arXiv:2303.09670v1 [math.QA] 16 Mar 2023

松弛霍普夫单子

ALAIN BRUGUI`ERES、MARIANA HAIM 和 IGNACIO L´OPEZ FRANCO

Abstract. 霍普夫单子是霍普夫代数的推广。它们阐明了霍普夫代数理论的若干方面，并涵盖了弱 Hopf 代数和霍普夫代双代数等相关结构。然而，霍普夫单子无法涵盖霍普夫代数理论中的一些重要内容，其中最显著的是 Drinfeld 拟霍普夫代数。本文介绍一种霍普夫单子的推广，称为松弛霍普夫单子。这种推广保留了简洁的理论，同时又足够灵活，能够将拟霍普夫代数纳入其中作为实例。松弛霍普夫单子是岩浆范畴 $\mathcal{C}$ 上的余松弛岩浆单子 T，其遗忘函子 U^T以“松弛”的方式保留内 Hom。我们给出松弛霍普夫单子的多种不同刻画，并研究若干特殊情形，例如笛卡尔范畴上的松弛霍普夫单子，以及 $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$上的 $\Bbbk$-线性正合松弛霍普夫单子；后者即满足修正融合算子可逆的余幺半群代数。特别地，我们用松弛度刻画拟霍普夫代数。

Contents

引言 1
1. 预备知识与记号 4
2. 岩浆范畴 7
3. 松弛闭函子与松弛霍普夫伴随 9
4. 松弛霍普夫单子 11
5. 笛卡尔情形 17
6. 松弛 Hopf 余 magma 代数 21
7. 拟霍普夫代数 27
8. 结论 33
参考文献 33

Introduction

霍普夫单子最初是在自主范畴的背景下引入的 [5]，旨在用于量子拓扑应用；后来又推广到了任意幺半范畴 [4]。幺半范畴 $\mathcal{C}$ 上的余幺半单子（在 [15],中称为霍普夫单子，在 [14] 中称为反幺半单子，在 [5, 4]中称为双单子）是 $\mathcal{C}$的余幺半自函子范畴中的一个幺半群。若 $\mathcal{C}$上的 T 是余幺半单子，则 $\mathcal{C}$ 中 T-模所构成的 Eilenberg-Moore 范畴 $\mathcal{C}^T$ 是幺半范畴，而遗忘函子 $U^T\colon \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$ 是严格幺半的 [15]。余幺半单子推广了双代数，同理，霍普夫单子推广了霍普夫代数。然而，霍普夫代数有多种刻画方式，因而也产生了霍普夫单子的不同定义。因此，在 [5], 中，左自主范畴 $\mathcal{C}$ 上的左霍普夫单子被定义为满足以下条件的余幺半单子 T： $\mathcal{C}^T$ 是左自主的，

2020 *Mathematics Subject Classification.* 18M05,16T05,18D15. 作者感谢乌拉圭共和国大学、PEDECIBA 以及 IFUMI（法乌数学与交互研究所）提供的支持。

这一条件等价于存在某个自然变换 $S^l_X : T(^\vee T(X)) \to {}^\vee X$，称为左反 antipode；而在 [4], 中，任意幺半范畴 $\mathcal{C}$ 上的左霍普夫单子是满足以下条件的余幺半单子 T：左融合算子

$$H^l_{X,Y} = (TX \otimes \mu_Y)T_2(X, TY) : T(X \otimes TY) \to TX \otimes TY$$

是一个同构（其中 μ 和 T_2 分别表示 T 的乘法和余幺半结构）。当 $\mathcal{C}$ 是左自对偶时，此定义与前一个定义一致；而当 $\mathcal{C}$ 是左幺半闭时，这意味着 $\mathcal{C}^T$ 是左幺半闭的，且 U^T 保持左内部 Hom。

在这个完整的版本中，霍普夫单子不仅涵盖霍普夫代数，还涵盖许多变体，例如弱 Hopf 代数、Hopf 代双代数、编织范畴中的 Hopf 代数等。

然而，霍普夫单子理论未能涵盖 Hopf 代数理论的一些重要方面，最明显的例子便是 Drinfeld拟霍普夫代数——原因显而易见：若 A 是域 $\Bbbk$ 上的拟双代数，则其模范畴 A–Mod 是幺半的，但遗忘函子 A–Mod $\to$ Vect$_\Bbbk$ 并非幺半函子，这与余幺半单子的遗忘函子不同。引入结合子，修改余幺半单子的概念，从而允许遗忘函子具有“拟幺半”结构，便可克服这一困难。

然而，在推广拟霍普夫代数时，还存在一个更根本的困难：“拟霍普夫”性质（存在拟反 antipode(S、a、b)）是一个纯粹的代数条件，不容易用范畴论刻画。事实上，对于拟有限拟双代数，这样的刻画确实存在：一个拟有限拟双代数是拟霍普夫的，当且仅当其有限维模范畴是左自对偶的，且遗忘函子是左自对偶的，也就是说，它保留左对偶（见定理 64）；但这似乎并不适用于任意拟霍普夫代数。因此，为了利用对拟霍普夫性质的这一部分刻画，我们需要将讨论限制在具有“足够多对偶”的幺半范畴，以及满足某些技术条件的单子上。本文不打算走这条路，因为这样一来，我们就不得不舍弃例如笛卡尔范畴——在这类范畴中，只有单位对象具有对偶。

我们也不能通过要求融合算子 $(A \otimes m)(\Delta \otimes A) : A \otimes A \to A \otimes A$ 可逆来绕过对对偶存在性的假设，因为拟霍普夫代数 A（其乘积为 m、余乘积为 Δ）的融合算子未必是双射。Drinfeld [8] 和 Schauenburg [16] 指出，对于拟霍普夫代数，存在一种双射的修正融合算子，但这种修正融合算子是利用拟反 antipode 从融合算子构造出来的，因此不能用来定义“拟霍普夫”。另一方面，Schauenburg 指出，这种修正融合算子的存在与一个有趣的事实密切相关：如果 A 是拟霍普夫代数，那么 A–模范畴是单oidal左闭的，且遗忘函子保留左内部 Hom 函子 $[V, W]$，但不一定保留求值态射 $[V, W] \otimes V \to W$（见第 7 节）。

那么，霍普夫意味着什么？似乎若不作出选择，我们就无法回答这个问题。在本文中，我们决定探讨一种非常宽松的解释，即从内 Hom 的松弛保持这一角度来理解。这使我们作出了一个激进的选择：在岩浆范畴的世界中开展研究。岩浆范畴是一个范畴 $\mathcal{C}$，配备了一个任意函子 $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$。在这片荒凉的土地上，幺半范畴这片繁茂园地中的少数居民仍然留存。余松弛幺半群函子可替代余幺半函子，而余松弛伴随的表现则与余幺半伴随颇为相似。在岩浆范畴 $\mathcal{C}$ 上的余松弛岩浆单子 T，其特征是 $\mathcal{C}^T$ 为岩浆范畴，且 U^T 是一个严格岩浆

函子。对偶不属于这里的范畴，但我们仍然可以定义左、右内部 Hom。

函子 $U:\ \mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 在岩浆范畴之间保持内 Hom 意味着什么？为简单起见，假设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 具有左内部 Hom。[1] 若 U 是余松岩浆函子，则对 $\mathcal{D}$ 中的 A、B，存在一个典范态射$U([A,B])\to[U(A),U(B)]$，我们可以要求此态射为同构。然而，这种保持内 Hom 的方式——霍普夫单子的遗忘函子正是如此——对我们的目的而言过于强了，因为一般拟双代数A的遗忘函子 A–Mod $\to$Vect$_{\Bbbk}$ 并不满足这一条件。取而代之，我们称函子 $U:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 松弛地保持左内部 Hom，简称 U 为松弛左闭，若其配备了一个任意的自然同构 $U([A,B])\xrightarrow{\cong}[U(A),U(B)]$。这样的同构称为 U 上的松弛左闭结构。我们称伴随 $F\dashv U:\ \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 为松弛左霍普夫伴随，若 $U:\ \mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 是松弛左闭的。U 上的松弛左闭结构与 $F\dashv U$上的松弛左 Frobenius 同构 Ψ 之间存在双射；后者即自然同构 $\Psi_{X,\ A}:\ F(X\otimes U(A))\xrightarrow{\cong}F(X)\otimes A$，其中 $X\in\mathcal{C}$、$A\in\mathcal{D}$（见第3.3节）。

岩浆范畴 $\mathcal{C}$ 上的松弛左 Hopf 单子 T是一个余松弛岩浆单子 T，其遗忘函子 U^T 是松弛左闭的。这等价于存在一个自然变换

$$\beta_{X,Y}:X\otimes Y\to TX\otimes TY$$

使得自然态射

$$\Phi^{\beta}_{X,Y}=(\mu_X\otimes\mu_Y)T_2(TX,TY)T((TX\otimes\mu_Y)\beta_{X,TY}):T(X\otimes TY)\to TX\otimes TY$$

是一个同构（定理15）。这样的 β 称为 T上的松弛（左）Hopf 结构。一般而言，松弛 Hopf 结构有很多种，但它们在某个群的自由作用下构成唯一的轨道（见第 4.2 节）。如果 $\mathcal{C}$ 是闭的，那么松弛 Hopf 结构允许我们将 $\mathcal{C}$ 的内 Hom 提升到 $\mathcal{C}^T$，因此 $\mathcal{C}^T$也是闭的；提升的内 Hom 可以用一个自然变换来定义，该变换扮演着 [4]的（左）反 antipode 的角色。换言之，松弛 Hopf 单子的遗忘函子不仅（松弛地）保留内 Hom，还会创建内 Hom（定理17和定理20）。

幺半范畴 $\mathcal{C}$ 上的霍普夫单子是松弛霍普夫单子的一个特殊例子，它具有平凡的松弛霍普夫结构 $\beta=\eta\otimes\eta$，η是 T的单位；对于这一选择，β的 Φ^{β} 是左融合算子 H^l。松弛霍普夫这一概念非常宽泛，因此我们预期余幺半单子可以是松弛霍普夫单子而非霍普夫单子。不过，目前我们还没有此类行为的例子；而在笛卡尔范畴中，我们证明任意松弛霍普夫余幺半单子都是霍普夫单子（定理 24）。特别地，一个小范畴若作为余松弛岩浆单子是松弛霍普夫的，则它是一个群胚（定理 28 ）；而将其视为松弛余单子时，出于不同原因，同样如此（定理 32 ）。

余幺半群代数是一个重要的例子来源。$\Bbbk$ 上的余幺半群代数是一个 $\Bbbk$-代数 A，并配备一个代数态射 $\Delta:\ A\to A\otimes A$。Vect$_{\Bbbk}$ 上的单子 $A\otimes?$ 是一个余松弛岩浆单子，而且 Vect$_{\Bbbk}$ 上任意 $\Bbbk$-线性精确余松弛岩浆单子都属于这一类型。这种单子上的松弛左 Hopf 结构对应于一个元素 $v\in A\otimes A$，使得映射：

$$H^v:A\otimes A\to A\otimes A,\quad x\otimes y\mapsto x_{(1)}v^{(1)}\otimes x_{(2)}v^{(2)}y$$

是一个双射。这样的 v 也称为松弛 Hopf 结构。

[1]通过改用预层的表述，可以放宽这一假设。

如果 A 是双代数，我们将刻画拟有限情形下使 A成为霍普夫的松弛左霍普夫结构 v （定理 50）。松弛左霍普夫的交换双代数是霍普夫代数（推论 49）。

若 A 是拟霍普夫代数，则拟反 antipode $(\mathcal{S}, a, b)$ 会导出松弛左霍普夫结构 $v = \phi^{(-1)} \otimes \phi^{(-2)} b \mathcal{S}(\phi^{(-3)})$，而 H^v 是同构这一事实已由 Schauenburg 指出。我们将这种与拟反 antipode 相关联的 v 称为左霍普夫结构。若 A 是一个（不一定是拟有限的）拟双代数，我们定义松弛左霍普夫结构 v 的松弛度 $\mathrm{sl}(v)$；它是 A 的包络代数中的一个元素，用以衡量 v 成为霍普夫结构的障碍。由此，我们刻画了松弛左霍普夫结构中的左霍普夫结构（定理 59）；也就是说，我们给出了松弛左霍普夫拟双代数成为拟霍普夫代数的判据（推论 61）。这使我们能够纯粹从范畴论角度刻画拟霍普夫代数：它是一个拟双代数，其遗忘函子具有保持比较态射的松弛左闭结构（定理 63）。对于拟霍普夫代数 A，我们证明松弛左霍普夫结构的集合构成一个挠子，其作用群为 A 的包络代数的可逆元群；在这个挠子中，左霍普夫结构构成 $A^\times$ 作用下的一个轨道（定理 66）。

尽管我们已经有了这些判据，却仍然没有非霍普夫的松弛霍普夫双代数或拟双代数的例子。另一方面，幺半范畴中的任意幺半群都定义一个松弛霍普夫单子（例 14）；特别地，任意 $\Bbbk$-代数 A 都具有松弛霍普夫余岩浆代数结构；而对于 $n \geqslant 2$，$M_n(\Bbbk)$ 具有松弛霍普夫余岩浆代数结构，其融合算子 $(A \otimes m)(\Delta \otimes A)$ 不可逆——但 $M_n(\Bbbk)$ 不是双代数（例 41）。

文章结构。第 1 节回顾范畴、Kan 延拓、余端、预层和单子的一些经典事实，并统一若干记号。第 2 节讨论岩浆范畴、余松弛幺半群函子、余松弛幺半伴随、余松弛幺半群单子、内 Hom 和闭岩浆范畴。本节结果与所讨论对象的幺半对应物的类似经典结果十分相似，其唯一的意义在于指出，这些结果似乎竟能在不适宜生存的岩浆范畴世界中存续下来。第 3 节定义函子松弛地保留内 Hom 的含义，由此引出松弛闭函子和松弛霍普夫伴随的概念。第 4 节专门讨论松弛霍普夫单子及其基本性质、松弛 Hopf 结构、松弛对极，以及松弛霍普夫单子的模范畴中内 Hom 的构造。第 5 节考虑岩浆范畴 $\mathcal{C}$ 具有（单侧）单位对象的情形，并给出关于松弛 Hopf 结构的两个技术性结果，用以证明本节的主要定理：在笛卡尔范畴上，松弛霍普夫幺半单子与霍普夫单子一致。特别地，我们探讨与小范畴相关的单子或余单子的例子。第 6 节讨论余 magma 幺半群和余幺半群代数，第 7 节讨论拟双代数和拟霍普夫代数这一特殊情形。在简短的结论（第 8 节）中，我们提出两个尚未解决的问题。

1. Preliminaries and notations

除非另有说明，所有范畴都假定为局部小。给定两个范畴 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$，我们用 $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ 表示函子 $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 和自然变换所构成的范畴（该范畴可能不是局部小的）。

为清晰起见，当我们处理范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$时（这种情况很常见），通常用 $X, Y, \ldots$ 表示 $\mathcal{C}$中的对象，用 $A, B, \ldots$ 表示 $\mathcal{D}$ 中的对象。希望这一约定有助于辨认复杂的公式。

给定两个伴随 $G \dashv V$, $G' \dashv V'$ 以及两个构成如下图表的函子 M, N:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}' & \overset{G'}{\underset{V'}{\rightleftarrows}} & \mathcal{D}' \\ {\scriptstyle M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle N} \\ \mathcal{C} & \overset{G}{\underset{V}{\rightleftarrows}} & \mathcal{D} \end{array}$$

我们有一个自然双射 $\mathsf{Nat}(GM, NG') \xrightarrow{\cong} \mathsf{Nat}(MV', VN)$。左侧的自然变换 α 与右侧相应的自然变换 β互称伴随态射。记伴随态射为 $h : \mathrm{id} \to VG$,$e : GV \to \mathrm{id}$, $h' : \mathrm{id} \to V'G'$, $e' : G'V' \to \mathrm{id}$, 则伴随态射 α 和 β 之间满足:

$$\beta = (VNe')(V\alpha V')(hMV') \quad \text{and} \quad \alpha = (eNG')(G\beta G')(GMh').$$

1.1. 左 Kan 延拓、余端。给定局部小范畴之间的两个函子 $U\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, $F\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, 沿着 U 对 F 的左 Kan 延拓是一个函子 $H : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$，并配备一个自然变换 η: $F \to HU$，满足以下泛性质：对于每个函子 $H' : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ 以及每个自然变换α: $F \to H'U$，都存在唯一的自然变换 $\tilde{\alpha}\colon H \to H'$，使得对 $\mathcal{D}$ 中的 A，$\alpha_A = \tilde{\alpha}_{UA}\,\eta_A$。

若其存在，F 沿 U的左 Kan 延拓在唯一同构意义下唯一，记作 $\mathrm{Lan}_U(F)$。（Kan 延拓的性质见 [12]。）

若 $\mathcal{E} = \mathsf{Set}$，则左 Kan 延拓 $\mathrm{Lan}_U(F)$ 可用余端来解释。更确切地说，$\mathrm{Lan}_U(F)$ 存在，当且仅当对每个 $X \in \mathcal{C}$，余端 $\int^{A\in\mathcal{D}} \mathcal{C}(UA, X) \times F(A)$ 都存在；在这种情况下，它同构于上述余端。

1.2. 余连续扩张。给定一个局部小范畴 $\mathcal{C}$，记$\mathcal{C}$ 为预层范畴 $\mathsf{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$，即 $\mathcal{C}$ 上的预层范畴（它可能不是局部小的）。回顾一下，借助 Yoneda 嵌入$X \mapsto \mathcal{C}(-, X)$, $\mathcal{C}$ 可视为 $\mathcal{C}$ 的一个满子范畴。局部小范畴之间的函子 $U : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 通过 前复合定义一个函子 $U^* : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$。

U 的余连续扩张是一个函子 $U_!\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$，它在 $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ 上与 U 一致，并且保小极限。若此扩张存在，则它在唯一同构意义下唯一。以下条件等价:

(i) U 存在余连续扩张 $U_! : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$; (ii) U^* 存在左伴随;
(iii) 对于 $\mathcal{D}$ 上的每个预层 X，余端 $\int^{A\in\mathcal{D}} \mathcal{C}(-, U(A)) \times X(A)$ 都存在。

若这些条件成立，则余连续扩张 $U_!$ 是 U^*的左伴随，并且由余端定义:

$$U_!(X) = \int^{A\in\mathcal{D}} \mathcal{C}(-, U(A)) \times X(A) = \mathrm{Lan}_{U^{\mathrm{op}}}(X).$$

注意，若对于 $\mathcal{C}$ 的每个对象 c，函子

$$\mathcal{C}(c, U(-)) : \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$$

是可表函子的一个小余极限，则这些条件成立。特别地，它们成立

- 若 U 有左伴随 F，且在这种情况下 $U_! = F^*$; • 若 $\mathcal{D}$ 是本质小的。

1.3. 单子。设 $\mathcal{C}$ 为一个范畴。 $\mathcal{C}$ 上的单子是 $\mathcal{C}$的自函子所构成的幺半范畴中的一个幺半群，即一个三元组 (T,μ,η)，其中 T 是 $\mathcal{C}$的一个自函子， $\mu\colon T^2\to T$ 和 $\eta:\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\to T$ 是满足以下结合公理和单位公理的自然变换：

$$\mu(\mu\times\mathcal{C})=\mu(\mathcal{C}\times\mu),\qquad \mu(\eta\times\mathcal{C})=\mathrm{id}_{\mathcal{C}}=\mu(\mathcal{C}\times\eta).$$

