \tag{3.2}$$

证明。 设 ϕ 是初值问题 (3.1) 在区间 I上的一个解。则

$$\phi'(t) = f(t, \phi(t), \phi(qt)), \phi(0) = y_0, 0 < q < 1 \tag{3.3}$$

等价的积分方程 (3.3) 为

$$\phi(t) = \phi(0) + \int_0^t f(x, \phi(x), \phi(qx))dx. \tag{3.4}$$

且 $\phi(0) = y_0$。因此 ϕ 是初值问题 (3.2) 的一个解。
反过来，假设方程 (3.4) 成立。对方程 (3.4) 关于 t 求导，得到

$$\phi'(t) = f(t, \phi(t), \phi(qt)), 0 < q < 1 \quad \forall t \in I$$

由方程 (3.2)， $\phi(0) = y_0$。
因此 ϕ 是初值问题 (3.1) 的一个解。 □

4. 比例时滞微分方程的逐次近似解

设 $\phi_0(t) = y_0$ 为初值问题 (3.1) 的第一个近似解。则

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= y_0 + \int_0^t f(x, \phi_0(x), \phi_0(qx))dx. \\ \phi_2(t) &= y_0 + \int_0^t f(x, \phi_1(x), \phi_1(qx))dx. \end{aligned}$$

如此继续下去，我们得到

$$\phi_{k+1}(t) = y_0 + \int_0^t f(x, \phi_k(x), \phi_k(qx))dx. \quad k = 0, 1, 2, \cdots . \tag{4.1}$$

定理 2. 设 f 在 R 上连续，且 $|f| \leq M$。逐次逼近式 *(4.1)* 存在，并且在区间 $I = [-\zeta, \zeta]$ 上连续，其中 $\zeta = min\{a, \frac{b}{M}\}$。若 $t \in I$，则$(t, y(t)\ y(qt)) \in R$ 且 $|\phi_k(t) - y_0| \leq M|t|$, $|\phi_k(qt) - y_0| \leq M|t|$。

证明. 我们用数学归纳法证明该结论。
(i) 显然， $\phi(0) = y_0$ 在 I 上连续。因此，该定理对 $k = 0$成立。(ii) 对于 $k = 1$，我们有

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= y_0 + \int_0^t f(x, \phi_0(x), \phi_0(qx))dx. \\ \phi_1(t) &= y_0 + \int_0^t f(x, y_0, y_0)dx. \end{aligned}$$

由于 f 连续，因此 $\phi_1(t)$存在。

$$\begin{aligned} |\phi_1(t)-y_0| &= |\int_0^t f(x,\phi_0(x),\phi_0(qx))dx|. \\ &\le \int_0^t |f(x,\phi_0(x),\phi_0(qx))|dx. \\ &\le M|t| \\ &\le b, \quad t\in I \\ \text{and} \quad |\phi_1(qt)-y_0| &\le M|qt| \\ &\le M|t|, \quad 0<q<1 \\ &\le b, \quad t\in I \end{aligned}$$

因此，对于 $t\in I$，$(t,\ y(t)\ y(qt))\in R$且 $|\phi_1(t)-y_0|\le M|t|$, $|\phi_1(qt)-y_0|\le M|t|$。定理对 $k=1$成立

(iii) 假设定理对 $k=n$成立。

即，对于 $t\in I$，$(t,\ y(t)\ y(qt))\in R$且 $|\phi_n(t)-y_0|\le M|t|$, $|\phi_n(qt)-y_0|\le M|t|$。

(iv) 证明定理对 $k=n+1$成立。

若 $t\in I$，则

$$\phi_{n+1}(t) = y_0+\int_0^t f(x,\phi_n(x),\phi_n(qx))dx.$$

由于 f 连续，因此，$\phi_{n+1}(t)$ 在 I 上存在。

$$\begin{aligned} |\phi_{n+1}(t)-y_0| &\le M|t| \\ &\le b, \quad t\in I \\ \text{and} \quad |\phi_{n+1}(qt)-y_0| &\le M|qt| \\ &\le M|t|, \quad 0<q<1 \\ &\le b, \quad t\in I \end{aligned}$$

因此，若 $t\in I$，$(t,\ y(t)\ y(qt))\in R$且 $|\phi_{n+1}(t)-y_0|\le M|t|$, $|\phi_{n+1}(qt)-y_0|\le M|t|$。

因此，由数学归纳法可知，结论对所有正整数 n均成立。 □

Th定理 3. （存在性定理）设f连续，且 $|f|\le M$ 在矩形区域上 *le*

$$R=\{|t|\le a, |y(t)-y_0|\le b, |y(qt)-y_0|\le b, a>0,\ b>0\}.$$

假设 f满足关于第二个和第三个变量的利普希茨条件，利普希茨常数分别为 L_1和 L_2，使得

$$|f(t,y_1(t),y_1(qt))-f(t,y_2(t),y_2(qt))|\le L_1|y_1(t)-y_2(t)|+L_1|y_1(qt)-y_2(qt)|.$$

