arXiv:2303.09582v1 [math.AG] 16 Mar 2023

Veronese簇的单项式投影：新结果与猜想

LIENA COLARTE-G´OMEZ、ROSA M. MIR´O-ROIG 和 LISA NICKLASSON

Abstract. 本文研究由单项式投影$Y_{n,d}$ 得到的 Veronese簇的齐次坐标环 A($Y_{n,d}$) ≅ $\mathbb{K}[\Omega_{n,d}]$。这些簇由单项式集合 $\Omega_{n,d}$ 参数化，其中单项式的次数为 d，变量数为 $n+1$，并满足：(1) $\Omega_{n,d}$ 包含支撑在至多 s 个变量上的所有单项式；(2) $\Omega_{n,d}$ 是有限对角阿贝尔群 $G \subset \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{K})$ 的单项式不变量集合，该群的阶为 d。我们的目标是研究 $\Omega_{n,d}]$ 何时为二次代数；若是，则进一步研究 $\Omega_{n,d}]$ 何时为 Koszul 或 G-二次。对于族（1），我们证明，当 $s \geq \lceil \frac{n+2}{2} \rceil$时，$\Omega_{n,d}]$ 为二次代数。对于族（2），我们根据群$G \subset \mathrm{GL}(3,\mathbb{K})$完全刻画 $\Omega_{2,d}]$ 为二次代数的条件，并证明 $\Omega_{2,d}]$ 为二次代数当且仅当它是 Koszul 代数。我们还给出了大量 $\Omega_{n,d}]$ 为 G-二次代数的例子。

1. Introduction

Veronese簇 $X_{n,\ d} \subset \mathbb{P}(\binom{n+d}{n})-1$ 是由所有次数为 d 的 $R = \mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n]$ 中的单项式$\mathcal{M}_{n,\ d}$ 所参数化的射影环面簇。Veronese簇的单项式投影 $Y_{n,\ d}$是由单项式子集 $\Omega_{n,\ d} \subset \mathcal{M}_{n,\ d}$ 所参数化的射影环面簇。它们的齐次坐标环 A($Y_{n,\ d}$) 同构于单项式 $\mathbb{K}$-代数 $\mathbb{K}[\Omega_{n,\ d}]$。$Y_{n,\ d}$ 的许多几何性质都可以通过 $\mathbb{K}[\Omega_{n,\ d}]$的代数结构来解释，反之亦然。因此，Veronese簇的单项式投影处于交换代数与代数几何的交汇处。

为了更好地理解 Veronese簇的单项式投影$Y_{n,d}$ 以及单项式 $\mathbb{K}$-代数 $\mathbb{K}[\Omega_{n,d}]$的性质，研究它们的齐次理想 I($Y_{n,d}$) 是有益的。此外，这些理想也备受关注，因为 I($Y_{n,d}$) 是由 $\mathbb{K}[\Omega_{n,d}]$中的单项式的合题构成的齐次二项式素理想。其中，由二次式生成的理想 I($Y_{n,d}$) 尤为引人注目，特别是因为其中许多理想给出了 Koszul 代数的例子。Koszul 代数由 Priddy 在 [22], 中引入，此后在交换代数和代数几何的研究领域中发挥了重要作用。我们回顾一下：当 I($Y_{n,d}$) 由二次式生成时，代数 $\mathbb{K}[\Omega_{n,d}]$ 称为二次代数；当 I($Y_{n,d}$) 存在由二次式构成的 Gr¨obner 基时，$\mathbb{K}[\Omega_{n,d}]$ 称为 G-二次。已知 Koszul 代数是二次代数，而 G-二次代数是 Koszul 代数。反之一般不成立，例如参见 [14]。

第一作者获得了资助项目 *Borsa Ferran Sunyer i Balaguer 2021* 的部分支持。第一作者和第二作者获得了资助项目 PID2019-104844GB-I00 的部分支持。第三作者获得了资助项目 KAW 2019.0512 的支持。1

研究最广泛的例子之一正是 Veronese簇$X_{n,d}$，其关联的单项式 $\mathbb{K}$-代数 $\mathbb{K}[\mathcal{M}_{n,d}]$ 是 G-二次的，因此也是 Koszul 且为二次代数（[2, 14,16]）。与 Veronese簇$X_{n,d}$不同，单项式投影$Y_{n,d}$的齐次理想 I($Y_{n,d}$) 一般并非由二次式生成，且往往需要任意高次的二项式（见例3.1）。本文聚焦于两类单项式子集，即：(1) $\Omega_{n,d}$包含至少所有支撑集至多涉及 s 个变量的单项式；(2) $\Omega_{n,d}$ 是阶为 d的有限阿贝尔群 $G \subset \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{K})$的单项式不变量集合。我们的主要目标是探究这两类单项式子集 $\Omega_{n,d}$ 中，哪些能产生二次代数、G-二次代数和 Koszul 代数。在此过程中，我们提出了若干问题、难题和猜想。

族（1）的动机在于它包含挤压 Veronese 代数 PV(n, d, s)，即由 R 中次数为 d 且至多涉及 s 个变量的所有单项式生成的 $\mathbb{K}$-代数。何时 PV(n, d, s) 是二次代数或 Koszul 代数这一问题是在[11]中提出的。在本文的主要结果（定理 3.10）中，我们通过证明由（1）给出的单项式$\mathbb{K}$-代数在 $s \geq \lceil \frac{n+2}{2} \rceil$ 时是二次的，为解决这一问题作出了贡献。一个关键观察是，对于这些 s 取值， $\mathbb{K}$-向量空间 $\langle \Omega_{n,d} \rangle$ 是 2-正规的，即 $\mathbb{K}[\Omega_{n,d}]_2 = R_{2d}$。族（2）已在[7, 8, 9, 10], 中得到研究，作者在那里证明，相应理想 I($Y_{n,d}$) 由次数至多为 3 的二项式生成。在这一方向上，对于 $n = 2$，我们根据有限阿贝尔群 $G \subset \mathrm{GL}(3, \mathbb{K})$ 完全确定了 $\mathbb{K}[\Omega_{2,d}]$ 何时是二次代数；此外，我们证明 $\mathbb{K}[\Omega_{2,d}]$ 是二次代数当且仅当它是 Koszul 代数（定理 4.6 以及命题 4.7 和 4.8）。对于那些属于 Koszul 代数的情形，我们给出了一些例子族，其中 $\mathbb{K}[\Omega_{2,d}]$ 是 G-二次代数（命题 4.10 和 4.12）；这使我们能够在任意维数下构造更多例子（命题 4.15 和推论 4.16）。

本文结构如下。第2节汇集了本文正文所需的基本概念和定义。第3节开始研究 Veronese 簇的单项式投影 $Y_{n,\ d}$ 的齐次理想。一个重要的初步观察是，对 I($Y_{n,\ d}$) 中的二项式何时由次数更低的二项式生成，给出了组合刻画。在第3.1小节，我们重点关注族（1）。我们证明，如果单项式子集 $\Omega_{n,\ d}$ 张成一个 2-正规向量空间，那么 I($Y_{n,\ d}$) 由次数至多为 3 的二项式生成（命题 3.7）；并给出一个例子，其中 I($Y_{n,\ d}$) 的极小生成元为二次式和三次式。接下来，我们刻画（1）中的子集 $\Omega_{n,\ d}$ 何时张成一个 2-正规向量空间（命题 3.5），并在证明主要结果时运用这一事实：当 $s \geq \lceil \frac{n+2}{2} \rceil$ 时，具有（1）中 $\Omega_{n,\ d}]$ 且 $\Omega_{n,\ d}$ 如（1）所述的单项式 $\mathbb{K}$-代数是二次代数（定理 3.10）。在第3.2小节，我们介绍族（2），并汇总关于其齐次理想的已有结论。

第4节致力于确定二次代数 $\mathbb{K}[\Omega_{n,\ d}]$ 何时是 Koszul 代数，进而何时是 G-二次代数。我们主要关注族（2）中的 Veronese曲面的单项式投影。给定一个阶为 d 的有限阿贝尔群 $G \subset \mathrm{GL}(3, \mathbb{K})$，令 $\Omega_{2,\ d}$ 为 G 的所有次数为 d 的单项式不变量所组成的集合。利用 [7] 和 [13], 的结果，我们完全刻画了 $\Omega_{2,\ d}]$何时是二次代数，并以有限阿贝尔群 G 的性质加以表述；我们还证明了 $\Omega_{2,\ d}]$ 是二次代数当且仅当它是 Koszul 代数（定理 4.6 和命题 4.7 和 4.8）。

随后，对于这一子族，我们探讨二次性是否也等价于 G-二次性。对于有限循环群 $G \subset \mathrm{GL}(3,\mathbb{K})$ 对应的大类代数 $\mathbb{K}[\Omega_{2,\ d}]$，我们证明了这一结论（命题 4.10 和 4.12）。为更一般地研究这些问题，我们给出一种方法（引理 4.14），借助 G-二次代数 $\mathbb{K}[\Omega_{n,\ d}]$（其中 $N > n$），构造 G-二次代数 $\mathbb{K}[\Omega_{N,\ d}]$（其中 $N \geq 3$）的实例。特别地，我们将此方法应用于族（2）中的 G-二次代数 $\mathbb{K}[\Omega_{n,\ d}]$（命题 4.15 和推论 4.16）。

最后，在第 5 节中，我们汇总了第 4 节中提出的主要问题，并提出了两个与单项式投影族（2）相关的主要猜想。

致谢。作者感谢匿名审稿人，他们的评论和建议有助于改进本文的表述。本文的部分工作是在第一、第二作者访问热那亚大学期间完成的，他们谨向数学系（DIMA）的数学界同仁致谢，感谢他们的热情款待。

2. Notation and preliminaries

在本文中，$R = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ 将表示域 $\mathbb{K}$上的多项式环，而 R^Λ 表示有限子群 $\Lambda \subset \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})$的不变量子环。给定正整数 n 和 d，我们用$\mathcal{M}_{n,d} = \{x_0^{a_0} \cdots x_n^{a_n} \in R \mid a_0 + \cdots + a_n = d\}$ 表示 R 中次数为 d的单项式集合，其基数记为$N_{n,d} = |\mathcal{M}_{n,d}| = \binom{n+d}{n}$。

回顾一下，代数 A 是标准分次 $\mathbb{K}$-代数，若 $A = \bigoplus_{i\geq 0} A_i$ 且 $A_0 = \mathbb{K}$，并且 A_1 作为 $\mathbb{K}$-空间是有限维的，且生成 A 作为 $\mathbb{K}$-代数。等价地，A 可表示为 $A = R/I$，其中 $I \subset R$ 是齐次理想。

定义 2.1. 设 A 是一个标准分次 $\mathbb{K}$-代数。

(i) 若代数 A 的定义理想 I 由二次式生成，则称其为二次代数。(ii) 若代数 A 的 I 具有二次式构成的 Gröbner 基（相对于 R 的某个坐标系及某个项序），则称其为 G-二次代数。(iii) 若代数 A 满足 $\mathrm{reg}_A \mathbb{K} = 0$，即 $\mathbb{K}$ 具有线性 A-自由分解，则称其为 Koszul 代数。

众所周知，Koszul 代数是二次代数，而 G-二次代数是 Koszul 代数；如前所述，反过来一般并不成立。

我们用 $X_{n,d} \subset \mathbb{P}^{N_{n,d}-1}$ 表示 Veronese簇，它定义为由 $\mathcal{M}_{n,d} = \{m_1, \ldots, m_{N_{n,d}}\}$参数化的 n 维射影簇，即 Veronese 嵌入的像

$$\nu_{n,d} : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{N_{n,d}-1}, \quad p \to (m_1(p) : \cdots : m_{N_{n,d}}(p)).$$

我们取一个新的多项式环 $S = \mathbb{K}[w_1, \ldots, w_{N_{n,d}}]$，它有 $N_{n,\ d}$ 个变量。于是有一个同构 $\mathbb{K}[\mathcal{M}_{n,d}] \cong S/\mathrm{I}(X_{n,\ d})$，它将 d 次 Veronese 子代数 $\mathbb{K}[\mathcal{M}_{n,d}] \subset R$ 与 $X_{n,\ d}$ 的齐次坐标环对应起来。齐次素理想 $\mathrm{I}(X_{n,\ d})$ 由以下二次二项式极小生成：

$$\{w_i w_j - w_k w_\ell \mid m_i m_j = m_k m_\ell, \ \ 1 \leq i, j, k, \ell \leq N_{n,d}\}.$$

给定 $\mu_{n,\ d} \leq N_{n,\ d}$ 个单项式的子集 $\Omega_{n,\ d} \subseteq \mathcal{M}_{n,\ d}$，我们用 $\varphi_{\Omega_{n,\ d}}\colon\ \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{\mu_{n,\ d}-1}$ 表示由 $\Omega_{n,\ d}$ 定义的有理映射，并称 $Y_{n,\ d} := \varphi_{\Omega_{n,\ d}}(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{\mu_{n,\ d}-1}$ 是由 $\Omega_{n,\ d}$ 参数化的 Veronese 簇 $X_{n,\ d}$ 的单项式投影。我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\nu_{n,d}} & X_{n,d} \\ & \searrow^{\varphi_{\Omega_{n,d}}} & \downarrow \pi \\ & & Y_{n,d} \end{array}$$

其中 π 是从由坐标点 $(0:\ \cdots:0:1:0:\ \cdots:0) \in \mathbb{P}^{N_{n,d}-1}$生成的线性子空间出发，将 Veronese簇 $X_{n,d} \subset \mathbb{P}^{N_{n,d}-1}$ 投影到线性子空间 $V(w_{m_i},\ m_i \notin \Omega_{n,d}) \subset \mathbb{P}^{N_{n,d}-1}$；其中 1 位于位置 i，使得 $m_i \notin \Omega_{n,d}$。