给定这样的单子 T， $\mathcal{C}$ 中的 T-模 [2] 是 $\mathcal{C}$ 的一个对象 X，并带有一个 T 的作用，即一个满足以下条件的态射 $r\colon TX\to X$：

$$r\mu_X=rT(r),\qquad r\eta_X=\mathrm{id}_X.$$

给定 $\mathcal{C}$ 中的两个 T-模 $(X,r),(Y,\rho)$，一个 T-模态射 $f\colon(X,r)\to(Y,\rho)$ 是 $\mathcal{C}$ 中满足 T-线性条件 $fr=\rho T(f)$ 的态射 $f\colon X\to Y$。

由此， $\mathcal{C}$ 中的 T-模构成一个范畴 $\mathcal{C}^T$，称为 T 的 Eilenberg-Moore 范畴。遗忘函子 $U^T\colon\mathcal{C}^T\to\mathcal{C}$ 有一个左伴随，即自由模函子 $F^T\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}^T$，其在对象上的定义为 $F^T(X)=(TX,\mu_X)$，在态射上的定义为 $F^T(f)=T(f)$，从而 $T=U^TF^T$。

任意伴随 $F\dashv U\colon\mathcal{D}\to\mathcal{C}$，其单位为 η，余单位为 ε，都会导出 $\mathcal{C}$ 上的单子$T=UF$，其乘法为 $\mu=U\varepsilon_U$，单位为 η。

1.4. 卷积乘积。给定范畴 $\mathcal{C}$上的单子 T，伴随双射

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}},T)\xrightarrow{\cong}\mathrm{End}(U^T),\quad a\mapsto\check{a}=U^T(\varepsilon)a_{U^T}$$

当 $\mathrm{Nat}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}},T)$ 配备卷积乘积时，它是幺半群同构：对于 $a,b\in\mathrm{Nat}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}},T)$,

$$a*b=\mu T(b)a=\mu a_Tb,$$

其单位为 η。另一个伴随双射

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}},T)\xrightarrow{\cong}\mathrm{End}(F^T),\quad a\mapsto\hat{a}=\varepsilon_{F^T}F^T(a),$$

当 $\mathrm{Nat}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}},T)$ 配备 Kleisli 复合 [11], 时，它是一个同构；也就是说，它是卷积乘积的反向运算。

1.5. 提升数据。设 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 为范畴， (T,μ,η) 和 (P,m,u) 分别为 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 上的单子，并设 $G\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 为一个函子。那么以下两者之间存在一一对应关系：

(1) 函子 $\widetilde{G}\colon\mathcal{C}^T\to\mathcal{D}^P$，使得 $U^P\widetilde{G}=GU^T$（称为 G 的提升）

(2) 自然变换： $\zeta\colon P\circ G\to G\circ T$，满足：

$$\zeta m_G=G(\mu)\zeta_TP(\zeta),\qquad \zeta u_G=G(\eta).\tag{1}$$

~ G 与 ζ 之间的对应如下：

$$\widetilde{G}(X,r)=(GX,G(r)\zeta_X)\quad\text{and}\quad\zeta_X=U^P\varepsilon_{\widetilde{G}F^TX}PG(\eta_X).$$

满足 (1) 的自然变换 ζ 称为 G 的提升数据，而 G 对应的提升记为 $\widetilde{G}^\zeta$。

给定两个函子 $G,H\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 以及两个提升数据 $\zeta\colon P\circ G\to G\circ T$,$\xi\colon P\circ H\to H\circ T$，以下对象之间存在一一对应：

(1) 自然变换 $\tilde{\gamma}\colon\widetilde{G}^\zeta\to\widetilde{H}^\xi$；(2) 自然变换 $\gamma\colon G\to H\circ T$，满足：

$$H(\mu)\gamma_T\zeta=H(\mu)\xi_TP(\gamma),\tag{2}$$

$\tilde{\gamma}$ 与相应的 γ 之间的关系为：

$$\tilde{\gamma}_{(X,r)}=H(r)\gamma_X\quad\text{and}\quad\gamma_X=\tilde{\gamma}_{F^TX}G(\eta_X).$$

[2]在文献中， $\mathcal{C}$中的 T-模通常称为 T-代数。

2. 岩浆范畴

2.1. 岩浆范畴。岩浆范畴是范畴范畴中的一个岩浆，也就是说，是一个配备了函子 $\otimes\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 的范畴 $\mathcal{C}$。

给定两个岩浆范畴 $\mathcal{C},\mathcal{D}$，一个松弛岩浆函子 $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 由一个函子 $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 和一个自然变换组成

$$F^2(X,Y):F(X)\otimes F(Y)\to F(X\otimes Y),\quad X,Y\in\mathcal{C}.$$

若松弛岩浆函子 F的 F^2是同构（分别是恒等映射），则称其为强（分别称为严格）的。

松弛岩浆函子之间的自然变换 $\alpha\colon F\to G$ 若满足以下条件，则称为松弛岩浆自然变换:

$$\alpha_{X\otimes Y}F^2(X,Y)=G^2(X,Y)(\alpha_X\otimes\alpha_Y).$$

这定义了一个 2-范畴，其 0-胞腔是岩浆范畴，1-胞腔是松弛岩浆函子，2-胞腔是松弛岩浆自然变换。

对偶地，余松岩浆函子 $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个函子 $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$，并配备一个自然变换

$$F_2(X,Y):F(X\otimes Y)\to F(X)\otimes F(Y),\quad X,Y\in\mathcal{C}.$$

函子间的自然变换 $\alpha\colon F\to G$ 若满足以下条件，则称为余松弛幺半群自然变换:

$$G_2(X,Y)\alpha_{X\otimes Y}=(\alpha_X\otimes\alpha_Y)F_2(X,Y).$$

这定义了一个 2-范畴，其 0-胞腔是岩浆范畴，1-胞腔是余松弛幺半群函子，2-胞腔是余松弛幺半群自然变换。

强岩浆函子是一个余松岩浆函子 F，满足 F_2 是同构[3]

2.2. 余松弛幺半群伴随与余松弛岩浆单子。余松弛岩浆伴随是一个伴随 $F\dashv U$，其中 $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 和 $U\colon \mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 是岩浆范畴之间的余松弛岩浆函子，而该伴随的单位 $\eta:\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\to UF$ 和余单位 $\varepsilon\colon FU\to\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ 是余松弛岩浆自然变换。

引理1. 考虑岩浆范畴之间的伴随 $F\dashv U$。

(1) 余松散幺半群结构 F_2在 F 上与松散幺半群结构 U^2 在 U上之间存在一一对应，具体如下:

$$F_2(X,Y)=\varepsilon_{FX\otimes FY}F(U^2(FX,FY))F(\eta_X\otimes\eta_Y)$$
$$U^2(A,B)=U(\varepsilon_A\otimes\varepsilon_B)U(F_2(UA,UB))\eta_{UA\otimes UB}$$

(2) 若该伴随 $F\dashv U$ 是余松弛幺半群的，则 U 是强岩浆函子；(3) 若 U 是强岩浆函子，则 F 存在唯一的余松弛幺半群结构，使伴随 $F\dashv U$ 成为余松弛幺半群的。

证明. 这可以看作 Kelly 定理关于教义伴随（[9]）的推论。断言（1）中的双射就是伴随双射:

$$\mathrm{Nat}(F\circ\otimes_{\mathcal{C}},\otimes_{\mathcal{D}}\circ(F\times F))\cong\mathrm{Nat}(\otimes_{\mathcal{C}}\circ(U\times U),U\circ\otimes_{\mathcal{D}}),$$

因此， F_2 上的余松弛幺半群结构 F 与 U^2 上的相应松弛幺半群结构 U 满足:

$$UF_2(X,Y)\eta_{X\otimes Y}=U^2(FX,FY)(\eta_X\otimes\eta_Y),$$
$$\varepsilon_{A\otimes B}FU^2(A,B)=(\varepsilon_A\otimes\varepsilon_B)F_2(UA\otimes UB).$$

[3]或者等价地，一个松弛岩浆函子 F，使得 F^2 是同构；不过我们主要讨论余松岩浆函子。

由这些恒等式首先可推出：若 $F \dashv U$ 是余松弛幺半群，则与 F_2 对应的松弛岩浆结构 U^2 是 U_2的逆元，也就是断言（2）；其次，若 U 是强岩浆函子，则 F 上的余松弛岩浆结构 F^2使 $F \dashv U$ 成为余松弛岩浆伴随，当且仅当该结构与 $U^2 = U_2^{-1}$相关联，也就是断言（3）。□

2.3. 岩浆等价。两个岩浆范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 之间的岩浆等价 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个余松弛岩浆函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，其底层函子是范畴等价。由前一个引理可知，$F$ 因而自动是一个强岩浆函子。

2.4. 余松弛岩浆单子。岩浆范畴 $\mathcal{C}$ 上的余松弛岩浆单子是一个定义在 $\mathcal{C}$ 上的单子 (T, μ, η)，并赋予 T 一个余松弛 magma 结构 T_2，使得 $T^2 \to T$ 的 μ 和 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to T$ 的 η 都是余松弛幺半群态射。

例 2. 若 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 是岩浆范畴，且 $U\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个具有左伴随 F 的强岩浆函子，则 $F \dashv U$ 是一个余松弛岩浆伴随，其单子 $T = UF$ 是一个余松弛岩浆单子。

事实上，所有余松弛岩浆单子都具有这种形式。更准确地说，若 T 是岩浆范畴 $\mathcal{C}$上的余松弛岩浆单子，则其 Eilenberg-Moore 范畴 $\mathcal{C}^T$ 是一个岩浆范畴，且遗忘函子 $U^T\colon \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$ 是严格岩浆函子。因此，其左伴随 $F^T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^T$ 是一个余松岩浆函子，而伴随$F^T \dashv U^T$是余松弛幺半群的。

例 3. 幺半范畴上的余幺半单子是一个余松弛岩浆单子。

定理 4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个岩浆范畴，T 是 T上的一个单子。以下两者之间存在双射：

(i) $\mathcal{C}^T$ 上的岩浆结构，使得 U^T 是严格余松弛幺半群；(ii) T 上的余松弛岩浆单子结构。

证明。$\mathcal{C}^T$ 上的岩浆结构使得 U^T 是严格余松弛幺半群，当且仅当它是一个函子$\widetilde{\otimes}$：$\mathcal{C}^T \times \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}^T$，且下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^T \times \mathcal{C}^T & \xrightarrow{\widetilde{\otimes}} & \mathcal{C}^T \\ {\scriptstyle U^T \times U^T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle U^T} \\ \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow[\otimes]{} & \mathcal{C} \end{array}$$

也就是说，是 $\otimes$ 的一个提升。因此，它由提升数据 $T_2\colon T \circ \otimes \to (T \times T) \circ \otimes$ 编码，而这恰好是一个余松弛 magma 结构 T_2，使得 μ 和 η 都是余松弛幺半群。□

2.5. 闭岩浆范畴。设 $\mathcal{C}$ 是一个岩浆范畴。给定 X、Y 这两个属于 $\mathcal{C}$ 的对象，从 X 到 Y 的左内部 Hom 是一个对象 $[X、Y]^l$，属于 $\mathcal{C}$，它表示预层

$$\underline{[X,Y]^l}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set} \qquad Z \mapsto \mathrm{Hom}(Z \otimes X, Y). \tag{3}$$

换言之，它是一个对象 $[X、Y]^l$，并配备了一个态射

$$e_Y^X : [X,Y]^l \otimes X \to Y,$$

求值满足以下泛性质：对于所有 $f\colon Z \otimes X \to Y$，存在唯一的 $g\colon Z \to [X, Y]^l$，使得 $e_Y^X(g \otimes 1) = f$。显然，表示对象 $[X,Y]^l$ 在唯一同构意义下是唯一的。

若岩浆范畴 $\mathcal{C}$ 中任意一对对象 X, Y都存在左内部 Hom $[X,Y]^l$，则称其为左幺半群闭，或简称左闭。若情况如此，则有一个函子

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set} \qquad (X,Y) \mapsto [X,Y]^l \tag{4}$$

并且对于 $\mathcal{C}$ 的每个对象 X，自函子 $[X,\ ?]^l$ 是 $? \otimes X$ 的右伴随，其余单位为 e_Y^X: $[X,Y]^l \otimes X \to Y$，单位态射记为 h_Y^X: $Y \to [X, Y \otimes X]^l$。

注 5. 如果 $\mathcal{C}$ 是单oidal左闭的，我们有复合态射 $\circ_{X,\ Y,\ Z}$:$[Y,Z]^l \otimes [X,Y]^l \to [X,Z]^l$；内 Hom 的这一复合满足结合律，单位为 $h_{\mathbb{I}}^X$: $\mathbb{I} \to [X, X \otimes \mathbb{I}]^l \cong [X,X]^l$。然而，对于一般的左闭幺半群范畴，情况并非如此，因为复合的定义涉及结合约束。

类似地，可以定义从 X 到 Y 的右内部 Hom，记为 $[X,Y]^r$，其泛求值态射为 $X \otimes [X,Y]^r \to Y$，并可定义右闭幺半群范畴。

由于本文只考虑左内部 Hom，从现在起将在记号中省略上标“l”，因此我们写作 $[X,Y]$ 和 $[X,Y]$，而不写作 $[X,Y]^l$ 和 $[X,Y]^l$。

3. Slack closed functors and slack Hopf adjunctions

3.1. 松弛闭函子。岩浆范畴之间的函子若以一种“松弛”的方式保留左内部 Hom，即保留左内部 Hom 函子，但不保留相应的求值，则称为松弛左闭。此种保留通过一项称为“松弛左闭结构”的附加数据实现。我们首先给出一个不假设内 Hom 存在的一般定义，然后在特殊情形下重新诠释此定义。

设 U: $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是岩浆范畴之间的函子。U 上的松弛左闭结构是一个预层同构，它关于 $\mathcal{D}$ 的 A, B 对象自然

$$\mathfrak{E}_B^A \colon \int^{C \in \mathcal{D}} \mathcal{C}(-, U(C)) \times \underline{[A,B]}(C) \xrightarrow{\cong} \underline{[U(A), U(B)]} \tag{5}$$

这尤其意味着左侧的余端存在。

假设（见第 1 节）余连续扩张 $U_!$: 本质小时，或者 $\hat{\mathcal{D}} \to \hat{\mathcal{D}}$ 有一个左伴随时，这一条件成立（本文余下部分中这一条件总是成立）。那么，U 上的松弛左闭结构就是一个自然同构：

$$\mathfrak{E}_B^A \colon U_! \underline{[A,B]} \to \underline{[U(A), U(B)]}.$$

松弛右闭结构的定义类似。

3.2. 内 Hom 的松弛保持。现在假设岩浆范畴 $\mathcal{D}$ 是左闭的。我们预期松弛左闭函子 U: $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 应当保持内 Hom。下面的定义将这一想法表述得更加精确。

设 U: $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是一个从左闭岩浆范畴 $\mathcal{D}$ 到岩浆范畴 $\mathcal{C}$ 的函子，且 $\varphi_{A,\ B}$: $U(A) \otimes U(B) \to U(A \otimes B)$ 是一个自然变换（对 A、B 属于 $\mathcal{D}$）。若

$$U([A,B]) \otimes U(A) \xrightarrow{\varphi_{[A,B],A}} U([A,B] \otimes A) \xrightarrow{U(e)} U(B) \tag{6}$$

是 $\mathcal{C}$ 中的一个求值[4]，对于 $\mathcal{D}$ 中的每个求值 e: $[A,B] \otimes A \to B$。

[4]就左内部 Hom 的意义而言。

引入这一新概念的主要意义在于，它独立于$\mathcal{D}$中内 Hom 的具体选取，刻画了左内部 Hom 的松弛保持性。更准确地说：

引理 6. 设 $U\colon \mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 是岩浆范畴之间的函子，并假设 $\mathcal{D}$ 是左闭的。那么以下对象之间存在双射对应：

(1) U 上的松弛左闭结构 $\mathfrak{E}$；

(2) 在 $\mathcal{D}$ 中选定左内部 Hom $[,]$ 后，满足以下条件的变换族：

$$E=(E_A^B\colon U([B,A])\otimes U(B)\to U(A))_{A,B\in\mathcal{D}}$$

对 $A\in\mathcal{D}$ 自然且对 $B\in\mathcal{D}$ 余自然，使得 $(U([B,A]),E_A^B)$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 中从 $U(B)$ 到 $U(A)$ 的左内部 Hom；

(3) 满足 (U,φ) 松弛地保留左内部 Homs 的自然变换 φ。

数据 E 和 φ 之间的关系如下：

$$\varphi_{A,B}=E^B_{A\otimes B}(U(h_A^B)\otimes UB),\quad E_A^B=U(e_A^B)\varphi_{[B,A],B}\,.$$

证明。给定 $\mathcal{D}$中左内部 Hom 的一种选择，预层 $[B,A]$ 由 $[B,A]$表示，因此松弛左闭结构是预层$\mathcal{C}(-,U[B,A])\cong[UB,UA]$的一个同构，且关于 A,B自然。根据米田引理，这恰好就是陈述第 2 部分中的数据 E。对于 2 和 3 之间的双射，根据定义，数据 (U,φ) 会产生陈述中指定的数据 E。反过来，数据 E 会产生陈述中指定的自然变换 φ。对于 φ，松弛保持条件对 $e=e_A^B$ 成立，因为

$$\begin{aligned}U(e_A^B)\varphi_{[B,A],B}&=U(e_A^B)E^B_{[B,A]\otimes B}(U(h^B_{[B,A]})\otimes UB)\\&=E_A^B(U([B,e_A^B]h^B_{[B,A]})\otimes UB)\quad(\text{by naturality of }E)\\&=E_A^B.\end{aligned}$$

它对 e 的所有选择都成立，这是由 φ 的自然性以及左内部 Hom 在唯一同构意义下的唯一性得到的。□

3.3. 松弛 Hopf 伴随。设 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 是岩浆范畴，$F\dashv U\colon\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 是一个伴随，其单位为 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}}\to UF$，余单位为 $\varepsilon\colon FU\to\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$。定义 $F\dashv U$ 上的松弛左 Frobenius 同构为一个自然同构

$$\Psi_{X,A}\colon F(X\otimes U(A))\to F(X)\otimes A\quad\text{for } X\in\mathcal{C},\,A\in\mathcal{D}.\tag{7}$$

松弛左 Hopf 伴随是指配备松弛左 Frobenius 同构的岩浆范畴之间的伴随。

定理 7。设 $F\dashv U$ 是岩浆范畴之间的一个伴随。以下两者之间存在典范双射：

(1) U 上的松弛左闭结构 $\mathfrak{E}$；(2) $F\dashv U$ 上的松弛左 Frobenius 同构 Ψ。

证明。由于函子 U 有左伴随 F，它有一个余连续扩张$\curvearrowleft\quad\curvearrowleft U_!\colon\mathcal{D}\to\mathcal{C}$，该扩张与 F^* 一致。因此，U 上的松弛左闭结构等价于一个同构

$$F^*\underline{[A,B]}\xrightarrow{\cong}\underline{[U(A),U(B)]},$$

在 A、B 中自然。同构左侧的预层是 $\mathcal{D}(F(-)\otimes A,B)$，而右侧的预层是 $\mathcal{C}(-\otimes U(A),U(B))$。根据伴随，后者同构于$\mathcal{D}(F(-\otimes U(A)),B)$。由米田引理可知，$U$ 上的松弛左闭结构与自然同构 $F(-)\otimes A\cong F(-\otimes U(A))$ 构成双射。□

注 8. 设 $F \dashv U : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是岩浆范畴之间的一个伴随，且$\mathcal{D}$ 左闭。那么， U 上的松弛左闭结构与下列对象构成双射:

(1) 一个松弛 Frobenius 同构 Ψ （由定理 7 得出）；(2) 一个自然变换 φ ，使得 (U, φ) 松弛地保持左内部 Hom（由引理 6 得出）。

