arXiv:2303.09550v1 [math.AT] 16 Mar 2023

特殊值的分母 ζ函数计数模 p MOORE 谱的 KU局部同伦群。

A. SALCH

Abstract. 本文证明，对于每个奇素数 p，模 p Moore 谱的 KU局部同伦群的阶，等于全实数域的某些 Dedekind ζ 函数之商的特殊值的分母。基于这一观察，我们给出一个巧妙的拓扑学证明，证明这些数域的 Leopoldt 猜想成立；我们说明，该猜想是 KU局部稳定同伦群周期性性质的推论。

Contents

1. 引言。1 2. KU局部化与模 p Moore 谱的 KU局部化概述。4 3. 数论中的若干思想概述。7 3.1. 狄利克雷特征及其 L函数概述。7 3.2. Dedekind ζ 函数概述。9 4. 模 p Moore 谱的 L函数。10 5. Leopoldt 猜想的推论。16 6. 附录：一些有趣的数值计算。18 6.1. $L(1-n,\ S/p)$取值的计算示例。18 6.2. 与同伦群相关的一些有趣的概率论论证。20 参考文献 21

1. Introduction.

这篇短文将20世纪70年代稳定同伦论中的一项计算，与Leopoldt和Carlitz在20世纪50年代提出的一些数论思想结合起来。在 [1], 中，J. F. Adams著名地证明了以下定理：

定理 1.1.（Adams.）设 n 为正整数，令denom$(\zeta(-n))$ 为有理数 $\zeta(-n)$ 写成既约形式时的分母。那么，Whitehead J-同态的像

$$\mathbb{Z} \cong \pi_{4n+3}(SO) \xrightarrow{J} \pi^S_{4n+3}(S^0)$$

是一个阶等于 $\zeta(-2n-1)$ 分母的循环群，相差一个 2 的幂次因子。

这里，ζ 是黎曼ζ函数，$\pi_{4n+3}(SO)$ 是无限特殊正交群的第 $(4n+3)$ 个（不稳定）同伦群，而 $\pi^S_{4n+3}(S)$ 是零维球面 S^0 的第 $(4n+3)$ 个稳定同伦群。

与 Adams 的上述结果密切相关的是 Ravenel 的计算（见 [22], ，其中提到这一计算的早期版本由 Adams 和 Baird 完成）：

定理 1.2。（Ravenel。）设 KU 为周期复 K-理论，并设 $L_{KU}S$ 为球谱 S 在 KU 处的 Bousfield 局部化。那么，对于所有正整数 n，$2n$ 阶稳定同伦群 $\pi_{2n}(L_{KU}S)$ 的阶 $\#(\pi_{2n}(L_{KU}S))$ 是 2 的幂，并且 $\#(\pi_{2n-1}(L_{KU}S)) =$ 的分母 $(\zeta(1-n))$ 相差一个 2 的幂因子。

在定理 1.2 中，我们采用如下约定：有理数 0 的分母为 1。（这一点很重要，因为 $\zeta(-n) = 0$ 对所有偶正整数 n。）

迄今为止，定理 1.2 在文献中独树一帜，因为它是唯一一个用 L-函数的特殊值来描述 Bousfield 局部化有限谱的同伦群之阶的结果。本短文旨在通过将定理 1.2 推广到球谱以外的一族谱，为这一现象提供无穷多个新例子：我们证明，当 $p > 2$时，$\pi_*(L_{KU}S/p)$, 的群之阶——其中 S/p 是模 p Moore 谱（即次数为 p 的映射 $S \to S$的同伦余纤维）——也是一个自然的 L-函数特殊值的分母。只要找准正确的 L-函数，所涉及的工作并不困难；这个项目的难点仅仅在于一开始找到这个 L-函数。

本短文的主要结果（在命题 4.4、定理 4.8 和推论 4.9 中证明）如下：

定理 1.3。设 p为奇素数。则对所有正整数 n，若约定当有理数 x 写成既约形式时，以 $\mathrm{denom}(x)$ 表示其分母，则有等式

$$\mathrm{denom}\left(\frac{\zeta_F(1-n)}{\zeta(1-n)}\right) = \#(\pi_{2n}(L_{KU}S/p)) = \#(\pi_{2n-1}(L_{KU}S/p)), \tag{1.1}$$

其中 $L_{KU}S/p$ 是模 p Moore 谱 S/p 关于周期复 K-理论 KU的 Bousfield 局部化，而 $F/\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Q}(\zeta_{p^2})/\mathbb{Q}$ 中使 p 野分歧的（唯一）最小子扩张。

在定理 5.3 中，我们证明定理 1.3 的陈述中所述每个数域 F 在素数 p处的 Leopoldt 猜想。这些数域都是阿贝尔的，因此 Baker 和 Brumer [4]的工作已经证明了它们的 Leopoldt 猜想。我们给出的定理 5.3 证明有一个有趣之处：它从 Colmez 的 p-进类数公式、定理 1.3 以及稳定同伦群中的 v_1-周期性，推出 Leopoldt 猜想的相关情形。人们自然会想知道，能否用类似的拓扑方法验证 Leopoldt 猜想的其他情形，或许包括非阿贝尔情形。我们在观察 5.4 中描述一般方法：

观察。若 F 是一个全实数域，并且存在整数 j、k 以及谱 E、X，使得

(1) $\pi_{2(p^k-1)p^n-1}(L_EX)$的阶等于有理数 $\frac{\zeta_F(1-p^n(p^k-1))}{\zeta(1-p^n(p^k-1))}$ 的分母，(2) X 存在一个自映射 $\Sigma^{(2p^k-2)j}X \to X$ ，它在E_*-同调中诱导同构，并且 (3) $\pi_{-1}(L_EX)$是有限的，

那么，Leopoldt 猜想在素数 p 处对 F 成立。

Hopkins-Smith 的周期性定理（参见 [13]，或 [23] 的定理 1.5.4）提供了大量满足三个条件中第二个条件的谱 X ；相关讨论见注 5.5。

在附录第 6 节中，我们给出了一些已计算出的 $\zeta_F(1-n)/\zeta(1-n)$, 特殊值（包括分子）的例子，并探讨了一个有趣的关系： $L_{KU}S/p$ 的同伦群的阶，与某些“随机”整数集合满足特定互素条件的概率之间的关系。

注 1.4。数域数环的代数 K-群的阶与戴德金 ζ 函数的特殊值之间，存在各种已知或猜想中的关系，例如 [18] 中提出的 Lichtenbaum 猜想。由于环 R 的代数 K-群$K_i(R)$ 就是代数 K-理论谱 $\mathcal{K}(R)$ 的同伦群 $\pi_i(\mathcal{K}(R))$ ，人们自然会想知道定理 1.3 与代数K-理论有何关联。答案如下：由 Thomason 的同一（见 [26]）可知，对于 $n \gg 0$，p-完备的 $\pi_n\left((L_{KU}\mathcal{K}(R))^\wedge_p\right)$ 与 p-完备的 ´étale K-理论 $K_n^{\mathrm{et}}(R)^\wedge_p$ 相同；结合 Quillen 在 [21]，对有限域的 K-群的计算可得，对于任何模 p^2 的原根素数 ℓ ，p 的 $L_{KU}S$ 完备化与 $L_{KU}\mathcal{K}(\mathbb{F}_\ell)$ 的 p 完备化同伦等价。因此，稍费一番功夫，就可以将上文以定理 1.2 重述的 Ravenel 定理中出现的同伦群改写为代数 K-群。但是， $L_{KU}S/p$ 与任何有限域、数环或数域的代数 K-理论谱都不同伦等价，即使经过 p-完备化也是如此，即使只考虑次数为 $\gg 0$ 的同伦群也是如此。因此，本注中的结果似乎无法自然地纳入代数 K-群与特殊值之间任何已知或猜想中的关系。

本文的历史与现状。我在 2016 年写下了本文的大部分内容，但从未公开发表，因为我觉得，应该存在一种更有说服力、更深入且更具普适性的方式来证明相同的结果。几年后，我才掌握了足够的岩泽理论知识，从而找到了证明这些结果的更好方法；例如，这种证明方法的适用范围远远超出了模 p Moore 谱。不过，或许公开这篇短文仍有一定价值，因为我认为其中的想法颇为有趣，而且本文的呈现方式不要求读者投入精力学习岩泽理论；此外，这篇短文的某些版本曾在私下流传，也有好几个人向我问起过它。因此，希望读者能够谅解：本文呈现的仅仅是一个先导版本，而我认为，要将稳定同伦群的阶与 ζ-函数的特殊值联系起来，真正有效的技术必定更为强大。下文的注 1.5 中，我将概述如何运用那些更有效的（岩泽理论）技术证明本文的主要结果。

作者想强调，本文中的证明都相当简单；这项工作真正困难之处在于找到正确的函数$L(s, S/p) = \zeta_F(s)/\zeta(s)$和域 F。对于 $p > 2$，同伦群 $\pi_*(L_{KU}S/p)$

非常简单（即，如果 n 同余于 0 或 -1 模 $2p-2$，那么 $\pi_n(L_{KU}S/p)$ 同构于 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$；否则它是平凡的），但要“量身打造”一个 L函数，使其在负整数处具有分母指定的有理特殊值，并非易事：“大多数” L函数（在常见的函数族中：戴德金函数、哈塞-韦伊函数、阿廷函数.....）若在负整数处有有理特殊值，通常会在负整数处取值为零；而在那些不为零的函数中，大多数在负整数处取值为整数；至于那些具有非零非整数有理特殊值的函数，其分母模式似乎大多与黎曼ζ函数相同。找到 $\zeta_F(s)/\zeta(s),$ 以及定理 1.3 中所述的特定数域 F，着实花了作者一番功夫；但一旦有了关于 F 的正确想法，并想到去研究 $\zeta_F(s)/\zeta(s),$，一切便能借助成熟的方法迎刃而解。