我们用 $\mathrm{A}(Y_{n,d})$ 表示 $Y_{n,d}$ 的齐次坐标环 $S/\mathrm{I}(Y_{n,d})$，其中 $S = \mathbb{K}[w_1,\ldots,w_{\mu_{n,d}}]$。齐次理想 $\mathrm{I}(Y_{n,d})$ 可定义为同态 $\rho\colon\ S \longrightarrow R$ 的核，该同态由 $\rho(w_i) = m_i$ 定义。这里，$m_1,\ldots,m_{\mu_{n,d}}$ 是 $\Omega_{n,d}$ 的单项式；如有必要，重命名 $\mathcal{M}_{n,d}$ 中的单项式即可。因此，$\mathrm{A}(Y_{n,d})$ 与由 $\Omega_{n,d}$ 中单项式生成的单项式 $\mathbb{K}$-代数 $\mathbb{K}[\Omega_{n,d}]$ 同构；在下文中我们将不加区分地使用这两种表示。素理想 $\ker\rho = \mathrm{I}(Y_{n,d})$ 由二项式生成

$$\left\{ \prod_{i=1}^{\mu_{n,d}} w_i^{\alpha_i} - \prod_{i=1}^{\mu_{n,d}} w_i^{\beta_i} \;\middle|\; \prod_{i=1}^{\mu_{n,d}} m_i^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{\mu_{n,d}} m_i^{\beta_i} \right\}. \tag{1}$$

对于单项式 $m = x_0^{a_0}\cdots x_n^{a_n} \in R$，$m$ 的支撑集是集合 $\mathrm{supp}(m) = \{x_i \mid a_i > 0\}$。本文将重点研究由以下参数化的两族单项式投影

(1) $\Omega_{n,\ d} \supset \{m \in \mathcal{M}_{n,d} \mid |\mathrm{supp}(m)| \leq s\}$，其中给定一个数 $s \geq \lceil \frac{n+2}{2} \rceil$；(2) $\Omega_{n,\ d} = \{m \in \mathcal{M}_{n,d} \mid m$ 是有限阿贝尔群 $G \subset \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{K})\}$ 的一个不变量。

第2族的更详细描述见第3.2小节。我们的首要任务是研究由这两族产生的齐次二项式理想的极小生成集。

3. Generators of monomial projection of Veronese varieties

虽然 Veronese簇的齐次理想 $\mathrm{I}(X_{n,\ d})$ 通常由二次式 [16]，生成，但 Veronese簇的单项式投影的理想可能需要任意高次的生成元。下面通过几个例子来说明这一众所周知的事实。

例3.1. 取 $n = 2$、$d \geq 4$，并令 $Y_{2,d}$ 为 Veronese曲面的单项式投影 $X_{2,d}$，其参数化为

$$\Omega_{2,d} = \left\{ x_0^d, x_1^d, x_0x_1^{d-2}x_2, x_0^2x_1^{d-4}x_2^2, x_2^d, x_0^{d-1}x_1 \right\}.$$

利用 Macaulay2 [21],，我们可以验证，对于 $d = 4$，$Y_{2,4}$ 的齐次理想 $\mathrm{I}(Y_{2,4})$ 由两个次数为 2 的二项式和一个次数为 4 的二项式极小生成。对于 $d = 5$，理想 $\mathrm{I}(Y_{2,5})$

由一个次数为 2 的二项式、两个次数为 3 的二项式和一个次数为 5 的二项式极小生成。若取 $d = 6$, 则 $\mathrm{I}(Y_{2,6})$ 由四个次数为 2 的二项式和一个次数为 6 的二项式极小生成。

从现在起，固定正整数 n 和 d，以及由 μ_n 个单项式构成的子集 $\Omega_{n,d} \subset \mathcal{M}_{n,d}$ 。由 $\Omega_{n,d}$ 参数化的单项式投影记为 $Y_{n,d}$。我们用 $\mathrm{I}(Y_{n,d})_k$ 表示式 (1) 中出现的次数为 k 的二项式集合，并将这些二项式称为 k-二项式。若一个 k-二项式是一个 $(k-1)$-二项式乘以某个变量，则称其为平凡的。

定义 3.2. 设 $k \geq 3$ 为整数，且 $w^\alpha = w^{\alpha_+} - w^{\alpha_-} \in \mathrm{I}(Y_{n,d})_k$ 为一个非平凡的 k-二项式，其中 w^{α_+} 和 w^{α_-} 表示指数向量为 $\alpha_+, \alpha_- \in \mathbb{Z}^{\mu_n}_{\geq 0}{}^d$ 的单项式。从 w^{α_+} 到 w^{α_-} 的 $\mathrm{I}(Y_{n,d})_k$-序列是 S 中由次数为 k 的单项式构成的有限序列 $(w^{(1)}, \ldots, w^{(t)})$，满足以下两个条件:

(i) $w^{(1)} = w^{\alpha_+}$ 和 $w^{(t)} = w^{\alpha_-}$，(ii) 对所有 $1 \leq j < t$, $w^{(j)} - w^{(j+1)}$ 都是一个平凡的 k-二项式。

在下面的命题中，我们总结了一个关于二项式理想的众所周知的事实。它刻画了何时 $\mathrm{I}(Y_{n,d})_k$ 中的二项式属于理想 $(\mathrm{I}(Y_{n,d})_{k-1})$，因此无需将其纳入 $\mathrm{I}(Y_{n,d})$的极小生成集。为求完整起见，我们给出一个简单的证明。

命题 3.3. 设 $w^\alpha = w^{\alpha_+} - w^{\alpha_-} \in \mathrm{I}(Y_{n,d})_k$ ，其中 $k \geq 3$。以下条件等价。

(i) $w^\alpha \in (\mathrm{I}(Y_{n,d})_{k-1})$。(ii) 存在一个 $\mathrm{I}(Y_{n,d})_k$-序列，从 w^{α_+} 到 w^{α_-}。

证明. 显然 (ii) 推出 (i)。我们来证明其逆命题。假设 $w^\alpha \in (\mathrm{I}(Y_{n,d})_{k-1})$。我们用 $\{q_1, \ldots, q_N\}$ 表示 $\mathrm{I}(Y_{n,d})_{k-1}$的一组二项式生成元，其中 $q_j = q_j^+ - q_j^-$。根据假设，存在一些线性形式 $\{\ell_1, \ldots, \ell_N\} \subset S$，使得 $w^{\alpha_+} = \ell_1 q_1 + \cdots + \ell_N q_N + w^{\alpha_-}$。我们写作 $\ell_j = \sum_{i=0}^{N_{n,}{}_{d}-1} a_{ij} w_i$，其中每个 $a_{ij} \in \mathbb{K}$。因此,

$$w^{\alpha_+} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{N_{n,d}-1} (a_{ij} w_i q_j^+ - a_{ij} w_i q_j^-) + w^{\alpha_-}.$$

因此，存在一对 i_0, j_0，使得 $a_{i_0 j_0} = 1$ 且 $w^{\alpha_+} = w_{i_0} q_{j_0}^+$，或者 $a_{i_0 j_0} = -1$ 且 $w^{\alpha_+} = w_{i_0} q_{j_0}^-$。设 $a_{i_0}^{j_0} = 1$ （$a_{i_0}^{j_0} = -1$ 的情形可类似处理）。令 $w^{(2)} = w_{i_0} q_{j_0}^-$。我们有

$$w^{\alpha_+} = w^{\alpha_+} - w^{(2)} + \sum_{(i,j) \neq (i_0, j_0)} (a_{ij} w_i q_j^+ - a_{ij} w_i q_j^-) + w^{\alpha_-}.$$

因此,

$$w^{(2)} = \sum_{(i,j) \neq (i_0, j_0)} (a_{ij} w_i q_j^+ - a_{ij} w_i q_j^-) + w^{\alpha_-}.$$

现在，我们可以对 $w^{(2)}$ 重复相同的论证。鉴于每一步中求和项的数量都会减少，我们可以确信，最终会得到我们要找的结果，即从 w^{α_+} 到 $w^{(t)} = w^{\alpha_-}$ 的一个 $\mathrm{I}(Y_{n,\ d})_k$-序列。□

3.1. 单项式投影与 2-正规性。

De定义 3.4. 若向量子空间 $V \subseteq R_d$ 满足 $\mathbb{K}[V]_2 = R_{2d}$，则称其为 2-正规 .

2-正规性作为经典的射影正规性概念的一种推广被引入 [4], ，用于运用 Koszul 上同调方法研究 $\mathbb{K}[V]$ 的最小自由分解。这里，如果 $V = R_d$，则向量空间 V 是射影正规的。用这些术语来说，任何由单项式构成的真子集 $\Omega_{n,\ d} \subsetneq \mathcal{M}_{n,d}$ 都会张成一个非射影正规的子空间。注意，对于 2-正规向量子空间$V \subset R_d$，对所有 $t \geq 2$，都有 $\mathbb{K}[V]_t = R_{td}$。

本小节聚焦于由单项式构成、张成 2-正规子空间的子集 $\Omega_{n,\ d}$。我们将看到，对于给定的数 $s \geq \lceil \frac{n+2}{2} \rceil$，族 (1) $\Omega_{n,\ d} \supset \{m \in \mathcal{M}_{n,d} \mid |\text{supp}(m)| \leq s\}$中的子集确实张成 2-正规子空间。接下来，我们运用 2-正规性来限制与单项式投影$Y_{n,\ d}$相关的二项式理想 I($Y_{n,\ d}$) 的极小生成元次数。我们的主要结果表明，I($Y_{n,\ d}$) 由二次二项式作极小生成（定理 3.10）。

命题 3.5. 设 $\Omega_{n,d} \subset \mathcal{M}_{n,d}$ 是由单项式构成的子集。$\langle \Omega_{n,d} \rangle$ 这个 $\mathbb{K}$-向量空间在以下情形下是 2-正规空间：

(i) $\Omega_{n,d} \supseteq \{m \in \mathcal{M}_{n,d} \mid$ 满足 $\text{supp}(m)| \leq \lceil (n+2)/2 \rceil\}$，(ii) $\Omega_{n,d} = \mathcal{M}_{n,d} \setminus \{m\}$ 且 $m \in \mathcal{M}_{n,d} \setminus \{x_0^d, \ldots, x_n^d\}$。

也就是说，以 $\Omega_{n,d}$ 为参数的单项式投影 $Y_{n,d}$ 的希尔伯特函数满足：对所有 $k \geq 2$，HF($Y_{n,d}$, k) $= \binom{n+kd}{n}$。

证明. (i) 设 $m = x_0^{a_0} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$是一个次数为 $2d$的单项式。我们将证明，m 可以表示为两个次数为 d 且支撑集大小至多为 $\lceil (n+2)/2 \rceil$的单项式之积。对变量重新编号后，不妨设 $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$。令

$$m_1 = \prod_{1 \leq 2k+1 < n} x_{2k+1}^{a_{2k+1}} \quad \text{and} \quad m_2 = \prod_{0 \leq 2k < n} x_{2k}^{a_{2k}}$$

因此 $m = m_1 m_2 x_n^{a_n}$。注意，m_1 和 m_2 的支撑集大小至多为 $\lceil n/2 \rceil$。m_1 的次数至多为 d，并且

$$2\deg(m_1) = \sum_{1 \leq 2k+1 < n} 2a_{2k+1} \leq \sum_{1 \leq 2k+1 < n} (a_{2k+1} + a_{2k+2}) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \leq 2d.$$

类似地,

$$2\deg(m_2) = \sum_{0 \leq 2k < n} 2a_{2k} \leq \sum_{0 \leq 2k < n} (a_{2k} + a_{2k+1}) \leq \sum_{i=0}^{n} a_i = 2d,$$

因此 $\deg(m_2) \leq d$。现在我们可以写出

$$m = (m_1 x_n^{d-\deg(m_1)})(m_2 x_n^{d-\deg(m_2)}). \tag{2}$$

(ii) 令 $m \in \mathcal{M}_{n,d} \setminus \{x_0^d, \ldots, x_n^d\}$，并设 r 为任意一个次数为 kd 且满足 $k \geq 2$ 的单项式。我们要证明 r 可以分解为 $\Omega_{n,d} = \mathcal{M}_{n,d} \setminus \{m\}$ 中 k 个单项式的乘积。若 m 不整除 r，则结论成立。此外，若 $\text{supp}(r) \subseteq \text{supp}(m)$，则由 (i) 可得结论。

因此，我们可以假设 $m = x_0^{a_0} \cdots x_t^{a_t}$ 满足 $0 < t < n$ 和 $a_0 \cdots a_t \neq 0$，且 $r = x_0^{b_0} \cdots x_n^{b_n}$ 满足 $a_0 \leq b_0$, ..., $a_t \leq b_n$，并且存在满足 $t < j \leq n$ 的 j，使得 $b_j > 0$。令 $s_1 = m\frac{x_j}{x_0} \in \Omega_{n,d}$。由于 r 整除 s_1，我们得到一个次数为 $(k-1)d$ 的单项式 $s_2 = r/s_1$。对于 $k = 2$，乘积 $r = s_1 s_2$ 符合要求，除非 $s_2 = m$。此时，$r = m^2\frac{x_j}{x_0}$，只需取 $s_1 = m\frac{x_j}{x_1}$ 和 $s_2 = r/s_1 \neq m$。现在对 k 使用归纳法即可得到结论。□

命题 3.5 (i) 中支撑集的上界 $\lceil (n+2)/2 \rceil$ 不能在保持 2-正规性的同时替换为更小的数。例如，取 $n = 3$ 和 $d = 5$。此时 $\lceil (n+2)/2 \rceil = 3$，而次数为 10 的单项式 $x_0^2 x_1^2 x_2^2 x_3^4$ 不是两个变量中的次数为 5 的单项式的乘积。同样，若取 $\Omega_{n,\ d} = \mathcal{M}_{n,\ d} \backslash \{x_0^d\}$，从而违反 (ii)，那么由 $\Omega_{n,\ d}$ 张成的 $\mathbb{K}$-向量空间不是 2-正规空间。

注 3.6. 关于单项式投影$Y_{n,\ d}$ 的算术 Cohen-Macaulay 性问题，是 Gr¨obner 提出的一个由来已久的问题 [16], 另见 [7, 8, 18, 17, 19, 16, 23, 24, 25]。对于命题 3.5 中的 $\Omega_{n,\ d} \neq \mathcal{M}_{n,\ d}$，直接应用 [15, 定理 2.6] 以及 2-正规性可知，$\mathbb{K}[\Omega_{n,\ d}]$ 总是一个非 Cohen-Macaulay 环。

定理 3.10 的证明依赖于这样一个事实：当 $V \subset R_d$ 是 2-正规子空间时，$\mathbb{K}[V]$ 的定义理想由二次和三次齐次多项式生成；这一事实已在 [1, 命题 1.2] 中证明。我们在环面情形下为此断言提供另一种证明。