由这些双射的构造可知，自然变换φ 是 Ψ的伴随态射，即:

$$\varphi_{A,B} = (U(\varepsilon_A \otimes B))(U\Psi_{U(A),B})\eta_{U(A)\otimes U(B)},\ \Psi_{X,A} = \varepsilon_{FX\otimes A}F(\varphi_{FX,A})(\eta_X \otimes U(A)).$$

注 9. 若 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是左幺半群闭的，则松弛左闭结构 $\mathfrak{E}$ 等价于一个自然同构 $\mathfrak{E}^B_A \colon U[B, A] \xrightarrow{\cong} [UB, UA]$和 $E^B_A = e^{UB}_{UA}(\mathfrak{E}^B_A \otimes UB)$，因此伴随映射 φ 和 Ψ 的显式形式为:

$$\varphi_{A,B} = e^{UB}_{U(A\otimes B)}(\mathfrak{E}^B_{A\otimes B}U(h^B_A) \otimes UB),$$

$$\Psi_{X,A} = \varepsilon_{FX\otimes A}F\big(e^{UA}_{U(FX\otimes A)}(\mathfrak{E}^A_{FX\otimes A}U(h^A_{FX})\eta_X \otimes UA)\big).$$

3.4. 松弛 Hopf 余松弛幺半群伴随与松弛 Hopf 结构。

定理 10. 设 $F \dashv U \colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是一个余松弛岩浆伴随，并将其余松弛岩浆单子记为 $T = UF$。则存在一个典范双射:

$$\Theta^l : \mathrm{Nat}(F \otimes_{\mathcal{C}} (\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \times U), \otimes_{\mathcal{D}}(F \times \mathrm{id}_{\mathcal{D}})) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Nat}(\otimes_{\mathcal{C}}, \otimes_{\mathcal{C}}(T \times T)),$$

由 $\Psi \mapsto \Theta^l(\Psi) = \beta$ 定义，其中:

$$\begin{cases} \beta_{X,Y} &= U_2(FX, FY)\, U(\Psi_{X,FY})\, \eta_{X\otimes TY}\, (X \otimes \eta_Y), \\ \Psi_{X,A} &= (FX \otimes \varepsilon_A)\, \varepsilon_{FX\otimes FUA}\, F(U_2^{-1}(FX, FUA))\, F(\beta_{X,UA}). \end{cases}$$

证明。双射 Θ^l 来自以下一系列自然双射：$\mathrm{Nat}(F \otimes_{\mathcal{C}} (\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \times U), \otimes_{\mathcal{D}}(F \times \mathrm{id}_{\mathcal{D}})) \simeq \mathrm{Nat}(\otimes_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \times U), U \otimes_{\mathcal{D}} (F \times \mathrm{id}_{\mathcal{D}}))$（由伴随得到） $\simeq \mathrm{Nat}(\otimes_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \times U), \otimes_{\mathcal{C}}(T \times U))$（因为 U 是强余松弛幺半群）$\simeq \mathrm{Nat}(\otimes_{\mathcal{C}}, \otimes_{\mathcal{C}}(T \times T))$（再次由伴随得到）。由此得到所给出的公式。□

余松弛岩浆伴随 $F \dashv U$ 上的松弛左 Hopf 结构（其对应单子为 $T = UF$）是一个自然变换 $\beta \in \mathrm{Nat}(\otimes_{\mathcal{C}}, \otimes_{\mathcal{C}}(T \times T))$，使得 $\Psi^\beta = {\Theta^l}^{-1}(\beta)$ 是同构。

由此显然可得松弛左霍普夫结构 β 与左 Hopf Frobenius 同构 Ψ^β之间存在典范双射。

注 11. 松弛左闭函子的复合显然是松弛左霍普夫的，因此，松弛左 Hopf 余松弛幺半群伴随 $F \dashv U \colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 与$G \dashv V \colon \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ 的复合是松弛左 Hopf 余松弛幺半群伴随 $GF \dashv UV \colon \mathcal{E} \to \mathcal{C}$。

分别对应于 $F \dashv U$ 和 $G \dashv V$的松弛左霍普夫结构 β、β' 导出一个对应于 $GF \dashv UV$ 的松弛左霍普夫结构 β''，其定义如下

$$\beta''_{X,Y} = U_2(VGFX, VGFY)U(\beta'_{FX,FY})U_2^{-1}(FX, FY)\beta_{X,Y}.$$

4. 松弛霍普夫单子

4.1. 松弛霍普夫单子与松弛闭伴随。设 T 是岩浆范畴 $\mathcal{C}$上的余松弛岩浆单子。T 的左融合算子是自然变换

$$H^l_{X,Y} \colon T(X \otimes TY) \xrightarrow{T_2(X,TY)} TX \otimes T^2Y \xrightarrow{1\otimes\mu_Y} TX \otimes TY \tag{8}$$

对于 $\beta \in \mathrm{Nat}(\otimes_{\mathcal{C}}, \otimes_{\mathcal{C}}(T \times T))$，定义一个自然变换

$$\Phi^\beta_{X,Y} = (\mu_X \otimes \mu_Y)H^l_{TX,TY}T(\beta_{X,TY}) : T(X \otimes TY) \to TX \otimes TY.$$

T 上的松弛左 Hopf 结构是一个自然变换 β，满足 Φ^β 是同构。等价地，它是伴随$F^T \dashv U^T$上的松弛左 Hopf 结构，但这并非显而易见：参见定理15。

松弛左 Hopf 单子是配备了松弛左 Hopf 结构的余松弛岩浆单子。

对于给定的余松弛岩浆单子，松弛左霍普夫结构通常并不唯一，但它们构成某个群下的挠子，见推论 18。

态射 Φ^β 也可以写成如下形式。

$$\begin{aligned}\Phi^\beta_{X,Y} &= (\mu_X \otimes \mu_Y^2)T_2(TX, T^2Y)T(\beta_{X,TY}) \\ &= (\mu_X \otimes \mu_Y)T_2(TX, TY)T((TX \otimes \mu_Y)\beta_{X,TY}).\end{aligned}$$

第二个表达式表示，$\Phi^\beta_{X,\ Y}$是在自由 T-模伴随下由$(TX \otimes \mu_Y)\beta_{X,\ TY}$: $X \otimes TY \to TX \otimes TY$诱导的 T-模态射。

例 12. 正如预期的那样，松弛左 Hopf 单子在 [4] 的意义下推广了左 Hopf 单子。事实上，幺半范畴上的余幺半单子 T 是左 Hopf 单子，当且仅当它的左融合算子 (8) 可逆；这恰好意味着 $\beta_{X,\ Y} = \eta_X \otimes \eta_Y$是 T 上的松弛左 Hopf 结构。

注 13. 因此，余幺半单子 T 在幺半范畴 $\mathcal{C}$ 上是否为左 Hopf 单子，只取决于 $\mathcal{C}$ 的岩浆结构和 T 的余松弛岩浆单子结构，因为左融合算子仅由这些结构定义。

例 14. 不那么令人意外的是，幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中的任意幺半群都定义了 $\mathcal{C}$ 上的一个松弛左 Hopf 单子。更准确地说，设 $(A、\ m、\ u)$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个幺半群。那么，$\mathcal{C}$ 上的自函子 $A\otimes?$ 具有 $\mathcal{C}$ 上松弛左 Hopf 单子的结构：单子结构是标准结构，由乘积 $m\otimes?$ 和单位 $u\otimes?$ 给出；余松弛岩浆结构为 $T_2(X、\ Y) = A \otimes X \otimes u \otimes Y$；而 $\beta = \eta \otimes \eta$ 是一个松弛左 Hopf 结构，其相应的 $\Phi^\beta_{X,\ Y} = H^l_{X,\ Y} = \mathrm{id}_{A\otimes X\otimes A\otimes Y}$。

定理15. 设 $F \dashv U$ 是一个余松弛岩浆伴随。记其余松弛岩浆单子为 $T = UF$。那么，对于 $\beta \in \mathrm{Nat}(\otimes_{\mathcal{C}}, \otimes_{\mathcal{C}}(T \times T))$:

(1) $\Psi^\beta = \Theta^{l^{-1}}(\beta)$ 和 Φ^β 之间存在如下关系:

$$\Phi^\beta_{X,Y} = U_2(FX, FY)U(\Psi^\beta_{X,FY});$$

(2) $F \dashv U$ 上的松弛左 Hopf 结构也是 T上的松弛左 Hopf 结构;

(3) 如果 Φ^β 是一个同构，那么 $U(\Psi$也是 $^\beta)$，并且我们有

$$U\left((\Psi^\beta{}_{X,A})^{-1}\right) = T(X \otimes U\varepsilon_A)(\Phi^\beta_{X,UA})^{-1}(TX \otimes \eta_{UA})U_2(FX, A);$$

(4) 如果 U 是保守的，那么 T 上的松弛左 Hopf 结构也是 $F \dashv U$上的松弛左 Hopf 结构。

特别地，余松弛岩浆单子 T 的松弛左 Hopf 结构与伴随 $F^T \dashv U^T$ 的松弛左 Hopf 结构一致。

证明。断言（1）显而易见。断言（2）表示，给定 β，若 Ψ^β 是同构，则 Φ^β 也是同构；这由 U_2 是同构这一事实可得。断言（4）是断言（3）的直接推论，而断言（3）将由下述引理推出。

引理16. 设 $G, H\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ 是两个函子，并考虑一个函子 $U\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$，它有左伴随 F。若 $f\colon GU \to HU$ 是一个自然变换，且 f_{FU} 是同构，则 f 是同构，并且 $f^{-1} = GU(\varepsilon)f^{-1}_{FU}H(\eta_U)$。

证明. 我们将用到以下经典事实。设 $L \dashv R\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个伴随，其单位为 $\sigma\colon \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \to RL$，余单位为 $\tau\colon LR \to \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$。令 $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ 为 $\mathcal{B}$ 的满子范畴，由 $\mathrm{Ob}(\mathcal{B}_0) = L(\mathrm{Ob}(\mathcal{A}))$定义。则 $R_0 = R|\,\mathcal{B}_0$ 是 L 到 $\mathcal{B}_0$的余限制的右伴随，并且该伴随的余单位是分裂满射，因为 $\tau_{LA} L\sigma_A = \mathrm{id}_{LA}$。因此，$R_0$ 是保守的（参见第 3 节 4] 中的最后两句话）。若 $f \in \mathcal{B}(LA, LA')$ 满足 Rf 可逆，则 f 可逆，且 $f^{-1} = \tau_{LA} L(Rf)^{-1} L\sigma_{A'}$（直接计算可知，这是一个右逆元）。

我们将前面的讨论应用于 $\mathcal{A} = [\mathcal{C}, \mathcal{E}]$, $\mathcal{B} = [\mathcal{D}, \mathcal{C}]$。函子范畴$L = [U, \mathcal{E}]\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 有一个右伴随 $R = [F, \mathcal{E}]$。我们得到：若 $f\colon L(G) = GU \to L(H) = HU$ 满足 $R(F) = f_F$ 是同构，则其本身也是同构，并且 $f^{-1} = GU(\varepsilon) f_{FU}^{-1} H(\eta_U)$。□

定理15的证明（续）。现在将引理应用于 $G, H\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $G(Y) = T(X \otimes Y)$ 和 $H(Y) = TX \otimes Y$，以及 $f\colon GU \to HU$, $f_A = U_2(F(X), A) U(\Psi^{\beta}_{X,\,A})$。我们有 $f_{FY} = \Phi^{\beta}_{X,\,Y}$，因此根据引理，若 Φ^{β} 可逆，则对于任意选择的 X，f 也可逆；由于 U_2是同构，$U(\Psi^{\beta})$也可逆。我们有 $f_A^{-1} = U(\Psi^{\beta})^{-1}_{X,\,A} U_2(FX, A)^{-1} = T(X \otimes \varepsilon_{UA}) \Psi^{-1}_{X,\,UA}(TX \otimes \eta_{UA})$，正如预期的那样；至此，断言（3）的证明和定理的证明均告完成。□

定理 17。设 T 是岩浆范畴 $\mathcal{C}$ 上的余松弛岩浆单子。那么以下各项之间存在双射对应：

(i) T 上的松弛左霍普夫结构 β；(ii) U^T 上的松弛左闭结构 $\mathfrak{E}$；
(iii) 伴随 $F^T \dashv U^T$ 上的松弛左 Frobenius 同构 Ψ。

β 与 Ψ 之间的对应由下式给出：

$$\beta_{X,Y} = (\Psi_{X,F^TY})\eta_{X\otimes TY}(X \otimes \eta_Y) \quad and \quad \Psi_{X,(Y,\rho)} = (\mu_X \otimes \rho) H^l_{TX,Y} T(\beta_{X,Y}).$$

此外，如果 T 是松弛左霍普夫的，且 $\mathcal{C}$ 是左闭的，那么 $\mathcal{C}^T$ 也是如此。

证明。双射 $\beta \leftrightarrow \Psi$ 直接由定理 10 以及单子的遗忘函子是保守函子这一事实得出。Ψ 的公式可由定理中给出的公式通过直接计算得到。双射 $\Psi \leftrightarrow \mathfrak{E}$ 是定理 7 的特例，此处列出仅为完整起见。因此，唯一真正的新结论是最后的断言。

假设 $\mathcal{C}$ 是左闭的，且 T 是松弛左霍普夫的。为了证明 $\mathcal{C}^T$ 是左闭的，我们使用 [2, Barr 和 Wells 著作中的定理 7。该定理指出，给定伴随 $G \dashv V$ 和 $G' \dashv V'$，若函子 W 满足 $G' \cong WG$ 有右伴随，则只要 V 是单子性的，且 W 保持 U-分裂等化子即可。我们将 Barr 和 Wells 的定理应用于伴随 $F^T \dashv U^T$ 和 $F^T(-\otimes U^T A) \dashv [U^T A、 -]U^T$ 以及函子 $-\otimes A$，其中 A 是 $\mathcal{C}^T$ 中的一个对象。我们略去 Frobenius 同构 $F^T(-\otimes U^T A) \cong (-\otimes A)\, F^T$；函子 $-\otimes A$ 保持 U^T-分裂余等化子，因为 $U^T(-\otimes A) = U^T(-) \otimes U^T(A)$ 保持这些余等化子，而 U^T 创建它们。由此可得，对于 $\mathcal{C}^T$ 中任意 A，$-\otimes A$ 都有右伴随；也就是说，$\mathcal{C}^T$ 是左闭的。

□

4.2. 松弛左 Hopf 结构的唯一性。设 $F \dashv U$ 是一个余松弛岩浆伴随，且 U 保守，并设 $T = UF$ 是其余松弛岩浆单子。

注意，由于根据定义，$F \dashv U$上的松弛左 Frobenius 同构是从 $F \otimes_{\mathcal{C}} (\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \times U)$ 到 $\otimes_{\mathcal{D}}(F \times \mathrm{id}_{\mathcal{D}})$的函子同构，因此群 $\mathrm{Aut}(F \otimes_{\mathcal{C}} (\mathrm{id}\mathcal{C} \times U))$ 在松弛左

Frobenius 同构的集合上右作用，且该作用是传递且自由的。现在由定理 10 可得一个典范双射

$$\Theta^l : \mathrm{Nat}(F \otimes_{\mathcal{C}} (\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \times U), \otimes_{\mathcal{D}}(F \times \mathrm{id}_{\mathcal{D}})) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Nat}(\otimes_{\mathcal{C}}, \otimes_{\mathcal{C}}(T \times T))$$

其中，松弛左 Frobenius 同构与 T 上的松弛左 Hopf 结构一一对应。

另一方面，根据伴随关系，我们还有一个典范双射

$$\Xi^l : \mathrm{End}(F \otimes_{\mathcal{C}} (\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \times U)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Nat}(\otimes_{\mathcal{C}}, T \otimes_{\mathcal{C}} (\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \times T))$$

它使我们能够在 $\mathrm{Nat}(\otimes_{\mathcal{C}}, T \otimes_{\mathcal{C}} (\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \times T))$ 上赋予一个幺半群乘积，记作 $*$，从而使 Ξ^l 成为幺半群同构。

记幺半群 $\mathrm{Nat}(\otimes_{\mathcal{C}}, T \otimes_{\mathcal{C}} (\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \times T))$ 为 $\mathcal{M}^l(T)$，其可逆元群记作 $\mathcal{G}^l(T)$。由上述讨论立即可知，$\mathcal{G}^l(T)$ 在 T 的松弛左 Hopf 结构集合上（从右侧）自由且传递地作用。此外，对于任意余松弛岩浆单子 T，这一结论也成立，因为伴随关系 $F^T \dashv U^T$是余松弛幺半群的，而 U^T 是保守的。

自然自同态 $\Gamma_{X,A}$与 $F(X \otimes UA)$ 以及相应的自然变换 $\gamma_{X,Y}$: $X \otimes Y \to T(X \otimes TY)$ 之间由以下公式关联:

$\gamma_{X,Y} = U(\Gamma_{X,FY})\eta_{X\otimes TY}(X \otimes \eta_Y)$ 和 $\Gamma_{X,A} = F(X \otimes U\varepsilon_A)\varepsilon_{F(X\otimes TUA)}F(\gamma_{X,UA})$,

这使我们能够计算 $\mathcal{M}^l(T)$的卷积乘积，其定义如下:

$$(\gamma * \gamma')_{X,Y} = \mu_{X\otimes TY}T^2(X \otimes \mu_Y)T(\gamma_{X,TY})\gamma'_{X,Y},$$

$\mathcal{M}^l(T)$ 在 $\mathrm{Nat}(\otimes_{\mathcal{C}}, \otimes_{\mathcal{C}}(T \times T))$上的右作用定义如下:

$$(\beta \lhd \gamma)_{X,Y} = (\mu_X \otimes \mu_Y T(\mu_Y))T_2(TX, T^2Y)T(\beta_{X,TY})\gamma_{X,Y} = \Phi^{\beta}_{X,Y}\gamma_{X,Y}.$$

这可以概括为以下定理。

定理 18. 设 T 是一个松弛左 Hopf 单子。那么，T 上的松弛左霍普夫结构集合在群 $\mathcal{G}^l(T)$的右作用下构成一个挠子。

推论 19. 设 T 是岩浆范畴 $\mathcal{C}$上的松弛左 Hopf 单子，并设 β是 T上的松弛左 Hopf 结构。在上述记号下，定义 $\alpha \in \mathcal{M}^l(T)$为

$$\alpha_{X,Y} = (\Phi^{\beta}_{X,Y})^{-1}(\eta_X \otimes \eta_Y).$$

那么，以下条件等价:

(i) 左融合算子 H^l 是同构；(ii) $\eta \otimes \eta$ 是 T上的松弛左 Hopf 结构；(iii) $\alpha \in \mathcal{G}^l(T)$。

证明. 显然，(i) 和 (ii) 等价，因为 $H^l = \Phi^{\eta\otimes\eta}$。根据定理 18，由于 β 是松弛左 Hopf 结构，(ii) 等价于存在 $\gamma \in \mathcal{G}^l(T)$使得 $\beta \lhd \gamma = \Phi^{\beta}\gamma = \eta \otimes \eta$；但这样的 γ必定等于 α，因为 $\Phi^{\beta}\alpha = \eta \otimes \eta$且 Φ^{β} 是同构。这就证明了 (ii) 和 (iii) 等价。□

4.3. 松弛对极。设 T 是左闭幺半群范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个松弛左 Hopf 单子，且 β 是 T 上的一个松弛左 Hopf 结构。由定理 17 可知，$\mathcal{C}^T$ 是左闭的，且遗忘函子 U 保持左内部 Hom（但不一定保持其伴随单位和余单位）。本节将对此作出明确说明，特别是给出与左 Hopf 结构相关联的松弛左 antipode 概念，并用松弛左 antipode 表示 T 在 T-模之间的左内部 Hom 上的作用。

