arXiv:2303.09633v1 [math.GR] 16 Mar 2023

群的 n 重张量积的有限性条件

RAIMUNDO BASTOS 和 GUILHERME ORTEGA

Abstract. 设 G 是一个有限生成群。我们证明， n 重张量积 $G^{\otimes n}$ 有限（分别为多循环）当且仅当 G 有限（分别为多循环）。此外，假设 G 是有限表示的，我们证明 $G^{\otimes n}$ 是有限表示的当且仅当 $\gamma_n(G)$ 是有限表示的。我们还考察群的非阿贝尔张量积的一些有限性条件。

1. Introduction

设 G 和 H 是两个群，它们彼此（从右侧）作用，

$$G \times H \to G,\ (g,h) \mapsto g^h;\ \ H \times G \to H,\ (h,g) \mapsto h^g$$

并且通过共轭作用于自身，使得对所有 g、$g_1 \in G$ 和 h、$h_1 \in H$，

$$(1) \qquad g^{(h^{g_1})} = \left(\left(g^{g_1^{-1}}\right)^h\right)^{g_1} \ \text{ and } \ h^{\left(g^{h_1}\right)} = \left(\left(h^{h_1^{-1}}\right)^g\right)^{h_1}.$$

在这种情况下，我们称 G 和 H 彼此相容地作用。

设 G 和 H 是彼此相容地作用的群。非阿贝尔张量积 $G \otimes H$ 由 Brown 和 Loday [5]在 Miller [17], 、Dennis [7] 和 Lue [16]的相关工作基础上引入。它定义为由所有符号 $g \otimes h$、 $g \in G$、 $h \in H$生成的群，并满足以下关系：

$$gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h) \quad \text{and} \quad g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1})$$

对所有 g、$g_1 \in G$、 h、$h_1 \in H$ 均成立。当 $G = H$ 且所有作用都是共轭作用时， $G \otimes G$ 就是非阿贝尔张量平方。现在， G 在 $G \otimes G$ 上有一个定义良好的作用，其定义为

$$(g_1 \otimes g_2)^{g_3} = g_1^{g_3} \otimes g_2^{g_3},$$

2010年 数学主题分类。20E06、20E22、20E34、20F18、20F24、20J99。
关键词与短语：有限表示群；有限性条件；群的非阿贝尔张量积； n重张量积。

其中 $g_i \in G$。此外， $G \otimes G$ 在 G 上有一个自然作用，其定义为

$$g_1^{g_2 \otimes g_3} = g_1^{[g_2, g_3]}.$$

对于这些（相容的）作用，我们用 $G^{\otimes 3}$ 表示非阿贝尔张量积（$G \otimes G$）$\otimes G$。此外，对于任意 $n \geqslant 3$，我们可以通过考虑 G 和 $G^{\otimes n-1}$ 彼此之间由下式定义的作用，归纳地定义 n 重张量积，记作 $G^{\otimes n}$:

$$(((g_1 \otimes g_2) \otimes \ldots \otimes g_{n-2}) \otimes g_{n-1})^{g_n} = ((g_1^{g_n} \otimes g_2^{g_n}) \otimes \ldots \otimes g_{n-2}^{g_n}) \otimes g_{n-1}^{g_n}$$

和

$$g_1^{((g_2 \otimes g_3) \otimes \ldots \otimes g_{n-1}) \otimes g_n} = g_1^{[g_2, g_3, \ldots, g_n]}.$$

注意，所有涉及的作用都是相容的。此外，存在一个良定义的同态 λ_n^G： $G^{\otimes n} \to \gamma_n(G)$，其在生成元上的定义为

$$((g_1 \otimes g_2) \otimes \ldots \otimes g_{n-1}) \otimes g_n \mapsto [g_1, g_2, \ldots, g_n].$$

这里 λ_2^G 对应于 [5] 的导出映射 κ ，且 $\ker(\lambda_2^G)$ 同构于 $\pi_3(SK(G, 1))$，其中 $SK(G, 1)$ 是 Eilenberg-MacLane 空间 $K(G, 1)$ 的悬挂。根据 [23, 命题 2.8]，正合列

$$1 \to \Delta(G) \to \ker(\lambda_2^G) \to H_2(G) \to 1$$

是正合的，其中 $\Delta(G) = \langle g \otimes g \mid g \in G \rangle$ 和 $H_2(G)$ 是群 G 的二阶同调群。

本文研究群的非阿贝尔张量积及相关构造的一些有限性条件。许多论文研究了非阿贝尔张量积及相关构造的有限性条件（参见 [1, 2, 8, 9, 10, 11, 15,18, 24] 及其中引用的文献，了解更多结果）。

在 [10], Donadze 和 Garcia-Martinez 证明，若 G是有限生成群，则 n重张量积 $G^{\otimes n}$ 有限生成，当且仅当子群 $\gamma_n(G)$ 有限生成。本文证明了这一结果对有限表示群的类似结论。