命题 3.7. 设 $\Omega_{n,\ d} \subset \mathcal{M}_{n,\ d}$ 是一组单项式，它们张成 R_d 中的一个 2-正规向量空间，并设 $Y_{n,\ d}$ 是由 $\Omega_{n,\ d}$ 参数化的单项式投影。那么，理想 $\mathrm{I}(Y_{n,\ d})$ 由次数至多为 3 的二项式生成。

证明. 固定 $k \geq 4$，并令 $w^\alpha = w^{\alpha+} - w^{\alpha-} = w_{i_1} \cdots w_{i_k} - w_{j_1} \cdots w_{j_k} \in \mathrm{I}(Y_{n,\ d})_k$ 为一个非平凡的 k-二项式。对于每个 w_{i_ℓ}（分别是 w_{j_ℓ}），令 $m_{i_\ell} = x_0^{a_{\ell 0}} \cdots x_n^{a_{\ell n}} \in \Omega_{n,\ d}$ 为其对应的单项式（分别为 $m_{j_l} = x_0^{b_{\ell 0}} \cdots x_n^{b_{\ell n}} \in \Omega_{n,\ d}$），其中 $\ell = 1$, ..., k。

我们考虑单项式 m_{i_1} 和 m_{j_1}，并针对每个 $0 \leq s \leq n$，定义：

$$c_s = \begin{cases} 0 & \text{if } a_{1s} \geq b_{1s} \\ b_{1s} - a_{1s} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这就产生了一个非零单项式 $\widetilde{m} = x_0^{c_0} \cdots x_n^{c_n} \in R$，其次数严格小于 d，且整除 $m_{i_2} \cdots m_{i_k}$。因此，我们考虑 $m' = (m_{i_2} \cdots m_{i_k})/\tilde{m}$，它是一个次数至少为 $(k-2)d \geq 2d$的单项式。然后，按照命题 3.5 的证明中的论证，我们可以找到一个单项式$r \in \Omega_{n,\ d}$，其次数为 d且整除 m'。因此，$m_{i_2} \cdots m_{i_k} = r \cdot s$，其中 s是一个次数为 $(k-2)d \geq 2d$的单项式。根据假设，$\langle \Omega_{n,\ d} \rangle$ 是 2-正规。由于 s 是一个次数至少为 $2d$的单项式，我们可以将其分解

$$m_{i_2} \cdots m_{i_k} = (m_{i_2}^{(1)} \cdots m_{i_{k-1}}^{(1)}) m_{i_k}^{(1)},$$

其中所有 $m_{i_l}^{(1)} \in \Omega_{n,d}$，对于 $2 \leq l \leq k$。特别地，$m_{i_k}^{(1)} = r$. 现在定义 $w^{(2)} \in S$ 为单项式 $\rho^{-1}(m_{i_{(1)}})\rho^{-1}(m_{i_2}^{(1)}) \cdots \rho^{-1}(m_{i_k}^{(1)})$。根据构造，$w^{\alpha+} - w^{(2)} \in \mathrm{I}(Y_{n,d})_k$是一个平凡的

k-二项式，且 $\widetilde{m}$ 整除 $m_{i_2}^{(1)}\cdots m_{i_{k-1}}^{(1)}$。因此，$m_{j_1}$ 整除 $m_{i_1}m_{i_2}^{(1)}\cdots m_{i_{k-1}}^{(1)}$。应用与之前相同的论证，我们将其分解为

$$m_{i_1}m_{i_2}^{(1)}\cdots m_{i_{k-1}}^{(1)} = m_{i_1}^{(2)}m_{i_2}^{(2)}\cdots m_{i_{k-1}}^{(2)},$$

其中 $m_{i_1}^{(2)} = m_{j_1}$ 且所有 $m_{i_\ell}^{(2)} \in \Omega_{n,\ d}$，对于 $2 \leq \ell \leq k-1$。我们设

$$w^{(3)} = \rho^{-1}(m_{i_1}^{(2)})\cdots\rho^{-1}(m_{i_{k-1}}^{(2)})\rho^{-1}(m_{i_k}^{(1)}).$$

由于

$$m_{i_1}m_{i_2}^{(1)}\cdots m_{i_{k-1}}^{(1)}m_{i_k}^{(1)} = m_{i_1}^{(2)}m_{i_2}^{(2)}\cdots m_{i_{k-1}}^{(2)}m_{i_k}^{(1)},$$

$w^{(2)} - w^{(3)} \in \mathrm{I}(Y_{n,\ d})_k$ 是一个平凡的 k-二项式。此外，由于 $m_{i_1}^{(2)} = m_{j_1}$，$w^{(3)} - w^{\alpha-} \in \mathrm{I}(Y_{n,\ d})_k$ 也是一个平凡的 k-二项式。因此，$(w^{\alpha+}, w^{(2)}, w^{(3)}, w^{\alpha-})$ 是一个 $\mathrm{I}(Y_{n,\ d})_k$-序列，根据命题 3.3，我们有 $w^{\alpha} \in (\mathrm{I}(Y_{n,\ d})_{k-1})$。重复同样的论证，我们得到

$$\cdots \subset (\mathrm{I}(Y_{n,d})_k) \subset (\mathrm{I}(Y_{n,d})_{k-1}) \subset \cdots \subset (\mathrm{I}(Y_{n,d})_3). \qquad \square$$

推论 3.8. 设 $\Omega_{n,\ d} \subset \mathcal{M}_{n,\ d}$ 是参数化单项式投影 $Y_{n,\ d}$ 的一组单项式。假设

(i) $\Omega_{n,d} \supseteq \{m \in \mathcal{M}_{n,d} \mid |\text{支撑集}(m)| \leq \lceil (n+2)/2 \rceil\}$，或
(ii) $\Omega_{n,d} = \mathcal{M}_{n,d} \setminus \{m\}$，其中 $m \in \mathcal{M}_{n,d} \setminus \{x_0^d, \ldots, x_n^d\}$。

那么，理想 $\mathrm{I}(Y_{n,d})$ 由次数至多为 3 的二项式生成。

证明。由命题 3.5 和 3.7 可立即得出。 $\square$

接下来的问题是，何时需要用 $\mathrm{I}(Y_{n,d})$ 的三次生成元。事实上，下面的例子表明，对于推论 3.8 涵盖的所有单项式投影，二次式并不总足以生成 $\mathrm{I}(Y_{n,d})$。

例 3.9。取 $n = 2$, $d = 4$ 和 $\Omega_{2,4} = \mathcal{M}_{2,4} \setminus \{x_0^2x_1^2\}$。我们使用 Macaulay2 [21]，软件进行了计算验证，参数化为 $\Omega_{2,4}$ 的单项式投影 $Y_{2,4}$ 的齐次理想 $\mathrm{I}(Y_{2,4})$ 最小生成元为 60 个二次式和 3 个三次式。

现在我们可以陈述本节的主要结果，它也部分回答了关于尖点 Veronese 代数 $\mathrm{PV}(n, d, s)$ 的问题 16（见 [11]），即由 $n+1$ 个变量中次数为 d 且支撑集至多包含 s 个变量的所有单项式生成的代数。

定理 3.10。固定整数 d、$n \geq 2$，并设 $Y_{n,d}$ 是由 $\Omega_{n,d} \supset \{m \in \mathcal{M}_{n,d} \mid |\operatorname{supp}(m)| \leq \lceil \frac{n+2}{2} \rceil\}$ 参数化的单项式投影。那么，代数 $\mathrm{A}(Y_{n,d})$ 是二次的。特别地，当 $s \geq \lceil \frac{n+2}{2} \rceil$ 时，挤压 Veronese 代数 $\mathrm{PV}(n, d, s)$ 是二次的。

证明。设 $t = \lceil (n+2)/2 \rceil$。由命题 3.3 和推论 3.8 可知，理想 $\mathrm{I}(Y_{2,\ d})$ 由二次和三次生成元生成，因此只需证明不需要三次生成元。为此，我们取一个非平凡关系

$$m_1m_2m_3 = m_4m_5m_6 = x_0^{d_0}x_1^{d_1}\cdots x_n^{d_n}, \quad m_1, \ldots, m_6 \in \Omega_{n,d}.$$

由于可以对这些单项式逐对应用命题 3.5 证明中的因式分解 (2)，因此只需考虑 $\Omega_{n,d} = \{m \in \mathcal{M}_{n,d} \mid |\text{supp}(m)| \leq t\}$. 的情形。目标是证明存在两个序列:

$$m_1m_2m_3 = m_1^{(1)}m_2^{(1)}m_3^{(1)} = \cdots = m_1^{(r)}m_2^{(r)}m_3^{(r)}$$
$$m_4m_5m_6 = m_4^{(1)}m_5^{(1)}m_6^{(1)} = \cdots = m_4^{(s)}m_5^{(s)}m_6^{(s)},$$

其中每一步都是一个二次关系，因此一个单项式保持不变，而 $m_i^{(r)} = m_j^{(s)}$ 对于一对$i \in \{1,2,3\}$, $j \in \{4,5,6\}$。我们区分三种情形。

情形1: $n = 2$。这里 $t = 2$ ，并且在可能对我们的 x-变量重新排序之后，我们可以假设$d_0 = \min\{d_0, d_1, d_2\}$ ，因此 $d_0 \leq d$。我们断言，存在 $m_2^{(1)}$ 和 $m_3^{(1)}$ ，属于$\Omega_{2,d}$ ，使得 $m_2m_3 = m_2^{(1)}m_3^{(1)}$ 且 $x_0 \notin \text{supp}(m_3^{(1)})$。事实上，设$m_2m_3 = x_0^{a_0}x_1^{a_1}x_2^{a_2}$。由于 $d_0 \leq d$，我们也有 $a_0 \leq d$。那么 $a_0 + a_1 \geq d$ 或 $a_0 + a_2 \geq d$，因为二者都严格小于 d 会与 $a_0 + a_1 + a_2 = 2d$矛盾。设 $a_0 + a_1 \geq d$。那么取 $m_2^{(1)} = x_0^{a_0}x_1^{d-a_0}$和 $m_3^{(1)} = x_1^{d-a_2}x_2^{a_2}$。现在我们令$m_1^{(1)} = m_1$ ，并对 $m_1^{(1)}m_2^{(1)}$ 应用相同的步骤。我们得到 $m_1^{(2)}$ 和 $m_2^{(2)}$ ，使得$\text{supp}(m_1^{(2)}) \subseteq \{x_0, x_1\}$ 且$\text{supp}(m_2^{(2)}) \subseteq \{x_1, x_2\}$。取 $m_3^{(2)} = m_3^{(1)}$，现在我们得到序列$m_1m_2m_3 = m_1^{(1)}m_2^{(1)}m_3^{(1)} = m_1^{(2)}m_2^{(2)}m_3^{(2)}$ ，其中我们只使用了二次关系。由于 $m_1^{(2)}$ 是唯一一个可被 x_0整除的项，因此 $m_1^{(2)} = x_0^{d_0}x_1^{d-d_0}$。用完全相同的论证，我们找到一个序列 $m_4m_5m_6 = m_4^{(1)}m_5^{(1)}m_6^{(1)} = m_4^{(2)}m_5^{(2)}m_6^{(2)}$ ，使得 $m_4^{(2)} = x_0^{d_0}x_1^{d-d_0} = m_1^{(2)}$ 。

情形 2: $n = 3$。我们沿用与前一种情形类似的思路。这里， $t = 3$ 和 d_0、 d_1、 d_2、 d_3 中的两个指数小于或等于 d ，因为 $d_0 + d_1 + d_2 + d_3 = 3d$。我们可以假设$d_0$、 $d_1 \leq d$。关键在于以下操作。我们有 $m_1m_2 = x_0^{a_0}x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3}$，特别是$a_0$、 $a_1 \leq d$。然后，我们可以重新分解 $m_1m_2 = m_1^{(1)}m_2^{(1)}$，使得 $m_1^{(1)}$、 $m_2^{(1)} \in \Omega_{3,d}$，并将所有 x_0都归集到 $m_1^{(1)}$ 中，将所有 x_1都归集到 $m_2^{(1)}$ 中。换言之，$\text{supp}(m_1^{(1)}) \subseteq \{x_0, x_2, x_3\}$ 且 $\text{supp}(m_2^{(1)}) \subseteq \{x_1, x_2, x_3\}$。重复类似的论证，我们可以得到一个序列

$$m_1m_2m_3 = m_1^{(1)}m_2^{(1)}m_3^{(1)} = m_1^{(2)}m_2^{(2)}m_3^{(2)} = m_1^{(3)}m_2^{(3)}m_3^{(3)}$$

其中， $m_1^{(3)} = x_0^{d_0}f_1$、 $m_2^{(3)} = x_1^{d_1}f_2$、 $m_3^{(3)} = f_3$ 以及 f_1、 f_2、 f_3 是关于 x_2、 x_3的单项式。同样的步骤也可以应用于 $m_4m_5m_6$。我们得到 $m_4^{(3)}m_5^{(3)}m_6^{(3)} = (x_0^{d_0}f_4)(x_1^{d_1}f_5)f_6$ ，其中 f_4、 f_5、 f_6 是关于 x_2、 x_3的单项式。还没有完成，因为 f_1 和 f_4 不一定相等。假设与 f_4相比， f_1 的 x_2次数较小。那么， f_2 或 f_3 中必有一个能被 x_2整除，因此我们可以应用其中一个二次关系

$$(x_0^{d_0}f_1)(x_1^{d_1}f_2) = (x_0^{d_0}\frac{x_2}{x_3}f_1)(x_1^{d_1}\frac{x_3}{x_2}f_2) \quad \text{or} \quad (x_0^{d_0}f_1)f_3 = (x_0^{d_0}\frac{x_2}{x_3}f_1)\frac{x_3}{x_2}f_3.$$

我们可以重复这一论证，直到 f_1 被 f_4替换。

情形 3: $n > 3$。在下面的注记中，我们总结一种操作，这种操作将在第三种情形的证明中多次应用。

注记 3.11。取 $m, \widetilde{m} \in \Omega_{n,\ d}$，它们都能被某个变量 x_i 整除。进一步假设 $x_j | m$ 对某个 $j \neq i$ 成立，并令

$$m^{(1)} = \frac{x_i}{x_j} m, \quad \widetilde{m}^{(1)} = \frac{x_j}{x_i} \widetilde{m}.$$