于是，逐次逼近（*4.1*）在区间 $I=[-\zeta,\zeta]$上收敛，其中 $\zeta=min\left\{a,\ \frac{b}{M}\right\}$，从而得到初值问题（*3.1*）在 I 上的解 ϕ。

证明。我们有

$$\phi_k(t) = \phi_0(t) + \sum_{n=1}^{k}[\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)].$$

要证明序列 $\{\phi_k\}$ 收敛，只需证明级数

$$\phi_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}[\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)] \tag{4.2}$$

收敛。
根据定理（2），函数 ϕ_k 在 I上均存在且连续。
此外，对于 $t \in I$，$|\phi_1(t) - \phi_0(t)| \leq M|t|$ 且 $|\phi_1(qt) - \phi_0(qt)| \leq M|t|$。
现在，

$$\begin{aligned}
\phi_2(t) - \phi_1(t) &= \int_0^t [f(x, \phi_1(x), \phi_1(qx)) - f(x, \phi_0(x), \phi_0(qx))]dx \\
\therefore |\phi_2(t) - \phi_1(t)| &\leq \int_0^t |f(x, \phi_1(x), \phi_1(qx)) - f(x, \phi_0(x), \phi_0(qx))|dx \\
&\leq \int_0^t [L_1|\phi_1(x) - \phi_0(x)| + L_2|\phi_1(qx) - \phi_0(qx)|]dx \\
&\leq M(L_1 + L_2)\frac{|t|^2}{2}.
\end{aligned}$$

我们将用数学归纳法证明

$$|\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)| \leq M(L_1 + L_2)^{n-1}\frac{|t|^n}{n!} \tag{4.3}$$

我们已经证明方程（4.3）对 $n = 1$,2.成立。
假设 (4.3) 对于 $n = m$.成立
我们有

$$\begin{aligned}
\phi_{m+1}(t) - \phi_m(t) &= \int_0^t [f(x, \phi_m(x), \phi_m(qx)) - f(x, \phi_{m-1}(x), \phi_{m-1}(qx))]dx \\
\therefore |\phi_{m+1}(t) - \phi_m(t)| &\leq \int_0^t |f(x, \phi_m(x), \phi_m(qx)) - f(x, \phi_{m-1}(x), \phi_{m-1}(qx)|dx \\
&\leq \int_0^t [L_1|\phi_m(x) - \phi_{m-1}(x)| + L_2|\phi_m(qx) - \phi_{m-1}(qx)|]dx \\
&\leq M(L_1 + L_2)^m\frac{|t|^{m+1}}{(m+1)!}.
\end{aligned}$$

因此，该结果对于 $n = m + 1$ 成立。
因此，根据数学归纳法，结论对所有 $n = 1, 2, \cdots$. 均成立

因此，无穷级数 (4.3) 在 I 上绝对收敛。这表明，级数 $|\phi_0(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)|$ 的 n^{th} 项小于幂级数 $e^{(L_1+L_2)|t|}$ 的 n^{th} 项的 $M_{(L_1+L_2)}$ 倍。因此，级数 (4.3) 收敛。

□

5. 稳定性分析

比例时滞微分方程

$$y'(t) = f\left(t, y(t), y(qt)\right), \tag{5.1}$$

是时变时滞微分方程（DDE）的一个特例

$$y'(t) = f\left(t, y(t), y\left(t - \tau(t)\right)\right) \quad \text{with} \quad \tau(t) = (1-q)t,$$

定义5.1. *[22]* 考虑时滞微分方程，

$$y'(t) = f(y(t), y(t - \tau(t))), \tag{5.2}$$

其中 $f:\ R \times R \to R$。流 $\phi_t(t_0)$ 是（*5.2*）的一个解 $y(t)$，其初始条件为$(t) = t_0,\ t \le 0$。如果 y^* 满足 $f(y^*, y^*) = 0$，则称其为（*5.2*）的平衡解。

（***a***）对于任意 $\epsilon > 0$，若存在 $\delta > 0$，使得 $|t_0 - y^*| < \delta \Rightarrow |\phi_t(t_0) - y^*| < \epsilon$，则系统（*5.2*）在平衡点 y^*处稳定（李雅普诺夫意义下）。

(b) 如果系统 *(5.2)* 在 y^* 处稳定，且此外，$\lim_{t\to\infty} |\phi_t(t_0) - y^*| = 0$，则称系统 *(5.2)* 在 y^*处渐近稳定。

以下结果与 [22]中的结果类似

定理4. 设方程的平衡解 y^*

$$y' = f(y(t), y(t - \tau^*)), \quad \tau^* = \tau(t_0) \tag{5.3}$$

是稳定的，且 $\|f(y(t)\ y(t-\tau(t))) - f(y(t)\ y(t-\tau(t_1)))\| < \epsilon_1 |t - t_1|$，对某些 $\epsilon_1 > 0$ 和 t，$t_1 \in [t_0, t_0 + c)$，其中 *c* 为正常数，则存在 $\bar{t} > 0$，使得方程 *(5.2)* 的平衡解 y^* 在有限时间区间 $[t_0, \bar{t})$ 上稳定。