定理 20. 设 T 是左闭幺半群范畴 $\mathcal{C}$ 上具有松弛左 Hopf 结构 β 的松弛左 Hopf 单子。对于 X、$Y \in \mathcal{C}$，定义

$$\xi_{X,Y} = T(X \otimes \mu_Y)(\Phi^{\beta}_{X,TY})^{-1}(\mu_X \otimes T^2Y)\beta_{TX,TY} : TX \otimes TY \to T(X \otimes TY)$$

并定义与 β、 S^l 相关联的松弛左 antipode:

$$S^l_{X,Y} := [Y, Te^{TY}_X][\eta_Y, \xi_{[TY,X],Y}]h^{TY}_{T[TY,X]} : T[TY, X] \to [Y, TX]$$

给定两个 T-模 (X,r)， (Y,ρ), $[Y,X]$ 是一个 T-模，其作用 $R:T([Y,X]) \to [Y,X]$ 定义如下:

$$R = [Y, r]S^l_{X,Y}T[\rho, X].$$

如此定义的 T-模是从 (Y,ρ) 到 (X,r) 的左内部 Hom，其泛求值（即伴随余单位）$e^{(Y,\ \rho)}_{(X\ r)}$ ： $[Y,X]\otimes Y \to X$ 定义如下:

$$e^{(Y,\rho)}_{(X,r)} = rT(e^Y_X)T([Y,X]\otimes\rho)\alpha_{[Y,X],Y},$$

其中 $\alpha = \Phi^{\beta-1}(\eta\otimes\eta)$，伴随单位定义如下:

$$h^{(Y,\rho)}_{(X,r)} = [Y, (r\otimes\rho)\beta_{X,Y}]h^Y_X.$$

证明。首先注意到，根据定理 17， $\mathcal{C}^T$ 是左闭的，而 β 为 (X,r), (Y,ρ) 在 $\mathcal{C}^T$ 中定义了一个左闭结构 $\mathfrak{E}^{(Y,\ \rho)}_{(X\ r)}$ ： $U([(Y,\rho),(X,r)]) \xrightarrow{\cong} [Y,X]$。通过结构传递，我们可以在 $\mathcal{C}^T$ 中选取左内部 Hom，使得$\mathfrak{E}$ 是恒等映射。

~固定 $Y=(Y,\rho)$，并始终考虑伴随 $G\dashv V$，其中 G =?$\otimes Y$和 $V=[Y,$?]。函子 G: $\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 提升为函子 $\tilde{G}$ =?$\otimes\tilde{Y}$: $\mathcal{C}^T\to\mathcal{C}^T$，相应的分配律 ζ: $TG\to GT$ 定义如下:

$$\zeta_X = (TX\otimes\rho)T_2(X,Y) : T(X\otimes Y) \to X\otimes T(Y).$$

设 $\tilde{V}=[\tilde{Y},$?]: $\mathcal{C}^T\to\mathcal{C}^T$，从而得到伴随 $\tilde{G}\dashv\tilde{V}$。根据我们在 $\mathcal{C}^T$, $U\tilde{V}=VU$中对左内部 Hom 的选择，也就是说， $\tilde{V}$是 V的一个提升。

下面的引理将帮助我们更好地理解伴随 $\tilde{G}\dashv\ ~$ V关于 ζ 和 β的表述。

引理 21. 设 $G\dashv V$: $\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个伴随，其单位为 $h:\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\to VG$，余单位为 e: $GV\to\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$。设 (T,μ,η) 是 $\mathcal{C}$上的一个单子， (P,m,u) 是 $\mathcal{D}$上的一个单子；再设 $\tilde{G}\dashv\tilde{V}$: $\mathcal{C}^T\to\mathcal{D}^P$ 是一个伴随，其单位为 $\tilde{h}$，余单位为 $\tilde{e}$，并且满足 $\tilde{G}$~是 G 的一个提升，而 V 是 V的一个提升。

~记 ζ: $PG\to GT$为 G的提升数据，记 ξ: $GT\to PG$为提升数据 $TV\to VT$（对应于 V）的伴随态射。令 β: $G\to GT$为 h 的提升数据 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\to VGT$的伴随态射，并令 α: $G\to PG$ 为 $\tilde{e}$的提升数据 $GV\to P$的伴随态射。

于是以下恒等式成立:

$$\begin{array}{ll} (a)\quad \zeta m_G = G(\mu)\zeta_T T(\zeta) & (a')\quad \zeta u_G = G(\eta) \\ (b)\quad \xi G(\mu) = m_G P(\xi)\xi_T & (b')\quad \xi_G(\eta) = u_G \\ (c)\quad m_G P(\xi)\alpha_T\zeta = m_G P(\alpha) & (c')\quad m_G P(\xi)\alpha_T\beta = u_G \\ (d)\quad G(\mu)\zeta_T P(\beta)\xi = G(\mu)\beta_T & (d')\quad G(\mu)\zeta_T P(\beta)\alpha = G(\eta) \end{array}$$

此外， ξ、 α、 β由 $\Psi = G(\mu)\zeta_T P(\beta)$: $PG\to GT$确定。更确切地说:

(1) Ψ可逆，且 $\Psi^{-1} = m_G P(\xi)\alpha_T$; (2) $\beta = \Psi u_G$; (3) $\alpha = \Psi^{-1}G(\eta)$; (4) $\xi = \Psi^{-1}G(\mu)\beta_T$。

~ ~证明。(a) — (d') 这些恒等式表达了我们关于 $G\dashv V$ 所知道的内容： ζ 是 G 的提升数据（(a)、(a')）， ξ 是 V 的提升数据的伴随态射（(b)、(b')）， α

~~ ~ ~~编码了 $\widetilde{e}:\ GV \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}^T}$ (c), $\boldsymbol{\beta}$ 编码了 $h:\ \mathrm{id}_{\mathcal{D}^P} \to VG$ (d)，而伴随公理是 (c') 和 (d')。

令 $\boldsymbol{\theta} = m_G P(\boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{\alpha}_T$。于是 $\boldsymbol{\Psi\theta} = G(\mu)\boldsymbol{\zeta}_T P(\boldsymbol{\beta}) m_G P(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\alpha}_T = \mathrm{id}_{GT}$（利用 (a)、(d) 和 (d')），类似地 $\boldsymbol{\theta\Psi} = \mathrm{id}_{PG}$（利用 (b)、(c) 和 (c')），故断言（1）成立。此外 $\boldsymbol{\Psi}u_G = G(\mu)\boldsymbol{\zeta}_T P(\boldsymbol{\beta})u_G = G(\mu)\boldsymbol{\zeta}_T u_{GT}\boldsymbol{\beta} = G(\mu)G(\eta_T)\boldsymbol{\beta}$（利用 (b')）$= \boldsymbol{\beta}$，类似地 $\boldsymbol{\theta}G(\eta) = \boldsymbol{\alpha}$（利用 (a')），故断言（2）和（3）成立。最后$\boldsymbol{\theta}G(\mu)\boldsymbol{\beta}_T = m_G P(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\alpha}_T G(\mu)\boldsymbol{\beta}_T = \boldsymbol{\xi}$（利用 (b) 和 (c)），故断言（4）成立。□

注 22. 条件 (a) — (d') 不仅是必要条件，也是充分条件，确保~ ~数据 $(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ 定义一个满足该引理假设的提升伴随 $G \dashv V$，这一点将在一篇即将发表的论文中证明。

我们回到定理 20，并将此引理应用于 $\mathcal{D} = \mathcal{C}$ 和 $P = T$。我们首先证明

$$\boldsymbol{\beta}_X = (TX \otimes \rho)\beta_{X,Y} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\Psi}_X = U\Phi^{\beta}_{X,\widetilde{Y}}.$$

~由于 $\boldsymbol{\beta}\colon G \to GT$ 是 h的提升数据的伴随态射，我们计算：

$$\boldsymbol{\beta}_X = e^Y_{TX\otimes Y}(U(h^{\widetilde{Y}}_{FX})\eta_X \otimes Y).$$

根据注 9， $\mathfrak{E}$ 是恒等映射，左弗罗贝尼乌斯同构 Ψ^{β} 为：

$$\Psi_{X,\widetilde{Y}} = \varepsilon_{FX\otimes\widetilde{Y}} F\big(e^Y_{TX\otimes Y}(U(h^{\widetilde{Y}}_{FX})\eta_X \otimes Y\big) = \varepsilon_{FX\otimes\widetilde{Y}} F(\boldsymbol{\beta}_X).$$

因此$U\Psi^{\beta}_{X,\ \widetilde{Y}}\eta_{X\otimes Y} = U\varepsilon_{FX\otimes\widetilde{Y}} T\big(\boldsymbol{\beta}_X\big)\eta_{X\otimes Y} = U\varepsilon_{FX\otimes\widetilde{Y}}\eta_{TX\otimes Y}\boldsymbol{\beta}_X = \boldsymbol{\beta}_X$。另一方面$U\Psi^{\beta}_{X,\ \widetilde{Y}}\eta_{X\otimes Y} = (\mu_X \otimes \rho\mu_Y)T_2(TX, TY)T(\beta_{X,\ Y})\eta_{X\otimes Y} = (TX\otimes\rho)\beta_{X,\ Y}$，因此 $\boldsymbol{\beta}_X = (TX \otimes \rho)\beta_{X,\ Y}$。现在

$$\boldsymbol{\Psi}_X = (\mu_X \otimes \rho)T_2(TX, Y)T((TX \otimes \rho)\beta_{X,Y}) = U\Psi^{\beta}_{X,\widetilde{Y}}.$$

现在我们可以用 Φ 表示 $\boldsymbol{\Psi}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}^{-1}$（后者使用定理15）：

$$\boldsymbol{\Psi}_X = (TX \otimes \rho)\Phi_{X,Y}T(X \otimes \eta_Y) \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\Psi}^{-1}_X = T(X \otimes \rho)\Phi^{-1}_{X,Y}(TX \otimes \eta_Y).$$

确定了 $\boldsymbol{\zeta}$、 $\boldsymbol{\beta}$、 $\boldsymbol{\Psi}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}^{-1}$之后，我们得到 $\boldsymbol{\alpha}_X = \boldsymbol{\Psi}^{-1}_X(\eta_X \otimes Y)$ 和 $\boldsymbol{\xi}_X = \boldsymbol{\Psi}^{-1}_X(\mu_X \otimes Y)\boldsymbol{\beta}_{TX}$。

我们有 $\boldsymbol{\alpha}_X = (TX \otimes \rho)\Phi^{-1}_{X,\ Y}(\eta_X \otimes \eta_Y)$： $G(X) \to TG(X)$，其伴随态射 $\alpha^*\colon GV(X) \to T(X)$ 为： $\boldsymbol{\alpha}^*_X = T(e^Y_X)\boldsymbol{\alpha}_{[Y,\ X]}$，因此

$$\widetilde{e}^{\widetilde{Y}}_{(X,r)} = r\boldsymbol{\alpha}^*_X = rT(e^Y_X)(T[Y, X] \otimes \rho)\Phi^{-1}_{[Y,X],Y}(\eta_{[Y,X]} \otimes \eta_Y).$$

~类似地，$\boldsymbol{\beta}_X = (TX \otimes \rho)\beta_{X,\ Y}$给出 $h^Y_{(X,\ r)} = [Y、\ (r \otimes \rho)\beta_{X,\ Y}]h^Y_X$。

最后，我们计算 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Psi}^{-1}G(\mu)\boldsymbol{\beta}_T$： $GT \to TG$：

$$\boldsymbol{\xi}_X = T(X \otimes \rho)\Phi^{-1}_{X,Y}(\mu_X \otimes \eta_Y\rho)\beta_{TX,Y} = T(X \otimes \rho)\xi_{X,Y}(\mu_X \otimes \eta_Y)\beta_{TX,Y}.$$

提升数据 $\boldsymbol{\xi}^*\colon TV \to VT$关于 $\tilde{V}$的是 $\boldsymbol{\xi}$ 的伴随态射，也就是说：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}^*_X &= (T(e^Y_X) \otimes Y)[X, \boldsymbol{\xi}_{[Y,X]}]h^Y_{T[Y,X]} \\ &= (T(e^Y_X) \otimes Y)[X, (T([Y, X] \otimes \rho)\xi_{[Y,X],Y}([Y, X] \otimes \eta_Y)]h^Y_{T[Y,X]} = S^l_{X,Y}T[\rho, X],\end{aligned}$$

因此我们得到 $R = [Y, r]\boldsymbol{\xi}^*_X = [Y, r]S^l_{X,Y}T[\rho, X]$。 □

例 23. 给定岩浆范畴 $\mathcal{C}$，恒等函子 $1_{\mathcal{C}}$（视为平凡的余松弛岩浆单子）上的松弛左 Hopf 结构对应于一个自然同构

$$X \otimes Y \cong X \otimes Y. \tag{9}$$

在阿贝尔群的范畴 Ab 上，我们有一个如上所述由 $x \otimes y \mapsto -x \otimes y$ 给出的自然同构。这对应于左闭结构，其内 Hom 取通常的形式，而求值由 $[X、Y] \otimes X \to Y、f \otimes x \mapsto -f(x)$ 给出。

4.4. 松弛霍普夫单子的推前与交叉积。考虑一个伴随 $F \dashv U\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 以及 $\mathcal{D}$上的一个单子 Q。那么， UQF 具有 $\mathcal{C}$上的单子结构，它是伴随 $F \dashv U$和 $F^Q \dashv U^Q$的复合 $F^QF \dashv UU^Q\colon \mathcal{D}^Q \to \mathcal{C}$所对应的单子。这个单子称为沿着 $F \dashv U$对 Q的推前。

如果 $F \dashv U$ 是岩浆范畴之间的余松弛岩浆伴随，且 $\mathcal{D}$上的 Q 是一个余松弛岩浆单子，那么它沿着 $F \dashv U$ 的推前是 $\mathcal{C}$上的一个余松弛岩浆单子。此外，根据注 11，如果 $\mathcal{D}$上的 Q 是一个松弛左 Hopf 单子，且 $F \dashv U\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是一个松弛左 Hopf 伴随，那么 Q沿着 $F \dashv U$ 的推前是 $\mathcal{C}$上的一个松弛左 Hopf 单子。

设 T 是范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个单子。若 Q 是范畴 $\mathcal{C}^T$ 上的单子，其中 $\mathcal{C}^T$ 是 T–模的范畴，则复合伴随

$$F^QF^T \dashv U^TU^Q : (\mathcal{C}^T)^Q \to \mathcal{C},$$

的单子，也就是沿 $F^T \dashv U^T$ 推前 Q，称为 T 由 Q 得到的交叉积，记作 $Q \rtimes T$（见第 3 节 [6, ）。作为 $\mathcal{C}$ 上的自函子，$Q \rtimes T = U^TQF^T$。 $Q \rtimes T$ 的乘积 p 和单位 e 为:

$$p = q_{F^T}Q(\varepsilon_{QF^T}) \quad \text{and} \quad e = v_{F^T}\eta,$$

其中 q 和 v 分别是 Q 的乘积和单位， η 和 ε 分别是伴随 $(F^T、U^T)$ 的单位和余单位。

若 $\mathcal{C}$ 是岩浆范畴， T 是 $\mathcal{C}$ 上的余松弛岩浆单子，而 P 是 $\mathcal{C}^T$ 上的余松弛岩浆单子，则 $Q \rtimes T$ 是 $\mathcal{C}$ 上的余松弛岩浆单子。

此外，若 T 和 Q 是松弛左 Hopf 单子，则 $Q \rtimes T$ 也是； T 和 Q 上的松弛左 Hopf 结构 β 和 β' 分别诱导出 $Q \rtimes T$ 上的松弛左 Hopf 结构 β''，其定义如下:

$$\beta''_{X,Y} = \beta'_{F^TX,F^TY}\beta_{X,Y}.$$

5. The cartesian case

5.1. 笛卡尔范畴上的松弛霍普夫单子。若 $\mathcal{C}$ 是一个笛卡尔范畴，即具有有限积的范畴，我们将 $*$ 记作其终对象，并将 $*_X$记作从 $\mathcal{C}$的 X 对象到 $*$ 的唯一态射 $X \to *$。

笛卡尔范畴 $\mathcal{C}$将视为幺半范畴 $(\mathcal{C}, \times, *)$。任意函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ （其中 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是笛卡尔范畴）都具有唯一的余幺半结构(F, F_2, F_0)，其中

$$F_2(X,Y) = (F(X \times *_Y), F(*_X \times Y)) : F(X \times Y) \to FX \times FY \quad \text{and} \quad F_0 = *_{F(*)}.$$

此外，笛卡尔范畴之间的函子间任意自然变换都是余幺半的。因此，笛卡尔范畴上的单子配备其唯一的余幺半结构后，就成为余幺半单子。

定理 24. 设 T 是笛卡尔范畴上的一个单子，并赋予其唯一的余幺半结构。那么， T 是松弛左霍普夫的，当且仅当它是左霍普夫的。

我们将在第 5.3 节证明这个定理，但首先需要引入幺元岩浆范畴和幺元余笛卡尔幺半群单子的概念。

5.2. 存在单位对象时的松弛霍普夫单子。设 $\mathcal{C}$ 是一个岩浆范畴。对于 $\mathcal{C}$，左（分别为右）单位对象是一个对象 $\mathbb{I}$，它在 $\mathcal{C}$ 中附带一个自然同构

$$l_X\colon \mathbb{I}\otimes X\to X \quad (\text{resp. } r_X\colon X\otimes \mathbb{I}\to X) \qquad \text{for} \quad X\in\mathcal{C}.$$

左（分别为右）幺元幺半群范畴是配备了左（分别为右）单位对象的岩浆范畴。

给定一个左（分别为右）幺元岩浆范畴 $\mathcal{C}$，其左单位对象为 $(\mathbb{I}, l)$（分别为右单位对象 $(\mathbb{I}, r)$），$\mathcal{C}$ 上的右（分别为左）幺元余松弛岩浆单子是一个定义在 $\mathcal{C}$ 上的余松弛岩浆单子 T，并配备态射 $T_0\colon T\mathbb{I}\to\mathbb{I}$，满足：

(1) $T_0\mu_{\mathbb{I}} = T_0T(T_0)$ and $T_0\eta_{\mathbb{I}} = \mathrm{id}_{\mathbb{I}}$;
(2) for X in $\mathcal{C}$, $(T_0\otimes TX)T_2(\mathbb{I}, X) = l_{TX}^{-1}T(l_X)$ (resp. $(TX\otimes T_0)T_2(X,\mathbb{I}) = r_{TX}^{-1}T(r_X)$).