那么 $m^{(1)}\widetilde{m}^{(1)} = m\widetilde{m}$ 并且如果 $x_j | \widetilde{m}$ 或者 $|\text{支撑集}(\widetilde{m})| < t$ 我们有 $m^{(1)}, \widetilde{m}^{(1)} \in \Omega_{n,\ d}$。

我们将使用记号 $(a_{i,\ 0}, a_{i,\ 1}, \ldots, a_{i,\ n})$ 表示 m_i, $i = 1, \ldots, 6$ 的指数向量。设 i, j是一对 $i \in \{1,2,3\}$, $j \in \{4,5,6\}$，使得 $|\text{支撑集}(m_i) \cap \text{支撑集}(m_j)|$ 在所有 i, j 的选择中达到最大。我们可以假设 $i = 1$并且 $j = 4$。我们可以对变量重新编号，使得支撑集(m_1)∩支撑集(m_4) $=\{x_0, x_1, \ldots, x_\beta\}$，且 $d_0 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_\beta$。在证明的第一部分，我们将证明存在一个序列，使得 $m_1^{(r)}$ 和 $m_4^{(s)}$ 都能被 $x_0^{d_0} \cdots x_\beta^{d_\beta}$ 整除，若 $d_0 + \cdots + d_\beta \leq d$。如果$d_0 + \cdots + d_\beta > d$，我们将改为找到一个序列，使得

$$m_1^{(r)} = m_4^{(s)} = \Big(\prod_{0 \leq i < k} x_i^{d_i} \Big) x_k^a, \quad \text{for a } k \leq \beta.$$

首先，我们的目标是得到一个序列，使得 $m_1^{(*)}$ 可被 x_0^c 整除，其中 $c =$ 是 $\min(d_0, d)$。我们假设 $a_{1,\ 0} < \min(d_0, d)$，否则这第一步就已经完成了。此外，将因式分解 (2) 应用于单项式 $m_2 m_3$ 后，我们可以假设 $|\text{supp}(m_2) \cap \text{supp}(m_3)| \leq 1$。若对于 m_1 和 m_2，或 m_1 和 m_3，满足注记 3.11 的假设，那么我们就可以得到序列中的初始步骤 $m_1 m_2 m_3 = m_1^{(1)} m_2^{(1)} m_3^{(1)}$，并且 $a_{1,\ 0}^{(1)} = a_{1,\ 0} + 1$。否则，我们属于以下情况之一：

(i) $\text{supp}(m_1) \cap \text{supp}(m_2) = \{x_0\}$, $|\text{supp}(m_2)| = t$，且 $a_{3,\ 0} = 0$；(ii) $\text{supp}(m_1) \cap \text{supp}(m_2) = \text{supp}(m_1) \cap \text{supp}(m_3) = \{x_0\}$，且 $|\text{supp}(m_2)| = |\text{supp}(m_3)| = t$。

由于我们有假设 $|\text{supp}(m_2) \cap \text{supp}(m_3)| \leq 1$，因此 $|\text{supp}(m_2 m_3)| = n + 1$，所以 (ii) 化简为 $m_1 = x_0^d$，而 $m_1 m_2 m_3$ 已经处于所需形式。另一方面，在 (i) 中我们可以假设 $\text{supp}(m_2) = \{x_0, x_t, \ldots, x_n\}$ 且 $\text{supp}(m_3) \subseteq \{x_1, \ldots, x_{t-1}, x_t\}$。我们首先注意到以下事实。若 $|\text{supp}(m_3)| < |\text{supp}(m_2)| = t$ 且 $x_t \in \text{supp}(m_3)$，则对m_2和 m_3应用注记 3.11，其中 $(i, j) = (t, 0)$。现在，我们可以对 m_1和 $m_3^{(1)}$应用注记 3.11。若$|\text{supp}(m_3)| < |\text{supp}(m_2)| = t$且 $x_t \notin \text{supp}(m_3)$，则存在某个数对 $i \neq j$，使得 $a_{3,j} > a_{2,i} > 0$。因此，我们可以执行该操作

$$m_1^{(1)} = m_1, \quad m_2^{(1)} = \frac{x_j^{a_{2,i}}}{x_i^{a_{2,i}}} m_2, \quad m_3^{(1)} = \frac{x_i^{a_{2,i}}}{x_j^{a_{2,i}}} m_3. \tag{3}$$

要么我们可以应用注记 3.11 来增大 $a_{1,\ 0}$，要么我们得到 $|\text{supp}(m_3^{(1)})| < t$ 和$|\text{supp}(m_2^{(1)}) \cap \text{supp}(m_3^{(1)})| = 1$，此时可以像之前那样论证；又或者我们处于 (i) 中，且有 $|\text{supp}(m_3)| = t$。因此，剩下需要考虑的是 (i) 中的

$$m_2 = x_0^{a_{2,0}} x_t^{a_{2,t}} x_{t+1}^{d_{t+1}} \cdots x_n^{d_n}, \quad m_3 = x_1^{a_{3,1}} \cdots x_t^{a_{3,t}}$$

并且 $|\text{supp}(m_2)| = |\text{supp}(m_3)| = t$。显然可以验证，假设 $|\text{supp}(m_2)| =|\text{supp}(m_3)| = t$意味着存在一对 $i \in \{1,2,3\}$, $j \in \{4,5,6\}$，使得 m_i, m_j至少共有两个变量。

因此，我们可以假设 $\beta > 0$。于是，我们有 $m_1 m_3 = x^{a_1,}{}_0 x_1^{d_1} \cdots x_{t-1}^{d_{t-1}} x^{a_3,}{}_t{}^t$，并且根据假设 $d_0 \le d_1 \le \cdots \le d_\beta$。我们区分以下几种情况。$a_{1,}{}_0 + d_1 \ge d$ 和 $d_0 > d$。那么，我们有 $d_t + \cdots + d_n < d$，否则 $m_1 m_2 m_3$ 的总次数将超过 $3d$。这使我们能够定义

$$m_1^{(1)} = m_1, \quad m_2^{(1)} = x_0^{a_{2,0}-a_{3,t}} x_t^{d_t} \cdots x_n^{d_n}, \quad m_3^{(1)} = x_0^{a_{3,t}} x_1^{a_{3,1}} \cdots x_{t-1}^{a_{3,t-1}}.$$

现在我们可以将注记 3.11 应用于 $m_1^{(1)}$ 和 $m_3^{(1)}$。

$a_{1,}{}_0 + d_1 \ge d$ 和 $d_0 \le d$。令

$$m_1^{(1)} = x_0^{a_{1,0}} x_1^{d-a_{1,0}}, \quad m_2^{(1)} = m_2, \quad m_3^{(1)} = x_1^{d_1-d+a_{1,0}} x_2^{d_2} \cdots x_{t-1}^{d_{t-1}} x_t^{d_{3,t}},$$

并且，随后，

$$m_1^{(2)} = \frac{x_0^{a_{2,0}}}{x_1^{a_{2,0}}} m_1^{(1)} = x_0^{d_0} x_1^{d-d_0}, \quad m_2^{(2)} = \frac{x_1^{a_{2,0}}}{x_0^{a_{2,0}}} m_2^{(1)} = x_1^{a_{2,0}} x_t^{a_{2,t}} x_{t+1}^{d_{t+1}}, \quad m_3^{(2)} = m_3^{(1)}.$$

现在 $m_1^{(2)}$ 具有所需的形式。

$a_{1,}{}_0 + d_1 < d$。在这个子情形下，我们可以定义

$$m_1^{(1)} = x_0^{a_{1,0}} x_1^{d_1} \cdots x_{k-1}^{d_{k-1}} x_k^{a_{1,k}^{(1)}}, \quad m_2^{(1)} = m_2, \quad m_3^{(1)} = x_k^{a_{3,k}^{(1)}} x_{k+1}^{d_{k+1}} \cdots x_{t-1}^{d_{t-1}} x_t^{a_{3,t}},$$

对于某个 $1 < k < t$。接下来我们再次应用 (3)。现在，$m_2^{(1)}$ 和 $m_3^{(1)}$ 都不能被 x_1 整除。因此，我们不可能最终遇到 $m_3^{(*)}$ 获得极大支撑的情形，因为这意味着 $\mathrm{supp}(m_2^{(1)} m_3^{(1)})$ 包含所有变量。因此，我们最终能够应用注记 3.11。

按照上述步骤，我们最终会得到一个被 x_0^c 整除的 a $m_1^{(*)}$，$c = \min(d_0, d)$。若 $c < d$，则得到一个序列 $m_1 m_2 m_3 = \cdots = m_1^{(*)} m_2^{(*)} m_3^{(*)}$，其中 $\mathrm{supp}(m_2^{(*)} m_3^{(*)}) \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$。我们重复相同的过程，以增大现在的 $a_{1\,1}^{(*)},$。此外，我们可以在不涉及变量 x_0 的情况下进行此操作，而且情况 (i) 中 $|\mathrm{supp}(3)| = t$ 的情形以及情况 (ii) 都不会发生。以此方式继续，我们得到一个序列 $m_1 m_2 m_3 = \cdots = m_1^{(r)} m_2^{(r)} m_3^{(r)}$，其中 $m_1^{(r)} = x_0^{d_0} \cdots x_i^{d_i} x^{a_1^{(r)}}{}_{,\,i+1}$，且 $\mathrm{supp}(m_2^{(r)} m_3^{(r)}) \subset \{x_{i+1}, \ldots, x_n\}$。我们也对 $m_4 m_5 m_6$ 应用上述步骤。若$d_0 + d_1 + \cdots + d_\beta \ge d$，这意味着我们已得到 $m_1^{(r)} = m_4^{(s)}$，问题便解决了。否则，现在有 $m_1^{(r)}$ 和 $m_4^{(s)}$ 可被 $x_0^{d_0} \cdots x_\beta^{d_\beta}$ 整除，但 $m_1^{(r)} \ne m_4^{(s)}$。现在我们重置记号，使得$m_i := m_i^{(r)}$ 对于 $i = 1$、2、3，以及 $m_j := m_j^{(s)}$ 对于 $j = 4$、5、6。我们有

$$m_1 = x_0^{d_0} \cdots x_\beta^{d_\beta} \widetilde{m}_1, \quad m_4 = x_0^{d_0} \cdots x_\beta^{d_\beta} \widetilde{m}_4 \tag{4}$$

其中 $\mathrm{supp}(\widetilde{m}_1) \cap \mathrm{supp}(\widetilde{m}_4) = \emptyset$, $|\mathrm{supp}(m_1) \cap \mathrm{supp}(m_2 m_3)| \le 1$ 且 $|\mathrm{supp}(m_4) \cap \mathrm{supp}(m_5 m_6)| \le 1$。若 $|\mathrm{supp}(m_2 m_3)| < n$, $m_2 m_3$ 是至多含有 $n-1$ 个变量的单项式，我们可以假设它们各自的支撑集至多包含 $t-1$ 个变量。此时我们需要分成两种情形。情形 A: $|\mathrm{supp}(m_1^{(1)})| = |\mathrm{supp}(m_4^{(1)})| = t$。这里

$$|\mathrm{supp}(m_2^{(1)} m_3^{(1)})| \le n + 1 - t + 1 \le t.$$

因此，我们可以用任意方式分解 $m_2^{(1)}m_3^{(1)}$，只要不超过允许的最大支撑集。由于 $\widetilde{m}_4$ 整除 $m_2^{(1)}m_3^{(1)}$，我们选择 $m_2^{(1)}m_3^{(1)} = m_2^{(2)}m_3^{(2)}$ 使得 $m_2^{(2)} = \widetilde{m}_4\widetilde{m}_2^{(2)}$。同理，我们分解 $m_5^{(1)}m_6^{(1)} = m_5^{(2)}m_6^{(2)}$，使得 $m_5^{(2)} = \widetilde{m}_1\widetilde{m}_5^{(2)}$。但此时 $\widetilde{m}_2^{(2)}m_3^{(2)} = \widetilde{m}_5^{(2)}m_6^{(2)}$，并且我们可以再重新分解 $m_2^{(2)}m_3^{(2)}$，使得 $m_3^{(3)} = m_6^{(2)}$。

情形 B: $|\mathrm{supp}(m_1^{(1)})| < t$（或 $|\mathrm{supp}(m_4^{(1)})| < t$）。取某个 $x_i \text{ in } \mathrm{supp}(\widetilde{m}_1)$ 和 $x_j \text{ in } \mathrm{supp}(\widetilde{m}_4)$。则 x_j 整除 $m_2^{(1)}$ 或 $m_3^{(1)}$，不妨设为 $m_2^{(1)}$。由于 $m_1^{(1)}$ 和 $m_2^{(1)}$ 的支撑集都小于 t，我们可以进行该操作

$$m_1^{(2)} = \frac{x_j}{x_i}m_1^{(1)}, \quad m_2^{(2)} = \frac{x_i}{x_j}m_2^{(1)}.$$

现在 $|\mathrm{supp}(m_1^{(2)}) \cap \mathrm{supp}(m_4^{(1)})| > |\mathrm{supp}(m_1^{(1)}) \cap \mathrm{supp}(m_4^{(1)})|$。因此，我们回到证明的第一部分，这将得到 (4)，且 β的值更大。

最后，当 $|\mathrm{supp}(m_2m_3)| = n$ 时，我们有 $\beta = 0$，并且可以假设 $\mathrm{supp}(m_1) = \{x_0, x_1\}$。当 $n \geq 4$ 时，允许的支撑集为 $t \geq 3$。因此，若 $x_i \in \mathrm{supp}(m_4)$ 且 $i \neq 0$，那么我们可以回到证明的第一部分来增大 $a_{1,\,i}$，就像 $x_i \in \mathrm{supp}(m_1)$ 一样。在此过程中，我们要么得到所需的序列，要么最终得到 $\beta > 0$，从而完成证明。□

对于 $s < \lceil \frac{n+2}{2} \rceil$，挤压 Veronese $\mathrm{PV}(n, d, s)$ 通常不是二次的。例如，取 $n = 3$ 和 $d = 5$。那么，$\lceil \frac{n+2}{2} \rceil = 3$，定义代数 PV(3, 5, 2) 的理想 $\mathrm{I}(Y_{3,\,5})$ 最小生成元由 168 个二次二项式和 12 个三次二项式组成。