THEOREM 1.1. 设 G 是有限表示群。那么， n重张量积 $G^{\otimes n}$ 有限表示，当且仅当 $\gamma_n(G)$ 有限表示。

显然， $G^{\otimes n}$ 的有限性并不意味着 G的有限性。例如，若 $G = C_{p^\infty}$ 是普吕弗群，则对任意 $n \geqslant 2$，$G^{\otimes n}$ 都是平凡的（更多详情见 [20] ）。多循环群也会出现同样的现象。我们描述以下有限性条件：

THEOREM 1.2. 设 G 是一个有限生成群。

(1) n重张量积 $G^{\otimes n}$ 有限，当且仅当 G 有限。(2) n重张量积 $G^{\otimes n}$ 是多循环群，当且仅当 G 是多循环群。

设 G 和 H 是彼此相容作用的群。通常，将 H作用下 G 的导子记为 $[G,H]$，定义为 G的子群 $\langle g^{-1}g^h \mid g \in G, h \in H\rangle$ 。类似地，H的子群 $[H,G] = \langle h^{-1}h^g \mid h \in H, g \in G\rangle$ 称为 G作用下 H 的导子。根据 [5, 命题 2.3 (b)]，，存在满同态：λ： $G \otimes H \to [G,H]$和 λ'：$G \otimes H \to [H,G]$，对每个 $g \in G$ 和 $h \in H$，分别由 $\lambda(g \otimes h) = g^{-1}g^h$ 和 $\lambda'(g \otimes h) = h^{-g}h$给出。特别地，在 n重张量积的语境中，通常写作λ_n^G，而不是 λ'。

[9]的作者证明，若 G 和 H 是彼此兼容作用的有限生成群，则非阿贝尔张量积$G \otimes H$ 是有限生成的，当且仅当导子 $[G,H]$ 和$[H,G]$ 是有限生成的。自然会提出这样一个问题：对于有限表示群，上述结果是否也成立？我们得到以下相关结果。

THEOREM 1.3. 设 G 和 H 是彼此兼容作用的有限生成群。若导子 $[G,H]$ 是有限表示的，则非阿贝尔张量积 $G \otimes H$ 也是有限表示的。

本文组织如下。下一节给出定理 1.1 和定理 1.2 的证明。此外，我们证明，若 G 是有限表示的，则对每个 $n \geq 2$ ，$\ker(\lambda_n^G)$和 n阶幂零乘子 $M_n(G)$都是有限生成的（见下文的引理 2.2 和推论 2.3）。第三节证明定理 1.3。最后一节给出若干关于有限表示群的舒尔–贝尔型定理。

2. n-FOLD TENSOR PRODUCT OF GROUPS

约定。设 H 是 G的正规子群。那么，对于每个 $g \in G, h \in H$，以下同态 $G \otimes H \to [G,H]$和 $G \wedge H \to [G,H]$, $g \otimes h \mapsto [g,h]$,$g \wedge h \mapsto [g,h]$将记作 $[\ ,\ ]$。

设 M、N、P 为群，使我们可以定义交叉模 $\mu : M \to P$ 和 $\nu : N \to P$。注意，借助这些映射，我们可以定义 M 和 N 之间的相容作用。将纤维积定义为

$$M \times_P N = \{(m,n) \in M \times N \mid \mu(m) = \nu(n)\}.$$

（非阿贝尔）外积 $M \wedge^P N$ 定义如下：

$$M \wedge^P N = \frac{M \otimes N}{\langle m \otimes n | (m,n) \in M \times_P N \rangle^{M \otimes N}}.$$

PROPOSITION 2.1. 令 M、N、P 为群，使得我们可以定义交叉模 μ：$M \to P$ 和 ν：$N \to P$。

(1)（Brown 和 Loday，[5,定理 2.12]）存在一个正合列：

$$\Gamma\big(M \times_P N / \langle M, N \rangle\big) \to M \otimes N \to M \wedge^P N \to 1,$$

其中，Γ 是[26]中定义的 Whitehead 的泛二次函子，且 $\langle M, N \rangle$ 是 $\lambda \times \lambda$'的像。

(2) 令 G 为一个群，n 为一个正整数。则

$$\Gamma\big(\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)\big) \to \ker\Big([\ ,\ ] : G \otimes \gamma_n(G) \to \gamma_{n+1}(G)\Big) \to$$

$$\to \ker\Big([\ ,\ ] : G \wedge \gamma_n(G) \to \gamma_{n+1}(G)\Big) \to 1.$$

证明。(2) 将第一项调整为我们的情况，令 inc：$\gamma_n(G) \to G$ 和 Id：$G \to G$，则我们有：

$$\gamma_n(G) \times_G G = \{(g,h) \in \gamma_n(G) \times G |\ g = h\} = \gamma_n(G),$$

并且对于任意 $g \in \gamma_n(G)$，$h \in G$，

$$\lambda \times \lambda'(g \otimes h) = ([g,h],[g,h]).$$

因此，$\langle \gamma_n(G)\ G \rangle \cong \gamma_{n+1}(G)$。最后，

$$\gamma_n(G) \wedge^G G = \frac{\gamma_n(G) \otimes G}{\langle g \otimes h | g = h \rangle^{\gamma_n(G) \otimes G}} = \gamma_n(G) \wedge G.$$