推论5。 如果$\lambda - a - be^{-\lambda\tau^*} = 0$ 的所有根的实部均为负，其中 $a = \partial_1 f\, b = \partial_2 f$ 在平衡点处取值。那么存在 $\epsilon_c\, \bar{t}(> t_0)$，使得当 $\epsilon_1 < \epsilon_c$时，方程（*5.2*）的解$y^* = 0$ 在有限时间区间 $[t_0, \bar{t})$上稳定。

6. 伸缩方程的级数解

受电弓是一种用于电力列车从过载线路收集电流的装置。伸缩方程由 Ockendon 和 Taylor 于 1971 年提出，起源于

电动力学。
考虑伸缩方程,

$$y'(t) = ay(t) + by(qt), \quad y(0) = 1, \tag{6.1}$$

其中 $0 < q < 1$、a, $b \in R$。

对 (6.1) 积分，得到

$$y(t) = 1 + \int_0^t (ay(x) + by(qx))\, dt \tag{6.2}$$

设 $\phi_k(t)$ 为 k^{th} 近似解，其中初始近似解取为

$$\phi_0(t) = 1. \tag{6.3}$$

对于 $k \geq 1$，递推公式如下:

$$\phi_k(t) = 1 + \int_0^t (a\phi_{k-1}(x) + b\phi_{k-1}(qx))\, dx. \tag{6.4}$$

由递推公式可得

$$\begin{aligned}
\phi_1(t) &= 1 + \int_0^t (a\phi_0(x) + by_0(qx))\, dx \\
&= 1 + (a+b)\frac{t}{1!}, \\
\phi_2(t) &= 1 + \int_0^t (a\phi_1(x) + b\phi_1(qx))\, dt \\
&= 1 + (a+b)\frac{t}{1!} + (a+b)(a+bq)\frac{t^2}{2!}, \\
\phi_3(t) &= 1 + \int_0^t (a\phi_2(t) + b\phi_2(qt))\, dt \\
&= 1 + (a+b)\frac{t}{1!} + (a+b)(a+bq)\frac{t^2}{2!}(a+b)(a+bq)(a+bq^2)\frac{t^3}{3!}, \\
&\vdots \\
\phi_k(x) &= 1 + \frac{t^k}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(a+bq^j\right), \quad k = 1, 2, 3\cdots. \\
&\text{As} \quad k \to \infty, \quad \phi_k(t) \to y(t) \\
y(t) &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\prod_{j=0}^{m-1}\left(a+bq^j\right).
\end{aligned}$$

若定义 $\prod_{j=0}^{m-1}(a+bq^j)=1$，其中 $m=0$，则

$$y(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\prod_{j=0}^{m-1}\left(a+bq^j\right). \tag{6.5}$$

定理 6. 对于 $0<q<1$，幂级数 *(6.5)* 在 $t\in R$时收敛。

推论 7. 幂级数 *(6.5)* 对所有 t 均绝对收敛，因此在 R上的任意紧区间内一致收敛。

定理 8. 若 $0<q<1,\quad a,\quad b\geq 0$，则

$$e^{at}\leq y(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\prod_{j=0}^{m-1}\left(a+bq^j\right)\leq e^{(a+b+c)t},\quad 0\leq t<\infty.$$

定理 9. 若 $(a+b)<0$，则 *(6.1)* 的零解渐近稳定。

证明。

$$\begin{aligned}
\text{Define}\qquad u(t) &= \max_{0\leq x\leq t}y^2(t)\\
\therefore \frac{1}{2}u'(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y^2(t))\\
&= y(t)y'(t)\\
&= y(t)(ay(t)+by(qt))\\
&= ay^2(t)+by(t)y(qt)\\
&\leq (a+b)u(t)\\
\Rightarrow u(t) &\leq u(0)e^{2(a+b)t}\\
\therefore \lim_{x\to\infty}y(t) &= 0,\quad \text{if}\quad (a+b)<0.
\end{aligned}$$

□

6.1. 阿姆巴楚米扬方程的级数解

在 [23] 中，阿姆巴楚米扬推导出一个时滞微分方程，用来描述银河系表面亮度的波动。该方程描述如下:

$$y'(t)=-y(t)+\frac{1}{q}y\left(\frac{t}{q}\right) \tag{6.6}$$

其中 $q>1$，且对于给定模型而言为常数。
具有初始条件 $y(0)=\lambda$ 的方程（6.6）可等价地写为

$$y(t)=\lambda+\int_0^t\left(\frac{1}{q}y\left(\frac{x}{q}\right)-y(x)\right)dx. \tag{6.7}$$

设 $\phi_k(t)$为 k^{th} 近似解，其中初始近似解取为

$$\phi_0(t) = \lambda. \tag{6.8}$$

对于 $k \geq 1$，递推公式如下：

$$\phi_k(t) = \lambda + \int_0^t \left(\frac{1}{q} \phi_{k-1}\left(\frac{x}{q}\right) - \phi_{k-1}(x) \right) dx. \tag{6.9}$$

