arXiv:2303.09675v1 [econ.TH] 16 Mar 2023

动态信息提供：回馈过去，引领未来

Ian Ball*

2023年3月16日

摘要

我研究发送者与接收方之间长期关系中的信息最优提供。发送者观察一个持续演变的状态，并承诺随时间向接收方发送信号；接收方依序选择影响双方福利的公共行动。我以闭式解求出发送者的最优策略：发送者延迟报告状态的取值，而延迟时间会逐渐缩短，最终消失。即使接收方知道当前状态，发送者仍能通过威胁隐瞒状态未来的演变来保持影响力。

关键词：动态信息设计；延迟报告。

*JEL*分类：D82,D83,D86.

*麻省理工学院经济系，ianball@mit.edu。感谢 Dirk Bergemann 在整个项目过程中给予的悉心指导和友好支持。本文的早期版本曾作为我在耶鲁大学博士学位论文的第二章发表。感谢 Alexandre Belloni、Ben Brooks、Eduardo Faingold、Mira Frick、Drew Fudenberg、Simone Galperti、Marina Halac、Johannes Hörner、Ryota Ijima、Navin Kartik、Emir Ka-menica、Deniz Kattwinkel、Nicolas Lambert、Chiara Margaria、Stephen Morris、Giuseppe Moscarini、Larry Samuelson、Andy Skrzypacz、Philipp Strack 和 Alex Wolitzky 提供的宝贵讨论。感谢耶鲁大学、Allerton、石溪大学和斯坦福理论经济学暑期研究所（SITE）的听众提出的有益反馈。最后，感谢 Yifan Dai 提供出色的研究助理工作。

1 引言

信息如何替代金钱，成为激励行为的奖励？在许多关系中，掌控信息能够带来强大的影响力。泄密者向媒体机构分享受保护信息时，可以用承诺提供更多泄密信息来要求媒体进行倾向性报道。在组织内部，无论是大型企业还是军队，地盘争夺战都会妨碍信息的有效交换（Herrera 等人，2017）。在这类组织中，由于各方偏好不一致，且往往无法进行转移支付，拒绝分享信息可以成为重要的谈判筹码。

在这些个人之间或组织单位之间的关系中，一方掌握着引导高效决策所必需的信息。当双方偏好不一致时，这些信息可能被扣留，以惩罚过去的行为。本文阐释了信息的双重作用如何塑造长期关系中最优信息提供的动态。

我研究一个连续时间下的简化模型，其中有一位发送者（女性）和一位接收方（男性）。模型中存在一个收益相关状态，该状态遵循扩散过程。发送者观察该状态的演变，并随时间向接收方发送信号；接收方则依次选择影响双方福利的公共行动。发送者和接收方具有部分一致的二次偏好。接收方希望自己的行动与状态相匹配，而发送者则希望接收方将行动定在高于状态的位置，偏差为固定值。

发送者唯一可用的工具是信息控制。发送者承诺采用动态信息政策，根据过去状态、信号和行动构成的每段私人历史指定一个信号分布。随着时间推移，发送者观察演变中的状态和接收方的行动，并发送信息政策规定的信号。接收方观察发送者发送的信号，并依次选择行动。由于接收方着眼于未来，他会同时考虑自己的行动对流收益以及未来信号信息量的影响。发送者预见到接收方的最

佳响应后，选择信息政策以最大化自己的期望效用。

发送者面临的根本权衡在于精度与偏差之间。向接收方提供有关当前状态的信息会产生两种影响。一方面，接收方可以根据状态更精准地调整当前行动，使双方都受益。另一方面，由于状态过程具有持续性，接收方对未来状态的不确定性会降低，从而使未来信息对他的价值下降。因此，接收方更不愿意让自己的行动产生偏差。

发送者面临一个复杂的嵌套优化问题。我分两步化简发送者的问题。

首先，我将优化的对象从信息政策改为决策规则，即随时间变化、依赖状态的行动分布。当且仅当某个决策规则是某一信息政策的最佳响应时，它也是相应规范信息政策的最佳响应——该规范信息政策是一种相关联的直接冷酷触发政策，它会直接提供行动建议，并在任何一项建议遭到违反时切断所有未来信息。能够以这种方式诱导出的决策规则称为服从的。

其次，我发现，参与者的收益和服从约束可以用决策规则的两个统计量——偏差与方差——来表示。在给定时刻，偏差[1] 是向接收方建议的行动与接收方理想点（即他对状态的期望）之间的差值。方差是给定行动建议历史后当前状态的后验方差。偏差与方差是随机过程，但我证明，确定性偏差与方差过程——称为路径——描绘出帕累托前沿。