第一个条件意味着 $\mathbb{I} = (\mathbb{I}, T_0)^{\sim}$是一个 T-模；第二个条件意味着 l_{U^T}（分别为 r_{U^T}）是 T-线性的，从而使 $\widetilde{\mathbb{I}}$ 成为 $\mathcal{C}^T$ 中的左（分别为右）单位对象。

注 25. 幺半范畴 $\mathcal{C}$ 作为岩浆范畴既是左幺元的，也是右幺元的；定义在其上的余幺半单子作为余松弛岩浆单子也是左幺元的和右幺元的。

我们需要两个相当技术性的引理：第一个适用于右幺元情形，第二个适用于左幺元情形；二者都将在笛卡尔情形中用到。

设 T 是右幺元余松弛岩浆单子，定义在右幺元岩浆范畴 $\mathcal{C}$ 上。给定一个自然变换 $\beta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}}\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\to T\otimes T$，我们通过以下方式定义一个自然变换 $\beta^u\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}}\to T$：

$$\beta^u_X\colon X\xrightarrow{r_X^{-1}} X\otimes\mathbb{I}\xrightarrow{\beta_{X,\mathbb{I}}} TX\otimes T\mathbb{I}\xrightarrow{TX\otimes T_0} TX\otimes\mathbb{I}\xrightarrow{r_{TX}} TX$$

如果 $\beta^u=\eta$ 成立，我们就称 T 上的松弛左 Hopf 结构 β 是规范化的。

引理 26. 设 T 是定义在右幺元岩浆范畴 $\mathcal{C}$ 上的右幺元余松弛岩浆单子。设 β 是 T 上的松弛左 Hopf 结构。则

(1) β^u 是卷积可逆的；(2) 记 u 为 β^u的卷积逆，由 $\overline{\beta}_{X,\mathbb{I}} = (\mu_XTu_X\otimes TY)\beta_{X,Y}$ 定义的自然变换 $\overline{\beta}$ 是 T 上的规范化松弛左 Hopf 结构。

证明。对于 $X\in\mathcal{C}$，$B_X = r_{TX}\Psi^{\beta}_{X,\mathbb{I}}T(r_X^{-1})$，作为 $F^T(X)$ 的自然自同构，它因此具有形式 $\hat{}\, b_X$，其中 b 是 $\mathrm{Nat}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}}, T)$ 中的一个卷积可逆元素（参见第 1.4 节）。我们有

$$b_X = B_X\eta_X = r_{TX}(\mu_X\otimes T_0\mu_{\mathbb{I}})T_2(TX, T\mathbb{I})T(\beta_{X,\mathbb{I}})T(r_X^{-1})\eta_X$$
$$= r_{TX}(\mu_X\otimes T_0\mu_{\mathbb{I}})T_2(TX, T\mathbb{I})\eta_{TX\otimes T\mathbb{I}}\beta_{X,\mathbb{I}}r_X^{-1} = r_{TX}(TX\otimes T_0)\beta_{X,\mathbb{I}}r_X^{-1} = \beta^u_X,$$

因此 β^u 卷积可逆，这就证明了断言（1）。

现在令 $\overline{\Phi} = \Phi^{\overline{\beta}}$，其中 $\overline{\beta}_{X,Y} = (\mu_XTu_X\otimes TY)\beta_{X,Y}$。直接计算可得 $\overline{\Phi}_{X,Y} = (\mu_XTu_X\otimes TY)\Phi_{X,Y}$，并且由于 μ_XTu_X 和 $\Phi_{X,Y}$ 是同构，$\overline{\Phi}_{X,Y}$ 也是同构；换言之，$\overline{\beta}$ 是一个松弛左 Hopf 结构。此外，

$$\overline{\beta}^u_X = r_{TX}(\mu_XTu_X\otimes\mathbb{I})\tau_Xr_X^{-1} = \mu_XT(u_X)r_{TX}\tau_Xr_X^{-1} = \mu_XT(u_X)\beta^u_X = \eta_X,$$

也就是说，$\overline{\beta}$ 是规范化的，这证明了断言（2）。 □

引理 27. 设 T 是左幺半群范畴 $\mathcal{C}$ 上的左幺半群余松弛幺半群单子。假设 T 在 T 上具有形式为 $\beta=\eta\otimes\delta$ 的松弛左 Hopf 结构，其中 δ 是自然变换 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\to T$。那么

(1) 自然变换 δ 在卷积乘积下有左逆。该左逆 θ 由 $\theta_Y = \mu_Y T(l_{TY})\alpha_{\mathbb{I},\,Y} l_Y^{-1}$ 给出。(2) 若 δ 有一个左逆，且该左逆作为自然变换 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to T$ 是余松弛幺半群态射，则融合算子 H^l 是同构。

证明。设 $\beta = \eta \otimes \delta$。我们有 $\Phi^{\beta}_{X,\,Y}\eta_{X\otimes TY}(X \otimes \eta_Y) = \beta_{X,\,Y} = \eta_X \otimes \delta_Y$。另一方面 $\Phi^{\beta}\alpha = \eta \otimes \eta$，由此得到

$$\Phi^{\beta}_{X,Y}T(X \otimes \mu_Y T\delta_Y)\alpha_{X,Y} = (TX \otimes \mu_Y T\delta_Y)\Phi^{\beta}_{X,Y}\alpha_{X,Y} = \eta_X \otimes \delta_Y,$$

因此，由于 Φ^{β} 的单态性：$T(X \otimes \mu_Y T\delta_Y)\alpha_{X,\,Y} = \eta_{X\otimes TY}(X \otimes \eta_Y)$。将此应用于 $X = \mathbb{I}$，先与 l_Y^{-1} 复合，再与 $\mu_Y T(l_{TY})$ 后复合，得到

$$\mu_Y^2 T^2\delta_Y T(l_{TY})\alpha_{\mathbb{I},Y} l_Y^{-1} = \mu_Y T\delta_Y \mu_Y T(l_{TY})\alpha_{\mathbb{I},Y} l_Y^{-1} = (\theta * \delta)_Y)\eta_Y$$

其中 $\theta_Y = \mu_Y T(l_{TY})\alpha_{\mathbb{I},\,Y} l_Y^{-1}$，即断言（1）。

˘另一方面，令 $\delta = U(\varepsilon)\delta_U$，我们有

$$\Psi_{X,A} = \Psi^0_{X,A}F(X \otimes \check{\delta}_A),$$

其中 Ψ^0 是融合算子 $(FX \otimes \varepsilon_A)F_2(X, UA)$。特别地，由于 Ψ 是同构，Ψ^0 是分裂满态。现在假设 θ 是 δ 的余松弛幺半群左逆（不ˆ一定具有上述形式）。令 $\theta = \varepsilon_F F(\theta)$。在幺半群同构 $\mathrm{Nat}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}}, T)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(F, F)$, θ 中，θ 被映射到ˆθ，因此ˆθ 是分裂单态。我们断言以下恒等式成立：

$$\Psi_{X,A}\hat{\theta}_{X\otimes UA} = (\hat{\theta}_X \otimes A)\Psi^0_{X,A}.$$

在证明这个恒等式之前，我们先说明它如何帮助我们得出结论。我们已经知道 Ψ^0 是分裂满态，而这个公式表明它是单态，因为 Ψ 是同构，且ˆθ 是分裂单态。因此 Ψ^0 是同构，$H^l_{X,\,Y} = U(\Psi^0_{X,\,FY})$也都是同构。

ˆ 由于 θ 是余松弛幺半群，θ也是余松弛幺半群。我们计算：

$$\begin{aligned}\Psi_{X,A}\hat{\theta}_{X\otimes UA} &= \Psi^0 F(X \otimes \check{\delta}_A)\hat{\theta}_{X\otimes UA} = (FX \otimes \varepsilon_A)F_2(X, UA)\hat{\theta}_{X\otimes UA}F(X \otimes \check{\delta}_A)\\ &= (\hat{\theta}_X \otimes \varepsilon_A\hat{\theta}_{UA})F_2(X, UA)F(X \otimes \check{\delta}_A) = (\hat{\theta}_X \otimes \varepsilon_A\hat{\theta}_{UA}F\check{\delta}_A)F_2(X, UA).\end{aligned}$$

最后，我们有

$$\begin{aligned}\varepsilon\hat{\theta}_U F\check{\delta} &= \varepsilon(\varepsilon FU)(F\theta U)(FU\varepsilon)(F\delta U) = \varepsilon(FU\varepsilon)(F\theta U)(FU\varepsilon)(F\delta U)\\ &= \varepsilon(F\check{\theta})(F\check{\delta}) = \varepsilon,\end{aligned}$$

因此 $\Psi_{X,\,A}\hat{\theta}_{X\otimes UA} = (\hat{\theta}_X \otimes A)\Psi^0_{X,\,A}$，证毕。 □

5.3. 定理 24 的证明。设 T 是笛卡尔范畴 $\mathcal{C}$上的一个（余幺半）单子。若 T是左霍普夫的，则它是松弛左霍普夫的，其松弛左 Hopf 结构为 $\beta = \eta \times \eta$。反过来，假设 T 是松弛左霍普夫的，其松弛左 Hopf 结构为 β。由于 $\mathcal{C}$ 是笛卡尔的，我们有 $\beta = \gamma \times \delta$，其中 $\gamma, \delta \in \mathrm{Nat}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}}, T)$。由于 $\mathcal{C}$是幺半的，且 T是余幺半的，引理 26 适用，因此我们可以假设 β 是规范化的，也就是说$\beta^u = \gamma = \eta$，于是 $\beta = \eta \times \delta$。因此我们也可以应用引理 27，它告诉我们：（1）δ 在卷积乘积下有一个左逆 θ：$\mu T(\delta)\theta = \eta$；（2）$H^l$ 是同构，因为 θ 自动是余幺半的。□

5.4. 群胚作为松弛霍普夫范畴。

5.4.1. 范畴作为余松弛岩浆单子。设 $\mathcal{A}$ 是一个小范畴，并将其对象集记为 $S = |\mathcal{A}|$，视为一个离散范畴。包含函子$J\colon S \to \mathcal{A}$通过限制诱导出遗忘函子 $U = [\mathcal{A}, \mathsf{Set}] \to [S, \mathsf{Set}]$，它是单子性的。诱导的单子 T在 $[S, \mathsf{Set}]$上将 $X = (X_s)_{s\in S} \in [S, \mathsf{Set}]$映为 $T(X) \in [S, \mathsf{Set}]$，其定义为 $T(X)_s = \coprod_{t\in S} \mathcal{A}(t, s) \times X_t$，其中 $s \in S$。单子 T是余连续的，因为 U也是余连续的。T的乘积 μ 和单位 η 如下：

$$(\mu_X)_s : \coprod_{t,t'\in S} \mathcal{A}(t', s) \times \mathcal{A}(t, t') \times X_t \to \coprod_{t\in S} \mathcal{A}(t, s) \times X_t, \quad (f, g, x) \mapsto (f \circ g, x),$$
$$(\eta_X)_s : X_s \mapsto \coprod_{t\in S} \mathcal{A}(t, s) \times X_t, \quad x \mapsto (\mathrm{id}_X, x).$$

我们将 $[S, \mathsf{Set}]$ 视为关于笛卡尔积的幺半范畴。T上的唯一余幺半结构由 T_0 给出：$(\coprod_{t\in S} \mathcal{A}(t, s))_{s\in S} \to (*_s)_{s\in S}$唯一可能的态射（即 $T_0 = *_{T(*)}$），并且对于 $X, Y \in [S, \mathsf{Set}]$:

$$T_2(X, Y)_s : \coprod_{t\in S} \mathcal{A}(t, s) \times (X \times Y)_t \to \coprod_{t,t'\in S} \mathcal{A}(t, s) \times X_t \times \mathcal{A}(t', s) \times Y_{t'},$$
$$(f, x, y) \mapsto (f, x, f, y).$$

自然变换 $\beta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \times \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \to T \times T$由$(\beta_{X,\ Y})_s(x, y) = (a_s, x, b_s, y)$给出，其中 a, $b \in \prod_{s\in S} \mathcal{A}(s, s)$为某种选取。相应的自然变换$\Phi^{\beta}_{X,\ Y}$由下式给出：

$$(\Phi^{\beta}_{X,Y})_s : \coprod_{t,u\in S} \mathcal{A}(t, s) \times X_t \times \mathcal{A}(u, t) \times Y_u \to \coprod_{t,u\in S} \mathcal{A}(t, s) \times X_t \times \mathcal{A}(u, s) \times Y_u,$$
$$(f, x, g, y) \mapsto (fa_t, x, fb_t g, y).$$

当对所有 $t \in S$ 都有 $a_t = \mathrm{id}_t = b_t$ 时，便得到融合态射 H^l (8)。

范畴 $\mathcal{A}$ 是群胚，当且仅当 $\mathcal{A}$ 是“松弛左霍普夫”的：

定理 28. 设 $\mathcal{A}$ 是一个对象集为 S的小范畴，并设 T 是上文定义在 $[S, \mathsf{Set}]$ 上的余幺半单子。以下条件等价：

(i) T 是松弛左 Hopf 单子；(ii) T 是左 Hopf 单子；(iii) $\mathcal{A}$ 是一个群胚。

证明. (i) 与 (ii) 等价，这是定理 24 的一个特例。现在，(ii) 意味着 H^l 是一个同构，也就是说：

$$\forall (h : t \to s, k : u \to s),\ \exists!\ (g : u \to t) \quad \text{with} \quad hg = k,$$

而这等价于说 $\mathcal{A}$ 是一个群胚（因为这意味着任意态射都是分裂满射），因此 (ii) 与 (iii) 等价。□

注 29. (ii) 与 (iii) 等价这一结论，在 [3, 命题 4.5]，中以一种略有不同的形式，使用双幺半范畴中的双单子语言加以证明。

注 30. 定理 28 在此断言，若 $\mathcal{A}$ 是一个小范畴，且存在满足以下条件的 a、$b \in \prod_{s\in S} \mathcal{A}(s,\ s)$

$\forall (h\colon t \to s, k\colon u \to s),\ \exists!\ (f\colon t \to s, g\colon u \to t) \quad \text{with} \quad fa_t = h \quad \text{and} \quad fb_t g = k.$

那么 $\mathcal{A}$ 就是一个群胚；这是一个不太显然的事实，可以手工证明。

5.4.2. 作为松弛幺半群余单子的范畴。小范畴也可以解释为一个余单子，并且在这里，范畴是群胚当且仅当它是“松弛左霍普夫”，不过这一结果并非定理 24 的推论。设$\mathcal{A}$ 为一个小范畴，其对象集为 S。正如 B. Day 和 R. H. Street 在 [7]中所示，$\mathcal{A}$ 在集合范畴/$S \times S$ 上诱导出一个幺半余单子，当且仅当该范畴是群胚时，这个余单子才是霍普夫的，因此我们不妨探究这类余单子何时是松弛 Hopf。

首先回顾，若 $\mathcal{C}$ 是一个笛卡尔范畴，则任意对象 X 都有唯一的余幺半群结构，其余乘积为对角态射 $\Delta_X\colon X \to X \times X$，因此定义了 $\mathcal{C}$上的余单子 $X\times?$。此外，遗忘函子 $\mathcal{C}/X \to \mathcal{C}$是余单子的，而其余单子恰为 $X\times?$。

特别地，记 A 为 $\mathcal{A}$ 的箭头集合，并将其视为集合范畴 Set/S^2 中的一个对象，其方式为 $(s, t)\colon A \to S^2$，并令 $C = A \times_{S^2} ?$ 为 Set/S^2 上相应的余单子。

现在赋予 Set/S^2 由跨图的复合给出的幺半结构：若将 U 和 U' 视为有向图，则 $U \otimes U'$ 是由可复合边对构成的有向图。这个张量积的单位对象为 $\Delta_S\colon S \to S^2$。

与 $\mathcal{A}$ 相关联的余单子 C 具有如下幺半结构。对于 Set/S^2 中的 U, U'，自然态射 $C(U) \otimes C(U') \to C(U \otimes U')$ 的形式为

$$(A \underset{S^2}{\times} U) \underset{S}{\times} (A \underset{S^2}{\times} U') \to A \underset{S^2}{\times} (U \underset{S}{\times} U'), \qquad (a, u, a', u') \mapsto (a' \cdot a, u, u')$$

其中 $a' \cdot a$ 是范畴 $\mathcal{A}$ 中 a 与 a' 的复合。态射 $\Delta_S \to C(\Delta_S) = A \times_{S^2} \Delta_S$ 由 $x \mapsto (1_x, x)$ 给出。

由于幺半余单子是对偶范畴上的余幺半单子，因此为 C 寻找松弛 Hopf 结构是合理的。注意，我们不能应用定理 24 的对偶形式，因为尽管范畴 Set/S^2 是余笛卡尔的，跨图的复合却不是它的余乘积。

余单子 C 的松弛（左或右）Hopf 结构由一个自然变换给出

$$\beta_{U,U'}\colon C(U) \otimes C(U') \to U \otimes U'$$

它满足一个额外性质（由 β 诱导的某个态射应当可逆）。下面的引理表明，对于这样的 β，没有任何回旋余地。

引理 31. 只有一个自然变换 $C(U) \otimes C(U') \to U \otimes U'$，即 $\varepsilon \otimes \varepsilon$，其中 ε 是余单子 C 的余单位。

证明. 设 $u \in U$ 和 $u' \in U'$，并将 u（分别为 u'）在 S^2 中的像记为 (x, y)（分别为 (x', y')）。这定义了集合范畴 Set/S^2 中的两个对象 $*_u = (x, y)\colon * \to S^2$ 和 $*_{u'} = (x', y')\colon * \to S^2$。将自然性用于态射 $(u, u')\colon *_u \otimes *_{u'} \to U \otimes U'$，由 β 的自然性可得 $\beta_{U,\,U'}(a, u, a', u') = (u, u')$，即 $\beta = \varepsilon \otimes \varepsilon$。□

总而言之：

定理32。设 $\mathcal{A}$ 是一个小范畴，其对象集为 S，并设 C 是上述定义在集合范畴/S^2 上的幺半余单子。以下各条件等价：

(i) C 是一个松弛左 Hopf 余单子；

(ii) C 是一个左 Hopf 余单子；(iii) $\mathcal{A}$ 是一个群胚。

此外，若这些条件成立，则 C 恰有一种松弛 Hopf 结构。

6. Slack Hopf comagma algebras

6.1. 松弛 Hopf 余 magma 幺半群。设 $\mathcal{B}$ 是一个辫编织幺半范畴，其辫编织为 τ。给定 $\mathcal{B}$ 中的两个幺半群 (M, m, u) 和 (M', m', u')，我们在 $M \otimes M'$ 上赋予一个幺半群结构，其乘积为 $(m \otimes m')(M \otimes \tau_{M',\,M} \otimes M')$，单位为 $u \otimes u'$。这在 $\mathcal{B}$ 中的幺半群范畴上定义了一个幺半结构。

$\mathcal{B}$ 中的余 magma 幺半群是 $\mathcal{B}$中幺半群范畴里的余 magma，也就是说，是赋有幺半群态射 $\Delta\colon M \to M \otimes M$的 $\mathcal{B}$ 中的幺半群 M。

设 (M, Δ) 是 $\mathcal{B}$ 中的一个余 magma 幺半群。那么，Δ 定义了单子 $M\otimes?$ 在 $\mathcal{B}$ 上的余松弛 magma 结构 T_2，其定义如下：

$$T_2(X, Y) = (M \otimes \tau_{X,M} \otimes Y)(\Delta \otimes X \otimes Y).$$

现在设 (M,Δ) 是 $\mathcal{B}$ 中的一个余 magma 幺半群。态射 $v\colon \mathbb{I} \to M\otimes M$ 按如下方式定义了一个态射 $H^v\colon M\otimes M\to M\otimes M$：

$$H^v=(m\otimes m)(M\otimes\Delta\otimes m)(M\otimes\tau_{M,M}\otimes M)(v\otimes M\otimes M).$$

我们称 v 是 M 上的松弛左 Hopf 结构，若 H^v 是一个同构。若情况如此，则 v 在余松弛岩浆单子 $M\otimes?$ 上定义了一个松弛左 Hopf 结构 β，如下所示：

$$\beta_{X,Y}=(M\otimes\tau_{M,X}\otimes Y)(v\otimes X\otimes Y).$$

注意，余 magma 单子 $M\otimes?$ 可能具有并非由这种形式给出的松弛左 Hopf 结构。

$\mathcal{B}$ 中的松弛左 Hopf 幺半群是指具有松弛左 Hopf 结构的余 magma 幺半群。

例 33。设 M 是一个普通幺半群。那么集合范畴 Set 上的单子 $M\times?$ 具有唯一的余幺半结构，它对应于由对角映射 $\Delta\colon M\to M\times M$ 定义的余 magma 幺半群结构。根据定理 24，$M\times?$ 是松弛左 Hopf 单子，当且仅当它是左 Hopf 单子；这等价于融合映射 $H\colon M^2\to M^2,(x,y)\mapsto(x,xy)$ 是双射，也等价于 M 是一个群。这可以概括为："集合范畴 Set 中的松弛 Hopf 幺半群就是群。" $M\times?$ 上的松弛左 Hopf 结构具有如下形式：$(x,y)\mapsto(a,x,b,y)$，其中 $a,b\in M$。因此，下面这个看似矛盾的陈述成立：若存在 $(a,b)\in M^2$，使得映射 $M^2\to M^2,(x,y)\mapsto(xa,xby)$ 是双射，那么 M 就是一个群。手工证明这一点稍有难度，留作读者练习。