注 1.5。本文中我们对式 (1.1) 给出的论证很简单：先计算 denom $\left(\frac{\zeta_F(1-n)}{\zeta(1-n)}\right)$ 的分母，再将其与 $\pi_{2n}(L_{KU}S/p)$ 和 $\pi_{2n-1}(L_{KU}S/p),$（其阶已计算出来）进行比较，便会发现它们相等。因此，值得思考的是：等式 (1.1) 只是巧合吗？我认为，最有说服力的论据表明这并非巧合，它来自对式 (1.1) 的岩泽理论证明。该证明并不计算等式 (1.1) 两边的值，而是转而证明：计算 $\pi_*(L_{KU}S/p)$ 的下降谱序列的输入（见下文 (2.2)）是某个单位群岩泽模的上同调；根据岩泽主猜想的全实情形（如 [28] 所述），该模的上同调群也是 $\zeta_F(s)/\zeta(s)$ 在负整数处的特殊值的分母。随后，谱序列中微分的消失便给出等式 (1.1)。这一岩泽理论论证超出了本文的范围，我只能另文介绍。由于这一岩泽理论论证所需的代数数论知识远多于本文采用的较为经典的狄利克雷特征论方法，我相信，与描述这种更一般、更有力的岩泽理论方法的论文相比，本文对拓扑学家读者而言会易读得多。

我尽力使这篇短文对数论学家也易于阅读，但我认为，对于像作者一样受过同伦论训练、但未受过数论训练的读者而言，这篇短文仍然最容易理解。第 3 节介绍了所需数论结果的“速成课程”，第 2 节则对相关拓扑学结果作了更简要的速成介绍。

我很高兴能感谢 R. Bruner 与我就本文材料进行的多次富有成果的讨论，感谢 D. Ravenel 在研究特殊值与同伦群的阶之间的联系时给予的支持和启发，也感谢匿名审稿人提出的宝贵意见。在对特殊值进行大规模系统计算、并最终使我锁定正确的 L 函数族和最终正确的 $L(s,S/p)$ 定义时，计算机代数软件包 MAGMA 和 SAGE 也不可或缺。

约定 1.6。全文中，我们用 S 表示球谱，用 ζ 表示黎曼ζ函数，并用 $\nu_p(x)$ 表示数 x 的 p-进赋值。

2. Review of KU-localization and the KU-local mod p Moorespectrum.

本节将介绍一些我们会用到的稳定同伦论中的著名思想。关于这些内容，一个很好的参考资料是 [22]。

定义 2.1. 固定一个谱 E。

• 若映射 $f\colon X \to Y$ 满足 $E \wedge f$ 是弱等价，则称其为 E-局部等价。换言之，当且仅当 f 诱导同构 $E_*(X) \to E_*(Y)$ 时， f 才是 E-局部等价。• 若谱 X 满足 $E \wedge X$ 可缩，则称谱 X 为 E-无效的。• 若对于每个 E-无效谱 Y，任意谱映射 $Y \to X$ 都是零伦，则称谱 X 为 E-局部的。• 若映射 $f\colon X \to L_E X$ 满足 $L_E X$ 是 E- 局部的，且 f 是 E- 局部弱等价，则称其为 X 上的 E-局部化映射，并称 $L_E X$ 为 X 的 Bousfield E-局部化。

不难看出， X 的 Bousfield E-局部化在弱等价意义下唯一。更难的是 Bousfield 定理：对于所有 E 和所有 X， X 的 Bousfield$E$-局部化都存在。[1]

Bousfield 局部化，除此之外，也是交换代数中熟悉的局部化概念在谱上的一种类比：若 $H\mathbb{Z}_{(p)}$ 是 p-局部整数的 Eilenberg-Mac Lane 谱（由如下性质唯一确定：对所有 $n \neq 0$， $\pi_0(H\mathbb{Z}_{(p)}) \cong \mathbb{Z}_{(p)}$ 且 $\pi_n(H\mathbb{Z}_{(p)}) \cong 0$），那么对所有同伦群有下界的谱 X，都有 $\pi_*\left(L_{H\mathbb{Z}_{(p)}}X\right) \cong \pi_*(X)_{(p)}$；而对所有谱 X （同伦群不要求有任何下界），都有 $\pi_*\left(L_{L_{H\mathbb{Z}_{(p)}}S}X\right) \cong \pi_*(X)_{(p)}$。因此，某些 Bousfield 局部化（例如刚才描述的那些，它们只是对同伦群进行 p-局部化）对谱的同伦群具有可预测的影响。

然而，当 E 是一个存在某个 $n > 0$使得有同伦等价 $\Sigma^n E \xrightarrow{\cong} E$ 的谱时，Bousfield 局部化 L_E 通常会对同伦群产生微妙得多的影响。这类 Bousfield 局部化对同伦群的影响，是通过色塔中的周期现象和/或 Adams-Novikov 谱序列研究球面的稳定同伦群这一方法的核心；综述请见 [23] 。我们来考虑最简单的情形，即 E为 KU，也就是周期复 K-理论谱。下面是一项广为人知的经典计算，其历史至少可追溯到 [22]早期流传的版本：

定理 2.2。设 p 是一个奇素数， S/p 是模 p Moore 谱。那么，分次阿贝尔群之间存在一个同构[2]

$$\pi_*(L_{KU}S/p) \cong E(\alpha_1) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_p[v_1^{\pm 1}],$$

其中 $E(\alpha_1)$ 是由单个生成元 α_1 生成的外 $\mathbb{F}_p$-代数，该生成元的次数为 $2p-3$，而 v_1 的次数为 $2p-2$。

因此，若 n 同余于 0 或 -1 模 $2p-2$，则为 $\pi_n(L_{KU}S/p) \cong \mathbb{F}_p$；否则为 $\pi_n(L_{KU}S/p) \cong 0$。

[1]本文介绍的 Bousfield 局部化方法与20世纪70年代最初采用的方法接近，相关内容概述于 [22]。后来也出现了其他方法：如果我们使用满足适当集合论条件的谱模型范畴，那么在同一个底层谱范畴上存在一种“更粗”的模型结构，其余纤维化保持不变，而其“粗”弱等价恰好是 E-局部弱等价。在这种“粗”模型结构中进行纤维替换，就是 Bousfield E局部化。著作 [12] 是介绍这一优雅方法的极佳参考资料。

[2]这也是分次环的一个同构，但我们不证明这一额外结论，因为本文不涉及乘法结构。

证明略述。下面介绍一种证明这一结果的方法（由 [9], 推广开来，其中的思想被推广到更高高度的形式群），该方法使用谱序列

$$H_c^*(\mathrm{Aut}(\mathbb{G}_1), E(\mathbb{G}_1)_*(X)) \Rightarrow \pi_*(L_{K(1)}X) \tag{2.2}$$

of [9]。（这里， H_c^*表示剖分群上同调， $\mathbb{G}_1$ 是定义在高度为 1 的 $\mathbb{F}_p$ 上的形式群, $E(\mathbb{G}_1)$ 是其关联的 Morava/Lubin-Tate E-理论谱，而$K(1)$ 是素数 p 处的第一个 Morava K-理论。）经典结论（例如参见 [19]）指出，剖分自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{G}_1)$ 同构于 p-进单位群 $\hat{}\mathbb{Z}_p^\times$；并且（例如参见 [8]） $E(\mathbb{G}_1)_*$ 同构于 $\hat{}\,\mathbb{Z}_p[w^{\pm 1}]$ ，其中 w 位于次数 -2, $\hat{}$，且 $\mathrm{Aut}(\mathbb{G}_1)$ 通过分圆特征的 n 次幂作用于 $\mathbb{Z}_p\{w^n\}$ ，即 $u \cdot w^n$ 定义为乘积 $u^n w^n$。

因此，当 n 为奇数时， $E(\mathbb{G}_1)_n(S/p)$消失；当 n 为偶数但不能被 $2p-2$ 整除时，它同构于 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ，且 $\mathrm{Aut}(\mathbb{G}_1) \cong \hat{}\mathbb{Z}_p^\times$传递地作用；当 n 能被 $2p-2$ 整除时，则作用平凡。由此，利用简单的 Lyndon-Hochschild-Serre 谱序列论证可得， $H_c^*(\mathrm{Aut}(\mathbb{G}_1); E(\mathbb{G}_1)_n(S/p))$ 消失，除非 n 能被 $2p-2$ 整除，并且

$$H_c^*(\mathrm{Aut}(\mathbb{G}_1); E(\mathbb{G}_1)_n(S/p)) \cong H_c^*(1+p\hat{\mathbb{Z}}_p; \mathbb{F}_p)$$

$\hat{}\,\hat{}$若 n 可被 $2p-2$ 整除。这里， $1+p\mathbb{Z}_p$ 是 $\mathbb{Z}_p^\times$ 中由模 p 同余于 1 的单位组成的子群。

对于 $p>2$, p-进指数映射的收敛性给出一个有限生成群的同构 $p\hat{}\mathbb{Z}_p \xrightarrow{\cong} 1+p\hat{}\,\mathbb{Z}_p$，因此

$$H_c^j(1+p\hat{\mathbb{Z}}_p; \mathbb{F}_p) \cong \mathrm{colim}_m\, H_c^j(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}; \mathbb{F}_p)$$

当 $j=0$ 或 $j=1$时，同构于 $\mathbb{F}_p$ ；否则为零。

谱序列 (2.2) 中没有可出现微分的空间，因此我们得到一个分次阿贝尔群的同构

$$\pi_*(L_{K(1)}S/p) \cong E(\alpha_1) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_p[v_1^{\pm 1}].$$