由递推公式可得

$$\begin{aligned}
\phi_1(t) &= \lambda + \int_0^t \left(\frac{1}{q} \phi_0\left(\frac{x}{q}\right) - \phi_0(x) \right) dx \\
&= \lambda + \int_0^t \left(\frac{\lambda}{q} - \lambda \right) dx \\
&= \lambda + \left(\frac{\lambda}{q} - \lambda \right) \frac{t}{1!} \\
&= \left(1 + \left(\frac{1}{q} - 1 \right) \frac{t}{1!} \right) \lambda, \\
\phi_2(t) &= \lambda + \int_0^t \left(\frac{1}{q} \phi_1\left(\frac{x}{q}\right) - \phi_1(x) \right) dx \\
&= \left(1 + \left(\frac{1}{q} - 1 \right) \frac{t}{1!} + \left(\frac{1}{q} - 1 \right) \left(\frac{1}{q^2} - 1 \right) \frac{t^2}{2!} \right) \lambda, \\
&\vdots \\
\phi_k(t) &= \left(1 + \sum_{m=1}^{k} \frac{t^m}{m!} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{q^j} - 1 \right) \right) \lambda. \\
&\text{As} \quad k \to \infty, \quad \phi_k(t) \to y(t) \\
y(t) &= \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{q^j} - 1 \right) \right) \lambda.
\end{aligned}$$

如果我们定义 $\prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{q^j} - 1 \right) = 1$，对于 $m = 0$,
则

$$y(t) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{q^j} - 1 \right) \right) \lambda. \tag{6.10}$$

定理10. 对于 $q > 1$，幂级数*(6.10)*在 $t \in R$上收敛。

推论11. 幂级数*(6.10)*对所有 t 都绝对收敛，因此它在 R上的任意紧区间上均一致收敛。

定理12。 *(6.6)*的零解是渐近稳定的。

7. 分数阶比例延迟微分方程

考虑初值问题（IVP）

$$\begin{aligned} D^{\alpha}y(t) &= f(t,y(t),y(qt)), 0<\alpha\leq 1, 0<q<1 \\ y(0) &= y_0, \end{aligned} \tag{7.1}$$

其中， D^{α} 表示 Caputo 分数阶导数， f 是在矩形区域上定义的连续函数

$$R=\{|t|\leq a, |y(t)-y_0|\leq b, |y(qt)-y_0|\leq b, a>0,\, b>0\}.$$

定理 13。 函数 ϕ 是初值问题 *(7.1)* 在区间 I 上的解，当且仅当它是积分方程的解

$$y(t)=y_0+\int_0^t \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(x,y(x),y(qx))dx \quad on \quad I. \tag{7.2}$$

定理 14。 设 f 在 R 上连续且 $|f|\leq M$。逐次逼近

$$\begin{aligned} \phi_{k+1}(t) &= y_0 \\ \phi_{k+1}(t) &= y_0+\int_0^t \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(x,\phi_k(x),\phi_k(qx))dx. \quad k=0,1,2,\cdots. \end{aligned} \tag{7.3}$$

在区间 $I=[-\zeta,\zeta]$ 上存在且连续，其中 $\zeta=min\left\{a, \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)b}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}$。若 $t\in I$，则 $(t, y(t)\ y(qt))\in R$ 且 $|\phi_k(t)-y_0|\leq M\frac{|t|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$，$|\phi_k(qt)-y_0|\leq M\frac{|t|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$。

Theo推论 15。 （存在性定理）设 f 在矩形区域上连续且 $|f|\leq M$

$$R=\{|t|\leq a, |y(t)-y_0|\leq b, |y(qt)-y_0|\leq b, a>0,\, b>0\}.$$

假设 f 在第二和第三个变量上满足 *Lipschitz* 条件，*Lipschitz* 常数分别为 L_1和 L_2，使得

$$|f(t,y_1(t),y_1(qt))-f(t,y_2(t),y_2(qt))|\leq L_1|y_1(t)-y_2(t)|+L_1|y_1(qt)-y_2(qt)|.$$

那么逐次逼近式 *(7.3)* 在区间 $I=[-\zeta,\zeta]$ 上收敛，其中 $\zeta=min\left\{a, \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)b}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}$，收敛到初值问题 *(7.1)* 在 I 上的一个解 ϕ。

7.1. 分数阶受电弓方程的级数解

考虑如下分数阶伸缩方程:

$$D^{\alpha}y(t)=ay(t)+by(qt), \quad y(0)=1, \tag{7.4}$$

其中 $0<\alpha\leq 1$、$0<q<1$、a，$b\in R$。

利用逐次逼近法求得（7.4）的解为

$$y(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^{\alpha m}}{\Gamma(\alpha m+1)}\prod_{j=0}^{m-1}\left(a+bq^{\alpha j}\right). \tag{7.5}$$

定理16. 若 $0<q<1$，则幂级数（*7.5*）对 t的所有有限值均收敛。

定理17. 若 $0<q<1$，a，$b\geq 0$，则

$$E_{\alpha}(at^{\alpha})\leq y(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^{\alpha m}}{\Gamma(\alpha m+1)}\prod_{j=0}^{m-1}\left(a+bq^{\alpha j}\right)\leq E_{\alpha}((a+b)t^{\alpha}),\quad 0\leq t<\infty.$$