根据前一项，我们得到以下正合列：

$$\Gamma\big(\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)\big) \to \gamma_n(G) \otimes G \to \gamma_n(G) \wedge G \to 1$$

因此可得，

$$\Gamma\big(\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)\big) \to \ker\Big([\ ,\ ] : G \otimes \gamma_n(G) \to \gamma_{n+1}(G)\Big) \to$$

$$\to \ker\Big([\ ,\ ] : G \wedge \gamma_n(G) \to \gamma_{n+1}(G)\Big) \to 1.$$

□

首先我们将证明，若 G 是有限表示的，则核 $\ker(\lambda_n^G)$ 也是有限表示的。回顾一下，$G^{\otimes n}$ 是 $\ker(\lambda_n^G)$ 的一个中心扩张，其扩张群为$\gamma_n(G)$。

LEMMA 2.2. 设 G 为有限表示群。则对每个 $n \geq 2$，核 $\ker(\lambda_n^G)$ 都是有限生成的。

证明。证明采用关于 n 的归纳法。假设 $n=2$。众所周知，$\ker\Big([\ ,\ ]: G\wedge G\to[G,G]\Big)$ 同构于 $H_2(G)$，后者是有限生成的，因为 G 是有限表示的 [21, 14.1.5]。另一方面，根据 [23, 命题 2.8]，我们有一个短正合列：

$$1\to\Delta(G)\to\ker\Big(\lambda_2^G: G\otimes G\to[G,G]\Big)\to H_2(G)\to 1,$$

其中 $\Delta(G)=\langle g\otimes g\ \mid\ g\in G\rangle$。由于 G^{ab} 有限生成，$\Delta(G^{ab})$ 也是有限生成的，见第 [23, 节，由此可知 $\ker\Big(\lambda_2^G: G\otimes G\to[G,G]\Big)$ 是有限生成的。

现在，假设该引理对 λ_n^G 成立，我们将证明它对 λ_{n+1}^G也成立。考虑群的中心扩张

$$1\to\ker\Big(\lambda_n^G\Big)\to G^{\otimes n}\to\gamma_n(G)\to 1.$$

根据命题 9],

$$\Big(\ker\Big(\lambda_n^G\Big)\otimes G\Big)\to G^{\otimes n}\otimes G\to\gamma_n(G)\otimes G\to 1$$

是一个正合列。将同态 $\ker\Big(\lambda_n^G\Big)\otimes G\to G^{\otimes n}\otimes G$ 记为 σ，其像记为 $\sigma\Big(\ker\Big(\lambda_n^G\Big)\otimes G\Big)$。于是得到如下具有正合行的交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \sigma\Big(\ker\Big(\lambda_n^G\Big)\otimes G\Big) & \longrightarrow & G^{\otimes n+1} & \longrightarrow & \gamma_n(G)\otimes G & \longrightarrow & 1\\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_{n+1}^G} & & \downarrow{\scriptstyle [\ ,\ ]} & & \\
1 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & \gamma_{n+1}(G) & \xrightarrow[Id]{} & \gamma_{n+1}(G) & \longrightarrow & 1,
\end{array}$$

由此得到以下正合列：

$$\sigma\Big(\ker\Big(\lambda_n^G\Big)\otimes G\Big)\hookrightarrow\ker\Big(\lambda_{n+1}^G\Big)\twoheadrightarrow\ker\Big([\ ,\ ]:\gamma_n(G)\otimes G\to\gamma_{n+1}(G)\Big).$$

我们将证明此正合列中的首项和末项都是有限生成的。由于 $\ker\Big(\lambda_n^G\Big)$ 是阿贝尔群，且在 G 上的作用平凡，根据 [14, 命题 3.2] ，我们有：

$$\ker\Big(\lambda_n^G\Big)\otimes G=\ker\Big(\lambda_n^G\Big)\otimes_G I(G),$$

其中 $I(G)$ 表示 G 的增广理想。由于 G 是有限生成的， $I(G)$ 是有限生成的 G-模。根据归纳假设，我们得到 $\ker\Big(\lambda_n^G\Big)\otimes_G G$ 是有限生成群。因此，

$\sigma\Big(\ker\ \Big(\lambda_n^G\Big)\otimes G\Big)$ 是有限生成的。此外，根据命题 2.1，存在一个正合列：

$$\Gamma\big(\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)\big)\to\ker\Big([\ ,\ ]:G\otimes\gamma_n(G)\to\gamma_{n+1}(G)\Big)\to$$

$$\to\ker\Big([\ ,\ ]:G\wedge\gamma_n(G)\to\gamma_{n+1}(G)\Big)\to 1.$$

由于 $\Gamma\big(\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)\big)$ 是有限生成的，只需证明 $\ker\Big([\ ,\ ]:G\wedge\gamma_n(G)\to\gamma_{n+1}(G)\Big)$ 是有限生成的。为此，我们将使用以下正合列（见 [12, 注记 3]）：

$$H_3\big(G/\gamma_n(G)\big)\to\ker\Big([\ ,\ ]:G\wedge\gamma_n(G)\to\gamma_{n+1}(G)\Big)\to H_2(G).$$