3.2. 由有限阿贝尔群的不变量参数化的单项式投影。本小节中，我们将重点转向第二族单项式投影。固定一个整数 $n \geq 2$，并令 $G \subset \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})$ 为一个阶为 d 的有限阿贝尔群。我们假设 $\mathbb{K}$ 是一个代数闭域，且 d 不被 $\mathbb{K}$ 的特征整除。因此，我们可以假设 G 在 R 上对角作用。记作 $G = \Gamma_1 \oplus \cdots \oplus \Gamma_s$，其中每个 $\Gamma_i \subset \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})$ 都是一个阶为 d_i 的循环群，且满足 $d = d_1 \cdots d_s$ 和 $d_i | d_{i+1}$。我们将 Γ_i 表示为由一个对角矩阵生成的群

$$M_{d_i;\alpha_{i0},\ldots,\alpha_{in}} := \mathrm{diag}(e_i^{\alpha_{i0}}, \ldots, e_i^{\alpha_{in}}) = \begin{pmatrix} e_i^{\alpha_{i0}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_i^{\alpha_{i1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_i^{\alpha_{in}} \end{pmatrix},$$

其中 e_i 是 $1 \in \mathbb{K}$ 的一个 d_i 次本原根，且最大公因数 $\mathrm{GCD}(\alpha_{i0}, \ldots, \alpha_{in}, d_i)$ 为 $= 1$。

G 的第一个循环扩张是由 G 和对角矩阵生成的有限阿贝尔群 $\overline{G} \subset \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})$

$$M_{d;1,\ldots,1} := \mathrm{diag}(e, \ldots, e) = \begin{pmatrix} e & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e \end{pmatrix},$$

其中 e 是 $1 \in \mathbb{K}$ 的 d 次本原根。根据 [7, 定理 2.2.11], , G 的次数为 d 的单项式不变量集合 $\mathcal{B}_1$ 最小生成不变量环 $R^{\overline{G}}$。令 $\mu_d = |\mathcal{B}_1|$。类似地，我们将 G 的 t 次循环扩张定义为 $\overline{G}^t = \langle G, M_{td;1,\ldots,1} \rangle \subset \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})$。因此，

对于任意 $t \geq 1$，代数 $R^{\overline{G}^t}$ 都由 G 的次数为 td 的单项式不变量集合最小生成。

记号 3.12. 设 $G \subset$ 一般线性群$(n+1, \mathbb{K})$ 是一个阶为 d 的有限阿贝尔群。用 $X_{n,\ d}^{G} \subset \mathbb{P}^{\mu_{n,\ d}-1}$ 表示由 $\mathcal{B}_1$ 参数化的 Veronese簇 $X_{n,\ d} \subset \mathbb{P}^{N_{n,\ d}-1}$ 的单项式投影。

注 3.13. $X_{n,\ d}^{G}$ 的齐次坐标环 A($X_{n,\ d}^{G}$) 同构于 $R^{\overline{G}}$。因此，A($X_{n,\ d}^{G}$) 总是一个 Cohen-Macaulay代数（[20, 命题 13]）。

我们来看一个例子。

例 3.14. 取 $n = 3, d = 4$ 和 $G = \langle M_{4;0,\ 1,\ 2,\ 3} \rangle \subset$ 一般线性群(4, $\mathbb{K}$)，它是一个阶为 3 的循环群。于是，G 通过 $(x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_0, ex_1, e^2x_2, e^3x_3)$ 作用于 $R = \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$，其中 e 是一个 d 次单位根。因此，单项式属于 $R^{\overline{G}}$ 当且仅当其指数向量 $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^4$ 是以下线性同余方程组的解

$$\begin{cases} y_0 + y_1 + y_2 + y_3 \equiv 0 \mod d \\ \quad\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \equiv 0 \mod d. \end{cases}$$

$R^{\overline{G}}$ 中的 4 次和 8 次单项式分别为:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{x_0^4, x_1^4, x_0x_1^2x_2, x_0^2x_2^2, x_0^2x_1x_3, x_2^4, x_1x_2^2x_3, x_1^2x_3^2, x_0x_2x_3^2, x_3^4\}. \\ \mathcal{B}_2 &= \{x_0^8, x_1^8, x_0x_1^6x_2, x_0^2x_1^4x_2^2, x_0^3x_1^2x_2^3, x_0^4x_2^4, x_3x_0^2x_1^5, x_3x_0^3x_1^3x_2, x_3x_0^4x_1x_2^2, x_3^2x_0^4x_1^2, x_3^2x_0^5x_2, x_2^8, \\ &\quad x_3x_1x_2^6, x_3^2x_1^2x_2^4, x_3^2x_0x_2^5, x_3^3x_1^3x_2^2, x_3^3x_0x_1x_23, x_3^4x_1^4, x_3^4x_0x_1^2x_2, x_3^4x_0^2x_2^2, x_3^5x_0^2x_1, x_3^8\}. \end{aligned}$$

我们有 $R^{\overline{G}} = \mathbb{K}[\mathcal{B}_1]$ 和 $R^{\overline{G}^2} = \mathbb{K}[\mathcal{B}_2]$。集合 $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 分别参数化 Veronese三维簇 $X_{3,4} \subset \mathbb{P}^{34}$ 和 $X_{3,8} \subset \mathbb{P}^{164}$的 $X_{3,4}^{G}$ 阶与 $X_{3,8}^{G}$ 阶单项式投影。

与第3.2节中考虑的单项式投影不同，由 $\mathcal{B}_1$ 张成的 $\mathbb{K}$-向量空间很少是 2-正规。取 $G = \langle M_{d,\ \alpha_0,\ldots,\alpha_n} \rangle \subset$ 一般线性群$(n+1, \mathbb{K})$中的一个 d 阶循环群，并假设对于某些 $0 \leq i, j \leq n$，有 $0 \neq \alpha_i < \alpha_j$。对于任意整数 $t \geq 1$，单项式 $x_i^{td} \in R^{\overline{G}}$。然而，单项式 $x_i^{td-1}x_j$ 不是 G的不变量。事实上，$x_i^{td-1}x_j \in R^{\overline{G}}$ 当且仅当$td\alpha_i + \alpha_j - \alpha_i \equiv 0$ 模 d，而这当且仅当 $\alpha_j = \alpha_i$。因此，对于所有 $t \geq 1$，$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\mathcal{B}_1]_t < \dim_{\mathbb{K}} R_{td}$，所以 $\mathcal{B}_1$ 不是 2-正规。尽管如此，我们仍有如下性质: 簇 $X_{n,d}^{G}$ 的齐次理想 I($X_{n,d}^{G}$) 由次数至多为 3 的二项式生成，见 [7, 定理 3.2.6]。因此，我们考虑以下问题。

问题 3.15. 对于哪些阶为 d 的有限阿贝尔群 $G \subset \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})$，代数 A($X_{n,\ d}^{G}$) 是二次的?

确实，存在一些有限阿贝尔群 G，使得理想 I($X_{n,\ d}^{G}$) 的极小生成元为次数 2 和 3 的二项式。不过，我们也有一些簇族 $X_{n,\ d}^{G}$，其齐次理想的极小生成元为次数 2 的二项式。为了描述这些簇族，我们需要先固定一些记号。

记号 3.16. 从现在起，给定整数 $d \geq 2$ 和 $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < d$，令 $\alpha_1' = \frac{\alpha_1}{\text{最大公因数}(\alpha_1,\ d)}$，$d' = \frac{d}{\text{最大公因数}(\alpha_1,\ d)}$，并令 μ、λ 为唯一确定的整数，使得 $0 < \lambda \leq d'$ 且 $\alpha_2 = \lambda\alpha_1' + \mu d'$。

此外，不等式取严格形式

$$\mathrm{GCD}(\alpha_1, d) \cdot \mathrm{GCD}(\lambda, d') \cdot \mathrm{GCD}(\lambda - \mathrm{GCD}(\alpha_1, d), d') \geq 1 \tag{5}$$

起着重要作用。

命题 3.17. 设 $G = \langle M_{d;0,\alpha_1,\alpha_2} \rangle \subset$ 一般线性群(3, $\mathbb{K}$) 是一个阶为 $d \geq 2$ 且满足 $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < d$ 的循环群。那么，当且仅当不等式 (5) 为严格不等式时，A(X_2^G,$_d$) 是二次代数。

证明。参见 [7, 推论 3.1.24 和命题 3.2.8]。 □

命题 3.18. 设 $G = \langle M_{d;0,\rho_1,\ldots,\rho_n} \rangle \subset$一般线性群($n+1$, $\mathbb{K}$) 是一个循环群 $G = \langle M_{d;0,\rho_1,\ldots,\rho_n} \rangle \subset$一般线性群($n+1$, $\mathbb{K}$)，其阶为 d。若存在项 $\rho_i < \rho_j < \rho_k$，使得在 (5) 中取等号，且$\alpha_1 = \rho_j - \rho_i$ 和 $\alpha_2 = \rho_k - \rho_i$，则 A($X_n^G$,$_d$) 不是二次代数。

证明。考虑到 I(X_n^G, $_d$) 包含曲面 $X_2^{G_1}$, $_d$ 的二项式生成元，其中 $G_1 = \langle M_{d;0,\ \alpha_j-\alpha_i,\ \alpha_k-\alpha_i} \rangle \subset$ GL(3, $\mathbb{K}$)，结论可由命题 3.17 直接得出。事实上，根据构造，如果 I($X_{2\,d,}^{G_1}$) 中的一个三次二项式不允许一个 I($X_2^{G_1}$, $_d$)$_3$-序列，那么它也不允许一个 I(X_n^G, $_d$)$_3$-序列。因此，根据命题 3.3，它不能表示为 I(X_n^G, $_d$) 中二次二项式的线性组合。□

在下一节中，应用引理 4.14，我们将得到任意维数的簇 X_n^G, $_d$，使得其关联代数 A(X_n^G, $_d$) 是二次的。我们以一个在 [9], 中研究过的例子结束本节，该例子的关联代数是二次的。

命题 3.19. 设 $G = \langle M_{d;0,1,2,3} \rangle \subset$ GL(4, $\mathbb{K}$) 是一个阶为 $d \geq 4$ 的循环群。那么，当且仅当 d 为偶数时，A($X_{n,d}^G$) 是二次代数。

证明. 参见 [9, 推论 5.7]。 □

受本节结果的启发，我们将研究理想 I($X_{n,d}^G$) 的 Koszul 性以及其是否存在二次 Gr¨obner基。

4. Koszulness of monomial projections of Veronese varieties

本节专门研究 Veronese簇的单项式投影的齐次坐标环$\mathbb{K}[\Omega_{n,d}]$ 的 Koszul 性，以及 $\mathbb{K}[\Omega_{n,d}]$ 是否为 G-二次。

[12, 推论 6.10(2)] 的一个应用指出，单项式完全交理想的第 d 个分次分量

$$(x_0^{\lambda+1}, \ldots, x_n^{\lambda+1})_d = \{x_0^{a_0} \cdots x_n^{a_n} \in \mathcal{M}_{n,d} \mid a_i > \lambda \text{ for some } i\}$$

当 $d - \lambda > (\lambda+1)_{n+1}{}^n$ 时生成 Koszul 代数。这为定理 3.10 中某些二次代数的 Koszul 性提供了证明。

命题 4.1. 取正整数 d、n、λ，并令

$$\Omega_{n,d} = \{x_0^{a_0} \cdots x_n^{a_n} \in \mathcal{M}_{n,d} \mid a_i > \lambda \text{ for some } i\}.$$

令 s 为满足 $d > s\lambda$的最大整数。则$\Omega_{n,d}$ 包含所有满足$m \in \mathcal{M}_{n,d}$ 且 $|$支撑集$(m)| \leq s$的 $\mathbb{K}[\Omega_{n,d}]$ 是 Koszul 代数，当且仅当 $s > (\lambda+1)\sqrt[n]{\lambda\ n+1}$ ()·

证明。两个不等式 $d > s\lambda$ 和 $s > (\lambda+1)\sqrt[n]{\lambda\ n+1}$ () 推出

$$d - \lambda > \lambda(s-1) \geq \frac{(\lambda+1)n}{n+1}. \qquad \square$$

我们从命题 4.1 中挑出两类 Koszul 代数，它们是通过从 $\mathcal{M}_{n,\ d}$ 中移除满支撑单项式得到的。

Pr命题 4.2. 以下两组单项式生成 Koszul 代数。

(i) $\mathcal{M}_{n,\ d} \setminus \{(x_0 \cdots x_n)^\lambda\}$，其中 $d = \lambda(n+1)$。(ii) $\mathcal{M}_{n,\ d} \setminus \{x_0^{\lambda-1}($
$x_1 \cdots x_n)^\lambda, \ldots, x_n^{\lambda-1}(x_0 \cdots x_{n-1})^\lambda\}$，其中 $d = \lambda(n+1)\ -1$。

证明。应用命题 4.1，我们可以得到该结论，除了 (i) 中 $n = 2$ 和 $d = 3$的情形。在这种情况下，我们有 $\mathbb{K}[\mathcal{M}_{2,3} \setminus \{x_0x_1x_2\}$，它同构于挤压 Veronese PV(2,3,2) 的齐次坐标环；根据 [5, 定理 3.1], ，它是一个 Koszul 代数。□

目前尚不清楚定理 3.10 中的所有代数是否都是 Koszul 代数。我们指出第一个尚未解决的情形，它出现在 $n = 2$, $d = 4$。

问题 4.3。设 $Y_{2,4}$ 是由 $\mathcal{M}_{2,4} \setminus \{x_0x_1x_2^2\}$参数化的单项式投影。A($Y_{2,4}$) 是 Koszul 代数吗?