7.2. 分数阶阿姆巴楚米扬方程的级数解

考虑如下分数阶阿姆巴楚米扬方程:

$$D^{\alpha}y(t)=-y(t)+\frac{1}{q}y\left(\frac{t}{q}\right),\quad y(0)=1 \tag{7.6}$$

其中 $q>1$，且对于给定模型而言，为常数。

使用逐次逼近法求得的（7.6）的解为

$$y(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^{\alpha m}}{\Gamma(\alpha m+1)}\prod_{j=0}^{m-1}\left(\frac{1}{q^{1+\alpha j}}-1\right). \tag{7.7}$$

定理18。 如果 $q>1$，则幂级数（*7.7*）对 t 的所有有限取值均收敛。

8. 带比例延迟的分数阶微分方程组

考虑初值问题（IVP）

$$\begin{aligned} D^{\alpha_i}y_i(t) &= f_i(t,\bar{y}(t),\bar{y}(qt)),0<\alpha_i\leq 1,0<q<1\\ y_i(0) &= {}^{i}y_0,\quad 1\leq i\leq n, \end{aligned} \tag{8.1}$$

其中，D^{α_i}表示 Caputo 分数阶导数，$\bar{y}(t)=(y_1(t)\ y_2(t)\ \cdots,y_n(t))$，$\bar{y}(qt)=(y_1(qt)\ y_2(qt)\ \cdots,y_n(qt))$，且 $f=(f_1,f_2\cdots,f_n)$ 是定义在矩形区域上的连续函数

$$R=\{|t|\leq a,|y_i(t)-{}^{i}y_0|\leq b_i,|y_i(qt)-{}^{i}y_0|\leq b_i,a>0,\ b_i>0,1\leq i\leq n\}.$$

定理 19. 函数 ϕ 是初值问题 *(8.1)* 在区间 I 上的一个解，当且仅当它是积分方程的一个解

$$y_i(t) = {}^i y_0 + \int_0^t \frac{(t-x)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} f(x, \bar{y}(x), \bar{y}(qx))dx \quad on \quad I, \tag{8.2}$$

其中 $\bar{\phi}_m = ({}^1\phi_m, {}^2\phi_m, \cdots, {}^n\phi_m)$

定理 20。 设 $||f|| = M$ 在矩形区域 R 上。逐次逼近

$$\begin{aligned} {}^i\phi_0(t) &= {}^i y_0, \quad i = 0, 1, 2, \cdots . \\ {}^i\phi_{k+1}(t) &= y_0 + \int_0^t \frac{(t-x)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} f(x, \bar{\phi}_k(x), \bar{\phi}_k(qx))dx. \quad k = 0, 1, 2, \cdots . \end{aligned} \tag{8.3}$$

存在且在区间 $I = [-\zeta, \zeta]$ 上连续，其中

$$\zeta = min \left\{ a, \left(\frac{\Gamma(\alpha_1 + 1)b_1}{M} \right)^{\frac{1}{\alpha_1}}, \cdots, \left(\frac{\Gamma(\alpha_n + 1)b_n}{M} \right)^{\frac{1}{\alpha_n}} \right\}.$$

若 t 属于区间 I，则 $(t, \bar{y}_m(t)\ \bar{y}_m(qt))$ 属于矩形区域 R，且 $||\bar{y}_m(t) - \bar{y}(0)|| \le M \sum_{i=1}^{m} \frac{|t|^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}$, $||\bar{y}_m(qt) - \bar{y}(0)|| \le M \sum_{i=1}^{m} \frac{|t|^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}$ $\forall m$。

定理 21。 设 f 是定义在矩形区域上的连续函数

$$R = \{|t| \le a, |y_i(t) - {}^i y_0| \le b_i, |y_i(qt) - {}^i y_0| \le b_i, a > 0, b_i > 0, 1 \le i \le n\}.$$

假设 f 在第二和第三个变量上满足利普希茨条件，其利普希茨常数为 L_1 和 L_2，使得 $|f(t, \bar{y}(t)\ \bar{y}(qt)) - f(t, \bar{y}(t)\ \bar{y}(qt))| \le L_1|\bar{y}_1(t) - \bar{y}_2(t)| + L_1|\bar{y}_1(qt) - \bar{y}_2(qt)|$。则逐次逼近式 *(8.3)* 在区间 $I = [-\zeta, \zeta]$ 上收敛，其中 $\zeta = min \left\{ a, \left(\frac{\Gamma(\alpha_1+1)}{M} b_1 \right)^{\frac{1}{\alpha_1}}, \cdots, \left(\frac{\Gamma(\alpha_n+1)}{M} b_n \right)^{\frac{1}{\alpha_n}} \right\}$，收敛到初值问题 *(8.1)* 在 I 上的一个解。

8.1. 分数阶泛函微分方程组

考虑分数阶伸缩方程组

$$D^\alpha y(t) = Ay(t) + By(qt), \quad y(0) = y_0, \quad 0 < \alpha \le 1 \tag{8.4}$$