注 34. 设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半范畴，并设 M 是 $\mathcal{C}$的范畴中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 中的一个余 magma 幺半群。那么，M 如下定义了 $\mathcal{C}$ 上的余松弛 magma 单子。可以将 M 视为 $\mathcal{C}$ 中的一个幺半群，带有相容的半编织 σ，而单子$M\otimes?:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$具有余松弛 magma 结构 $T_2(X,Y)=(M\otimes\sigma_X^{-1},{}_M\otimes Y)(\Delta\otimes X\otimes Y)$。此外，若 M 是 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$中的一个松弛左 Hopf 幺半群，则 $M\otimes?$ 是 $\mathcal{C}$上的松弛左 Hopf 单子。

6.2. 余半群代数。设 $\Bbbk$ 是一个交换环。$\Bbbk$-模的幺半范畴 $(\mathrm{Mod}_\Bbbk,\otimes=\otimes_\Bbbk,\Bbbk)$ 与 $\mathrm{Mod}_\Bbbk$ 的右正合 $\Bbbk$-线性自函子范畴经由函子 $E\mapsto E\otimes?$ 等价。因此，$\mathrm{Mod}_\Bbbk$ 上的一个 $\Bbbk$-线性右正合松弛左 Hopf 单子可解释为一个带有附加结构的 $\Bbbk$-模。

在 $\Bbbk$ 上的余幺半群代数，是辫编范畴 $\mathrm{Mod}_\Bbbk$（具有其唯一的辫编织）中的余 magma 幺半群。换句话说，它是一个 $\Bbbk$-代数 A，并带有一个代数态射 $\Delta\colon A\to A\otimes A$。$\Bbbk$-模 A 上的余幺半群代数结构，与自函子 $A\otimes?$ 上的余松弛岩浆单子结构相同。

注 35. 为简洁起见，我们将使用以下变体的 Sweedler记号。若 x 是余幺半群代数 A 中的一个元素，我们记作 $\Delta(x)=x_{(1)}\otimes x_{(2)}$。[5] 由于不假设 Δ 是余结合的，例如我们记作

$$(\Delta\otimes A)\Delta(x)=x_{(1)(1)}\otimes x_{(1)(2)}\otimes x_{(2)}.$$

此外，对于元素 $u\in A^{\otimes n}$，我们采用记号 $u=u^{(1)}\otimes\cdots\otimes u^{(n)}$；如果 u 可逆，则记作 $u^{-1}=u^{(-1)}\otimes\cdots\otimes u^{(-n)}$。

若 A 是一个 $\Bbbk$–代数，我们将包络代数 $A^{\mathrm{op}}\otimes A$记作 A^e，将其乘积记作 $\cdot_e$。

[5]我们决定放宽一下要求，省略求和符号。

6.3. 松弛霍普夫代数。松弛左霍普夫代数是 $\mathrm{Mod}_{\Bbbk}$中的松弛左 Hopf 幺半群，也就是说，它是一个带有松弛左 Hopf 结构 $v \in A \otimes A$的余幺半群代数 A。对 v 的条件是，态射

$$H^v : A \otimes A \to A \otimes A, \quad x \otimes y \mapsto x_{(1)} v^{(1)} \otimes x_{(2)} v^{(2)} y$$

是一个同构（采用注 35 中的约定）。

我们将 H^l 记为左融合态射 $H^l = H^{1 \otimes 1} = (A \otimes m)(\delta \otimes A)$。

注意，$\Bbbk$ 上的余 magma 代数是松弛左霍普夫代数，当且仅当相应的余松弛岩浆单子是松弛左 Hopf 单子。

注 36. 设 (A, Δ) 为余 magma 代数。在 $A \otimes A$上考虑两种 $A-A$双模结构：由 $a \cdot (x \otimes y) \cdot b = ax \otimes yb$定义的 ${}_{\bullet}A \otimes A_{\bullet}$，以及由 $a \cdot (x \otimes y) \cdot b = \Delta(a)(x \otimes yb)$ 定义的 ${}_{\Delta}A \otimes A_{\bullet}$。则赋值 $v \mapsto H^v$ 在 $A \otimes A$ 的元素与 $A-A$ 线性映射 ${}_{\bullet}A \otimes A_{\bullet} \to {}_{\Delta}A \otimes A_{\bullet}$之间定义了一个双射。因此，$A$ 是松弛左 Hopf，当且仅当 $A-A$ 双模 ${}_{\bullet}A \otimes A_{\bullet}$ 与${}_{\Delta}A \otimes A_{\bullet}$ 同构。

例 37. 设 $\Bbbk$ 上的霍普夫代数是一个松弛左霍普夫代数，其松弛左 Hopf 结构为 $v = 1 \otimes 1$。

注 38. 设 A 是一个余 magma 代数，并假设

$$(A \otimes m)(\Delta \otimes A) = (A \otimes m^{\mathrm{op}})(\Delta \otimes A),$$

特别是在 A 是交换的或 $\Delta = A \otimes u$ 的情况下，情况正是如此。于是对于 $v \in A \otimes A$,

$$H^v = v \cdot H^l,$$

其中 $\cdot$ 表示 $A^e = A^{\mathrm{op}} \otimes A$ 的乘积。

例 39. 设 $(A、\ \Delta)$ 是余 magma 代数，并设 $t \in (A \otimes A)^*$。定义 Δ_t 为 Δ 在 t 下的共轭，即 $\Delta_t = t\Delta t^{-1}$。对于 $v \in A \otimes A$，用 H_t^v 表示相对于余 magma 代数 $(A、\ \Delta_t)$ 的态射 H^v。容易算得:

$$H_t^v = t\, H^{t^{-1}v}.$$

特别地，v 是 $(A、\ \Delta_t)$ 的松弛左 Hopf 结构，当且仅当 $t^{-1}v$ 是 $(A、\ \Delta)$ 的松弛左 Hopf 结构。

例 40. 设 A 是一个 $\Bbbk$-代数，并设 $\Delta = A \otimes u$，其中 u 是 A 的单位。那么 (A, Δ) 是一个松弛左霍普夫代数，其松弛左霍普夫元为 $1 \otimes 1$。（这是例 14 的一个特例。）设 $t \in A \otimes A$。沿用前一个例子中的记号，并利用注 38，对于 $v \in A \otimes A$，我们有:

$$H_t^v(\xi) = t\left((t^{-1}v) \cdot \xi\right).$$

因此，v 是 (A, Δ_t) 的松弛左霍普夫结构，当且仅当 $t^{-1}v$ 在 $A^e = A^{\mathrm{op}} \otimes A$ 中可逆。特别地，t 是一个松弛左霍普夫结构，因此 (A, Δ_t) 是一个松弛左霍普夫代数。

例 41. 设 $\Bbbk$ 是一个域，并设 A 为矩阵代数 $M_n(\Bbbk)$。按照前一个例子中的记号，A 上的所有余 magma 结构都具有 Δ_t 这种形式，因为两个矩阵代数之间的任意两个代数态射都彼此共轭。设 $t \in A \otimes A \xrightarrow{\cong} \mathrm{End}(\Bbbk^n \otimes \Bbbk^n)$ 是由 $x \otimes y \to y \otimes x$ 定义的可逆元。如果 $n > 1$ （留作练习），那么 $t^{-1} = t$ 在 A^e 中不可逆，因此 $(M_n(\Bbbk), \Delta_t)$ 是一个松弛左霍普夫代数，其左融合态射 H^l 对于 $n > 1$ 不是同构。

引理 42. 设 A是交换环$\Bbbk$上的交换余岩代数。那么，A是松弛左霍普夫结构，当且仅当左融合态射 H^l 是同构。此外，在这种情况下，松弛左霍普夫结构恰好是 A^e中的可逆元。

证明. 设 $v \in A^e$。由于 A 是交换的，依据注 38， $H^v = v \cdot H^l$。特别地，若 v 是松弛左 Hopf 结构，则 $1 \otimes 1 = H^v(w) = v \cdot H^l(w)$，所以 $v \in (A^e)^\times$，因为A^e 是交换的；而 H^l 是同构，因为 H^v 和 v ?也是同构。此外，若 H^l 是同构，则 H^v 是同构，当且仅当 v 在 A^e中可逆。□

6.4. 松弛 Hopf 结构的唯一性。设 A 是一个松弛左霍普夫代数，其对应的松弛左 Hopf 单子为 $T = A\otimes$。第 4.2 节中定义的幺半群 $\mathcal{M}^l(T)$ 就是 A 的包络代数 $A^e = A^{\mathrm{op}} \otimes A$，其乘积 $\cdot$ 由 $(x\otimes y)\cdot(z\otimes t) = zx\otimes yt$ 给出。特别地，$\mathcal{G}^l(T) = (A^e)^\times$。此外，$\mathcal{M}^l(T) = A^e$ 在右侧作用于 $A \otimes A$：

$$v \lhd g = H^v g = g^{(1)}_{(1)} v^{(1)} \otimes g^{(1)}_{(2)} v^{(2)} g^{(2)}.$$

如果 $v \in A \otimes A$ 是一个松弛左 Hopf 结构，那么 $\{v \lhd g;\ g \in (A^e)^\times\}$ 是所有松弛左 Hopf 结构的集合。

6.5. 松弛 Hopf 代数上的模的内 Hom。若 A 是一个松弛左霍普夫代数，其松弛左 Hopf 结构为 v，则左 A-模范畴 A–Mod 是左闭的。利用定理 20，我们现在用 v 明确写出 A –Mod 的左内部 Hom。

我们引入新的记号。若 V, W 是两个 A-模，则 $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}$ 是一个右 A^e-模，其中 A^e 是包络代数 $A^{\mathrm{op}} \otimes A$，其右作用定义如下：对于线性映射 $f \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W)$ 和 A^e 中的元素 ξ，

$$(f \lhd \xi)(x) = \xi^{(1)} f(\xi^{(2)} x).$$

注意， A^e 有一个上述形式的忠实右模。例如，自由左 A-模 A 和 $A \otimes A$ 之间的 Hom： $((u \otimes \mathrm{id}_A) \lhd \xi)(1) = \xi$，其中 $\xi \in A^e$。

现在定义 ∇: $A \to A \otimes A$，如下：

$$\nabla(x) = H^{v-1}(v^{(1)} x \otimes v^{(2)}).$$

松弛左 Hopf 反 antipode $S^l_{Y,X}$： $A \otimes \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(Y, A \otimes X) \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(Y, A \otimes X)$，对于 $X, Y \in \mathrm{Mod}_{\Bbbk}$，定义为 $S^l_{X,Y}(a \otimes f)(y) = \nabla^{(1)}(a) \otimes f(\nabla^{(2)}(a) \otimes y)$，因此，对于 A-模 V 和 W， A 在 $[V, W] = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W)$ 上的作用由 $af = f \lhd \nabla(a)$ 给出。

内 Hom 伴随的单位和余单位如下：

$$h^V_W : W \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W \otimes V), \qquad y \mapsto (x \mapsto v^{(1)} \cdot y \otimes v^{(2)} \cdot x),$$
$$e^V_W : \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W) \otimes V \to W, \qquad f \otimes x \mapsto w^{(1)} \cdot f(w^{(2)} \cdot x),$$

其中 $w = H^{v-1}(1 \otimes 1)$。

引理 43. 态射 ∇ 是一个代数反同态 $A \to A^e$。

证明. 如上所述， A^e 有一个形如 $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W)$ 的忠实模。显然， $\nabla(ab)$ 和 $\nabla(b)\nabla(a) \in A^e$ 在 Homs 上的作用相同，因此它们相等。 $\nabla(1)$ 和 $1 \otimes 1$也同理。□

备注 44. 两种不同的松弛左 Hopf 结构 $v, v' = v \lhd \gamma$ (带有 $\gamma \in (A^e)^\times$) 定义了左内部 Hom $[V, W]_v$ 和 $[V, W]_{v'}$，它们具有相同的底层 $\Bbbk$-模 $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W)$，但 A-模结构、求值和余求值态射各不相同。然而，左内部 Hom 在唯一同构意义下的唯一性给出了 A-模的同构 $[V, W]_v \xrightarrow{\cong} [V, W]_{v'}$，该同构由 $f \mapsto f \lhd \gamma$ 给出。

6.6. $(\Delta、\ v)$ 与 $(\nabla、\ w)$之间的关系。

备注 45. 设 A 是一个松弛左霍普夫代数，其松弛左 Hopf 结构为 v。那么，使用上述记号，我们很容易验证：

$$H^{v^{-1}}(x\otimes y)=\nabla(x)\cdot w\cdot(1\otimes y)=w^{(1)}\nabla^{(1)}(x)\otimes\nabla^{(2)}(x)w^{(2)}y.$$

A-线性伴随单位与余单位 h 和 e 分别对应为

$$(1)\quad (x\otimes 1)\cdot v=H^v\nabla(x)\quad\text{and}\quad (2)\quad w\cdot(x\otimes 1)=H^{v^{-1}}\Delta(x)\quad(\text{for } x\in A)$$

而伴随恒等式对应为

$$(3)\quad H^v w=1\otimes 1\quad\text{and}\quad (4)\quad H^{v^{-1}}v=1\otimes 1.$$

注意，这些方程并无新意：(4)显然成立；根据 ∇ 和 w的定义，(1)和(3)成立；(2)则由 H^v的左 A-线性推出。

注 46. 给定一个代数 A，以下两者之间存在一一对应：

(i) 数据 (Δ,v)，其中 Δ 是代数态射 $A\to A\otimes A$，而 v 是松弛左 Hopf 结构，即 $A\otimes A$ 的一个元素，使得

$$H^v=H^{\Delta,v}:A\otimes A\to A\otimes A,\quad x\otimes y\mapsto\Delta^{(1)}(x)v^{(1)}\otimes\Delta^{(2)}(x)v^{(2)}y$$

是一个同构，

(ii) 数据 (∇,w)，其中 ∇ 是代数态射 $A^{\mathrm{op}}\to A^e$，而 w 是 A^e 的一个元素，使得

$$Q^{\nabla,w}:A\otimes A\to A\otimes A,\quad x\otimes y\mapsto w^{(1)}\nabla^{(1)}(x)\otimes\nabla^{(2)}(x)w^{(2)}y$$

是一个同构，

其特征是 $H^{\Delta,v}$ 和 $Q^{\nabla,w}$ 互为逆元。

这种对偶性的原因在于，$\mathcal{C}=A$–Mod 上的左闭岩浆结构由一个张量积函子 $\otimes:\mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 和一个左内部 Hom 函子 $[-,-]:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 构成，二者由伴随关系 $V\otimes ?\ \dashv\ [V,?]$ 联系起来。我们将张量积视为主要数据，因此把左闭岩浆结构编码为 (Δ,v)。如果我们优先考虑左函子，则会将其编码为 (∇,w)。

下述引理利用了这样一个事实：$(\Delta、\ v)$、$(\nabla、\ w)$ 起着对称的作用。给定一个带有松弛左 Hopf 结构 v的余幺半群代数 A，以及 $s\in A^e$，定义

$$Q^s:\quad A\otimes A\to A\otimes A、\qquad x\otimes y\mapsto\nabla(x)\cdot s\cdot(1\otimes y)=s^{(1)}\nabla^{(1)}(x)\otimes\nabla^{(2)}(x)s^{(2)}y.$$

L引理 47. 设 A 是一个带有松弛左 Hopf 结构 v的余幺半群代数。那么：(1) v 是 A^e 中满足下式的唯一元素 t

$$H^t\nabla(x)=(x\otimes 1)\cdot t\quad and\quad H^t(w)=1\otimes 1;$$

(2) w 是 A^e 中满足下式的唯一元素 s

$$Q^s\Delta(x)=s\cdot(x\otimes 1)\quad and\quad Q^s(v)=1\otimes 1.$$

证明。我们来证明断言（2）。观察到 $Q^w=H^{v^{-1}}$后，根据备注 45 可知，$s=w$ 满足所述性质。因此，假设 $Q^s\Delta(x)=s\cdot(x\otimes 1)$和 $Q^s(v)=1\otimes 1$。于是我们有

$$\begin{aligned}
w&=Q^s(v)\cdot w=\nabla(v^{(1)})\cdot s\cdot(1\otimes v^{(2)})\cdot w=\nabla(v^{(1)})\cdot s\cdot(w^{(1)}\otimes 1)\cdot(1\otimes v^{(2)}w^{(2)})\\
&=\nabla(v^{(1)})\cdot\nabla(w^{(1)}_{(1)})\cdot s\cdot(1\otimes w^{(1)}_{(2)})\cdot(1\otimes v^{(2)}w^{(2)})\\
&=\nabla(w^{(1)}_{(1)}v^{(1)})\cdot s\cdot(1\otimes w^{(1)}_{(2)}v^{(2)}w^{(2)})\\
&=\nabla(H^v(w)^{(1)})\cdot s\cdot(1\otimes H^v(w)^{(2)})=Q^sH^v(w)=Q^s(1\otimes 1)=s.
\end{aligned}$$

断言（1）的证明思路相同。我们知道 $t = v$ 满足所述性质；若 t 满足这些性质，通过类似的计算可得 $v = H^t(w)\, v$ （ $A \otimes A$ 中的乘积） $= H^t Q^w(v) = H^t(1 \otimes 1) = t$。□

6.7. 带余单位的松弛霍普夫代数。余 magma 代数的左余单位是代数态射 $\varepsilon\colon A \to \Bbbk$，满足 $(\varepsilon \otimes A)\Delta = \mathrm{id}_A$。

引理 48. 设 A 是一个松弛左霍普夫代数，具有松弛左 Hopf 结构 v 和左余单位 ε。采用通常的记号，令 $\sigma = (\varepsilon \otimes A)\nabla\colon A \to A$，$a = (\varepsilon \otimes A)w$ 和 $b = (\varepsilon \otimes A)v$。那么 $\sigma\colon A \to A$ 是代数反同态，并且有：

(1) $\sigma(x_{(1)})a^{x_{(2)}} = a\ \varepsilon(x)$ 对于 $x \in A$；(
2) $\nabla^{(1)}(x)b\ \nabla^{(2)}(x) = b\ \varepsilon(x)$ 对于 $x \in A$；
(3) $w^{(1)}b\ w^{(2)} = 1$；(4) $\sigma(v^{(1)})a\ v^{(2)} = 1$。

证明。结论可由引理 43 和备注 45 立即得出： σ 是代数反同态，因为 $\nabla\colon A \to A^e$ 和 $\varepsilon \otimes A\colon A^e \to A$ 分别是代数反同态和代数态射。此外，备注中的等式 (1)–(4) 后接 $(\varepsilon \otimes A)$，即可得到引理中的断言 (1)–(4)。□

6.8. 松弛霍普夫双代数与霍普夫代数。现在我们来考虑双代数的情形。回顾一下，若 C 是余代数且 B 是代数，则 $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(C, B)$ 是一个代数，其卷积乘积 $*$ 定义为 $f * g = m_B(f \otimes g)\Delta_C$，单位为 $u_B\varepsilon_C$。

设 A 是一个余单位为 ε的双代数。 A 的反 antipode S 是 $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A, A)$ 关于卷积乘积的逆元。反 antipode 的存在等价于左融合算子 $H^l = (A \otimes m)(\delta \otimes A)\colon A \otimes A \to A \otimes A$可逆。霍普夫代数是带有反 antipode 的双代数。