其中 α_1 和 v_1 的度数如上所述。

现在，由于 S/p 已经是 $S_{(p)}$-局部的， S/p 的 KU-局部化与 S/p 的 $KU_{(p)}$-局部化一致。众所周知的分裂 $KU_{(p)} \simeq \coprod_{j=0}^{p-2} \Sigma^{2j} E(1)$（其中 $E(1)$ 是 p-局部化的高度 1 Johnson-Wilson 谱）表明 $L_{KU_{(p)}}$与 $L_{E(1)}$一致。众所周知的同伦拉回方块[3]

$$\begin{array}{ccc} L_{E(1)}X & \longrightarrow & L_{K(1)}X \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_{E(0)}X & \longrightarrow & L_{E(0)}L_{K(1)}X, \end{array}$$

在这种情况下 $X = S/p$, 于是得到一个弱等价 $L_{E(1)}X \simeq L_{K(1)}X$，因为 $E(0)$-局部化与有理化一致，因此 $L_{E(0)}S/p$ 和 $L_{E(0)}L_{K(1)}S/p$ 都是可缩的。所以

$$L_{KU}S/p \simeq L_{KU_{(p)}}S/p \simeq L_{E(1)}S/p \simeq L_{K(1)}S/p$$

[3]至少从20世纪80年代起，人们似乎就已知道这个同伦拉回方块的存在，但据我所知，这一结果并未明确归功于某位人士或某篇论文。Bauer 在书籍 [10] 中撰写的章节 [3] 对此作了精彩的现代阐述。

具有所述的同伦群。 □

因此，对于奇数 p ， $L_{KU}S/p,$ 的同伦群形式非常简单：如果 n 模 $2p-2$ 同余于 0 或 -1，则 $\pi_n(L_{KU}S/p)$ 的阶为 p；否则 $\pi_n(L_{KU}S/p)$ 是平凡群。为了像 Adams 和 Ravenel 对 $L_{KU}S$ 所做的那样（在 2 之外），按照定理 1.2 中的描述，用某个 L 函数的特殊值来刻画这些群，我们需要为每个奇素数找到一个 L 函数，其在负整数处的特殊值为有理数，且其分母遵循相同的 $(p-1)$ 周期模式。我们在第4节中实现了这一点。

3. Review of some ideas from number theory.

3.1. 狄利克雷特征及其 L 函数的回顾。本节介绍一些我们将要用到的数论中的著名思想。关于这些内容的优秀教科书包括 [2] 和 [20]。

狄利克雷 L-级数和狄利克雷特征的定义是经典的：

定义 3.1. 函数 $\chi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{C}$ 的狄利克雷 L-级数为级数

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\chi(n)}{n^s}. \tag{3.3}$$

若 s 是一个使级数 (3.3) 收敛的复数，则记 $L(s,\chi)$为该级数的收敛值[4]。

给定两个函数 $\chi_1,\chi_2\colon \mathbb{N}\to\mathbb{C}$，定义它们的狄利克雷卷积为函数 $\chi_1*\chi_2\colon \mathbb{N}\to\mathbb{C}$，其定义为

$$(\chi_1*\chi_2)(n)=\sum_{d|n}\chi_1(d)\chi_2(\frac{n}{d}),$$

因此 $L(s,\chi_1*\chi_2)=L(s,\chi_1)L(s,\chi_2).$（证明见 [2] 的定理 11.5。）

定义 3.2. 设 f 为正整数。模数为 f 的狄利克雷特征是满足以下公理的函数 $\chi\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{C}$：

- $\chi(1)=1$,
- $\chi(n+f)=\chi(n)$ 对所有 $n\in\mathbb{Z}$ 均成立；
- $\chi(mn)=\chi(m)\chi(n)$ 对所有 m 均成立；若 $\gcd(n,f)\neq 1$，则
- $\chi(n)=0$。

狄利克雷特征是模数为 f 的狄利克雷特征，其中 f 满足某些条件。

模数为 f 的狄利克雷特征 χ_0，若对所有与 f 互素的 n 都有 $\chi_0(n)=1$，则称为模数为 f 的主狄利克雷特征。

狄利克雷特征 χ 的狄利克雷 L函数是狄利克雷 L级数$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\chi(n)}{n^s}$，当实部为 >1时，它收敛到一个复数 $L(s,\ \chi)$ 对所有复数s 均成立。

---

[4]需要说明的是：对于许多数论相关函数 χ，函数 $L(s,\chi)$ 在复平面某个区域上是亚纯的，并且可以唯一解析延拓为在复平面某个 *larger* 区域上亚纯的函数。这个解析延拓仍记作 $L(s,\chi)$，对其定义域内所有 s 都成立；尽管只有当级数 $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\chi(n)}{n^s}$ 对所有满足相应条件的复数 s 收敛时，$L(s,\chi)$ 才与该级数相等。例如，正如我们将在下文解释的，当 χ 是狄利克雷特征时，级数 $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\chi(n)}{n^s}$ 对所有满足 $\Re(s)>1$ 的复数 s 收敛，但它可以解析延拓为整个 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数；我们将该亚纯函数在 $s=-1$ 处的值记作 $L(-1,\chi)$，即使当 $s=-1$ 时级数 $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\chi(n)}{n^s}$ 不收敛。

例如，如果 χ_0 是模数为 1 的（唯一）特征，也就是说，对所有n都有 $\chi_0(n)=1$，那么 $L(s$就是$\chi_0)=\zeta(s)$，即黎曼ζ函数。

模数为 f 的狄利克雷特征在逐点乘法下构成一个群 $\mathbf{Dir}(f)$，该群的阶为 $\phi(f)$；若 f 是奇素数的幂，则该群是循环群。模数为 f 的狄利克雷特征在狄利克雷卷积下不构成群（见定义 3.1），因为两个狄利克雷特征的狄利克雷卷积不一定是狄利克雷特征。

定义 3.3. 设 χ 是模数为 f的狄利克雷特征。若对于所有与 f 互素且满足 $n\equiv 1$ 模 d的 n，都有 $\chi(n)=1$，则称 f 的因子 d 是 χ 的一个诱导模数。

模数为 f 的狄利克雷特征 χ称为本原的，如果 χ的最小诱导模数就是 f 本身。

定义 3.4 最初发表于 [16]。

定义 3.4.（广义伯努利数。）设 $\chi:\ \mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ 是模数为 f的狄利克雷特征。令数列

$$B_1^\chi, B_2^\chi, B_3^\chi, \cdots \in \mathbb{Q}(\zeta_{\phi(f)})\subseteq\mathbb{C}$$

定义为 $\sum_{r=1}^f \chi(r)\frac{te^{rt}}{e^{ft}-1}$的麦克劳林系数，使得

$$\sum_{r=1}^{f}\chi(r)\frac{te^{rt}}{e^{ft}-1}=\sum_{n\geqslant 0}B_n^\chi\frac{t^n}{n!}.$$

$L(s、\ \chi)$ 的欧拉乘积是经典结果：

$$L(s,\chi)=\prod_{\text{primes }p}\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}} \tag{3.4}$$

对于所有满足 $\Re(s)>1$ 的复数 s。

例如，参见 [20] 的定理 VII.2.9，以了解定理 3.5：

定理 3.5。狄利克雷 L 级数 $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\chi(n)}{n^s}$ 可唯一解析延拓为复平面上的亚纯函数 $L(s、\ \chi)$，并满足函数方程，使得

$$L(1-n,\chi)=\frac{-B_n^\chi}{n}$$

对于正整数 n。

具体而言，若 χ 是模数为 f 的本原狄利克雷特征，则

$$L(1-s,\chi)=\frac{f^{s-1}\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\left(e^{-\pi is/2}+\chi(-1)e^{\pi is/2}\right)G(1,\chi)L(s,\overline{\chi}), \tag{3.5}$$

其中 Γ 是经典伽马函数（因此对于正整数 n，有 $\Gamma(n)=(n-1)!$），$\overline{\chi}$ 是 χ 的复共轭狄利克雷特征（因此 $\overline{\chi}(n)=\overline{\chi(n)}$），而 $G(1,\ \chi)$是高斯和 $\sum_{r=1}^f\chi(r)e^{2\pi ir/f}$。

例如，参见 [2] 中的定理 12.11，得到方程 (3.5)。此外，经典结果表明，若 χ 是非主狄利克雷特征，则 $L(s,\chi)$是复平面上的整函数；例如参见 [2]中的定理 12.5。

观察 3.6. 若 χ 是一个满足 $\chi(-1)=1$的非主狄利克雷特征，则容易证明函数 $F(t)=\sum_{r=1}^{f}\chi(r)\frac{te^{rt}}{e^{ft}-1}$满足$F(t)=F(-t)$，从而对于所有奇正整数 n，有 $B_n^\chi=0$；因此，对于所有奇正整数 n，有$L(1-n,\chi)=0$。

由于模数为 f 的狄利克雷特征 χ 取值于 $\phi(f)$ 次单位根中，因此数 B_n^χ 和 $L(1-n$、 $\chi)$ 都属于数域 $\mathbb{Q}(\zeta_{\phi(f)})$。下面是 Carlitz 关于这些数距离成为该数域整数环中的元素有多远的一个定理（完整证明见 [5]，较简短的版本见 [6]）：