其中 $0 < q < 1$, $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times n}$ 和 $y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T$ 利用逐次逼近法得到的 (6.4) 的解为

$$y(t) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{k} (A + Bq^{-(k-j)\alpha}) \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} \right] \lambda. \tag{8.5}$$

定理 22. 对于 $0 < q < 1$，幂级数 *(8.5)* 在 $t \in R$时收敛。

8.2. 分数阶阿姆巴楚米扬方程组

在本节中，我们将 Ambartsumian 方程 (3.1) 推广为分数阶 Ambartsumian 方程组 [24]，如下：

$$D^{\alpha}y(t) = -Iy(t) + By\left(\frac{t}{q}\right), \quad y(0) = \lambda, \quad 0 < \alpha \leq 1, \tag{8.6}$$

其中 D^{α} 表示 Ca uptο 分数阶导数，I 是 n 阶单位矩阵，$1 < q$,

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} \frac{1}{q} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{q} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{q} \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

将 SAM 应用于初值问题 (8.6)，得到

$$y(t) = y(0) - IJ^{\alpha}y(t) + BJ^{\alpha}y\left(\frac{t}{q}\right). \tag{8.7}$$

设 $\phi_k(t)$ 为第 k 个近似解，其中初始近似解取为

$$\phi_0(t) = \lambda. \tag{8.8}$$

对于 $k \geq 1$，递推公式如下：

$$\phi_k(t) = \lambda - IJ^{\alpha}\phi_{k-1}(t) + BJ^{\alpha}\phi_{k-1}\left(\frac{t}{q}\right). \tag{8.9}$$

由递推公式可得

$$\begin{aligned}
\phi_1(t) &= \lambda - IJ^{\alpha}\phi_0(t) + BJ^{\alpha}\phi_0\left(\frac{t}{q}\right) \\
&= \lambda - I\frac{\lambda t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + B\frac{\lambda t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&= \left(I + (-I+B)\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\lambda, \\
\phi_2(t) &= \lambda - IJ^{\alpha}\phi_1(t) + BJ^{\alpha}\phi_1\left(\frac{t}{q}\right) \\
&= \lambda - IJ^{\alpha}\left[\left(I + (-I+B)\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\lambda\right] + BJ^{\alpha}\left(I + (-I+B)\frac{q^{-\alpha}t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\lambda \\
&= \lambda - I\left[\frac{\lambda t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + (-I+B)\frac{\lambda t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\right] + B\left[\frac{\lambda t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + (-I+B)\frac{\lambda q^{-\alpha}t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\right] \\
&= \left[I + (-I+B)\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + (-I+Bq^{-\alpha})(-I+B)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\right]\lambda,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_3(t) &= \left[I+(-I+B)\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+(-I+Bq^{-\alpha})(-I+B)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\right.\\ &\left.+(-I+Bq^{-2\alpha})(-I+Bq^{-\alpha})(-I+B)\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}\right]\lambda,\\ &\cdots,\\ \phi_k(t) &= \left[I+\sum_{m=1}^{k}\prod_{j=1}^{m}(-I+Bq^{-(m-j)\alpha})\frac{t^{m\alpha}}{\Gamma(m\alpha+1)}\right]\lambda\end{aligned}$$

当 $k\to\infty$时, $\phi_k(t)\to y(t)$

$$y(t) = \left[I+\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{k}(-I+Bq^{-(k-j)\alpha})\frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}\right]\lambda.$$

若令 $\prod_{j=1}^{k}(-I+Bq^{(k-j)\alpha})=I$, 对于 $k=0$, 则

$$y(t) = \left[\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{k}(-I+Bq^{-(k-j)\alpha})\frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}\right]\lambda. \tag{8.10}$$

定理23. 对于 $q>1$, 幂级数

$$y(t) = \left[\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{k}(-I+Bq^{-(k-j)\alpha})\frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}\right]\lambda$$

在 $t\in R$时收敛。

证明: 由比值判别法 [25]可立即得出结果。

9. 说明性示例

例1. 考虑比例时滞非线性微分方程 [26, 27,28, 29]

$$\frac{dy(t)}{dt}=1-2y^2\left(\frac{t}{2}\right),\quad y(0)=0. \tag{9.1}$$

相应的积分方程为

$$y(t)=\int_0^t\left(1-2u^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)dx. \tag{9.2}$$

利用逐次逼近法（4.1），我们得到

$$
\begin{aligned}
\phi_0(t) &= 0,\\
\phi_1(t) &= t,\\
\phi_2(t) &= t-\frac{t^3}{6},\\
\phi_3(t) &= t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{120}-\frac{t^7}{8064},\\
\phi_4(t) &= t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{120}-\frac{t^7}{5040}+\frac{61t^9}{23224320}-\frac{67t^{11}}{3406233600}+\frac{t^{13}}{12881756160}-\frac{t^{15}}{7990652436480},\\
\phi_5(t) &= t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{120}-\frac{t^7}{5040}+\frac{61t^9}{23224320}-\cdots-\frac{t^{31}}{1062664199886151693758358595882188800},
\end{aligned}
$$