我们已经指出，$H_2(G)$是有限生成的。此外，由于 $G/\gamma_n(G)$是多循环群，根据 [3, 推论 5.5] $H_3\big(G/\gamma_n(G)\big)$是有限生成的，由此证明完成。□

现在我们可以证明定理 1.1。

定理 1.1 的证明。回顾一下，G是有限表示的。我们需要证明，下中心列 $\gamma_n(G)$的第 n项是有限表示的，当且仅当 $G^{\otimes n}$ 是有限表示的。

子群 $\ker\Big(\lambda_n^G\colon\ G^{\otimes n}\to\gamma_n(G)\Big)$ 是 $G^{\otimes n}$的中心子群，并且根据引理 2.2，它是有限表示的。因此，以下扩张

$$1\to\ker\Big(\lambda_n^G:G^{\otimes n}\to\gamma_n(G)\Big)\to G^{\otimes n}\to\gamma_n(G)\to 1,$$

表明，当且仅当 $\gamma_n(G)$是有限表示的，n重张量积 $G^{\otimes n}$ 才是有限表示的。□

设 G 是一个群，F 是一个自由群，且对于某个 F的正规子群 R，有 $G=F/R$。第 n类幂零乘子 $M_n(G)$定义为

$$M_n(G)=\frac{R\cap\gamma_n(F)}{\gamma_n(R,F)},$$

其中 $\gamma_1(R,F)=R$，且 $\gamma_{k+1}(R,F)=[\gamma_k(R,F)\ F]$。特别地，$M_1(G)\cong H_2(G)$是 G的舒尔乘子。

根据 Hall [21, 14.1.5]，有限表示群 G的舒尔乘子 $M_1(G)$是有限生成的。我们得到以下相关结果。

Corollary 2.3. 设 G 是一个有限表示群。那么对于所有 $n\geq 1$，n 阶幂零乘子 $M_n(G)$ 都是有限生成的。

证明. 若 $n = 1$, 则 $M_1(G)$ 是有限生成的 [21, 14.1.5]。现在我们可以假设 $n \geq 2$。根据 [6], $M_n(G)$ 是 $\ker\left(\lambda_{n+1}^G : G^{\otimes n+1} \to \gamma_{n+1}(G)\right)$ 的满同态像。根据引理 2.2, $M_n(G)$ 是（阿贝尔）有限生成的。□

令 $\nu(G)$ 为如下定义的群: [22]

$$\nu(G) := \langle G \cup G^{\varphi} \mid [g_1, g_2{}^{\varphi}]^{g_3} = [g_1{}^{g_3}, (g_2{}^{g_3})^{\varphi}] = [g_1, g_2{}^{\varphi}]^{g_3{}^{\varphi}},\ \ g_i \in G\rangle.$$

研究 $\nu(G)$ 的动机在于交换子关联: 事实上, 对所有 $g, h \in G$, 由 $g \otimes h \mapsto [g, h^{\varphi}]$ 定义的映射 $\Phi: G \otimes G \to [G, G^{\varphi}]$ 是一个同构 [22, 命题 2.6] （另见 Ellis 和 Leonard [13]）。

以下结果是引理 2.2 的直接推论。

Corollary 2.4. 设 G为有限表示群。假设导出子群 G' 为有限表示群。那么 $\nu(G)$ 和 $\nu(G)'$ 均为有限表示群。

证明。由 [23], 可得短正合列:

$$1 \to \ker(\lambda_2^G) \to \nu(G)' \to G' \times G' \times G' \to 1$$

and

$$1 \to G \otimes G \to \nu(G) \to G \times G \to 1.$$

应用引理 2.2 和定理 1.1 以及 $n = 2$, 我们得到 $\ker(\lambda_2^G)$ 和 $G \otimes G$ 是有限表示的。因此, $\nu(G)'$ 和 $\nu(G)$ 都是有限表示的。□

Remark 2.5. 值得一提的是, 前述结果的部分内容已为人所知。更确切地说, Kochloukova 和 Sidki 证明了: G 是有限表示的, 当且仅当 $\nu(G)$ 是有限表示的 [15,定理 E]。

现在我们来讨论定理 1.2: 设 G 是有限生成的。

(1) n 重张量积 $G^{\otimes n}$ 是有限的, 当且仅当 G 是有限的。(2) n 重张量积 $G^{\otimes n}$ 是多循环的, 当且仅当 G 是多循环的。

定理 1.2 的证明。首先考虑 (1)。假设 G 是有限的。结合 [11] 和 [4, 命题 5], , 我们推出 $G^{\otimes n}$ 是有限的。

反过来, 假设 $G^{\otimes n}$ 是有限的。首先证明 G^{ab} 是有限的。由于 G 是有限生成的, 我们可推出 G^{ab} 是有限生成的, 且 $G^{ab} \cong T \times F$, 其中 T 是 G^{ab} 的挠部分, F 是其自由部分。特别地, T 是有限的。存在一个满同态 $G^{\otimes n} \to (G^{ab})^{\otimes n}$。此外, 根据 [5], $(G^{ab})^{\otimes n} \cong (G^{ab})^{\otimes_{\mathbb{Z}} n}$, 其中"$\otimes_{\mathbb{Z}}$"表示通常的