交换情形特别简单，是引理 42 的一个特例：

推论 49. 交换双代数是霍普夫代数，当且仅当它是松弛左霍普夫的。□

现在我们来讨论一般情形。若 $\Bbbk$ 是一个域，则 $\Bbbk$-代数 B 是拟有限的，当且仅当它是有限维代数的余滤极限。若 B 是拟有限代数，且 C 是余代数，则 $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(C, B)$ 关于卷积乘积构成一个拟有限代数，因为 $\Bbbk$- 余代数是其有限维子余代数的滤过并。

定理 50. 设 A 是交换环 $\Bbbk$ 上的双代数， $v \in A \otimes A$ 是松弛左 Hopf 结构，并且采用第 6.5 节的记号，令 $a = (\varepsilon \otimes A)w \in A$ 和 $\sigma = (\varepsilon \otimes A)\nabla$。那么：

(1) 若 A 是霍普夫代数，则a 可逆；(2) 若a 可逆，则由 $S\colon A \to A$ 定义的线性映射

$$x \mapsto S(x) = a^{-1} \cdot \sigma(x) \cdot a$$

是卷积代数 $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A, A)$中 id_A 的左逆；
(3) 若a 可逆，且 $\Bbbk$ 是域、 A 是拟有限，则 S 是反 antipode，因此 A 是霍普夫代数。

证明。双代数 A 是霍普夫代数，当且仅当 H^l 是同构；而这又当且仅当根据推论 19， w 在 A^e 中可逆。由于 ε 是代数态射，我们有$a = (\varepsilon \otimes A)w$ 在 A 中可逆，这证明了断言（1）。假设a 可逆，并令 $S = a^{-1}\sigma a$。根据引理 48， $\sigma(x_{(1)})a^{x_{(2)}} = a\ \varepsilon(x)$。于是 $S(x_{(1)})x_{(2)} = \varepsilon(x)$，这意味着 S 是 id_A 的左卷积逆。现在，若 $\Bbbk$ 是域且 A 是拟有限的，则卷积代数 $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A, A)$ 也是拟有限的。断言（3）源于这样一个事实：在拟有限代数中，若一个元素有单侧逆，则它可逆；因此 S 是 id_A 的逆，也就是反 antipode。注意， $(\sigma、a、a^{-1})$ 是拟反 antipode，见下文第 7 节。□

7. Quasi-Hopf algebras

设 $(A、\ \Delta、\ \varepsilon、\ \phi)$ 是域 $\Bbbk$ 上的拟双代数。回顾一下，拟反 antipode 是三元组 $(\mathcal{S}、\ a、\ b)$，其中$\mathcal{S}$： $A \to A$ 是代数反同态，而a、b 是 A 中满足以下四条公理的元素：

(QA1) $\mathcal{S}(x_{(1)})a\,x_{(2)} = a\ \varepsilon(x)$, $x \in A$; (QA2)
$x_{(1)}b\,\mathcal{S}(x_{(2)}) = b\ \varepsilon(x)$, $x \in A$; (QA3) $\phi^{(1)}\ b$
$\mathcal{S}(\phi^{(2)})a\ \phi^{(3)} = 1$; (QA4) $\mathcal{S}(\phi^{(-1)})a\ \phi^{(-2)}\ b\mathcal{S}$
$(\phi^{(-3)}) = 1$,
其中 $\phi = \phi^{(1)} \otimes \phi^{(2)} \otimes \phi^{(3)}$ 和 $\phi^{-1} = \phi^{(-1)} \otimes \phi^{(-2)} \otimes \phi^{(-3)}$，与我们的约定一致。

拟霍普夫代数是具有拟反 antipode 的拟双代数。

设 A 是域 $\Bbbk$上的拟霍普夫代数，其拟反 antipode 为 $(\mathcal{S},a,b)$。按照 Schauenburg [16], 的定义，令 $v, w \in A \otimes A$ 为:

$$v = \phi^{(-1)} \otimes \phi^{(-2)}\ b\,\mathcal{S}(\phi^{(-3)}), \quad w = \phi^{(1)} \otimes \mathcal{S}(\phi^{(2)})\ a\,\phi^{(3)}.$$

Schauenburg 证明，我们记作 H^v 的态射是双射，其中

$$H^{v-1}(x \otimes y) = w^{(1)}x_{(1)} \otimes \mathcal{S}(x_{(2)})w^{(2)}y$$

（特别是， $w = H^{v-1}(1 \otimes 1)$，与我们的记号一致）。换言之，v 是一种松弛左 Hopf 结构，而拟霍普夫代数是松弛左霍普夫代数。

注 51. 拟霍普夫代数的松弛（右）霍普夫结构已见于 Drinfeld [8], 命题 1.5.，其形式略有不同，因为其中涉及 $\mathcal{S}$ 的逆元。 [6]

若一种松弛左 Hopf 结构 v 能够用 A 的拟反 antipode 表示，则称其为左 Hopf 结构。

定理 52. 若 v 是与拟反 antipode $(\mathcal{S},a,b)$ 相关联的左 Hopf 结构，则:

（1） $a = (\varepsilon \otimes A)w = (\varepsilon \otimes A)H^{v-1}(1 \otimes 1)$;
（2） $b = (\varepsilon \otimes A)v$; （3） $\mathcal{S} = \sigma$; （4）
$\nabla = (A \otimes \mathcal{S})\Delta = (A \otimes \sigma)\Delta$。

证明。Schauenburg 的 w 等于 $H^{v-1}(1 \otimes 1)$，这是由给出的 H^{v-1} 表达式得出的；前两个断言则源于以下事实： $(\varepsilon \otimes A \otimes A)\phi^{-1} = 1 \otimes 1 = (\varepsilon \otimes A \otimes A)\phi$，且 $\mathcal{S}$ 是代数反同态。为验证断言（4）中的恒等映射，其中 $\nabla(x) = H^{v-1}(v^{(1)}x \otimes v^{(2)})$，我们计算

$$\begin{aligned} H^v(A \otimes \mathcal{S})\Delta(x) &= H^v(x_{(1)} \otimes \mathcal{S}(x_{(2)})) = x_{(1)(1)}\phi^{(-1)} \otimes x_{(1)(2)}\phi^{(-2)}\,b\mathcal{S}(\phi^{(-3)})\mathcal{S}(x_{(2)}) \\ &= x_{(1)(1)}\phi^{(-1)} \otimes x_{(1)(2)}\phi^{(-2)}\,b\mathcal{S}(x_{(2)}\phi^{(-3)}) = \phi^{(-1)}x_{(1)} \otimes \phi^{(-2)}x_{(2)(1)}\,b\mathcal{S}(\phi^{(-3)}x_{(2)(2)}) \\ &= \phi^{(-1)}x_{(1)} \otimes \phi^{(-2)}x_{(2)(1)}\,b\mathcal{S}(x_{(2)(2)})\mathcal{S}(\phi^{(-3)}) = \phi^{(-1)}x_{(1)} \otimes \phi^{(-2)}\,b\varepsilon(x_{(2)})\mathcal{S}(\phi^{(-3)}) \\ &= \phi^{(-1)}x \otimes \phi^{(-2)}\,b\mathcal{S}(\phi^{(-3)}) = v^{(1)}x \otimes v^{(2)}, \end{aligned}$$

由此我们得出 $\nabla = (A \otimes \mathcal{S})\Delta$，因此 $\sigma = (\varepsilon \otimes A)\nabla = \mathcal{S}$，即断言（3），所以断言（4）也成立。□

注释53。特别地，在 [1] 中由拟反 antipode 构造的 A–Mod 中的左内部 Hom，与由相应的松弛左 Hopf 结构 v 定义的左内部 Hom 相同（具有相同的模结构、伴随单位和余单位）。还要注意，拟反 antipode 的公理与引理 48 中列出的松弛左 Hopf 结构的性质完全吻合。

[6]对于拟反 antipode，Drinfeld 假设 $\mathcal{S}$ 是双射。

我们如何在松弛左霍普夫结构中刻画左霍普夫结构？下一节将专门讨论这个问题。

7.1. 松弛度与比较态射。给定一个拟双代数 A上的松弛左霍普夫结构v，回忆 $w = H^{v-1}(1 \otimes 1)$、$\nabla(x) = H^{v-1}(v^{(1)}x \otimes v^{(2)})$和 $\sigma = (\varepsilon \otimes A)\nabla$。令 $a = (\varepsilon \otimes A)w$、$\overline{w} = \phi^{(1)} \otimes \sigma(\phi^{(2)})a\ \phi^{(3)} \in A \otimes A$，并定义

$$\mathrm{sl}(v) = \overline{w}^{(1)} v^{(1)}_{(1)} \otimes \sigma(v^{(1)}_{(2)})\overline{w}^{(2)} v^{(2)} \in A^e.$$

元素 $\mathrm{sl}(v)$ 称为 v的松弛度。

设 $\mathcal{C}$ 为一个幺半左闭范畴，令 X、Y 为 $\mathcal{C}$ 中的对象，并考虑典范态射，称为比较态射：

$$c_{X,Y} : Y \otimes [X, \underset{\mathbb{I}}{\ }] \to [X, Y]$$

由内 Hom 的泛性质从态射得到

$$(Y \otimes [X, \underset{\mathbb{I}}{\ }]) \otimes X \xrightarrow{\cong} Y \otimes ([X, \underset{\mathbb{I}}{\ }] \otimes X) \xrightarrow{Y \otimes e^X_{\mathbb{I}}} Y \otimes \underset{\mathbb{I}}{\ } \cong Y,$$

对于 $\mathsf{Vect}_{\Bbbk}$ 中的 E、F，比较态射 $F \otimes E^* \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F、E)$ 是典范映射 $x \otimes f \mapsto (x \circ f\colon\ y \mapsto f(y)x)$（将 x 视为映射 $\Bbbk \to E$）。

引理 54. 给定一个带有松弛左 Hopf 结构 v的拟双代数 A，对于任意一对 A-模 V、W，比较态射

$$c_{V,W} : W \otimes [V, \underset{\mathbb{I}}{\ }] \to [V, W]$$

由下式给出

$$c_{V,W}(x \otimes f) = (x \circ f) \lhd \mathrm{sl}(v).$$

证明. 考虑到 A–模范畴的结合约束 a，态射$c_{V,W}$ 由下述态射经内 Hom 的泛性质得到：

$$(W \otimes [V, \underset{\mathbb{I}}{\ }]) \otimes V \xrightarrow{a_{W,[V,\underset{\mathbb{I}}{\ }],V}} W \otimes ([V, \underset{\mathbb{I}}{\ }] \otimes V) \xrightarrow{W \otimes e^V_{\mathbb{I}}} W \otimes \underset{\mathbb{I}}{\ } \cong W,$$

即，$c_{V,W} = [V, (W \otimes e^V_{\mathbb{I}})a_{W,[V,\underset{\mathbb{I}}{\ }],V}]h^V_{W \otimes [V,\underset{\mathbb{I}}{\ }]}$。利用 $A-$模范畴中内 Hom 的显式公式及相应的伴随求值与余求值，并结合结合约束 a 关于 ϕ的表达式，经过直接计算，首先得到

$$(W \otimes e^V_{\mathbb{I}})a_{W,[V,\underset{\mathbb{I}}{\ }],V}(x \otimes f \otimes y) = \overline{w}^{(1)}x \otimes f(\overline{w}^{(2)}y),$$

其次得到

$$c_{V,W}(x \otimes f)(y) = \overline{w}^{(1)} v^{(1)}_{(1)} x \otimes f(\sigma(v^{(1)}_{(2)})\overline{w}^{(2)} v^{(2)} y) = \mathrm{sl}(v)^{(1)}x \otimes f(\mathrm{sl}(v)^{(2)}y)$$

如前所述。 □

引理 55. 对于具有松弛左霍普夫结构 v的松弛左霍普夫代数 A，我们有

$$sl(v) \cdot \Delta)((A \otimes \sigma)\Delta) \cdot \mathrm{sl}(v).$$

证明. 此结论由引理 54 得出，并表达了$c_{V,W}$:$W \otimes [V, \underset{\mathbb{I}}{\ }] \to [W, V]$的 A-线性，利用了以下事实：$(\varepsilon \otimes \sigma)\Delta$ 和 ∇ 分别编码了 A 在源和靶上的作用。为此，我们利用这样一个事实：可以选择 V和 W，使得 $W \otimes [V, \underset{\mathbb{I}}{\ }]$ 是忠实右 A^e-模；当 $\Bbbk$ 是域时，这一条件成立，取 $V = W = A$即可。□

注记 56. 对于松弛左霍普夫结构 v，比较映射$c_{\underset{\mathbb{I}}{\ },W}$：$W^* \to W^*$ 是恒等映射，由此得到：$(\varepsilon \otimes A)\,\mathrm{sl}(v) = 1$。

引理 57. 设 A 是一个具有松弛左 Hopf 结构 v的准双代数。对于 $x \in A$，$\overline{w} \cdot (x \otimes 1) = \overline{w}^{(1)} x_{(1)(1)} \otimes \sigma(x_{(1)(2)})\overline{w}^{(2)} x_{(2)}$。

证明。这一恒等映射表达了映射 $(W \otimes e_{\mathbb{I}}^{V})a_{W,\,[V,\,\mathbb{I}],\,V}\colon (W\otimes[V,{}_{\mathbb{I}}])\otimes V \to W$, $x\otimes f\otimes y \mapsto \overline{w}^{(1)}\otimes f(\overline{w}^{(2)}y)$ 在引理 54 的证明过程中出现的 A-线性性（并用到了 $\Bbbk$ 是一个域这一假设）。□

下面的引理阐明了 $\mathrm{sl}(v)$ 对 v 的依赖关系。

引理 58. 若 $\gamma \in (A^{e})^{\times}$，令 $\gamma_0 = (\varepsilon\otimes A)\gamma$，则有

$$\mathrm{sl}(v \lhd \gamma) = (1\otimes \gamma_0^{-1})\cdot \mathrm{sl}(v)\cdot \gamma\,.$$

证明. 这可由引理 54 中对 $\mathrm{sl}(v)$ 的解释结合注 6.5 得出，也可利用引理 57 手工验证。□

7.2. 松弛霍普夫与拟霍普夫。

定理 59. 设 A 是一个拟双代数，且 v 是一个松弛左 Hopf 结构。设$a = (\varepsilon\otimes A)w$、$b = (\varepsilon\otimes A)v$ 以及 $\overline{v} = \phi^{(-1)}\otimes \phi^{(-2)}b\ \sigma(\phi^{(-3)})$。

以下条件等价：

(i) v 是左 Hopf 结构；(ii) $\mathrm{sl}(v) = 1\otimes 1$；(iii) $\nabla = (A\otimes\sigma)\Delta$ 和 $w = \overline{w}$；(iv) $\nabla = (A\otimes\sigma)\Delta$ 和 $v = \overline{v}$。

此外，若这些条件成立，则与 v 相关联的拟反 antipode 为 $(\sigma,\ a,\ b)$。

证明。对于 $t \in A^{e}$，定义

$$K^{t}: A\otimes A \to A\otimes A,\quad x\otimes y \mapsto t^{(1)}x_{(1)}\otimes \sigma(x_{(2)})t^{(2)}y.$$

根据定义，$\mathrm{sl}(v) = K^{\overline{w}}(v)$。还需注意，若 $\nabla = (A\otimes\sigma)\Delta$，则 $K^{t} = Q^{t}$ 如引理 47 前所定义。

因此，若 (iii) 成立，即 $\nabla = (A\otimes\sigma)\Delta$ 和 $w = \overline{w}$，则根据备注 45，有 $K^{\overline{w}} = K^{w} = Q^{w} = H^{v-1}$。于是 $\mathrm{sl}(v) = H^{v-1}(v) = 1\otimes 1$，故 (iii) $\Rightarrow$ (ii)。

若 v 是左 Hopf 结构，根据定理 52，相应的拟反 antipode 为 (σ, a, b)，$v = \overline{v}$，$w = \overline{w}$ 和 $\nabla = (A\otimes\sigma)\Delta$；特别是 (iii) 成立，因此 $\mathrm{sl}(v) = H^{v-1}(v) = 1\otimes 1$。换言之，(i) $\Rightarrow$ (ii)、(iii) 和 (iv)。顺带一提，我们已经证明了该定理的“此外”断言。

由引理 48 可知，对于任意松弛左霍普夫结构，σ 是代数的反态射，并且以下恒等式成立：

(1) $\sigma(x_{(1)})a\,x_{(2)} = a\ \varepsilon(x)$, $x\in A$; (2) $\nabla^{(1)}(x)b\ \nabla^{(2)}(x) = b\ \varepsilon(x)$, $x\in A$; (3) $w^{(1)}b\ w^{(2)} = 1$; (4) $\sigma(v^{(1)})a\ v^{(2)} = 1$.

将这些条件与拟反 antipode 的公理进行比较：

(QA1) $\sigma(x_{(1)})a\,x_{(2)} = a\ \varepsilon(x)$, $x\in A$;
(QA2) $x_{(1)}b\sigma(x_{(2)}) = b\ \varepsilon(x)$, $x\in A$; (
QA3) $\phi^{(1)}\ b\ \sigma(\phi^{(2)})a\ \phi^{(3)} = 1$; (QA4)
$\sigma(\phi^{(-1)}))a\ \phi^{(-2)}\ b\ \sigma(\phi^{(-3)}) = 1$;

我们注意到，QA1 自动成立，而条件 $\nabla = (\varepsilon\otimes\sigma)\Delta$, $w = \overline{w}$和$v = \overline{v}$ 分别蕴含 QA2、QA3 和 QA4。

因此，若 (iii) 和 (iv) 同时成立，则 (σ, a, b) 是一个拟反 antipode，而 $v = \overline{v}$是相应的松弛左 Hopf 结构。换言之，(iii) 与 (iv) 的合取蕴含 (i)。此时，(iii) 与 (iv) 的等价性将派上用场。

引理 60. 若 $\nabla = (A\otimes\sigma)\Delta$，则 $w = \overline{w}$ 当且仅当 $v = \overline{v}$。

证明. 我们使用引理 47，并根据关于 ∇ 的假设，得到 $Q^s = K^s$，且 QA1、QA2 成立。现在，若 $w = \overline{w}$，则 QA3 成立。这意味着 $H^{\overline{v}}(\overline{w}) = 1 \otimes 1$。事实上，

$$\begin{aligned} H^{\overline{v}}(\overline{w}) &= (A \otimes (m^5(A \otimes \mathfrak{b} \otimes \sigma \otimes \mathfrak{a} \otimes A))((\phi^{-1} \otimes 1)(\Delta \otimes A \otimes A)\phi) \\ &= (A \otimes m^5(A \otimes \mathfrak{b} \otimes \sigma \otimes \mathfrak{a} \otimes A))((A \otimes A \otimes \Delta)\phi^{-1}(1 \otimes \phi)(A \otimes \Delta \otimes A)\phi) \quad \text{(5-gon)} \\ &= 1 \otimes \phi^{(1)}\mathfrak{b}\phi^{(2)}\mathfrak{a}\phi^{(3)} \quad \text{(using QA1 and QA2)} \\ &= 1 \otimes 1 \quad \text{(by QA3).} \end{aligned}$$

因此 $H^{\overline{v}}(w) = H^{\overline{v}}(\overline{w}) = 1 \otimes 1$。由备注 45、方程（1），我们得到 $\overline{w} \cdot (x \otimes 1) = H^{v^{-1}}\Delta(x)$，再应用引理 47 的断言（1），可得 $v = \overline{v}$。

反向命题的证明类似：若 $v = \overline{v}$，则 QA4 成立，由此可得$K^{\overline{w}}\overline{v} = 1 \otimes \sigma(\phi^{(-1)})\mathfrak{a}\ \phi^{(-2)}\mathfrak{b}\ \sigma(\phi^{(-3)}) = 1 \otimes 1$。利用备注 45 的方程（2）和引理 47 的断言（2），可得 $w = \overline{w}$。□