等等。
方程（9.1）的精确解为 $y(t) = \sin t$。
采用 Adomian分解法（ADM） [26], 变分迭代法（VIM） [27], 同伦分析法（HAM） [28], 最优同伦渐近法（OHAM） [29] 得到的方程（9.1）的五项解相同，表示为

$$
\begin{aligned}
y(t) &= t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{120}-\frac{t^7}{5040}+\frac{t^9}{362880}-\frac{t^{11}}{39916800}+\frac{t^{13}}{6227020800}\\
&\quad -\frac{t^{15}}{1307674368000}+\frac{t^{17}}{355687428096000}.
\end{aligned}
\tag{9.3}
$$

方程（9.1）的四项最优同伦渐近法解 [29]为

$$
y(t) = t-0.166665t^3+0.00832857t^5-0.000192105t^7. \tag{9.4}
$$

我们在图(1)中将 5th 近似解（SAM）和五项解（ADM、VIM、HAM）与精确解进行比较，并在图(2)中将 4th 近似解（SAM）与四项解（OHAM）进行比较。计算所得的绝对误差如图(3)–(4)所示。可以看出，SAM 解优于采用其他方法得到的解。

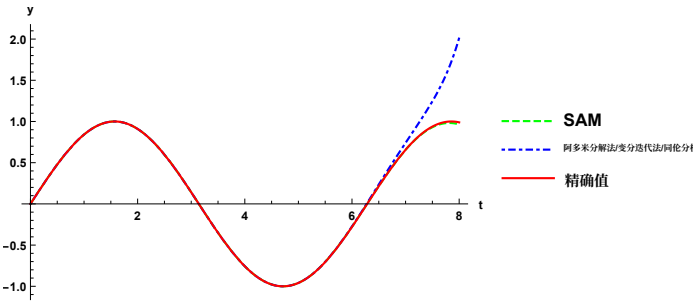

图1: c SAM、ADM/VIM/HAM 的解与方程（9.1）精确解的比较 .

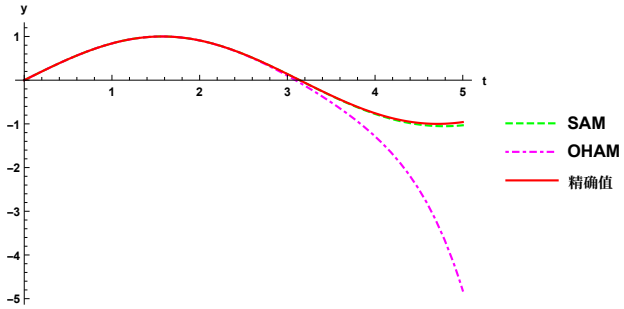

图2：SAM、OHAM的解与方程（9.1）的精确解比较 .

注： [26, 27, 28, 29] 中给出的 ADM/VIM/HAM 和 OHAM 解仅在区间 $[0,1]$ 内考虑。在此，我们成功地利用 SAM 将解扩展到了区间 $[0,8]$。

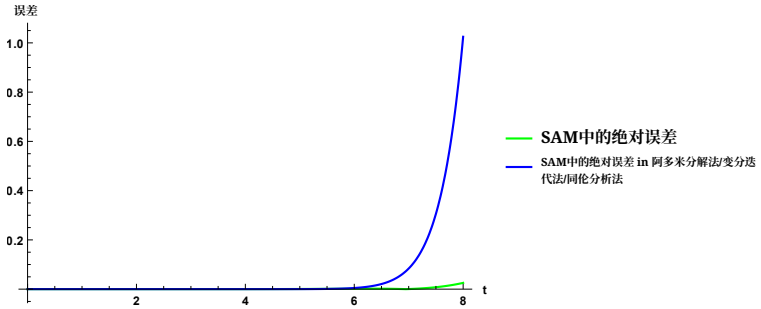

图3：SAM与ADM/VIM/HAM解的绝对误差比较 s.

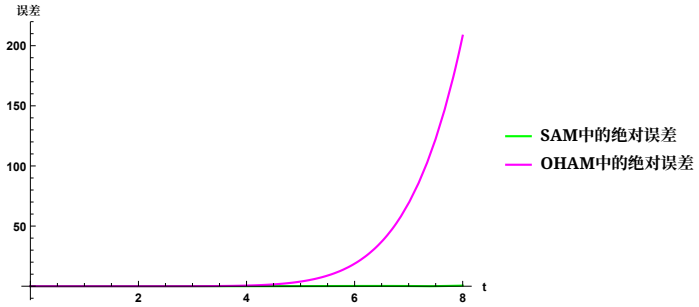

图4：SAM与OHAM解的绝对误差比较。

10. 结论

本文使用逐次逼近法（SAM）求解了带比例延迟的非线性微分方程，并给出了比例时滞微分方程的存在性、唯一性和稳定性定理。利用利普希茨条件推导了收敛性结果。此外，还介绍了分数阶推广以及分数阶情形下的一个方程组。使用 SAM 得到了伸缩方程和安伯苏米安方程的级数解。最后，通过一个示例说明了 SAM 的有效性。