定理 3.7。设 χ 是模数为 f 的本原狄利克雷特征。

- 若 f 不是素数幂，则对所有 n， $\frac{B_n^\chi}{n}$ 都是代数整数。• 若对某个素数 $p>2$ 有 $f=p$，则令 g 为对所有 r 模 p^r 的原根，也就是说， $g\in\mathbb{N}$ 是 p- 进单位群 $\mathbb{Z}_p^\times$ 的拓扑生成元。除非 $(p$， $\frac{B_n^\chi}{n}$是代数整数；在此情形下，$pB_n^\chi\equiv p-1$ 模 $(p$， $1-\chi(g))^{n+1}$。• 若对某个素数 $p>2$ 及某个整数 $\mu>1$有 $f=p^\mu$，则令 g 为对所有 r 模 p^r 的原根，也就是说， $g\in\mathbb{N}$ 是 p-进单位群 ˆ $\mathbb{Z}_p^\times$ 的拓扑生成元。除非 $(p$， $\frac{B_n^\chi}{n}$ 是代数整数；在此情形下， $(1-\chi(1+p))\frac{B_n^\chi}{n}\equiv 1$ 模$(p$， $1-\chi(g)g^n)$。• 当 f 是素数 p 的幂时，对所有正整数 n， $\frac{B_n^\chi}{n}\in \mathsf{O}_{\mathbb{Q}(\zeta_{\phi(f)})}[1/p]$。也就是说，对某个（充分大的）正整数 a， $\frac{B_n^\chi}{n}p^a$ 是代数整数。

3.2. Dedekind ζ 函数概述。这部分内容是经典的；例如参见 [27] 的第 3 章。

定义 3.8. 设 $F/\mathbb{Q}$ 是一个整数环为 $\mathcal{O}_F$ 的有限域扩张。那么 F 的 Dedekind ζ 函数定义为级数

$$\sum_{I\subseteq\mathcal{O}_F}\frac{1}{(\#\mathcal{O}_F/I)^s},$$

其中求和遍及 $\mathcal{O}_F$ 的所有非零理想 I，而 $\#\mathcal{O}_F/I$ 是剩余环 $\mathcal{O}_F/I$ 中元素的个数。该级数在实部 $\Re(s)>1$ 的复数 s 上收敛，并唯一解析延拓为复平面上的亚纯函数 $\zeta_F(s)$。

函数 ζ_F 有欧拉乘积

$$\zeta_F(s)=\prod_{\mathfrak{p}\subseteq\mathcal{O}_F}\frac{1}{1-\#\left(\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}\right)^{-s}}$$

当 $\Re(s)>1$时，其中乘积遍及 $\mathcal{O}_F$ 的所有非零素理想 $\mathfrak{p}$。

定义 3.9. 设 f 为正整数， A 为模数为 f 的狄利克雷特征群 $\mathsf{Dir}(f)$ 的子群。令 $\ker A$ 表示由满足以下条件的剩余类 x 组成的$(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times$ 的子群：对于所有 $\chi\in A$, $\chi(x)=1$。最后，令 G 表示在通常的同构 $(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times\xrightarrow{\cong}\mathsf{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_f)/\mathbb{Q})$ 下与 $\ker A\subseteq(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times$ 对应的 $\mathsf{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_f)/\mathbb{Q})$ 的子群。与 A 关联的数域定义为不变域 $\mathbb{Q}(\zeta_f)^G$。

定理 3.10 综合了 [27] 中的推论 3.6 和定理 4.3。

定理 3.10. 设 f 为正整数， A 为模数为 f 的狄利克雷特征群 $\mathbf{Dir}(f)$ 的子群， F 为与A关联的数域。那么，素数 $p \in \mathbb{Z}$ 在 O_F 中非分歧，当且仅当对于所有 $\chi \in A$， $\chi(p) \neq 0$ 。此外：

$$\zeta_F(s) = \prod_{\chi \in A} L(s, \chi). \tag{3.6}$$

定理 3.10 需要稍加留意； [27] 中表述为定理 4.3 的版本有一点未作解释（虽小，却对正确得到分歧素数处的欧拉因子至关重要）。关键在于，乘积应取遍群 A 中狄利克雷特征的本原代表元。就本文而言，这意味着：如果 $p > 2$ ，并且我们令 A 为狄利克雷特征群中 p-扭元组成的群 $\mathbf{Dir}(p^2)[p]$ ，其模数为 p^2，那么群 $\mathbf{Dir}(p^2)[p]$ 中每个非单位元都是本原狄利克雷特征；而 $\mathbf{Dir}(p^2)[p]$ 中的单位元则是模数为 p^2 的主狄利克雷特征，它不是本原的。若对 $\mathbf{Dir}(p^2)[p]$ 中单位元所对应的 L 函数因子，采用该单位元的本原代表元（因此模数为 1）的狄利克雷L函数，即黎曼ζ函数，则公式 (3.6) 有效。反之，若采用模数为 p^2 的（非本原）主狄利克雷特征的狄利克雷 L级数，那么公式 (3.6) 在 p 处就会多出一个欧拉因子。

4. The L-function of the mod p Moore spectrum.

定义 4.1. 设 p 是一个奇素数。由于模数为 p^2 的狄利克雷特征群 $\mathbf{Dir}(p^2)$ 是一个阶为 $\phi(p^2) = p(p-1)$的循环群，因此 $\mathbf{Dir}(p^2)$中存在唯一一个指数为 $p-1$ 的子群。我们将这个子群记作 $\mathbf{Dir}(p^2)[p]$ 。由于 $\mathbf{Dir}(p^2)[p]$ 由模数为 p^2 、满足对所有 n都有 $\chi(n)$是一个 p 次单位根的狄利克雷特征 χ 组成，伽罗瓦群 $G_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}} \cong C_{p-1}$ 作用于 $\mathbf{Dir}(p^2)[p]$。

定义 4.2. 设 χ 是 $\mathbf{Dir}(p^2)[p]$的一个生成元，并令 $L(s、 S/p)$ 表示乘积

$$L(s, S/p) = \prod_{\sigma \in G_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}} L(s, \chi^\sigma).$$

由于狄利克雷特征集合 $\{\chi^\sigma\}_{\sigma \in G_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}}$ 恰好是 $\mathbf{Dir}(p^2)[p]$中的非平凡元素（即非主特征）的集合，因此函数 $L(s、 S/p)$ 与 χ的选择无关。

由于每个 $L(s, \chi^\sigma)$ 对所有实部为 $s > 1$ 的复数 s 都收敛，因此 $L(s, S/p)$ 也如此。由于每个 $L(s, \chi^\sigma)$ 都可以解析延拓为复平面上的亚纯函数，因此 $L(s, S/p)$ 也如此。

观察 4.3。下面是关于 $L(s, S/p)$ 的一些简单观察：

- 由于每个 χ^σ 都是非主的， $L(s, \chi^\sigma)$ 是整函数，因此乘积 $L(s, S/p)$是整函数。• 函数 $L(s, S/p)$ 可以写成一个单独的 L级数，如下所示：令$\mathfrak{o}(p)$ 表示群 $\mathbf{Dir}(p^2)$ 中阶恰为 p 的元素集合，其中 $\mathbf{Dir}(p^2)$ 是模数为 p^2的狄利克雷特征群；也就是说， $\mathfrak{o}(p)$ 是非零元素的集合

$\mathbf{Dir}(p^2)[p]$。令 $*_{\chi\in\mathfrak{o}(p)}\chi$ 表示 $\mathfrak{o}(p)$中各元素的狄利克雷卷积（见定义 3.1）。那么

$$L(s,S/p)=L\left(s,\underset{\chi\in\mathfrak{o}(p)}{*}\chi\right)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{\left(*_{\chi\in\mathfrak{o}(p)}\chi\right)(n)}{n^s}.$$

- 由观察 3.6 立即可得，对于所有奇正整数 n， $L(1-n,S/p)=0$。

- 我们有定义 4.1 中所述的 $G_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}$ 在 $\mathbf{Dir}(p^2)[p]$ 上的作用，并且 $G_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}$ 显然作用于 $\mathbb{Q}(\zeta_p)$，$\mathbf{Dir}(p^2)[p]$ 的元素取值于其中。利用定义 3.4，对于 n 的任意固定取值，都可以通过求解泰勒系数来计算 B_n^{χ}；这一过程只涉及有限和，特别是只需有限次应用 χ。因此，由于 χ 是域自同构，对于任意 $\sigma\in G_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}},$，都有 $B_n^{(\chi^\sigma)}=(B_n^{\chi})^\sigma$，而无需了解伽罗瓦作用的连续性。

- 特别是，由于 $\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}$ 是伽罗瓦的，

$$\begin{aligned}L(1-n,S/p)&=\prod_{\sigma\in G_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}}L(1-n,\chi^\sigma)\\&=\prod_{\sigma\in G_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}}L(1-n,\chi)^\sigma\\&=N_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}(L(1-n,\chi)),\end{aligned}$$

扩张 $\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q},$ 的域范数在 $L(1-n,\chi)$ 处的取值。因此 $L(1-n,S/p)\in\mathbb{Q}$。

在命题 4.4 中，我们为 $L(s,S/p)$ 给出了一个欧拉乘积公式。这个结果在数论方面完全没有新意：所用的方法是经典且广为人知的。所得公式涉及除以 $\zeta(s)$, 因此， $\zeta(s)$ 特殊值中的分子（以间接方式）会对 $L(s,S/p)$ 特殊值中的分母有所贡献。在定理 4.8 和推论 4.9 中，我们证明了 $L(s,S/p)$ 的特殊值与模 p Moore 谱 S/p 的 KU-局部稳定同伦群的阶一致；因此，伯努利数的分子（再次以间接方式）会影响 KU-局部稳定同伦群的阶。

命题 4.4. 设 $p>2$ 是一个素数，并设 G_p 为满足 ℓ 是模 p^2 的原根（即， ℓ 生成群 $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^\times$）的素数集合 ℓ。令N_p 为不属于 G_p的素数集合 $\ell\neq p$。那么，对于所有实部为 >1的复数 s，有如下等式

$$L(s,S/p)=\frac{1-p^{-s}}{\zeta(s)}\left(\prod_{\ell\in N_p}\frac{1}{1-\ell^{-s}}\right)^p\left(\prod_{\ell\in G_p}\frac{1}{1-\ell^{-sp}}\right).\tag{4.7}$$