因此 (iii) $\Leftrightarrow$ (iv)，此时只需证明 (ii) $\Rightarrow$ (iii)，故设 $\mathsf{sl}(v) = 1 \otimes 1$。由引理 55 可得 $\nabla = (A \otimes \sigma)\Delta$，因此 QA2 成立。我们有 $Q^{\overline{w}}(v) = K^{\overline{w}}(v) = \mathsf{sl}(v) = 1 \otimes 1$。由引理 57 还可得 $\overline{w} \cdot (x \otimes 1) = K^{\overline{w}}\Delta(x) = Q^{\overline{w}}\Delta(x)$。因此，根据引理 47 的断言（2），$w = \overline{w}$。换言之，(ii) $\Rightarrow$ (iii)，证明至此完成。□

推论 61. 设 A 是一个松弛左 Hopf 拟双代数。以下各条件等价：

(i) A 是一个拟霍普夫代数；(ii) 存在一个左 Hopf 结构；(iii) 存在一个松弛左 Hopf 结构 v，使得 $\mathsf{sl}(v)$ 在 A^e中可逆；(iv) 对任意松弛左 Hopf 结构 v，$\mathsf{sl}(v)$ 在 A^e中可逆。

证明. 根据定义，有 (i) $\Leftrightarrow$ (ii)。由定理 59，左 Hopf 结构无非就是满足 $\mathsf{sl}(v) = 1 \otimes 1$ 的松弛左 Hopf 结构 v，因此 (ii) $\Rightarrow$(iii)。现在设 v, v' 是两个松弛左 Hopf 结构。存在唯一的 $\gamma \in (A^e)^\times$ 使得$v' = v \triangleleft \gamma$，并且由引理 58，$\mathsf{sl}(v') = (1 \otimes \gamma_0^{-1}) \cdot \mathsf{sl}(v) \cdot \gamma$，其中 $\gamma_0 = (\varepsilon \otimes A)\gamma \in A^\times$。特别地，若 $\mathsf{sl}(v)$ 在 A^e 中可逆，则 $\mathsf{sl}(v')$也可逆，因此 (iii) $\Leftrightarrow$ (iv)。此外，若 $\mathsf{sl}(v)$ 可逆，设 γ 是它在 A^e中的逆元。由注记 56，$\gamma_0 = 1$，因此 $\mathsf{sl}(v') = 1 \otimes 1$，这意味着 v 是一个左 Hopf 结构，故 (iii) $\Rightarrow$ (ii)。□

注 62. 定理 59 至推论 61 的主要难点在于证明：若拟双代数具有满足 $\mathsf{sl}(v) \in (A^e)^\times$ 的松弛左霍普夫结构 v，则它是拟霍普夫。当 A 是拟有限时，可以基于拟双代数上有限维模之对偶的经典结果，给出这一事实的另一种证明，具体如下。首先，众所周知，拟有限拟双代数 A 是拟霍普夫，当且仅当有限维 A-模的范畴 A–mod 是左自对偶的，并且相应的遗忘函子 $U_0 : A\text{–mod} \to \mathsf{vect}_{\Bbbk}$ 也是左自对偶的，也就是说，它带有函子同构 $U_0({}^\vee V) \xrightarrow{\cong} U_0(V)^*$。其次，众所周知，单oidal左闭范畴 $\mathcal{C}$ 是左自对偶的，当且仅当对任意对象 V，比较态射 $c_{V,V}$ 是同构；在这种情况下，${}^\vee V = [V, \mathbb{I}]$。最后，根据引理 54，若 $\mathsf{sl}(v)$ 可逆，则上述条件成立；此时 U_0 是左自对偶的，因为它是松弛左闭的。

7.3. 拟霍普夫代数的范畴刻画。设 $U : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是两个单oidal左闭范畴之间的余松岩浆函子，并配备态射 $U_0 : U(\mathbb{I}) \to \mathbb{I}$。设 $\mathfrak{E}$ 是 U 上的松弛左闭结构，也就是说，它是一族同构

$$\mathfrak{E}_B^A : U[A, B] \xrightarrow{\cong} [UA, UB]$$

在 $\mathcal{D}$ 中关于 A, B 自然。

若对 $\mathcal{D}$ 中任意一对对象 A、B，下图均交换，则称 $(U, \mathfrak{C})$ 保持比较态射：

$$\begin{array}{ccccc} U(B)\otimes U[A,\underset{\mathbb{I}}{\ }] & \xleftarrow{U_2(B,[A,\underset{\mathbb{I}}{\ }])} & U(B\otimes[A,\underset{\mathbb{I}}{\ }]) & \xrightarrow{U(c_{A,B})} & U[A,B] \\ {\scriptstyle UB\otimes\mathfrak{C}^A_{\mathbb{I}}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{C}^A_B} \\ UB\otimes[UA,U\underset{\mathbb{I}}{\ }] & \xrightarrow[UB\otimes[UA,U_0]]{} & UB\otimes[UA,\underset{\mathbb{I}}{\ }] & \xrightarrow[c_{UA,UB}]{} & [UA,UB]. \end{array}$$

定理 63. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上的拟双代数。那么，A 是拟霍普夫代数，当且仅当遗忘函子 $U\colon A\text{–模} \to \mathrm{Vect}_\Bbbk$ 具有松弛左闭结构 $\mathfrak{C}$，使得 $(U, \mathfrak{C})$ 保持比较态射。

证明. 根据定理 17，A 上的松弛左霍普夫结构与 U 上的松弛左闭结构之间存在一个双射。与 A 上的松弛左霍普夫结构 v 相对应的 U 上的松弛左闭结构保持比较态射，当且仅当对于任意一对 A-模 V、W，$c_{V,\,W}$是典范映射$W\otimes V^* \to \mathrm{Hom}_\Bbbk(V,W)$，$x\otimes f \mapsto x\circ f$，这意味着根据引理 54，$(x\circ f)\cdot \mathrm{sl}(v) = (x\circ f)$。在域上，这个条件等价于 $\mathrm{sl}(v) = 1\otimes 1$，也就是说，根据定理 59，$v$ 是左霍普夫结构。□

7.4. 关于拟有限情形的注记。拟有限情形下，拟霍普夫代数可以用左对偶作范畴刻画。

函子 $U\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 在左自对偶范畴之间是左自对偶的，当它配备了自然同构 $U({}^\vee A) \cong {}^\vee U(A)$，对任意 A 属于 $\mathcal{D}$ 均成立。

有限维 A-模范畴和有限维向量空间范畴分别记为 A–mod 和 $\mathrm{vect}_\Bbbk$。

定理 64. 设 A 是域 $\Bbbk$ 上的拟双代数。

(1) 若 A 是拟霍普夫代数，则有限维 A-模范畴 A–mod 是左自对偶的，且遗忘函子 $U_0\colon A\text{–mod} \to \mathrm{vect}_\Bbbk$ 是左自对偶的；(2) 若 A 是拟有限的，A–mod 是左自对偶的，且 $U_0\colon A\text{–mod} \to \mathrm{vect}_\Bbbk$ 是左自对偶的，则 A 是拟霍普夫代数。

证明。断言（1）可追溯至 Drinfeld [8]。断言（2）的证明与余拟双代数中类似命题的证明相似（见注 65），但并不能明确地从后者推出。将 A 中的元素映射到其在有限维 A-模上的作用，定义了一个典范代数态射 $A \to \mathrm{End}(U_0)$；当 A 拟有限时，该态射是同构。

现在假设 U_0 是左自对偶的。通过结构传递，我们可以假设自对偶结构是恒等映射；也就是说，对每个有限维 A-模 V，V^* 都赋有 A 的作用，使其成为 V 的左对偶，并满足相应的自然性条件。A 在 V^* 上的这一作用定义了代数反同态 $A \to \mathrm{End}(U_0)$，因而得到代数反同态 $\mathcal{S}\colon A \to A$，使得 A在 V^*上的作用由 $a.f(x) = f(\mathcal{S}(a)x)$给出。

求值 $e_V\colon {}^\vee V\otimes V \to \Bbbk$ 和余求值 $h_V\colon \Bbbk \to {}^\vee V\otimes V$的形式分别为 $e_V(f\otimes x) = f(a_V x)$ 和 $h_V(1) = \Sigma_i b_V e_i\otimes e^i$，其中 a_V、$b_V\colon V \to V$关于 V是自然的，因此由 $A \to \mathrm{End}(U_0)$ 的满射性可知，存在 a、$b \in A$，使得 a_V和 b_V 分别是 a 和 b 的作用。

($\mathcal{S}$、a、b) 满足拟反 antipode 的公理（1）—（4），这一事实可以通过依次写出 V 在 A–模中表达 e_V和 h_V 的 A-线性以及对偶关系的等式推导得出

$$(V\otimes e_V)a_{V,{}^\vee V,V}(h_V\otimes V) = \mathrm{id}_V \quad \text{and} \quad (e_V\otimes {}^\vee V)a^{-1}_{{}^\vee V,V,{}^\vee V}({}^\vee V\otimes h_V) = \mathrm{id}_{{}^\vee V},$$

并利用 $A \to \mathrm{End}(U_0)$ 的单射性。 □

注 65. Majid 在 [13],第 9.4 节中提到了断言（2），但没有明确表述；其假设是 A 满足某个可表示性条件（9.45），而该条件在有限维情形下成立。

定理 63 在拟有限情形下可由定理 64 推出，方法如下。众所周知，幺半左自主范畴 $\mathcal{C}$ 是左闭的，其内 Hom 为 $[A、B] = B \otimes {}^\vee A$；而幺半左闭范畴 $\mathcal{C}$ 是左自主的，当且仅当对任意对象 V，比较态射 $c_{V,\,V}$ 是同构；在这种情况下，${}^\vee V = [V、\ ]$。若 v 是 A 上的松弛左 Hopf 结构，且保持比较态射，则 $c_{V,\,V}$ 是同构，因此 A–模是左自主的。此外，由 v定义的松弛左闭结构在 U_0上给出一个左自主结构，这意味着根据定理 64，A 是拟霍普夫的。

7.5. 松弛左 Hopf 结构的集合。在拟霍普夫代数 A 中，并非所有松弛左 Hopf 结构都是左 Hopf 结构。事实上，群 $\mathcal{G}^l(A\otimes?) = (A^e)^\times$ 在松弛左 Hopf 结构的集合上通过右作用自由且传递地作用。将 $A^\times$ 视为 $(A^e)^\times$ 的子群，其嵌入由 $t \mapsto 1 \otimes t$ 给出。Drinfeld 已证明，若 A 是拟霍普夫代数，则拟反 antipode 在 $A^\times$ 通过 $(\mathcal{S}、a、b).t = (t^{-1}\mathcal{S}t、t^{-1}at、bt)$ 给出的右作用（“扭曲”）下构成一个自由轨道；因此，左 Hopf 结构在 $A^\times$的右作用下构成一个自由轨道，也就是说，$v \lhd t = v^{(1)} \otimes v^{(2)}t$。

另一方面，$(A^e)^\times$ 是半直积 $A^\times \ltimes \mathcal{G}_0(A)$，其中

$$\mathcal{G}_0(A) = \{\gamma \in (A^e)^\times \mid (\varepsilon \otimes A)(\gamma) = 1\}.$$

T下面的定理概括了这一情况 on.

定理 66. 设 A 是一个拟霍普夫代数。A 的松弛左霍普夫结构构成一个 $(A^e)^\times$ 右作用下的挠子，其中左霍普夫结构构成一个 $A^\times$-轨道。此外，$A^\times$ 对左霍普夫结构的作用对应于 $A^\times$ 对拟反 antipode 集合的扭转作用。

因此，对于任意松弛左霍普夫 $v \in A \otimes A$，存在唯一的左霍普夫结构 v_0 和唯一的元素 $\gamma \in \mathcal{G}_0(A)$，使得 $v = v_0 \lhd \gamma$。

此外，在这个表达式中，v、γ 是 v 的松弛度 $\mathrm{sl}(v)$，而 v_0 是与拟反 antipode $(\sigma$ 相关联的左霍普夫结构，一，二′），其中 二′ $= \overline{\gamma}^{(1)}$ 二 $\overline{\gamma}^{(2)}$，$\overline{\gamma}$ 是 A^e 中 γ 的逆元。

证明。前两段可直接由前面的评论以及如下普遍事实得出：松弛左 Hopf 结构在 $(A^e)^\times = A^\times \ltimes \mathcal{G}_0(A)$ 的自由作用下构成一个轨道，而左 Hopf 结构在 $A^\times \subset (A^e)^\times$下构成一个轨道。

至于“此外”部分：设 $v = v_0 \lhd \gamma$, v_0 是一个左 Hopf 结构（即 $\mathrm{sl}(v_0) = 1 \otimes 1$），且 γ 是 $\mathcal{G}_0(A)$ 的一个元素（即 $(\varepsilon \otimes A)\gamma = 1$），其逆元为 $\overline{\gamma}$。由引理 58，$\mathrm{sl}(v) = \mathrm{sl}(v_0) \cdot \gamma = \gamma$；由定理 52，$v_0$ 是与拟反 antipode (σ_0,a_0,b_0)相关联的左 Hopf 结构；这里用下标 0 表示与 v_0相关的数据，下面来计算这些数据。由引理 54，我们有 $\nabla = \overline{\gamma} \cdot \nabla_0 \cdot \gamma$，因此$\sigma = \sigma_0$。我们还有 $H^v = H^{v_0}(\gamma \cdot ?)$，因此 $b_0 = (\varepsilon \otimes A)H^v(\overline{\gamma}) = \overline{\gamma}^{(1)}b_0\overline{\gamma}^{(2)}$，并且$a_0 = (\varepsilon \otimes A)H^{v_0-1}(1 \otimes 1) = (\varepsilon \otimes A)(\gamma \cdot w_0) = ((\varepsilon \otimes A)\gamma)a_0 = a_0$。 □

注 67. 本节中我们假设基环 k 是一个域；这一假设首次用于引理 55 的证明。若假设A 作为 k-模是投射的，则可以放宽这一假设。

8. Conclusion

我们想简要讨论两个尚未解决的问题。第一个问题是：松弛 Hopf 是否蕴含 Hopf? 这个问题的表述有些含糊，因为前缀 Hopf 对双代数和拟双代数等对象的含义并不相同，所以我们将讨论范围限定为幺半范畴上的余幺半单子，或域上的双代数。

对于余幺半单子 T，要求其为左霍普夫似乎远比要求其为松弛左霍普夫强得多，因为前一种情况下，某个自然变换$F^T(X \otimes U^T A) \to F^T(X) \otimes A$必须是同构，而后一种情况下，只要求这两个函子之间存在任意一个自然同构。然而，目前我们还没有发现任何不是左霍普夫单子的松弛左霍普夫余幺半单子的例子。

在以下情形中，我们知道松弛霍普夫余幺半单子（或幺半余单子）是霍普夫的:

- 在笛卡尔范畴上（定理 24）；
- 对于交换代数（引理 42）；
- 对于与小范畴相关联的幺半余单子（定理32）。

这三种情形的共同点是，我们用来证明“松弛霍普夫蕴含霍普夫”的方法都非常特殊，而且显然难以显著推广。事实上，在第一种情形中，证明依赖于这样一个事实：在笛卡尔范畴中，松弛霍普夫结构 β 必然是分裂的，即具有 $\beta = \gamma \times \delta$ 这种形式，其中$\gamma, \delta \in \mathsf{Nat}(\mathsf{id}_{\mathcal{C}}, T)$。在第二种情形中，证明利用了这样一个事实：对于交换双代数，态射 H^v 的表达式可以按某种方式分解，而对于一般的双代数则不可能如此（见注 38）。在第三个例子中，这是因为情形具有刚性，因此只有一个可能的候选者可以作为松弛霍普夫结构（引理 31）。

注意，构造一个融合算子 $H^{\eta \otimes \eta}$ 不是同构的松弛霍普夫余松弛岩浆单子并不困难，例如例 41 中的单子或某些拟霍普夫代数中的单子，但这些例子并非余幺半的。

第二个问题是：什么样的单子才算拟霍普夫单子？我们已经看到，拟双代数是松弛 Hopf 的，但尚不清楚反过来是否成立。不过，我们已经用松弛 Hopf 结构刻画了拟双代数：拟霍普夫代数是具有松弛 Hopf 结构v 的拟双代数，且其松弛度 $\mathsf{sl}(v)$ 可逆，或者等价地说，是平凡的（推论 61）。这一代数判据可以改写为范畴论术语：拟霍普夫代数是这样一种拟双代数 A，其遗忘函子 A–模 $\to$ 向量空间$_{\Bbbk}$ 具有保持比较态射的松弛左闭结构（定理 63）。

这一纯范畴判据的存在表明，拟霍普夫代数的概念或许可以推广为拟霍普夫单子的概念；我们计划在后续工作中探讨这一可能性。

References

[1] G. E. Barnes、A. Schenkel 和 R. J. Szabo。拟霍普夫表示范畴中的非结合几何。I：双模及其内部同态。 *J. Geom. Phys.*，89：111–152，2015。[2] M. Barr 和 C. Wells。拓扑斯、三元组与理论。 *Repr. Theory Appl. Categ.*，2005(12)：1–288，2005。[3] G. B¨ohm、Y. Chen 和 L. Zhang。双幺半范畴中的霍普夫幺半群。 *J. Algebra*，394139：–172，2013。[4] A. Brugui`eres、S. Lack 和 A. Virelizier。幺半范畴上的霍普夫单子。 *Adv. Math.*，227 2 745( )：–800，2011。[5] A. Brugui
` *Advances in Mathematics* 215 2 679 733, 2007
eres 和 A. Virelizier。霍普夫单子。，( )：–。

[6] A. Brugui`eres 和 A. Virelizier。霍普夫单子的量子双与范畴中心。
Transactions of the Americal Mathematical Society，364(3)：1225–1279，2012。[7] B. Day 和 R. Street。量子范畴、星形自对偶性与量子群胚。载于
Galois theory Hopf algebras and semiabelian categories 43 *Fields Inst. Commun.* ，第卷，
页187–225。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2004。[8] V. G. Drinfeld。拟霍普夫代数。
Leningrad Math. J.，1(6)：1419—-1457，1990。[9] G. M. Kelly。教义伴随。载于
Category Seminar (Proc. Sem., Sydney, 1972/1973)，《数学讲义》，第420卷，页257–280。施普林格，柏林，1974。[10] G. M. Kelly。富化范畴论基本概念。 *Repr. Theory Appl. Categ.*，2005 10 1( )：–136，2005。[11] H. Kleisli。每一种标准构造都由一对伴随函子诱导。
Proc. Am. ：–。[12]
Math. Soc. 16 544 546, 1965
S. Mac Lane。 *Categories for the working mathematician*。施普林格出版社，纽约，第二版，1998。[13] S. Majid。 *Foundations of quantum group theory*。剑桥：剑桥大学出版社，1995。[14] P. McCrudden。反幺半单子。 *Theory Appl. Categ.*，10：469–485，2002。[15] I. Moerdijk。张量范畴上的单子。 *J. Pure Appl. Algebra*，168(2–3)：189—-208，2002。[16] P. Schauenburg。有限拟霍普夫代数的两种刻画。 *J. Algebra*，273(2)：538–550，2004。

Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, Université de Montpellier, CNRS, CC 051 - Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier CEDEX 5, France*Email address*: alain.bruguieres@umontpellier.frCentro de Matemática, Facultad de Ciencias, Universidad de la República. Iguá4225, Montevideo, Uruguay.*Email address*: negra@cmat.edu.uy
Departamento de Matemática y Aplicaciones CURE Universidad de la República. ,, Tacuarembó s/n Maldonado Uruguay.
, ,*Email address*: ilopez@cure.edu.uy