11. 参考文献

参考文献

[1] SACHIN Bhalekar 和 VARSHA Daftardar-Gejji。用于求解分数阶非线性时滞微分方程的预测校正格式。分数阶微积分与应用杂志，1(5):1–9，2011年。[2] Varsha Daftardar-Gejji、Yogita Sukale 和 Sachin Bhalekar。求解分数阶时滞微分方程：一种新方法。分数阶微积分与应用分析，18(2):400–418，2015年。[3] Muhammad Asad Iqbal、Umer Saeed 和 Syed Tauseef Mohyud-Din。用于分数阶时滞微分方程的修正拉盖尔小波法。埃及基础与应用科学杂志，2(1):50–54，2015年。[4] Khalid K Ali、Mohammad A Abd El Salam 和 Emad M Mohamed。利用谱配置法求解分数阶时滞微分方程的切比雪夫运算矩阵。阿拉伯基础与应用科学杂志，26(1):342–353，2019年。[5] Sedigheh Sabermahani、Yadollah Ordokhani 和 Sohrab-Ali Yousefi。用于求解分数阶时滞微分方程的分数阶斐波那契混合函数方法。计算机工程，36(2):795–806，2020年。[6] Sachin B Bhalekar。一类分数阶时滞微分方程的稳定性分析。*Pramana*，81(2):215–224，2013年。[7] Sachin Bhalekar。广义标量时滞微分方程的稳定性与分岔分析。混沌：非线性科学跨学科期刊，26(8):084306，2016年。[8] Eva Kaslik 和 Seenith Sivasundaram。线性分数阶时滞微分方程稳定性分析的解析与数值方法。计算与应用数学杂志，236(16):4027–4041，2012年。[9] Sachin Bhalekar。二项分数阶时滞微分方程分析。载于分数阶微积分与分数阶微分方程，第59–75页。施普林格，2019年。[10] Sachin Bhalekar、Varsha Daftardar-Gejji、Dumitru Baleanu 和 Richard Magin。带时滞的分数阶布洛赫方程。计算机与应用数学，61(5):1355–1365，2011年。[11] FA Rihan 和 G Velmurugan。肿瘤免疫系统的分数阶时滞微分模型动力学。混沌、孤子与分形，132:109592，2020年。

[12] V Preethi Latha、Fathalla A Rihan、R Rakkiyappan 和 G Velmurugan。埃博拉感染与 cd8+t 细胞响应的分数阶时滞微分模型：稳定性分析与 Hopf分岔。国际生物数学杂志，10(08):1750111，2017年。[13] Fathalla A Rihan。具有捕食者—猎物系统的分数阶时滞微分方程。载于时滞微分方程及其在生物学中的应用，第 211–232 页。施普林格，2021年。[14] John Richard Ockendon 和 Alan B Tayler。电力机车集电系统的动力学。伦敦皇家学会会报：数学与物理科学，322(1551):447–468，1971。[15] Martin Buhmann 和 Arieh Iserles。离散化泛函微分方程的稳定性。*Mathematics of Computation*，60(202):575–589，1993年。[16] Sachin Bhalekar 和 Jayvant Patade。伸缩方程的级数解及其性质。《分形与分数阶》，1(1):16，2017年。[17] Sachin Bhalekar 和 Jayvant Patade。具有比例时滞的非线性方程的解析解。*Appl. Comput.Math*，15(3):331–345，2016年。[18] Jayvant Patade 和 Sachin Bhalekar。关于 Ambartsumian 方程的解析解。《国家科学院快报》，40:291–293，2017年。[19] Jayvant Patade 和 Sachin Bhalekar。具有非公度时滞的伸缩方程解析解。《物理科学评论》，2(9)，2017年。[20] Earl A Coddington。常微分方程导论。Courier Corporation，2012年。[21] Anatoliĭ Kilbas。分数阶微分方程理论与应用 爱思唯尔，2006年。[22] Weihua Deng、Yujiang Wu 和 Changpin Li。时变时滞微分方程的稳定性分析。《国际分岔与混沌杂志》，16(02):465–472，2006年。[23] VA Ambartsumian。关于银河系亮度的波动。载于《苏联科学院院刊》，第 44 卷，第 244–247 页，1944年。[24] Jayvant Patade。分数阶 Ambartsumian 方程组的级数解：天文学中的应用。*arXiv* 预印本 *arXiv:2008.04904*，2020年。[25] Tom M Apostol 和 CM Ablow。数学分析。《今日物理》，11(7):32，1958年。

[26] David J Evans 和 KR Raslan。用 Adomian分解法求解时滞微分方程。*InternationalJournal of ComputerMathematics*，82(1):49–54，2005年。[27] Yulita Molliq Rangkuti 和 MSM Noorani。利用结合泰勒级数和小项的耦合变分迭代法求解时滞微分方程的精确解。*Bulletin ofMathematics*，4(01):1–15，2012年。[28] AK Alomari、Mohd Salmi Md Noorani 和 R Nazar。用同伦分析法求解时滞微分方程。*Acta Applicandae Mathematicae*，108:395–412，2009年。[29] N Ratib Anakira、AK Alomari 和 Ishak Hashim。求解时滞微分方程的最优同伦渐近法。*MathematicalProblemsin Engineering*，2013，2013年。