证明。将 L 函数 $L(s、\ \chi^\sigma)$ 的欧拉乘积 (3.4) 对所有 $\sigma\in G_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}},$ 相乘，再乘以 $\zeta(s)=L(s、\ \chi_0)$ 的欧拉乘积，可得三类因子：

- 对于素数 $\ell \in G_p$，ℓ 处的 L 因子为

$$\zeta_\ell(s)L_\ell(s,S/p) = \frac{1}{1-\ell^{-s}}\left(\prod_{\sigma\in G_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}}(1-\chi^\sigma(\ell)\ell^{-s})\right)^{-1}.$$

  由于 $\ell \in G_p$，素数 ℓ 是模 p^2的原根，因此 $\chi(\ell)$ 是本原的 p次单位根。因此

$$\frac{\ell^{ps}}{\zeta_\ell(s)L_\ell(s,S/p)} = \prod_{j=1}^{p}(\ell^s-\zeta_p^j) = (1-\ell^s)\Phi_p(\ell^s) = 1-\ell^{ps},$$

  其中 j 是本原的 p次单位根，而 Φ_p 是第 p分圆多项式。解出 $\zeta_\ell(s)L_\ell(s, S/p)$ 得到 $\frac{1}{1-\ell^{-ps}}$。
- 对于 ℓ处的 L-因子，当素数 $\ell \in N_p$时，我们首先注意到，对于适当选取的模数为 p^2的本原特征 χ_{p^2}，有 $\chi = \chi_{p^2}^{p-1}$。因此$\chi(n) = \chi_{p^2}(n)^{p-1}$ 是一个 p次单位根，并且当且仅当n 是模 p^2的原根时，它才是本原的。因此，若 $\ell \in N_p$，则 $\chi(\ell)$ 是一个非本原的 p 次单位根，即 $\chi(\ell) = 1$。这使我们可以简化一个欧拉因子：

$$\begin{aligned}\zeta_\ell(s)L_\ell(s,S/p) &= (1-\ell^{-s})^{-1}\left(\prod_{\sigma\in G_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}}(1-\chi^\sigma(\ell)\ell^{-s})\right)^{-1}\\ &= \left(1-\ell^{-s}\right)^{-p}.\end{aligned}$$

- 第三类 L-因子就是 $\ell = p$ L-因子。由于 $\chi(p) = 0$，$\zeta(s)L(s$ 中的 p-局部 L-因子就是 $\zeta(s)$ 中的 p-局部 L-因子，即 $(1-p^{-s})^{-1}$。

对所有素数 ℓ 求乘积，便得到公式 (4.7)。 □

引理 4.5。与群 $\mathrm{Dir}(p^2)[p]$ 相关联的数域，是 $\mathbb{Q}(\zeta_{p^2})/\mathbb{Q}$ 中使 p 野分歧的唯一最小子扩张。（$\mathrm{Dir}(p^2)[p]$ 的定义见定义 4.1；与狄利克雷特征群相关联的数域的定义见定义 3.9。）

证明。简单练习。 □

命题 4.6。设 p 是奇素数，且 $F/\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Q}(\zeta_{p^2})/\mathbb{Q}$ 中使 p 野分歧的最小子扩张。那么：

$$\frac{\zeta_F(s)}{\zeta(s)} = L(s,S/p). \tag{4.8}$$

证明。在群 $\mathrm{Dir}(p^2)[p]$ 的 p 个元素中，有 $p-1$ 个本原狄利克雷特征；也就是说，有 $p-1$ 个模数为 p^2 的非主 $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 值狄利克雷特征。在群 $\mathrm{Dir}(p^2)[p]$ 中，我们还有一个非本原特征，即模数为 p^2 的主狄利克雷特征，它是群 $\mathrm{Dir}(p^2)[p]$ 的单位元。引理 4.5 和定理 3.10 合起来使我们可以将 $\zeta_F(s)$ 表示为对 $\mathrm{Dir}(p^2)[p]$ 中元素的本原代表元所作的乘积。因此，令 $\mathrm{Dir}(p^2)[p]'$ 表示 $\mathrm{Dir}(p^2)[p]$ 中元素的本原代表元集合，并令 χ_p 表示群的任意一个生成元

$\mathrm{Dir}(p^2)[p]$。伽罗瓦群 $G_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}$ 在模数为 p^2 的 $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 值本原狄利克雷特征上自由作用，因此

$$\mathrm{Dir}(p^2)[p]' = \{\chi_0\} \cup \{\chi_p^\sigma : \sigma \in G_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}\},$$

其中 χ_0 是主特征且模数为 1。现在有以下等式：

$$\frac{\zeta_F(s)}{\zeta(s)} = \frac{\prod_{\chi \in \mathrm{Dir}(p^2)[p]'} L(s,\chi)}{\zeta(s)} \tag{4.9}$$

$$= \frac{L(s,\chi_0) \cdot \prod_{\sigma \in G_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}} L(s,\chi_p^\sigma)}{\zeta(s)}$$

$$= \frac{L(s,\chi_0) \cdot L(s,S/p)}{\zeta(s)} \tag{4.10}$$

$$= L(s,S/p), \tag{4.11}$$

其中，(4.9) 来自引理 4.5 和定理 3.10，而 (4.10) 来自定义 4.2。当然，(4.11) 直接源于这一观察：黎曼ζ函数就是模数为 1 的主狄利克雷特征对应的狄利克雷 L函数。□

引理 4.7。设 $p > 2$ 是素数， $g \in \mathbb{N}$ 是模 p^2 的原根， n是可被 $p-1$ 整除的正整数， ζ_p 表示一个 p 次本原单位根，且 $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta_p)}$ 表示 $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 中的整数环。那么， $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta_p)}$ 中的理想 $(1-\zeta_p g^n)$ 包含于理想 $(1-\zeta_p)$ 中。

证明。我们将使用整数环 $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta_p)}$ 中众所周知的分解 $(p) = (1-\zeta_p)^{p-1}$ （例如参见 [20] 的引理 10.1），以及它的推论： $(1-\zeta_p)$ 是 $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta_p)}$ 中的一个极大理想，其剩余域为 $\mathbb{F}_p$。显然， $1-\zeta_p g^n$ 与 $1-g^n$ 模 $1-\zeta_p$ 同余。由于 g 模 p 非零，因此 $g^{p-1} \equiv 1$ 属于剩余域 $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta_p)}/(1-\zeta_p) \cong \mathbb{F}_p$。所以 $g^n \equiv 1$ 模 $(1-\zeta_p)$，故 $1-\zeta_p g^n \equiv 0$ 模 $1-\zeta_p$。所以 $(1-\zeta_p g^n) \subseteq (1-\zeta_p)$。□

在定理 4.8 中，我们采用如下约定：给定一个有理数 x，我们用 $\mathrm{denom}(x)$ 表示 x 写成既约形式时的分母；若 $x = 0$，则令 $\mathrm{denom}(x)$ 为 1。

定理 4.8。设 $p > 2$ 是一个素数。那么，对每个正整数 n，以下四个数相等：

- $\pi_{2n}(L_{KU}S/p)$, 的 $(2n)$ 阶稳定同伦群的阶，其中该群属于 KU-局部 mod p Moore 谱；
- $\pi_{2n-1}(L_{KU}S/p)$, 的 $(2n-1)$ 阶稳定同伦群的阶，其中该群属于 KU-局部 mod p Moore 谱；
- $\mathrm{denom}(L(1-n)$；以及 $S/p))$, $\mathrm{denom}\left(\frac{\zeta_F(1-n)}{\zeta(1-n)}\right)$，其中 $F/\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Q}(\zeta_{p^2})/\mathbb{Q}$ 的（唯一）最小子扩张，在该扩张中 p 野分歧。

证明。根据定理 2.2， $\pi_{2n}(L_{KU}S/p) \cong \pi_{2n-1}(L_{KU}S/p) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 若 $(p-1) \mid n$，且当 $(p-1) \nmid n$ 时， $\pi_{2n}(L_{KU}S/p)$ 和 $\pi_{2n-1}(L_{KU}S/p)$ 是平凡的，因此只需考虑两种情况：

若 $p-1 \mid n$：定义 4.2 的狄利克雷特征 χ 具有如下性质：对于任意模 p^2 的原根 g，$\chi(g)$ 是一个本原的 p 次单位根。因此，由引理 4.7， $(1-\chi(g)g^n) \subseteq (1-\zeta_p)$，所以 $(p,\ 1-\chi(g)g^n) \subseteq (1-\zeta_p)$，因为

$(1-\zeta_p)^{p-1} = (p)$。特别地，$(p,\ 1-\chi(g)g^n)$ 包含在 $\mathcal{O}^{\mathbb{Q}(\zeta_p)}$ 的一个极大理想中，因此 $(p,\ 1-\chi(g)g^n) \neq (1)$。（对于这种理想运算，选取哪个本原的 p 次单位根 ζ_p 并不重要，也不必关心它是否恰好等于 $\chi(g)$：在 p 上方，$\mathcal{O}^{\mathbb{Q}(\zeta_p)}$ 有唯一的极大理想，对于我们选取的任意本原的 p 次单位根 ζ，该理想都具有 $(1-\zeta)$ 的形式。因此，对于任意本原的 p 次单位根 ζ，$(1-\zeta_p) = (1-\zeta)$。）