注 4.4。我们尚未找到一种项序，使得问题 4.3 中的代数 A($Y_{2,4}$) 是 G-二次的。不过，这并不能排除 A($Y_{2,4}$) 是 Koszul 代数的可能性。例如，挤压 Veronese PV(2,3,2) 已在 [5, 6], 中被证明是 Koszul 代数；但正如[11], 中所指出的，在给定坐标下，不存在使其成为 G-二次代数的项序。

在本节剩余部分中，我们将讨论第二族单项式投影。我们固定 $\mathbb{K}$ 一个特征为零的代数闭域。回顾一下，$X^G_{n,d}$ 表示由有限阿贝尔群 $G \subset$GL($n+1, \mathbb{K}$) 的次数为 d 的单项式不变量集合 $\mathcal{B}_1$ 所参数化的簇，该群的阶为 d。我们首先证明，对于任意满足 $G \subset$ GL(3, $\mathbb{K}$) 的曲面 $X^G_{2,d}$，代数 A ($X^G_{2,d}$) 是 Koszul 的，当且仅当它是二次的。我们将使用以下结果。

命题 4.5. 设 A 是特征为零的域上的标准 Cohen–Macaulay 整环，其短 h-向量为 ($h_0, h_1, h_2 \neq 0$)。若 $h_2 < h_1$，则 A 是 Koszul 的。

证明. 参见 [13,定理 5.2(1)]。 □

By [7, 命题 3.1.2], 我们有，A($X^G_{n,d}$) 的 Hilbert 级数形式为

$$\frac{h_n z^n + h_{n-1} z^{n-1} + \ldots + h_1 z + 1}{(1-z)^{n+1}},$$

其中， h_i 等于满足条件$a_0 < d$、.....、 $a_n < d$的 id 次单项式 $m = x_0^{a_0} \cdots x_n^{a_n} \in R^{\overline{G}}$ 的个数。特别地， $h_1 = \mathrm{codim}(X_d) = \mu_d - (n+1)$，而 h_n 是 $\mathcal{B}_1$ 中满足 $|\mathrm{supp}(m)| = n+1$ 的单项式m 的个数。由于 $A(X^G_{n,d})$ 是一个科恩–麦考利环，Castelnuovo–Mumford 正则度 $\mathrm{reg}(A(X^G_{n,d}))$ 等于 h 多项式 $\sum_i h_i z^i$的次数加一。此外，根据（[7, 定理 3.3.5]），我们有

$$n \leq \mathrm{reg}(\mathrm{A}(X^G_{n,d})) \leq n+1,$$

当且仅当至少存在一个单项式 $m \in R^{\overline{G}}$ 满足$|\mathrm{supp}(m)| = n+1$，即 $h_n > 0$ 时，$\mathrm{reg}(\mathrm{A}(X^G_{n,\ d})) = n+1$ 取等号。

对于曲面 $X^G_{2,\ d}$，我们有 $\mathrm{reg}(\mathrm{A}(X^G_{2,\ d})) \leq 3$，其短 h-向量为 $(1, h_1, h_2)$，其中h_2 可以为零。根据以 $\mathcal{B}_1$ 描述 h_i 的方式，我们总有 $h_2 \leq h_1$。根据 $(1, h_1, h_2)$ 的形状，我们区分三种情况。

(A) 若 $h_2 = 0$，则 $\mathrm{reg}(\mathrm{A}(X^G_{2,\ d})) = 2$。这意味着 $\mathrm{I}(X^G_{2,\ d})$ 由二次二项式生成，且 $\mathrm{A}(X^G_{2,\ d})$ 具有线性分解。因此，$\mathrm{A}(X^G_{2,\ d})$ 是 Koszul 的。(B) 若 $h_2 = 1$，则 $\mathrm{reg}(\mathrm{A}(X^G_{2,\ d})) = 3$，且 $\mathrm{A}(X^G_{2,\ d})$ 是一个戈伦斯坦环。由 $\mathrm{A}(X^G_{2,\ d})$ 的最小自由分解的对称性可知，$\mathrm{A}(X^G_{2,\ d})$ 由二次二项式生成，当且仅当 $X^G_{2,\ d}$ 不是 $\mathbb{P}^3$ 中的三次曲面。(C) 否则，$\mathrm{reg}(\mathrm{A}(X^G_{2,\ d})) = 3$，且 $\mathrm{A}(X^G_{2,\ d})$ 是一个具有 $h_2 > 1$ 的环。

定理 4.6. 设 t $G \subset \mathrm{GL}(3, \mathbb{K})$ 是一个阶为 d 的有限阿贝尔群。以下条件等价 .

(i) $\mathrm{A}(X^G_{2,\ d})$ 是 Koszul。(ii) $\mathcal{B}_1$ 至少包含一个满足 $|\mathrm{supp}(m)| = 2$ 的单项式 m。(iii) $\mathrm{A}(X^G_{2,\ d})$ 是二次的。

证明. 对于类型（A）的曲面 $X^G_{2,d}$，结论成立。因此，我们可以假设 $\mathrm{reg}(\mathrm{A}(X^G_{2,d})) = 3$，于是 $\mathrm{A}(X^G_{2,d})$ 的 h-向量为 $(1, h_1, h_2 \neq 0)$。首先，我们证明，若 $h_2 = h_1$，则 $\mathrm{I}(X^G_{2,d})$ 不能只由次数为 2 的二项式生成。事实上，若 $h_2 = h_1$，则任意单项式 $m \in \mathcal{B}_1 \setminus \{x_0^d, x_1^d, x_2^d\}$ 都满足 $|\mathrm{supp}(m)| = 3$。因此，我们至少有一个非平凡关系 $x_0^d x_1^d x_2^d = m_1 m_2 m_3$ 满足 $|\mathrm{supp}(m_i)| = 3$。考虑三项式 $w^\alpha = \rho^{-1}(x_0^d)\rho^{-1}(x_1^d)\rho^{-1}(x_2^d) - \rho^{-1}(m_1)\rho^{-1}(m_2)\rho^{-1}(m_3)$。显然，$w^\alpha$ 不存在 $\mathrm{I}(X^G_{2,d})_3$-序列。根据命题 3.3，$\mathrm{I}(X^G_{2,d})$ 不能只由二次式生成。

因此，我们得到：当且仅当 $h_2 < h_1$ 时，$\mathrm{A}(X^G_{2,\ d})$ 是 Koszul；这又当且仅当 $\mathrm{I}(X^G_{2,\ d})$ 由二次二项式生成。由于 $h_1 = \mathrm{codim}(\mathrm{A}(X^G_{2,\ d})) = |\mathcal{B}_1| - 3$，且 $h_1 - h_2$ 是满足 $|\mathrm{supp}(m)| = 2$ 的单项式 $m \in \mathcal{B}_1 \setminus \{x_0^d, x_1^d, x_2^d\}$ 的数量，因此结论成立。□

作为上述结果的一个应用，我们得到以下结论。

命题 4.7. 若 $G = \Gamma_1 \oplus \cdots \oplus \Gamma_s \subset \mathrm{GL}(3, \mathbb{K})$ 是一个阶为$d = d_1 \cdots d_s$的有限非循环阿贝尔群，则代数 $\mathrm{A}(X^G_{2,\ d})$ 是 Koszul。

证明。单项式 $x_0^{d_s} x_1^{d-d_s}$是 G 的不变量，因此根据定理 4.6，$\mathrm{A}(X^G_{2,d})$ 具有 Koszul 性。 □

给定有限循环群 $G = \langle M_{d;\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2}\rangle \subset \mathrm{GL}(3,\mathbb{K})$，为研究 A($X_2^G{}_{,d}$) 的 Koszul 性，我们可以假设 $\alpha_0 = 0$ 和 $\alpha_1 \le \alpha_2$。

命题 4.8. 设 $G = \langle M_{d;0,\alpha_1,\alpha_2}\rangle \subset \mathrm{GL}(3,\mathbb{K})$ 是一个阶为 d 的有限循环群。代数 A($X_2^G{}_{,d}$) 是二次的，因此是 Koszul 的，当且仅当

(i) $\alpha_1 = \alpha_2$，或 (ii) $\alpha_1 < \alpha_2$ 且不等式 (5) 是严格的。

证明. (i) 只需考虑曲面 $X_2^G{}_{,d}$，其中 $G = \langle M_{d;0,1,1}\rangle \subset \mathrm{GL}(3,\mathbb{K})$。它属于类型（A），因此 A($X_2^G{}_{,d}$) 是 Koszul 的。

(ii) 这由命题 3.17 和定理 4.6 得出。 □

A($X_2^G{}_{,d}$) 是 Koszul 的这一事实等价于 I($X_2^G{}_{,d}$) 由二次式生成，这引出了以下问题。

问题 4.9. 设 $G \subset \mathrm{GL}(3,\mathbb{K})$ 是一个阶为 d 的有限阿贝尔群。A($X_2^G{}_{,d}$) 是二次的，当且仅当 I($X_2^G{}_{,d}$) 有一个二次 Gr¨obner 基吗?

接下来，我们考虑有限阿贝尔群族 $G \subset \mathrm{GL}(3,\mathbb{K})$，对于这些群，我们能够找到理想 I($X_n^G{}_{,d}$) 的一个二次 Gr¨obner 基。

命题 4.10. 设 $G = \langle M_{d;0,1,k}\rangle \subset \mathrm{GL}(3,\mathbb{K})$，且对某个整数 $t \ge 1$，有 $d = tk(k-1)$。那么，I($X_2^G{}_{,d}$) 有一个二次 Gr¨obner 基。

证明. 记 $\mathcal{B}_1 = \{m_0,\dots,m_{\mu_d}\}$，并取 $S = \mathbb{K}[w_0,\dots,w_{\mu_d}]$。我们要证明，存在一个项序 $(S,\preceq)$，使得 I($X_2^G{}_{,d}$) 有一个由二次式构成的 Gr¨obner 基。为此，我们注意到，单项式 $m = x_0^a x_1^b x_2^c$ 属于 $\mathcal{B}_1$，当且仅当存在一个整数 r，使得$0 \le r \le k$

$$(*)_r : \begin{cases} a + b + c = d \\ b + kc = rd. \end{cases}$$

该系统 $(*)_0$ 仅有一个解 $(d,0,0)$，而对于 r 且 $1 \le r \le k$的情形，解为

$$\{((k-1)c - (r-1)d,\ rd - kc,\ c) \mid c = (r-1)tk,\ \dots\ , rt(k-1)\} \tag{6}$$

由 r和 c确定。令 $I_0 := \{0\}$，并令 $I_r := \{(r-1)tk,\dots,rt(k-1)\}$，其中 $1 \le r \le k$。因此，$\mathcal{B}_1$ 由集合 $\mathcal{W}_d = \{(r,c) \mid 0 \le r \le k$ 和 $c \in I_r\}$唯一确定。我们用 $m_{(r,c)}$ 表示由 (r,c) 确定的 $\mathcal{B}_1$ 中的单项式，并将对应于单项式 $m_i \in \mathcal{B}_1$的 $\mathcal{W}_d$中的一对记作 (r_i,c_i)。采用这一记号，二项式 $w^\alpha = w_{i_1}\cdots w_{i_s} - w_{j_1}\cdots w_{j_s}$属于 I($X_2^G{}_{,d}$) 当且仅当等式成立

$$\begin{aligned} r_{i_1} + \cdots + r_{i_s} &= r_{j_1} + \cdots + r_{j_s} \\ c_{i_1} + \cdots + c_{i_s} &= c_{j_1} + \cdots + c_{j_s}. \end{aligned} \tag{7}$$

利用描述 (6)，我们按如下方式对 $\mathcal{B}_1$ 中的单项式排序。给定 m_i、$m_j \in \mathcal{B}_1$，我们称 $m_i < m_j$，当且仅当 $r_i < r_j$，或者 $r_i = r_j$ 且 $c_i < c_j$。现在，在 S 中，我们称 $w_i \preceq w_j$，当且仅当 $m_i \le m_j$，并将 $(S,\preceq)$ 按字典序排列，其中 $\{w_1,\dots,w_{\mu_d}\}$ 按 $\preceq$排序。我们的目标是证明

I($X_2^G,\ d$) 关于 $\preceq$ 有一个二次 Gröbner 基。设 $w^\alpha \in$I($X_2^G,\ d$) 是一个非平凡的三项式。为实现我们的目标，只需证明存在一个二次二项式 $w^\beta \in$I($X_2^G,\ d$)，使得 LT(w^β) 整除 LT(w^α)。

我们令 $w^\alpha = w_iw_jw_\ell - w_tw_uw_v$ with LT(w^α) $= w_iw_jw_\ell$，并假设 $w_i \preceq w_j \preceq w_\ell$ and $w_t \preceq w_u \preceq w_v$。假设 w^α non-trivial 意味着 $\{w_i, w_j, w_\ell\} \cap \{w_t, w_u, w_v\} = \emptyset$，这蕴含 LT($w^\alpha$) $= w_iw_jw_\ell$ 当且仅当 $w_v \prec w_\ell$，即 $r_v < r_\ell$ or $r_v = r_\ell$ and $c_v < c_\ell$. 。我们将大量用到以下事实

$$
\begin{aligned}
&|I_0| = 1, \quad |I_r| = t(k-r)+1,\ 1 \le r \le k,\\
&t(k-1)+1 = |I_1| > |I_2| > \cdots > |I_{k-1}| = t+1 > |I_k| = 1,\\
&\min I_r - \max I_{r-1} = (r-1)tk - (r-1)t(k-1) = (r-1)t.
\end{aligned} \tag{8}
$$

断言。设 $w\widetilde{w} \in S$ 是一个次数为 2 的单项式。假设

(A) $r = 0$ and $\widetilde{r} \ge 2$，或 (B) $r > 0$，且以下条件之一成立。(i) $r \le \widetilde{r} - 1$, $c <$ max $I_r = rt(k-1)$ and $\widetilde{c} >$ min $I_{\widetilde{r}} = (\widetilde{r}-1)tk$，(ii) $r \le \widetilde{r} - 2$，(iii) $r = \widetilde{r}$ and $c \le \widetilde{c} - 2$。

那么，存在一个二次二项式 $w^\beta \in$ I(X_2^G,d)，其 LT(w^β) $= w\tilde{w}$。

假设断言成立。我们要证明存在一个二次二项式 $w^\beta \in$I(X_2^G,d)，使得 LT(w^β) 整除 $w_iw_jw_\ell$。根据 (r_i,r_j,r_l) 的取值，我们分几种情况讨论。

$\underline{r_i = 0}$。如果 $r_j \ge 2$ 或 $r_\ell \ge 2$，我们可以用 w_iw_j 或 w_iw_ℓ 应用断言(A)。如果 $r_j = 0$ 且 $r_\ell = 0$ 或 1，则等式 (7) 只有一个解，因此 w^α 将是平凡的。如果 $r_j = r_\ell = 1$，等式 (7) 推出 (r_t,r_u,r_v) =(0, 1, 1) 且 $c_i = c_t = 0$，因此 w^α 也将是平凡的。