$\mathbb{Z}$-模的张量积。现在，如果 F 是无限的，那么 $(G^{ab})^{\otimes_{\mathbb{Z}} n}$ 也是无限的，这意味着 $G^{\otimes n}$ 也是无限的，矛盾。

现在，我们需要证明导出子群 G' 是有限的。由于 $\lambda_n^G\colon\ G^{\otimes n} \to \gamma_n(G)$ 是满同态，我们推得 $\gamma_n(G)$ 是有限的。因此，只需证明：如果 $\gamma_k(G)$ 是有限的，那么 $\gamma_{k-1}(G)$ 也是有限的，其中 k 是满足 $n \leq k < 2$ 的正整数。为了证明 $\gamma_k(G)$ 是有限的，只需证明 $\gamma_{k-1}(G)/\gamma_k(G)$ 是有限的。由于 $\gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)$ 是有限生成阿贝尔群，只需证明

$$[g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}^m]\gamma_k(G) \quad = \quad [g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}]^m \gamma_k(G),$$

其中 m 是满足 g_1、g_2、$\ldots g_{k-1} \in G$ 的正整数。为此，我们对 m 进行归纳法。若 $m = 1$，则该公式显然成立。假设该公式对直到 $m-1$ 为止的情形均成立；我们将证明它对 m 也成立。

$$\begin{aligned}
[g_1, \ldots, g_{k-1}^m] &= [g_1, \ldots, g_{k-1}][g_1, \ldots, g_{k-1}^{m-1}]^{g_{k-1}} \\
&= [g_1, \ldots, g_{k-1}][g_1, \ldots, g_{k-1}^{m-1}][g_1, \ldots, g_{k-1}^{m-1}, g_{k-1}] \\
&\equiv [g_1, \ldots, g_{k-1}]^m \mod \gamma_k(G)
\end{aligned}$$

令 $|G^{ab}| = m$，那么 G 中元素的任意 m 次幂都是 G' 的元素，因此交换子 $[g_1, \ldots, g_{k-1}]\gamma_k(G)$ 的阶整除 m。由此可知 G' 是有限的，证明完毕。

现在我们处理第 (2) 项。假设 G 是多循环群。根据 Moravec 定理 [18], ，我们推得 n 重张量积 $G^{\otimes n}$ 是多循环群。

反过来，假设 $G^{\otimes n}$ 是多循环群。因此， $\gamma_n(G)$ 是多循环群。由于多循环群构成的类对扩张封闭，只需证明 $G/\gamma_n(G)$ 是多循环群。注意， $G/\gamma_n(G)$ 是有限生成幂零群，特别地，它是多循环群。□

Remark 2.6. 值得一提的是，定理 1.2 (1) 中 $n = 2$ 的情形已在 [20, 定理 3.1] 中讨论过。

3. On the non-abelian tensor product of finitely presented group

本节中，我们考察特定导子子群对非阿贝尔张量积结构的影响。这种方法主要受以下工作的启发：Brown、Johnson 和 Robertson [4, 节，Nakaoka [19], Visscher [25] 以及 Donadze、Ladra 和 Thomas [9, 节 3]。

定理 1.3 的证明。回忆一下， G 和 H 是彼此相容作用的有限生成群，且导子 $[G,H]$ 是有限表示的。我们需要证明非阿贝尔张量积 $G\otimes H$ 是有限表示的。

根据 $[5,$ 命题 2.3 (b) 和 (d)$],$ ，$G\otimes H$ 非阿贝尔张量积λ是以 $[G,H]$ 为核的 λ 的中心扩张，其中 $G\otimes H \to: [G,H]\, g\otimes h \mapsto g^{-1}g^h$，是一个满同态。根据 $[9,$ 命题 5.1$],$ ，我们推得 $G\otimes H$ 是有限生成的。因此，只需证明 $\ker(\lambda)$ 是有限生成的。

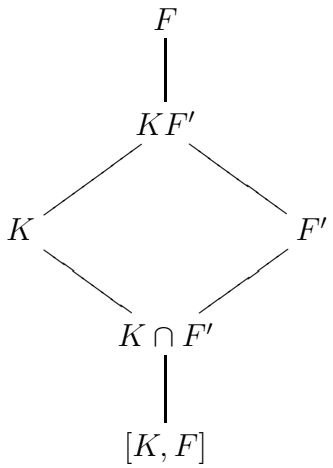
由于 $G\otimes H$是有限生成的，因此存在满同态 $p\colon F\to G\otimes H$，其中 F是有限秩自由群。定义 $\lambda'\colon F\to [G,H]$ 为复合映射 $\lambda\circ p$。于是，由下列交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \ker(\lambda') & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\lambda'} & [G,H] & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle Id_{[G,H]}} & & \\
1 & \longrightarrow & \ker(\lambda) & \longrightarrow & G\otimes H & \xrightarrow[\lambda]{} & [G,H] & \longrightarrow & 1,
\end{array}$$