现在我们调用 Carlitz 的结果，即定理 3.7：由于 $(p, 1-\chi(g)g^n) \neq (1)$，我们有 $(1-\chi(1+p))\frac{B_n^\chi}{n}$ 与 1 模 $(p, 1-\chi(g)g^n)$ 同余。由于 $(p, 1-\chi(g)g^n) \subseteq (1-\zeta_p)$，因此现在有

$$\begin{aligned}(1-\chi(1+p))^{p-1}L(1-n, S/p) &= (1-\chi(1+p))^{p-1}\prod_{\sigma\in G_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}}\frac{-B_n^{\chi^\sigma}}{n} \\ &\equiv 1 \mod (1-\zeta_p), \end{aligned} \tag{4.12}$$

并且，对方程 (4.12) 两边取 p-进赋值，其中$\mathcal{O}^{\mathbb{Q}(\zeta_p)}$，我们得到

$$(p-1)\nu_p\left(1-\chi(1+p)\right) + \nu_p(L(1-n, S/p)) = 0. \tag{4.13}$$

现在记住，χ 是 $\mathrm{Dir}(p^2)[p]$ 的生成元，特别是，χ将 $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ 中的本原 p 次单位根映射为本原 p 次单位根。通过一个非常简单的初等计算，$1+p$ 是 $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ 中的本原 p 次单位根；而且，由于对 $\mathcal{O}^{\mathbb{Q}(\zeta_p)}$ 中任意本原 p 次单位根 ζ，我们都有理想等式 $(1-\zeta) = (1-\zeta_p)$，现在得到 $\nu_p(1-\chi(1+p)) = \nu_p(1-\zeta_p) = \frac{1}{p-1}$。因此，方程 (4.13) 表明 $\nu_p(L(1-n, S/p)) = -1$，也就是说，有理数 $L(1-n$ 的分母 $S/p)$ 能被 p 整除，但不能被 p^2 整除。

Carlitz 的结果——定理 3.7——还意味着，对于某个充分大的整数 a，$\frac{p^a B_n^\chi}{n} \in \mathcal{O}^{\mathbb{Q}(\zeta_p)}$。因此，乘积 $L(1-n, S/p) = \prod_{\sigma\in G_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}}\frac{-B_n^\chi}{n}$ 的分母除了素数 p 外，不被其他任何素数整除。

因此，当 $p-1$ 整除 n 时，$L(1-n, S/p)$ 的分母恰为 p。

若 $p-1 \nmid n$：设 $g \in \mathbb{N}$ 是模 p^2 的一个原根。与证明前一部分时相同的理由，我们有同余式$1-\chi(g)g^n \equiv 1-g^n$ 模 $1-\zeta_p$。

现在的区别在于，由于 $p-1$ 不整除 n，$g^n \not\equiv 1$ 模 p。因此 $1-g^n \neq 0$ 模 $(1-\zeta_p) \subseteq (p)$，所以 $(p, 1-\chi(g)g^n) = (1) \subseteq \mathcal{O}^{\mathbb{Q}(\zeta_p)}$。现在定理 3.7 意味着 $\frac{B_n^\chi}{n}$ 是一个代数整数。因此，对所有伽罗瓦共轭取乘积，我们有

$$L(1-n, S/p) = \prod_{\sigma\in G_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}}\frac{-B_n^{\chi^\sigma}}{n} \in \mathbb{Z},$$

如所愿。

最后，等式 $\mathrm{denom}(L(1-n, S/p)) = \mathrm{denom}\left(\frac{\zeta_F(1-n)}{\zeta(1-n)}\right)$ 可直接由命题4.6得出。□

[11] 中的定理3与上文重述为定理 3.7 的 Carlitz 定理非常相似。因此，在定理 4.8 的证明中，也可以用 Fresnel 的论文中的定理3第2部分来代替 Carlitz 定理。

推论 4.9 应被视为经典定理的遥远推论，该定理指出，对于正偶整数 n， $\frac{\zeta(n)}{\pi^n}$ 是有理数。

推论 4.9。设 $p>2$ 为素数， n 为正偶整数。那么 $L(s,\ S/p)$ 满足函数方程

$$L(n,S/p)=\left(\frac{2^{n-1}\pi^n}{p^{2n-1}(n-1)!}\right)^{p-1}L(1-n,S/p),$$

相差一个符号。因此，数 $L(n,\ S/p)$ 等于 $\left(\frac{2^{n-1}\pi^n}{p^{2n-1}(n-1)!}\right)^{p-1}$ 乘以一个有理数；该有理数写成既约形式时，其分母等于 $\pi_{2n}(L_{KU}S/p)$ 以及 $\pi_{2n-1}(L_{KU}S/p)$，的第 $(2n)$ 个和第 $(2n-1)$ 个 KU-局部模 p Moore 谱的稳定同伦群的阶。

证明。令 χ如定义 4.2 所述，即 χ 是模数为 p^2、取值于 $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 的任一本原狄利克雷特征。函数 $L(1-n,\ \chi)$ 在 n为奇正整数时为零（由观察 3.6）；因此，以下设 n 为正偶整数。对函数方程 (3.5) 两边取复范数，得到:

- $|G(1,\ \chi)|=p$（因为对于模数为 f 的任一本原狄利克雷特征 χ，都有 $|G(1,\ \chi)|=\sqrt{f}$; 例如参见 [2] 的定理8.15），• 由于 $\chi(-1)=1$，且 n 是正偶整数，我们有

$$\left|e^{-\pi in/2}+\chi(-1)e^{\pi in/2}\right|=2.$$

因此，函数方程 (3.5) 给出

$$|L(1-n,\chi)|=\frac{p^{2n-1}(n-1)!}{2^{n-1}\pi^n}\,|L(s,\overline{\chi})| \tag{4.14}$$

对所有正偶整数 n 均成立。

在由模数为 p^2 、取值于$\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 的狄利克雷特征构成的群 $\mathbf{Dir}(p^2)[p]$ 中（见定义 4.1），复共轭在非主特征上自由作用；因此，将等式 (4.14) 对所有非主$\chi\in\mathbf{Dir}(p^2)[p]$ 相乘，得到

$$\left(\frac{2^{n-1}}{p^{2n-1}(n-1)!}\right)^{p-1}|L(1-n,S/p)|=\frac{1}{\pi^{n(p-1)}}\,|L(n,S/p)| \tag{4.15}$$

对所有正偶整数 n。

现在由 $L(s,S/p)$ 的欧拉乘积（见命题 4.4）可知，$L(n,S/p)$ 是一个实数；又由 $L(s,S/p)$ 的定义可知，它是狄利克雷 L-函数的伽罗瓦共轭之积，因此 $L(1-n,S/p)$, 对正整数 n 而言，是广义伯努利数的伽罗瓦共轭之积，故为有理数。于是方程（4.15）现在写作

$$L(n,S/p)=\pm\left(\frac{2^{n-1}\pi^n}{p^{2n-1}(n-1)!}\right)^{p-1}L(1-n,S/p)$$

对所有正偶整数 n 都成立。现在，定理 4.8 中给出的 $L(1-n,S/p)$ 的分母描述蕴含了所声称的结果。□

5. Consequences for the Leopoldt conjecture.

对于全实数域 F，经典类数公式[5] 如下：

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_F(s) = \frac{2^{[F:\mathbb{Q}]}\operatorname{reg}_F h_F}{w_F\sqrt{\Delta_F}}, \tag{5.16}$$

其中 reg_F 是 F的经典调节子，h_F 是 F的类数，w_F 是 F中的单位根个数，而 Δ_F 是 F 的判别式。在 [7], 中，Colmez 证明了 (5.16) 关于 F的 p-进戴德金 ζ函数的一个类似结果：

定理 5.1。（Colmez。）

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_{F,p}(s) = \frac{2^{[F:\mathbb{Q}]}\operatorname{reg}_{F,p} h_F \prod_{\mathfrak{p}|p}\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)}{w_F\sqrt{\Delta_F}}, \tag{5.17}$$

其中 h_F、w_F和 Δ_F与 (5.16) 中相同，$N(\mathfrak{p})$ 是素理想 $\mathfrak{p}$的范数，而 $\mathrm{reg}_{F,\ p}$ 是 F的 Leopoldt p-进调节子，其定义如下（略作非正式说明）：

定义 5.2。固定一个素数 p以及一个[6] 嵌入 $\mathbb{C}_p \hookrightarrow \mathbb{C}$。令 σ_1、.....、σ_r为 F 到 $\mathbb{C}_p$ 中的嵌入（复嵌入只列出一次，不列出其共轭嵌入）。令 e_1、.....、e_s 为 O_F 的一个 $\mathbb{Z}$-线性基；由 Dirichlet 单位定理可知 $s = r-1$。F的 p-进调节子为

$$\operatorname{reg}_{F,p} = \det(\delta_i \log_p(\sigma_i(e_j)))_{1\leqslant i,j\leqslant s}, \tag{5.18}$$

其中，当 σ_i 为实数时，δ_i 为 1；当 σ_j 为复数时，δ_i 为 2；而 $\log_p$ 表示 p-进对数（取 $\ln(1+x)$ 的麦克劳林级数，但将其系数视为 p-进有理数）。

由定义 5.2 可知，我们自然得到一个 $s\times(s+1)$ 矩阵，其元素是数 $\sigma_i(e_j)$ 的 p- 进对数；在 (5.18) 中，我们只需忽略其中一列，便得到一个方阵，并将其行列式定义为 p-进调节子。省略不同的列会改变行列式的符号，因此 $\mathrm{reg}_{F,\ p}$ 仅在相差一个符号的意义下确定。进一步说明见 [17] 。

Leopoldt 猜想认为，对于所有素数 p 和所有数域 F，$\mathrm{reg}_{F,\ p}$ 均非零。

Siegel [25] 和 Klingen [14] 证明了，当 n 为正整数时，$\zeta_F(1-n)$ 是代数有理数，因此我们可以将数列

$$\zeta_F(0), \zeta_F(-1), \zeta_F(-2), \dots \tag{5.19}$$

作为 p-进数列，我们可以问：是否存在某个定义在 p-进整数上的连续函数，使其在负整数处的取值还原数列 (5.19)? 这行不通，但原因只有两个，而且每个原因都可以通过适当修改问题来解决：可行的做法是，在 $\zeta_F(s)$ 中消去与素数（整数环 O_F 的素数）对应的欧拉因子