$\underline{r_i > 0}$。除以下三种子情况外，均可用 w_iw_j 或 w_iw_ℓ 应用断言(B)。

$\underline{r_i = r_j = r_\ell}$、$c_j = c_i + \delta_j$和 $c_\ell = c_i + \delta_\ell$满足 δ_j、$\delta_\ell \in \{0,1\}$。于是，由 (7) 和 LT(w^α) $= w_iw_jw_\ell$可得 $r_t = r_u = r_v = r_i$和 $c_v < c_\ell \le c_i + 1$。特别地，由 (7) 可得 $3c_i + \delta_j + \delta_\ell = c_t + c_u + c_v$。由于 $c_v < c_\ell$, 我们有 $2c_i + \delta_j < c_t + c_u$，因此 $c_t > c_i$或 $c_u > c_i$，这与假设矛盾，因为这样便会得到 $w_v \prec w_t$ 或 $w_v \prec w_u$。

$\underline{r_i = r_j < r_\ell = r_i + 1}$满足 $c_j = c_i + \delta_j$、$\delta_j \in \{0,1\}$，并且 $c_i =$ max I_{r_i}或 $c_\ell =$ min I_{r_ℓ}。与前面一样，由 (7) 和不等式 $r_v \le r_\ell$可得 (r_t,r_u,r_v) =(r_i,r_j,r_ℓ)。因此，我们有 $c_v < c_\ell$，特别是$c_\ell >$ min I_{r_ℓ}。于是 $c_i =$ maxI_{r_i}，因此$c_j = c_i$。现在由 (7) 可得 $2c_i < c_t + c_u$，从而得到 $c_t > c_i$ 或 $c_u > c_i$。但这与假设矛盾，因为 $c_i =$ max I_{r_i}。

$\underline{r_i < r_j = r_\ell = r_i + 1}$取 $c_\ell = c_j + \delta_\ell$、$\delta_\ell \in \{0,1\}$和 $c_i =$max I_{r_i}or $c_\ell =$min I_{r_ℓ}。由 (7) 得 $r_t + r_u + r_v = 3r_i + 2$取 $r_u \le r_u \le r_v \le r_i + 1$，这意味着 ($r_t$,$r_u$,$r_v$) =($r_i$,$r_i + 1$,$r_i + 1$)。由于$w_v \prec w_l$, 我们有 $c_v < c_\ell$，特别是 $c_\ell >$min I_{r_ℓ}。因此 $c_i =$maxI_{r_i}，又因为 $r_t = r_i$，我们有 $c_t \le c_i$。现在由 (7) 得到 $c_j < c_u$，这意味着 $c_\ell \le c_u$。但这样便得到 $w_l \preceq w_u \preceq w_v$，与 $w_v \prec w_l$ 矛盾。

最后，只需证明断言。我们先从 (A) 开始，并假设 $r = 0$ 和 $\tilde{r} \geq 2$。记 $\widetilde{c} = (\tilde{r}-1)tk + \delta$，其中 $\delta \leq t(k-\widetilde{r})$，使得 $\widetilde{c} \in I_{\tilde{r}}$。我们定义

$$(r', c') = (1, (\widetilde{r}-1)t + \delta), \quad \text{and} \quad (r'', c'') = (\widetilde{r}-1, (\tilde{r}-1)t(k-1)).$$

由 (8) 可知 $\delta \leq t(k-\widetilde{r})$ 和 $(\tilde{r}-1)t + \delta \leq t(k-1)$，因此得到 (r', c')、$(r'', c'') \in \mathcal{W}_d$ and $m_{(r,c)}m_{(\tilde{r},\widetilde{c})} = m_{(r',c')}m_{(r'',c'')}$。这会导出一个二次二项式 w^β，其首项为 $\mathrm{LT}(w^\beta) = w\widetilde{w}$。

接下来讨论 (B)，并假设 $r > 0$。为证明 (i) 和 (iii)，我们定义 $(r', c') = (r, c+1)$ 和 $(r'', c'') = (\tilde{r}, \widetilde{c}-1)$。这以与上文相同的方式定义了一个首项为 $w\widetilde{w}$ 的二次二项式。除以下两个子情形外，同样的构造也可用于证明 (ii)

（a）$(c, \widetilde{c}) = (rt(k-1), (\widetilde{r}-1)tk + \delta)$,

（b）$(c, \widetilde{c}) = (rt(k-1) - \delta, (\widetilde{r}-1)tk)$.

两者是类似的情形，我们只讨论 (a)。定义

$$(r', c') = (r+1, (r+1)t(k-1)) \quad \text{and} \quad (r'', c'') = (\widetilde{r}-1, (\widetilde{r}-2)tk + \delta + t).$$

由 (8)，$\delta \leq |I_{\tilde{r}}| = t(k-\tilde{r})$ 和 $|I_{\widetilde{r}-1}| = t(k-\widetilde{r}+1)$，因此这些数对 (r', c')、$(r'', c'') \in \mathcal{W}_d$。在所有情形下，我们得到 $m_{(r,c)}m_{(\tilde{r},\widetilde{c})} = m_{(r',c')}m_{(r'',c'')}$，它诱导出一个二次二项式 w^β，其 $\mathrm{LT}(w^\beta) = w\widetilde{w}$。□

注记 4.11。我们已在命题 4.8 中看到，代数 $R^{\overline{G}}$ 在 $G = \langle M_{d;0,\ 1,\ k} \rangle \subset \mathrm{GL}(3, \mathbb{K})$ 时是 Koszul 的，当且仅当最大公因数(k, d) 最大公因数$(k-1, d) > 1$。上文命题 4.10 的证明中所考虑的项序，在去掉条件 $d = tk(k-1)$ 后，并不总能给出二次 Gr¨obner 基。不过，还有许多其他可能的项序。通过 Macaulay2 [21], 计算，我们验证了对于 $d \leq 25$，每个 $\mathrm{I}(X_{n,\ d}^G)$ 都相对于某个项序有一个二次 Gr¨obner 基。

命题 4.12. 设 $G \subset \mathrm{GL}(3, \mathbb{K})$ 是一个阶为 d 的循环群。在以下情形中 s

(i) $G = \langle M_{d;0,\ k,\ d-k} \rangle$，其中 d 为偶数且 $\mathrm{GCD}(d, k) = 1$; (ii) $G = \langle M_{d;0,\ \alpha_1,\ \alpha_2} \rangle$，其中 $\mathrm{GCD}(d, \alpha_1, \alpha_2) = \delta > 1$,

理想 $\mathrm{I}(X_{2,\ d}^G)$ 有一个二次 Gr ¨obner 基。

证明. (i) 由于 $\mathrm{GCD}(d, k) = 1$，我们有 $G = \langle M_{d;0,\ 1,\ d-1} \rangle$。若 $d = 2$，结论显然成立，因此我们取$d \geq 4$ 为偶数。令 $G' = \langle M_{d;0,\ 1,\ 2} \rangle$，一个直接的线性变量替换表明，$R^G$ 与$R^{G'}$ 同构。现在 (i) 由命题 4.10 得出。

(ii) 令 $d' = d/\delta$, $\alpha_1' = \alpha_1/\delta$, $\alpha_2' = \alpha_2/\delta$，并设 $G' = \langle M_{d';0,\ \alpha_1',\ \alpha_2'} \rangle$。我们有，$G$ 的次数为 d 的单项式不变量集合，就是 G' 的次数为 $d = \delta d'$ 的单项式不变量集合。因此，$R^{\overline{G}}$ 是 $R^{\overline{G'}}$的第 δ 个 Veronese 子代数。由于 $R^{\overline{G'}}$ 的 Castelnuovo-Mumford 正则度 $\mathrm{reg}(R^{\overline{G'}}) \leq 3$，根据 $[14,\ \text{定理}\ 2]$，理想 $\mathrm{I}(X_{2,\ d}^G)$ 有一个二次 Gr¨obner 基。□

如上文命题 4.12 的证明所示，我们可以应用 $[14,\ \text{定理}\ 2]$ 来保证：对于任意阶为 d 的有限阿贝尔群 $G \subset \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})$，以及任意整数 $t \geq \lceil \frac{\mathrm{reg}(\mathrm{A}(X_{n,d}^G))_2}{} \rceil$，~~$G$ 的 t 次循~~环扩张的不变量环 $R^{\overline{G}^t}$ 是一个二次 Gr¨obner 代数。

问题 4.13。给定一个阶为 d 的有限阿贝尔群 $G \subset \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{K})$，使 $R^{\overline{G}^t}$ 成为二次 Gr¨obner 代数的最小整数 $t \geq 1$ 是多少?

特别地，对于任意有限阿贝尔群 $G \subset \mathrm{GL}(3,\mathbb{K})$，我们有 $t \leq 2$，且由命题 3.17 可知此界是紧的。

下一个引理使我们能够在任意维数$n \geq 2$中构造二次 Gröbner 代数 $\mathrm{A}(X_{n,\,d}^{G})$。对于某些正整数 ℓ_1、.....、ℓ_n，我们考虑一个多项式环 $R = \mathbb{K}[x_{ij}]$，其上有 $N = \ell_1 + \ldots + \ell_n$ 个变量 x_{ij}，其中 $1 \leq i \leq n$且 $1 \leq j \leq \ell_i$。我们定义一个同态 $\psi\colon R \longrightarrow R$，其定义为 $x_{ij} \mapsto x_{i\circ}$

引理 4.14. 设 $\Omega_{n,\,d} \subseteq \mathcal{M}_{n,\,d}$，并设 $\Omega_{N,\,d} \subset R$ 是 $\Omega_{n,\,d}$ 在上述定义的 ψ 下的原像。取 $Y_{n,\,d}$ 和 $Y_{N,\,d}$ 分别为由 $\Omega_{n,\,d}$ 和 $\Omega_{N,\,d}$ 参数化的单项式投影。若理想 $\mathrm{I}(Y_{n,\,d})$ 可由次数至多为 k 的元素生成，则 $\mathrm{I}(Y_{N,\,d})$ 也如此。此外，若 $\mathrm{I}(Y_{n,\,d})$ 有一个由次数至多为 k 的二项式组成的 Gröbner 基，则 $\mathrm{I}(Y_{N,\,d})$ 也如此。

证明。只需考虑 $R = \mathbb{K}[x_{01}, x_{02}, x_1, \ldots, x_n]$，因为一般情形可通过反复使用这一论证得出。

我们用记号 x^α 和 $x^{\widetilde{\alpha}}$ 表示 R 和 R 中的单项式，其指数向量分别为 α 和 $\widetilde{\alpha}$。令 $S = \mathbb{K}[w_\alpha]$ 为 $\mathrm{I}(Y_{n,\,d})$ 的环境环，此处变量的指标取遍所有满足 $x^\alpha \in \Omega$ 的 α。

类似地，我们定义 $S = \mathbb{K}[w_{\widetilde{\alpha}}]$。令 $\varphi : S \longrightarrow S$ 为如下定义的同态:

$$\varphi(w_{(\alpha_{01},\alpha_{02},\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}) = w_{(\alpha_{01}+\alpha_{02},\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}.$$

显然，$\mathrm{I}(Y_{n,\,d})$ 的任一生成集在 φ 下的原像，都是 $\mathrm{I}(Y_{N,\,d})$ 的生成集。

假设 $\mathrm{I}(Y_{n,\,d})$ 有一个由次数为 $\leq k$ 的二项式构成的 Gr¨obner 基，关于 S上的项序 $\succ$。我们通过规定以下关系，将 $\succ$ 扩展为 S 的变量上的一个序: 若 $\varphi(w_{\widetilde{\alpha}}) \succ \varphi(w_{\widetilde{\beta}})$，或 $\varphi(w_{\widetilde{\alpha}}) = \varphi(w_{\widetilde{\beta}})$ 且 $\alpha_{01} > \beta_{01}$，则 $w_{\widetilde{\alpha}} \succ w_{\widetilde{\beta}}$。现在，对于 S 中的单项式 u、v，若 $\varphi(u) \succ \varphi(v)$，或 $\varphi(u) = \varphi(v)$ 且$u \succ v$ 根据 S上的反字典序，则称 $u > v$。容易验证，这是 S上的一个合法项序。

为了证明 $\mathrm{I}(Y_{N,\,d})$ 有一个关于此阶的次数为 k Gr¨obner 基，取一个次数为 r 的二项式

$$f = w_{\widetilde{\alpha}(1)} \cdots w_{\widetilde{\alpha}(r)} - w_{\widetilde{\beta}(1)} \cdots w_{\widetilde{\beta}(r)} \in \mathrm{I}(Y_{N,d}),$$

其中 $r > k$和 $w_{\widetilde{\alpha}(1)} \cdots w_{\widetilde{\alpha}(r)}$是首项。我们要证明，该项可被 $\mathrm{I}(Y_{N,\,d})$ 中某个次数为 $\leq k$ 的二项式的首项整除。假设 f中的两项没有公因子。证明分两种情况进行。

<u>情形1:</u> $\varphi(f) \neq 0$。于是，$\varphi(f)$ 是 $\mathrm{I}(Y_{n,d})$ 中一个非平凡的二项式。根据我们定义该排序的方式可知，$\varphi(w_{\widetilde{\alpha}(1)} \cdots w_{\widetilde{\alpha}(k)}) = w_{\alpha(1)} \cdots w_{\alpha(k)}$是 $\varphi(f)$ 的首项。根据假设，$w_{\alpha(1)} \cdots w_{\alpha(k)}$可被 $\mathrm{I}(I)$ 中某个次数为 $s \leq k$的二项式的首项整除。设该二项式为 $w_{\alpha(1)} \cdots w_{\alpha(s)} - w_{\gamma(1)} \cdots w_{\gamma(s)} \in \mathrm{I}(Y_{n,d})$, 其首项为 $w_{\alpha(1)} \cdots w_{\alpha(s)\circ}$ 接着，我们将$w_{\gamma(1)} \cdots w_{\gamma(s)} \in S$提升到 $w_{\widetilde{\gamma}(1)} \cdots w_{\widetilde{\gamma}(s)} \in S$，使得 $w_{\widetilde{\alpha}(1)} \cdots w_{\widetilde{\alpha}(s)} - w_{\widetilde{\gamma}(1)} \cdots w_{\widetilde{\gamma}(s)} \in \mathrm{I}(Y_{N,d})$。$\gamma_{01}^{(1)}$、$\gamma_{02}^{(1)}$、.....、$\gamma_{01}^{(s)}$、$\gamma_{02}^{(s)}$的选取并不唯一，但由于 $w_{\alpha(1)} \cdots w_{\alpha(s)} \succ w_{\gamma(1)} \cdots w_{\gamma(s)}$，我们可以保证 $w_{\widetilde{\alpha}(1)} \cdots w_{\widetilde{\alpha}(s)} \succ w_{\widetilde{\gamma}(1)} \cdots w_{\widetilde{\gamma}(s)}$。