我们得到一个满同态 $\ker(\lambda')\to\ker(\lambda)$，它由 $p\colon F\to G\otimes H$ 诱导。此外，由于 $\ker(\lambda)\le Z(G\otimes H)$，我们得到一个满同态

$$\frac{ker(\lambda')}{[ker(\lambda'),F]}\to\frac{\ker(\lambda)}{[ker(\lambda),G\otimes H]}=\ker(\lambda).$$

令 $K=\ker(\lambda')$。现在，只需证明 $K/(K\cap F')$ 和 $(K\cap F')/([K,F])$ 是有限生成的。考虑以下子群格：



注意， $K/(K\cap F')$ 同构于阿贝尔化 F^{ab} 的一个子群，因此是有限生成的。此外，根据 $[21,\ 11.4.15]$,$(K\cap F')/([K,F])$ 同构于舒尔乘子 $M(F/K)=$

$M([G,H])$。根据霍尔定理，舒尔乘子 $M([G,H])$ 是有限生成的 [21, 14.1.5]。因此，$\ker(\lambda)$ 是有限表示的，证明完成。□

REMARK 3.1. 众所周知，群G 和 H 有限可表示，并不意味着它们的非阿贝尔张量积 $G \otimes H$有限可表示。例如，根据 [4, 命题 6], ，若 F 是秩为 $n \geq 2$的自由群，则非阿贝尔张量平方 $F \otimes F \cong F' \times \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$，其中 F'是可数无限秩的自由群。

THEOREM 3.2. 设 G 和 H 是彼此相容作用的群。假设 G 是有限的，且 H 有限生成。那么，非阿贝尔张量积 $G \otimes H$ 有限表示。此外，$G \otimes H$ 的每个子群都是有限表示的。

证明. 根据定理 1.3，非阿贝尔张量积 $G \otimes H$ 有限表示。现在，我们将证明 $G \otimes H$ 的每个子群都是有限表示的。事实上，考虑以下正合列：

$$1 \to \ker(\lambda) \to G \otimes H \to [G,H] \to 1,$$

其中，$[G,H] \leq G$ 是 H作用下 G 的导子。由于$G \otimes H$是有限生成的，$\ker(\lambda) \leq Z(G \otimes H)$，且指数 $[G \otimes H : \ker(\lambda)] \leq |[G,H]| < \infty$，因此核 $\ker(\lambda)$是有限生成的。所以 $G \otimes H$ 是多循环有限扩张群，结论得证。□

4. SCHUR-BAER TYPE THEOREM FOR FINITELY PRESENTEDGROUPS

本节将采用 [8] 和 [10] 的方法，证明有限表示群的舒尔–贝尔型定理。

回顾一下，若群类 $\mathfrak{X}$ 满足如下条件，则称其为舒尔类：对于任意群 G，只要因子 $G/Z(G)$属于 $\mathfrak{X}$，那么其导出子群G' 也属于 $\mathfrak{X}$。因此，著名的舒尔定理指出，有限群构成一个舒尔类 [21, 10.1.4]。舒尔定理可推广到下中心列的更高项。更确切地说，若 $G/Z_i(G)$有限，则 $\gamma_{i+1}(G)$有限（贝尔， [21, 14.5.1]）。特别地， $i = 1$ 的情形恰好就是舒尔定理。更多详情请参见 [21] 及其中所列参考文献。

回顾一下，群的正合列

$$1 \to N \to H \to G \to 1$$

称为 n-中心的，如果 $N \leq Z_n(H)$。下一个引理引自 [10]。

LEMMA 4.1. 设 $1 \to N \to H \to G \to 1$ 是一个 n-中心扩张，其中正整数 n 固定。则存在一个满同态 τ: $G^{\otimes n+1} \to \gamma_{n+1}(H)$，使下图交换

$$\begin{array}{ccc} G^{\otimes n+1} & \xrightarrow{Id} & G^{\otimes n+1} \\ \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda^G_{n+1}} \\ \gamma_{n+1}(H) & \longrightarrow & \gamma_{n+1}(G) \end{array}$$

THEOREM 4.2. 设 G 是一个有限表示群，且 $n \geq 1$。那么，以下条件等价：（

i) $\gamma_{n+1}(G)$

是有限表示的；（ii）对于任意的群的 n-中心扩张

$1 \to N \to H \to G \to 1$，$\gamma_{n+1}(H)$ 都是有限表示的。

证明。设 H 如定理所述。由引理 4.1，存在一个满同态 τ : $G^{\otimes n+1} \to \gamma_{n+1}(H)$，使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} G^{\otimes n+1} & \xrightarrow{Id} & G^{\otimes n+1} \\ \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda^G_{n+1}} \\ \gamma_{n+1}(H) & \longrightarrow & \gamma_{n+1}(G) \end{array}$$