[5]这里给出的形式比教科书中常见的类数公式表述略为简单，因为我们只针对全实的 F给出公式。例如，对于全实的F，判别式 Δ_F 总是正的，因此在对 Δ_F 开平方之前无需取其绝对值。[6]使用这种嵌入只是为了让我们能够将给定的嵌入 $F\hookrightarrow\mathbb{C}_p$称为“实”或“复”。

在 p 上，然后在 $s = 1-(p-1), 1-2(p-1), 1-3(p-1), 1-4(p-1), \ldots$ 处计算所得结果，而不是在 $s = 0, -1, -2, \ldots$ 处计算。

由 [24], 可得结论：存在唯一一个 p进连续函数 $\zeta_{F,p}(s)$，使得对于 $n > 1$ 整数,

$$\zeta_{F,p}(1-n(p-1)) = \zeta_F(1-n(p-1)) \prod_{\mathfrak{p}|p} \left(1 - N(\mathfrak{p})^{n(p-1)-1}\right) \tag{5.20}$$

若 $p > 2$, 且

$$\zeta_{F,p}(1-2n) = \zeta_F(1-2n) \prod_{\mathfrak{p}|p} \left(1 - N(\mathfrak{p})^{2n-1}\right) \tag{5.21}$$

若 $p = 2$; 这一结果推广了 [15], 的结果，后者假设 F 为阿贝尔。特别地, $\nu_p\left(\zeta_F(1-n(p-1))\right) = \nu_p\left(\zeta_{F,p}(1-n(p-1))\right)$ 以及 $\nu_2\left(\zeta_F(1-2n)\right) = \nu_2\left(\zeta_{F,2}(1-2n)\right)$ 对于正整数 n成立。

由于 $\zeta_{F,p}$ 是 p进连续的，且由于整数数列

$$\left(1-(p-1), 1-p(p-1), 1-p^2(p-1), 1-p^3(p-1), \ldots\right)$$

按 p-进收敛到 1，利用 (5.17) 可得等式:

$$\frac{2^{[F:\mathbb{Q}]} \operatorname{reg}_{F,p} h_F \prod_{\mathfrak{p}|p} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)}{w_F \sqrt{\Delta_F}} = \lim_{j\to\infty} (-p^j(p-1)) \zeta_{F,p}\left(1-p^j(p-1)\right). \tag{5.22}$$

现在的关键是，将 (5.22) 中 F 取非平凡值时的情形与 F 取平凡值（即 $F = \mathbb{Q}$）时的情形进行比较，并将所得比值与某个同伦群的阶进行比较，使用定理 4.8。现在假设 F 是 $\mathbb{Q}(\zeta_{p^2})/\mathbb{Q}$ 中使 p 野分歧的最小子扩张。那么有:

$$\begin{aligned} p &= \#\left(\pi_{2(p-1)p^n-1}(L_{KU}S/p)\right) \\ &= \operatorname{denom}\left(\frac{\zeta_F\left(1-p^n(p-1)\right)}{\zeta\left(1-p^n(p-1)\right)}\right), \\ &= \operatorname{denom}\left(\frac{\zeta_{F,p}\left(1-p^n(p-1)\right)}{\zeta_{\mathbb{Q},p}\left(1-p^n(p-1)\right)}\right), \end{aligned}$$

因此，${}_p(s)$ 在 $s = 1$ 处的 ζ_K 的消失阶等于 ${}_p(s)$ 在 $s = 1$ 处的 $\zeta_{\mathbb{Q}}$ 的消失阶。我们有

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right) \operatorname{reg}_{\mathbb{Q},p} = \lim_{s\to 1} (s-1)\zeta_{\mathbb{Q},p}(s),$$

该值非零，因此 $\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_F$ 在 ${}_p(s)$ 处也收敛且非零。于是，由 Colmez 类数公式 (5.17) 可得

$$\frac{2^{[F:\mathbb{Q}]} \operatorname{reg}_{F,p} h_F \prod_{\mathfrak{p}|p} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)}{w_F \sqrt{\Delta_F}} \tag{5.23}$$

必定非零。(5.23) 中的每个因子都自动非零，唯有 reg_F 在 ${}_p$ 处的值可能为零；因此，${}_p$ 的 ${}_F$ 进调节子 reg_F 必定也非零，即

定理 5.3. 设 F 是 $\mathbb{Q}(\zeta_{p^2})/\mathbb{Q}$ 中使 p 野分歧的最小子扩张。则 F 在素数 p 处满足 Leopoldt 猜想。

正如我们已经指出的，关于 $\mathbb{Q}$ 的阿贝尔扩张的 Leopoldt 猜想早在 50 多年前的 [4], 起就已得到解决，因此定理 5.3 根本不是 Leopoldt 猜想的一个新情形。我们上述论证值得注意之处，在于利用同伦群中的 v_1-周期性 $\pi_{-1}(L_{KU}S/p) \cong \pi_{2(p-1)-1}(L_{KU}S/p) \cong \pi_{4(p-1)-1}(L_{KU}S/p) \cong \pi_{6(p-1)-1}(L_{KU}S/p) \cong \ldots$，推导出 p-进调节子的非零性。更一般地：

观察 5.4. 设 F 是一个全实数域，且有整数 j、k 以及谱 E、X，满足

(1) 对于 $n \gg 0$, $\pi_{2(p^k-1)p^n-1}(L_E X)$ 的阶等于有理数 $\frac{\zeta_F(1-p^n(p^k-1))}{\zeta(1-p^n(p^k-1))}$ 的分母；(2) X 存在一个自映射 $\Sigma^{(2p^k-2)j}X \to X$，它在 E_*-同调中诱导同构；并且 (3) $\pi_{-1}(L_E X)$ 是有限的，

那么在素数 p 处， F 满足 Leopoldt 猜想。

论证如下：数列

$$\#(\pi_{-1}(L_E X)), \#(\pi_{2pj(p^k-1)-1}(L_E X)), \#(\pi_{2p^2 j(p^k-1)-1}(L_E X)), \ldots$$

是常数，因此 $\zeta_{F,\ p}(s)$ 在 $s=1$ 处的消失阶等于 $\zeta_{\mathbb{Q},\ p}(s)$ 在 $s=1$ 处的消失阶，因此，按照上文使用 Colmez 的 p-进类数公式所作的同样论证，$\mathrm{reg}_{F,\ p}$ 非零。

注 5.5。根据 Hopkins-Smith 的周期性定理（见 [13], 或 [23] 的定理 1.5.4），每个 $E(k-1)$-无挠有限 CW 复形 X 都存在一个自映射$\Sigma^{(2p^k-2)j}X \to X$，其中 j, 它在 $E(k)$-同调上诱导一个同构。这里的 $E(k)_*$ 是高度为 k p 的主 Johnson-Wilson 理论。因此，我们有一种非常强大的机制，可以确保满足观察 5.4 中的第二个条件；在许多情况下，第三个条件也便于进行显式计算。如何构造满足观察 5.4 中第一个条件的谱 X 和非阿贝尔数域F，以证明 Leopoldt 猜想可能的新情形，仍是一个开放问题。注 1.5 中概述的岩泽理论视角，是我对如何着手构造此类X 和 F 所抱的最大希望。

6. Appendix: a few entertaining numerical calculations.

6.1. $L(1-n, S/p)$的计算示例。虽然定理 4.8 完全描述了正整数 n 对应的 $L(1-n, S/p)$ 的分母，却没有说明分子的情况。这些分子远比分母更难预测。我们列出 $L(1-n, S/p)$ 的若干取值及其分子的素因数分解，这或许能让读者感受到

这种不可预测性:

$$\begin{aligned}
L(0,S/3) &= 0\\
L(-1,S/3) &= \frac{4}{3}\\
&= \frac{2^2}{3}\\
L(-2,S/3) &= 0\\
L(-3,S/3) &= \frac{796}{3}\\
&= \frac{2^2\cdot 199}{3}\\
L(-4,S/3) &= 0\\
L(-5,S/3) &= \frac{1409884}{3}\\
&= \frac{2^2\cdot 7\cdot 43\cdot 1171}{3}\\
L(-6,S/3) &= 0\\
L(-7,S/3) &= \frac{10595003836}{3}\\
&= \frac{2^2\cdot 2648750959}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(0,S/5) &= 0\\
L(-1,S/5) &= 1136\\
&= 2^4\cdot 71\\
L(-2,S/5) &= 0\\
L(-3,S/5) &= \frac{607045659856}{5}\\
&= \frac{2^4\cdot 37940353741}{5}\\
L(-4,S/5) &= 0\\
L(-5,S/5) &= 1293561684322985119376\\
&= 2^4\cdot 41^2\cdot 3331\cdot 2486381\cdot 5807071\\
L(-6,S/5) &= 0\\
L(-7,S/5) &= \frac{1280828318043498475058726863755856}{5}\\
&= \frac{2^4\cdot 401\cdot 1151\cdot 1171\cdot 281677007771\cdot 525827079851}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(0,S/7) &= 0\\
L(-1,S/7) &= 17624384\\
&= 2^6\cdot 113\cdot 2437\\
L(-2,S/7) &= 0\\
L(-3,S/7) &= 60081275301219900531392\\
&= 2^6\cdot 547\cdot 659\cdot 7477\cdot 348304469143\\
L(-4,S/7) &= 0\\
L(-5,S/7) &= \frac{1448428968939581787932808098954336691322688}{7}\\
&= \frac{2^6\cdot 138054547\cdot 16393304770817121609511439377771 1}{7}\\
L(-6,S/7) &= 0\\
L(-7,S/7) &= 582352595227556297266005021235839765562473646089482814626049 92\\
&= 2^6\cdot 14912003737\cdot 61019695682165635074111760577075533607839054420619.
\end{aligned}$$