情形 2。 $\varphi(f) = 0$。在此情形下，我们转而考虑 S上的反字典序。我们可以假设因子的编号方式使得 $w_{\widetilde{\alpha}^{(1)}} \succ \cdots \succ w_{\widetilde{\alpha}^{(r)}}$ 且 $w_{\widetilde{\beta}^{(1)}} \succ \cdots \succ w_{\widetilde{\beta}^{(r)}}$。由于 φ 保持该排序，且 $\varphi(f) = 0$，因此有 $\varphi(w_{\widetilde{\alpha}^{(i)}}) = \varphi(w_{\widetilde{\beta}^{(i)}})$。由于 $w_{\widetilde{\alpha}^{(1)}} \cdots w_{\widetilde{\alpha}^{(r)}}$在反字典序下是首项，这说明 $w_{\widetilde{\alpha}^{(r)}} \succ w_{\widetilde{\beta}^{(r)}}$。于是 $\alpha_{01}^{(r)} > \beta_{01}^{(r)} \geq 0$。因此，在另一个因子 $w_{\widetilde{\alpha}^{(i)}}$中，我们有 $\alpha_{02}^{(i)} > 0$。由此，我们构造出如下关系

$$w_{\widetilde{\alpha}^{(i)}} w_{\widetilde{\alpha}^{(r)}} - w_{(\alpha_{01}^{(i)}+1,\alpha_{02}^{(i)}-1,\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_n^{(i)})} w_{(\alpha_{01}^{(r)}-1,\alpha_{02}^{(r)}+1,\alpha_1^{(r)},\ldots,\alpha_n^{(r)})} \in \mathrm{I}(Y_{N,d}).$$

As

$$w_{(\alpha_{01}^{(i)}+1,\alpha_{02}^{(i)}-1,\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_n^{(i)})} \succ w_{\widetilde{\alpha}^{(i)}} \succeq w_{\widetilde{\alpha}^{(r)}} \succ w_{(\alpha_{01}^{(r)}-1,\alpha_{02}^{(r)}+1,\alpha_1^{(r)},\ldots,\alpha_n^{(r)})},$$

首项 s $w_{\widetilde{\alpha}^{(i)}} w_{\widetilde{\alpha}^{(r)}}$i □

下面的命题 4.15 展示了如何将引理 4.14 应用于代数 R^G。为避免繁复的记号，我们针对循环群陈述该命题。随后，该构造可应用于任意阿贝尔群。

命题 4.15. 设 $G = \langle M_{d;0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \rangle \subset \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})$，并设 M为对角分块矩阵，其分块为 $M_{d;0,\ldots,0}, M_{d;\alpha_1\ldots,\alpha_1}, \ldots, M_{d;\alpha_n,\ldots,\alpha_n}$，大小任意。若 A($X_{n,d}^G$) 是一个二次 Gr¨obner代数，则由群 $\langle M \rangle$ 给出的代数也是如此。

证明。我们取 $\ell_1, \ldots, \ell_n$为 M 的对角分块的大小，并按照引理 4.14 定义映射 ψ。于是，G 的单项式不变量集合是$\langle M \rangle$ 的单项式不变量在 ψ 下的像。结论由引理 4.14 得出。□

将命题 4.15 应用于命题 4.12 中的群，我们得到以下推论。

推论 4.16。设 $G = \langle M \rangle$ 为 d阶循环群，其中 M 是一个具有三个分块 $M_{d;0、\ldots\ldots、0}$、 $M_{d;k、\ldots\ldots、k}$、$M_{d;d-k、\ldots\ldots、d-k}$的对角分块矩阵，各分块大小任意。若 d为偶数且 GCD(d、 k) $= 1$，则代数 A($X_{n,\ d}^G$) 是 G-二次的。如果 M 由三个分块$M_{d;0、\ldots\ldots、0}$、 $M_{d;\alpha_1、\ldots\ldots、\alpha_1}$、 $M_{d;\alpha_2、\ldots\ldots、\alpha_2}$组成，并且 GCD($d$、 α_1、 α_2) > 1., 同样成立。

例4.17 探讨了一种处理代数 A($X_{n,\ d}^G$) 的 Koszul 性的替代方法 .

例 4.17。设 $G = \langle M_{4;0,\ 1,\ 2,\ 3} \rangle \subset \mathrm{GL}(4, \mathbb{K})$ 是一个 4 阶循环群。代数 $R^{\overline{G}}$由例 3.14 中给出的单项式集合 $\mathcal{B}_1$ 生成。定义理想 I($X_{3,\ 4}^G$) $\subset \mathbb{K}[w_0, \ldots, w_9]$ 在逆字典序项序下具有二次 Gr¨öbner 基，其中 $w_0 > \cdots > w_9$；如果将变量 w_i 映射到按逆字典序排列的单项式 $\mathcal{B}_1$，且 $x_1 > x_3 > x_0 > x_2$。证明 $R^{\overline{G}}$ 具有 Koszul 性的另一种方法如下。设 S 是三个变量上的第二维罗内子环的两个副本的塞格雷积。更具体地说，我们令

$$S = \mathbb{K}[y_0^2, y_1^2, y_2^2, y_0y_1, y_0y_2, y_1y_2] \circ \mathbb{K}[z_0^2, z_1^2, z_2^2, z_0z_1, z_0z_2, z_1z_2] = \mathbb{K}[y_iy_jz_kz_\ell]_{0 \leq i,j,k,\ell \leq 2}.$$

根据 [2]，由于 Veronese 子代数的塞格雷积是 Koszul 的，因此这是一个 Koszul 代数。由以下映射诱导出一个满同态 $S \longrightarrow R^{\overline{G}}$

$$y_0 \mapsto x_0^2, \quad y_1 \mapsto x_2^2, \quad y_2 \mapsto x_1x_3, \quad z_0 \mapsto x_0x_2, \quad z_1 \mapsto x_1^2, \quad z_2 \mapsto x_3^2.$$

事实上， $R^{\overline{G}} \cong S/(y_0y_1 - z_0^2, y_2^2 - z_1z_2)$，且 $y_0y_1 - z_0^2, y_2^2 - z_1z_2$ 是定义在 S 的生成元上的线性形式正则序列。这证明 $R^{\overline{G}}$ 是 Koszul 的，因为 Koszul 代数被次数为一或二的元素构成的正则序列取商后仍是 Koszul 的，见 [3]。

遗憾的是，我们无法将例4.17中的技巧用于 $\langle M_{6;0,1,2,3}\rangle$，尽管根据命题 3.19，它也是二次的。不过，我们乐观地认为，还存在其他可以应用类似思路的例子。

5. Open problems and conjectures

在最后一节中，我们汇集了前几节中遇到的开放问题，并提出两个猜想。

(1) 设 $Y_{2,4}$ 是由 $\mathcal{M}_{2,4} \setminus \{x_0x_1x_2^2\}$ 参数化的单项式投影。A($Y_{2,4}$) 是 Koszul 代数吗？(2) 夹点 Veronese代数 PV(n, d, s) 是否只有在 $d > s > 1$ 为二次的情况下才是二次代数，其中 $s \geq \lceil \frac{n+2}{2} \rceil$，或许存在少数偶然例外？(3) 给定阶为 d 的有限阿贝尔群 $G \subset \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})$，我们能否确定 A($X_n^G$,$d$) 是否为二次代数？(4) 设 $G \subset \mathrm{GL}(3, \mathbb{K})$ 是一个阶为 d 的有限阿贝尔群。当且仅当 I(X_2^G,d) 有一个二次 Gr¨obner 基时，A(X_2^G,d) 是否为二次代数？(5) 设 $G = \langle M_{d;0,1,2,3}\rangle \subset \mathrm{GL}(4, \mathbb{K})$ 是一个阶为 d 的循环群。假设 d 是偶数。当且仅当 I(X_3^G,d) 有一个二次 Gr¨obner 基时，A(X_3^G,d) 是否为二次代数？

我们在论文末尾基于前几节的结果、[9,推论5.7(2)], 以及 Macaulay2 [21] 计算，提出两个猜想。

猜想5.1. 设 $n \geq 3$，取由对角矩阵生成的阶为 d 的循环群 $G \subset \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})$

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\alpha_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

其中 e 是 d 的本原根。代数 A($X_{n,d}^G$) 是二次的，当且仅当对所有$i < j < k$，代数 A($X^{G^i_{,\ j\,k\ ,}}_{2\,d}$) 都是二次的，其中 $G^{i,j,k} \subset \mathrm{GL}(3, \mathbb{K})$ 表示由对角矩阵生成的循环群

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha_i} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha_j} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\alpha_k} \end{pmatrix}.$$

猜想 5.2. 设 $G \subset \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})$ 是一个阶为 d 的有限阿贝尔群。当且仅当 I($X_{n,d}^G$) 有一个二次的 Gr ¨obner 基时，代数 A($X_{n,d}^G$) 才是二次的。

References

[1] A. Alzati 和 F. Russo, *On the k-normality of projected algebraic varieties.* 巴西数学会通报，新系列 33 (2002), 27–48。[2]J. Backelin 和 R. Fr¨oberg, *Koszul algebras, Veronese embeddings, and rings with linear resolutions.* Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 30 (1985), 85–97。[3] S. Barcanescu 和 N. Manolache, *Betti numbers of Segre–Veronese singularities.* Rev. Roumaine Math. Pure Appl. 26 (1981), 548–565。[4] C. Birkenhake, *Noncomplete linear systems on abelian varieties.* Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 1885-1908。[5] G. Caviglia, *The pinched Veronese is Koszul*, 代数组合学杂志 30 (2009) 539–548。[6] G. Caviglia 和 A. Conca, *Koszul property of projections of the Veronese cubic surface.* Adv. in Math. 234 (2013), 404–413。[7] L. Colarte-G´omez, *Gröbner's problem and the geometry of GT-varieties.* 博士论文，巴塞罗那大学，西班牙巴塞罗那，2021 年 7 月。[8] L. Colarte-G´omez、E. Mezzetti 和 R. M. Mir´o-Roig, *On the arithmetic Cohen-Macaulayness of varieties param-eterized by Togliatti systems.* Ann. Mat. Pura Appl. 200 (2021), 1757–1780。[9] L. Colarte-G´omez 和 R.M. Mir´o-Roig, *Minimal set of binomial generators for certain Veronese 3-fold projections*。J. Pure Appl. Algebra 224 (2020), 768–788。[10] L. Colarte-G´omez 和 R. M. Mir´o-Roig, *The canonical module of GT-varieties and the normal bundle of RL-varieties.* Mediterranean Journal of Mathematics. 19 (2022), 1–23。[11] A. Conca、E. De Negri 和 R. M. Rossi, *Koszul algebra and regularity, in Commutative Algebra.* Springer，纽约，2013，285–315。[12] A. Conca、J. Herzog、N.V. Trung、G. Valla, *Diagonal subalgebras of bigraded algebras and embeddings of blow-upsof projective spaces*，Amer. J. Math. 119 (1997) 859–901。[13] A. Conca、S. B. Iyengar、H. D. Nguyen 和 T. R¨omer, *Absolutely Koszul algebras and the Backelin-Roos property.*Acta Math Vietnam 40 (2015), 353–374。[14] D. Eisenbud、A. Reeves、B. Totaro, *Initial ideals, Veronese subrings, and rates of algebras*，Adv. Math. 109 (1994) 168–187。[15] S. Goto、N. Suzuki 和 K. Watanabe, *On affine semigroup rings*。Japanese Journal of Mathematics. 2:1 (1976), 1–12。[16] W. Gr¨obner, *Über Veronessche Varietäten und deren Projektionen*, Arch. Math. 16 (1965), 257 –264。[17] L. T. Hoa 和 N. V. Trung, *Affine semigroups and Cohen-Macaulay rings generated by monomials*，Transactions of the American Mathematical Society 298 (1985), 145 - 167。[18] L. T. Hoa, *Classiffication of the triple projections of Veronese varieties*，Mathematische Nachrichten 128 (1986), 185 - 197。[19] M. Hochster, *Rings of Invariants of Tori, Cohen-Macaulay Rings Generated by Monomials, and Polytopes* Annals of Mathematic 96 (1972), 318-337。[20] J. A. Eagon 和 M. Hochster, *Cohen-Macaulay Rings, Invariant Theory, and the Generic Perfection of Deter-minantal Loci*。American Journal of Mathematics. 93:4 (1971), 1020-1058。[21] D.R. Grayson 和 M.E. Stillman, *Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry*，可在 http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/ 获取[22] D.B. Priddy, *Koszul resolutions*，Trans. Amer. Math. Soc. 152 (1970), 39–60。[23] P. Schenzel, *On Veronesean embeddings and projections of Veronesean varieties* Archiv der Mathematik. 30 (1978), 391 - 397。[24] N. V. Trung, *Classification of the double projections of Veronese varieties*，Journal of Mathematics of Kyoto University 22 (1982), 567 - 581。

[25] N . Y Tr(1984), 47–67, *Projections of one-dimensional Veronese varieties*, Mathematische Nachrichten .

Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences, Sniadeckich 8, 00-656 Warwaw, Poland*Email address*: lcolartegomez@impan.pl

Facultat de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, Gran Via des les Corts Cata-lanes 585, 08007 Barcelona, Spain
Email address: miro@ub.edu，开放研究者与贡献者身份识别码 0000-0003-1375-6547

Dipartimento di Matematica, Università di Genova, Via Dodecaneso 35, 16146 Genova, Italy
Email address: nicklasson@dima.unige.it