由此图可得一个满同态:

$$\ker\left(\lambda^G_{n+1} : G^{\otimes n+1} \to \gamma_{n+1}(G)\right) \to \ker\left(\gamma_{n+1}(H) \to \gamma_{n+1}(G)\right).$$

由于 $\ker\left(\lambda^G_{n+1}\right)$ 是阿贝尔群，根据引理 2.2，$\ker\left(\gamma_{n+1}(H) \to \gamma_{n+1}(G)\right)$ 是有限表示的。因此，群的扩张

$$1 \to \ker\left(\gamma_{n+1}(H) \to \gamma_{n+1}(G)\right) \to \gamma_{n+1}(H) \to \gamma_{n+1}(G) \to 1$$

意味着 $\gamma_{n+1}(H)$ 是有限表示的，当且仅当 $\gamma_{n+1}(G)$ 是有限表示的。□

PROPOSITION 4.3. 令 $\mathfrak{X}$ 为以下群类之一:

(i) 完美有限表示群的类别；(ii) 有限表示的幂零群的类别;

(iii) 每个子群都是有限表示的有限表示群的类别。

设 $G \in \mathfrak{X}$。那么，对于每个群 $1 \to N \to H \to G \to 1$ 的 n-中心扩张 $n \geq 1$，我们有 $\gamma_{n+1}(H) \in \mathfrak{X}$。

证明。我们用 $\tau : G^{\otimes n+1} \to \gamma_{n+1}(H)$ 表示引理 4.1 中给出的图表里的第一个竖直同态。

(i)：由于 $\gamma_{n+1}(G) = G$，根据定理 4.2 γ_{n+1}，(H) 是有限表示的。另一方面，给定两个相互兼容地作用于彼此的群 M 和 N，有如下关系（参见 [5, 命题 2.3]）：

$$[m \otimes n, m' \otimes n'] = (m^n m^{-1}) \otimes ({}^{m'}n' n'^{-1}),$$

对于每个 m、$m' \in M$ 和 n、$n' \in N$。这说明 $G^{\otimes n+1}$ 是完全群，因为 G 是完全群。由于 $\gamma_{n+1}(H) = Im(\tau)$，我们得到 $\gamma_{n+1}(H) \in \mathfrak{X}$。

(ii)：由 [25, 定理 3.4 (i)]，， n重张量积 $G^{\otimes n+1}$ 是幂零的。因此，$\gamma_{n+1}(H)$ 是幂零的。此外，由于 G 是有限表示且幂零的，对于所有 $k \geq 1$，$\gamma_k(G)$ 都是有限表示的。因此，由定理 4.2 γ_{n+1}，(H) 是一个有限表示群。

(iii)：设 H_1 是 $\gamma_{n+1}(H)$ 的一个子群。我们需要证明 H_1 是有限表示的。令 δ： $H \to G$ 表示命题中给出的满同态。由于 $\delta(H_1)$ 是 G 的一个子群，它是一个有限表示群。因此，只需证明 $\ker\left(\delta|_{H_1} : H_1 \to \delta(H_1)\right)$ 是有限表示的。我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \tau^{-1}(H_1) & \xrightarrow{\lambda^G_{n+1}|_{\tau^{-1}(H_1)}} & \delta(H_1) \\ \downarrow{\scriptstyle \tau|_{\tau^{-1}(H_1)}} & & \downarrow{\scriptstyle Id} \\ H_1 & \xrightarrow{\delta|_{H_1}} & \delta(H_1) \end{array}$$

这意味着存在一个满同态 $\ker\left(\lambda^G_{n+1}|_{\tau^{-1}(H_1)}\right) \to \ker\left(\delta|_{H_1}\right)$。由于 $\ker\left(\lambda^G_{n+1}|_{\tau^{-1}(H_1)}\right) \subseteq \ker\left(\lambda^G_{n+1}\right)$，根据引理 2.2，$\ker\left(\lambda^G_{n+1}|_{\tau^{-1}(H_1)}\right)$ 是一个有限生成阿贝尔群。因此，$\ker\left(\delta|_{H_1}\right)$ 是有限呈示的。证明完毕。□

Remark 4.4. 令 $\mathfrak{X}$ 如命题 4.3 所述。则 $\mathfrak{X}$ 是一个舒尔类。

Corollary 4.5. 令 $\mathfrak{X}$ 为由以下条件定义的群类：

$$\mathfrak{X} = \{G \mid G \textit{ is nilpotent-by-finite and finitely presented}\}.$$

(1) 对于任意两个彼此相容地作用的群 G、$H \in \mathfrak{X}$，有 $G \otimes H \in \mathfrak{X}$。(2) 则 $\mathfrak{X}$ 是一个舒尔类。

证明。(1) 由 [9, 推论 3.6 (ii)], 可知，两个有限扩张幂零群的非阿贝尔张量积是有限扩张幂零群。现在，只需证明对于每个 $G, H \in \mathfrak{X}$，$G \otimes H$ 都是有限表示的。由于 G 是有限生成有限扩张幂零群，因此 G 和 $[G, H]$ 是多循环有限扩张群，因而是有限表示的。由定理 1.3，非阿贝尔张量积 $G \otimes H$ 是有限表示的。