这些例子是通过求解泰勒系数来计算 $B_n^\chi$for $\chi\in \mathrm{Dir}(p^2)[p]$ 得出的，方法如定义 3.4 所述；然后将所得的 B_n^χ 值相乘，方法如定义 4.2 中 $L(s,S/p)$ 的定义所述。这个过程不难用计算机代数软件包实现（作者分别用 MAGMA 和 SAGE 实现了这一过程）。

因此，例如，作为定理 1.3 的一个特例，我们有，$L(-3,S/5)$ 的分母是 $\pi_7(L_{KU}S/5)$, 的阶。也就是说，$L(-3,S/5)=\frac{607045659856}{5}$ 分母中的 5 是 $\alpha_1\in\pi_7(S/5)$, 的数值“影子”，而 $L(-7,S/5)=\frac{128082831804349847505872686375585 6}{5}$ 分母中的 5 是 $v_1\alpha_1=\alpha_2\in\pi_{15}(S/5)$ 的数值“影子”。

6.2. 与同伦群相关的一些有趣的概率论论证。推论 4.9 的函数方程、命题 4.4 的欧拉乘积，以及对正整数 n 的 $L(-n,S/p)$, 的一次计算，意味着得到了渐近素数计数。$L(-n,S/p)$ 的分母也计数了 $L_{KU}S/p$ 的一个同伦群的阶，这一事实告诉我们，$L_{KU}S/p$ 的同伦群与某些“随机选取”的整数集合满足适当互素条件的概率有关。这些论证是对经典解释的直接推广：$1/\zeta(2)$ 表示“随机选取”的两个整数互素的概率。例如：

问题 6.1. 选取一个奇素数 p。给定一个由“随机选取”的整数构成的数列 $(m_1,n_1,m_2,n_2,\ldots,m_p,n_p)$，满足以下条件的概率是多少：

(1) 整数 $m_1,n_1,m_2,n_2,\ldots,m_p,n_p$ 并非都含有一个共同的素因子 ℓ，且该素因子是模 p^2 的原根；(2) 任意一对 m_i,n_i 都没有共同的素因子 $\ell\neq p$，且该素因子不是模 p^2 的原根，

这两个条件是否同时成立?

问题 6.1 的答案是

$$\frac{1}{(1-p^{-2})\zeta(2)L(2,S/p)},$$

因为 $\frac{\ell^{2p}-1}{\ell^{2p}}$ 是 m_1、n_1、……、m_p、n_p 不全属于模 ℓ 的同一个剩余类的概率，而 $\left(\frac{\ell^2-1}{\ell^2}\right)^p$ 是对于每个 $i \in \{1$、……、$p\}$，m_i 和 n_i 不属于模 ℓ 的同一个剩余类的概率。于是，命题 4.4 的欧拉乘积给出

$$\left(\prod_{\ell \notin G_p} \frac{\ell^2-1}{\ell^2}\right)^p \left(\prod_{\ell \in G_p} \frac{\ell^{2p}-1}{\ell^{2p}}\right) = \frac{1}{(1-p^{-2})\zeta(2)L(2,S/p)}.$$

我们可以利用推论 4.9 中的函数方程来简化 $L(2$、$S/p)$。例如：

例 6.2。给定一个由“随机选取”的整数 $(m_1$、n_1、m_2、n_2、m_3、$n_3)$ 组成的数列，令 P 表示以下条件成立的概率：

(1) 整数 m_1、n_1、m_2、n_2、m_3、n_3 并非都含有一个共同的素因子 ℓ，且该素因子是模 9 的原根；(2) 所有数对 m_i、n_i 都不含有一个共同的素因子 ℓ，且该素因子不是模 9 的原根，

这两个条件均成立。于是

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{(1-3^{-2})}\frac{1}{\zeta(2)}\frac{1}{L(2,S/3)} \\ &= \frac{9}{8}\frac{6}{\pi^2}\left(\frac{3^3}{2\pi^2}\right)^2 \frac{1}{L(-1,S/3)} \\ &= \frac{3^9}{2^4\pi^6}\frac{3}{4} \\ &= \frac{59049}{64\pi^6}, \end{aligned} \tag{6.24}$$

这相当于约 96% 的概率。(6.24) 中的因子 $3/4$ 是上文给出的 $L(-1,S/3) = 4/3,$ 的倒数。根据定理 4.8，$L(-1,S/3),$ 分母中的因子 3 使概率 P 约为 96%，而不是约为 32%；这也是模 3 Moore 谱的第四个 KU-局部稳定同伦群 $\pi_4(L_{KU}S/3)$ 非零的原因。

References

[1] J. F. Adams。关于群 $J(X)$。IV。 *Topology*，5：21–71，1966年。[2] Tom M. Apostol。 *Introduction to analytic number theory*。Springer-Verlag，纽约—海德堡，1976年。《数学研究生教材》。[3] Tilman Bauer。Bousfield 局部化与 Hasse 方块，2011年。[4] Armand Brumer。关于代数数域的单位。 *Mathematika*，14：121–124，1967年。[5] L. Carlitz。广义伯努利数的算术性质。 *J. Reine Angew. Math.*，202 174：–182，1959年。[6] L. Carlitz。广义伯努利数的一些算术性质。 *Bull. Amer. Math.* , ：– *Soc.* 65 68 69，1959年。[7] Pierre Colmez。R ´ $s = 1$ p 91 2 371 389, esidu 1988 en des fonctions zˆeta -adiques。 *Invent. Math.*，( )：–。[8] Ethan S. Devinatz 和 Michael J. Hopkins。Morava 稳定子群在 Lubin-Tate 模空间的提升上的作用。 *Amer. J. Math.*，117(3)：669–710，1995年。[9] Ethan S. Devinatz 和 Michael J. Hopkins。Morava 稳定子群闭子群的同伦不动点谱。 *Topology*，43(1)：1–47，2004年。

[10] Christopher L Douglas、John Francis、Andr
´ *Topological* e G Henriques 和 *modular forms* 201 2014 Michael A Hill。，第 卷。美国数学会，。[11] Jean Fresnel。负整数处ζ函数的值。载于，，，第 页。法国国家科学研究中心数论实验室，塔朗斯，1971年。
´ *Séminaire de Théorie des* Philip S. *Nombres 1970–1971 (Univ. Bordeaux I, Talence) Exp. No. 27* 30 ´ Hirschhorn。[12]， *Model categories and their localizations* 99 *Mathematical Surveys and Monographs* 2003 卷，。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，。[13] Michael J. Hopkins 和 Jeffrey H. Smith。幂零性与稳定同伦论。II。 *Ann.*，(): –。[14] *of Math. (2)* 148 1 1 49, 1998 Helmut Klingen。¨关于戴德金ζ函数的值。 *Math. Ann.*，145 272，1961 265 62: –/。[15] Tomio Kubota 和 Heinrich-Wolfgang Leopoldt。ζ *p*-进数值理论。I. ζ *p*-进狄利克雷 *L*函数导论。 *J. Reine Angew. Math.*，214 215 328 339，1964年(): –。[16] Heinrich-Wolfgang Leopoldt。伯努利数的推广。 *Abh. Math.*，: –。[17] *Sem. Univ. Hamburg* 22 131 140, 1958 Heinrich-Wolfgang Leopoldt。阿贝尔数
¨ *J. Reine Angew.* 域的算术。，: –。 *Math.* 209 54 71, 1962
[18] Stephen Lichtenbaum。ζ函数的值、´etale 上同调与代数 *K*K理论。载于 *Algebraic K-theory II: "Classical" algebraic K-theory and connections with arithmetic*，，页码–。《数学讲义》第342卷，1973年。[19] Jonathan Lubin 和 John Tate。局部域中的形式复乘。 *Ann. of Math.*，: –。[20] J *(2)* 81 380 387, 1965
¨ *Algebraic number theory* 322 *Grundlehren der Mathematischen* urgen Neukirch。， *Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* 第 卷，。Springer-Verlag，柏林，1999年。译自1992年的德文原版，并附 Norbert Schappacher 的注释，G. Harder 作序。[21] Daniel Quillen。有限域上一般线性群的上同调与 *K*K理论。 *Ann. of Math. (2)*，96: 552–586，1972年。[22] Douglas C. Ravenel。关于某些周期同调理论的局部化。 *Amer.*，(): –。[23] *J. Math.* 106 2 351 414, 1984 Douglas C. Ravenel。 *Nilpotence and periodicity in stable homotopy theory*，数学研究生教材第128卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1992年。附录C由 Jeff Smith 撰写。[24] Jean-Pierre Serre。模形式与ζ
p *Modular functions of* -进函数。载于，，页 *one variable III (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, 1972)* 191 268 码–。《数学讲义》第350卷，1973年。[25] Carl Ludwig Siegel。
¨ *Ann. of* 关于二次型解析理论。 *Math. (2)* 38 1 212 291, 1937
III.，(): –。[26] R. W. Thomason。代数
K ´ *Ann. Sci. École Norm. Sup.* K理论与étale 上同调。 *(4)* 18 3 437 552, 1985
，(): –。[27] Lawrence C. Washington。 *Introduction to cyclotomic fields* 83 *Graduate Texts in*，第 卷，。 *Mathematics* 1997 Springer-Verlag，纽约，第二版，。[28] A. Wiles。全实域上的岩泽猜想。 *Ann. of Math. (2)*，131 540，1990 3 493(): –。