(2) 这由引理 4.1、定理 4.2 得出。 □

Acknowledgements

作者非常感谢 Guram Donadze 和 Nora´ı Rocco 就这些结果的最佳研究方法所进行的深入讨论并提出的建议。第一作者的研究工作得到 FAPDF 和巴西国家科学技术发展委员会的资助。第二作者得到巴西高等教育人员改进协调会的资助。

Data availability

NA

References

[1] R. Bastos、I.N. Nakaoka 和 N. R. Rocco, 《群的非阿贝尔张量积的有限性条件》, 《数学月刊》187（2018）, 第 603–615 页。[2] R. Bastos、I. N. Nakaoka 和 N. R. Rocco, 《群的盒式张量积及相关构造的有限性条件》, 《代数学杂志》587（2021）, 第 594–612 页。[3] G. Baumslag、F. B. Cannonito 和 C. F. Miller III, 《可计算代数与群嵌入》, 《代数学杂志》 69 （ 1981 ）, 第 186–212 页。[4] R. Brown、D. L. Johnson 和 E. F. Robertson, 《群的非阿贝尔张量积的一些计算》, 《代数学杂志》111（1987）, 第 177–202 页。[5] R. Brown 和 J.-L. Loday, 《空间图表的范坎彭定理》, Topology 26（1987）, 第 311–335 页；附录由 M. Zisman 撰写。[6] J. Burns 和 G. Ellis, 《有限群的 Baer 不变量不等式》, 《加拿大数学通报》41（4）（1998）, 第 385–391 页。[7] R. K. Dennis, 《探寻与 K-理论密切相关的新“同调”函子》, 预印本, 康奈尔大学, 伊萨卡, 纽约州, 1976 年。[8] G. Donadze、M. Ladra 和 P. Paez-Guillan, 《Schur 定理及其与非阿贝尔张量积闭包性质的关系》, 《爱丁堡皇家学会会刊 A 辑：数学》150（2020）, 第 993–1002 页。[9] G. Donadze、M. Ladra 和 V. Thomas, 《非阿贝尔张量积的一些闭包性质》, 《代数学杂志》472（2017）, 第 399–413 页。[10]G. Donadze 和 X. Garcia-Martinez, 《Schur 和 Baer 定理的一些推广及其与同调代数的联系》, 《数学新闻》294（11）（2021）, 第 2029–2039 页。

[11] G. Ellis, 《有限群的非阿贝尔张量积是有限的》, 《代数学杂志》111（1987）, 第 203–205 页。[12] G. J. Ellis, 《群的非阿贝尔外积与群同调中的正合列》, 《格拉斯哥数学杂志》29（1987）, 第 13–19 页。[13] G. Ellis 和 F. Leonard, 《有限群舒尔乘子与张量积的计算》, Proc. Royal Irish Acad. 95A（1995）, 第 137–147 页。[14] D. Guin, 《群的非阿贝尔上同调与同调》, 《纯粹与应用代数》50（2）（1988）, 第 109–137 页。[15] D. Kochloukova 和 S. Sidki, 《群中的弱交换性》, 《代数学杂志》471（2017）, 第 319–347 页。[16] A. S.-T. Lue, 《幂零群的 Ganea 映射》, 《伦敦数学学会杂志》s2-14（1976）, 第 309–312 页。[17] C. Miller, 《群的二阶同调群：交换子之间的关系》, Proc. Am. Math. Soc. 3（1952）, 第 588–595 页。[18] P. Moravec, 《多循环群的非阿贝尔张量积是多循环群》, 《群论杂志》10（2007）, 第 795–798 页。[19] I. N. Nakaoka, 《可解群的非阿贝尔张量积》, 《群论杂志》3（2000）, 第 157–167 页。[20] M. Parvizi 和 P. Niroomand, 《外积或张量平方为 p- 群的群的结构》, 《代数学杂志》352（2012）, 第 347–353 页。[21] D. J. S. Robinson, 《群论教程》, 第 2 版, Springer-Verlag, 纽约, 1996 年。[22] N. R. Rocco, 《一种与群的非阿贝尔张量平方相关的构造》, Bol. Soc. Brasil Mat. 22（1991）, 第 63–79 页。[23] N. R. Rocco, 《有限可解群交叉嵌入的一个表示》, Comm. Algebra 22（1994）, 第 1975–1998 页。[24] V. Z. Thomas, 《有限群的非阿贝尔张量积是有限的：无同调证明》, 《格拉斯哥数学杂志》52（2010）, 第 473–477 页。[25] M. P. Visscher, 《群的非阿贝尔张量积的幂零类与可解长度》, 《巴塞尔数学档案》73（3）（1999）, 第 161–171 页。[26] J. H. C. Whitehead, 《一个特定的正合列》, 《数学年刊》52（1950）, 第 51–110 页。

Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasilia-DF, 70910-900 Brazil电子邮件地址：（Bastos） bastos@mat.unb.br；（Ortega） ortega@mat.unb.br