贝叶斯更新限制了哪些方差路径是可行的。要使某条方差路径能够由某种信息政策诱导，一个称为贝叶斯可行性的必要条件是：方差的下降幅度不会超过没有新信息时的下降幅度。我将证明，这一条件

[1]这种（行动）偏差是根据决策规则计算得出的统计量。（偏好）偏差则是发送者效用函数的一个参数。

也充分。定理 1 指出，每一条贝叶斯可行的后验方差路径都可以通过 延迟报告诱导。在每个时点 t，发送者给出的行动建议会揭示某个更早时点的状态实现值 $\varphi(t)$。

因此，发送者的问题可归结为在服从的、贝叶斯可行的偏差—方差路径上进行优化。我采用拉格朗日松弛和动态规划，求得闭式解。最优偏差函数和方差函数见定理 2。共有两种情况。

如果发送者的偏差相对于状态过程的波动率足够小，那么发送者就能诱导出她的一阶最优决策规则。她让接收方始终完全了解状态，但威胁称，如果接收方偏离发送者的最优行动，就切断此后所有信息。

如果发送者的偏差相对于状态过程的波动率足够大，那么发送者就无法诱导出她的一阶最优决策规则。因此，偏差—精度权衡便开始发挥作用。最优策略分为两个阶段。首先，在过渡阶段，发送者逐渐减少接收方对当前状态的不确定性，同时逐渐缩小建议行动与接收方理想点之间的差距。在某个有限时刻，当前状态被完全揭示，稳态阶段 随即开始。此后，发送者让接收方始终完全了解当前状态。发送者要求接收方在其行动与状态之间维持固定偏差。如果接收方在任何时候偏离，发送者就切断此后所有信息。

本文其余部分安排如下：第1.1 节回顾相关文献。第2 节介绍模型。第3 节求解一个两期示例。主要分析从第4节开始，我在该节引入延迟报告，并简化发送者的问题。第5 节描述最优信息策略，并分析比较静态。第6 节求解多维状态与行动下的最优策略。状态分量按照持续性从低到高的顺序依次揭示。第7 节为结论。测度论定义见附录A。证明见附录B。

1.1 相关文献

本文加入了不断发展的动态信息设计文献。早期论文（Renault 等人，2017；Ely，2017）研究如何向反复采取行动的短视接收者最优地提供有关演变中状态的信息。[2]由于接收者是短视的，其行动选择仅取决于其对当前状态的信念，而非对未来信息的承诺。

最接近的动态信息设计论文（Smolin，2021年；Ely 和 Szydlowski 2020；Orlov 等人，2020）研究了如何随时间向前瞻性接收者最优地提供信息，而接收者需要选择何时停止。[3] 为了最优地决定是否停止，接收者会考虑自己对状态的当前信念，以及如果继续等待将会收到的未来信息。发送者可以延迟信息传递，以诱使接收者等待更久。相比之下，在我的论文中，接收者在每个时点都会选择一项丰富的行动。因此，发送者也有相反的动机：披露信息，使接收者能够根据当前状态调整行动。[4] 这种精确性动机推动了渐进式信息披露。[5]

我的模型中的动态过程，大体上类似于受现金约束的动态委托代理模型中将报酬后置的做法（Lazear，1981；Harris and Holmstrom，1982；Thomas andWorrall，1994）。[6] 与金钱不同，扣留信息会直接导致效率损失。与本文最接近的是 Fudenberg andRayo（2019年，以下称 FR）在独立研究中提出的学徒制模型，该模型建立在 Garicano and Rayo

[2]Ely 的工作论文版本 (2015年）发现，即使接收者具有前瞻性，解也不会改变。这是二元行动设定的一项特殊性质。[3]其他动态信息设计论文探讨了不同问题：有成本的沟通（Honryo，2018年）；接收者持有私人信息（Au，2015年）；以及决策期限的影响（Bizotto 等人，2021）。[4]在Kaya （2022）的后续研究中，接收者每期都会选择努力程度。但由于发送者无论状态如何都偏好更大的努力，因此不存在精确性动机。[5]Orlov 等人（2020）在一个发送者仅具有期内承诺的模型中，发现了渐进式信息披露的均衡。如果发送者反对停止的偏差足够强，那么承诺延迟披露信息就不可信。在我的模型中，无论是否存在跨期承诺，渐进式信息披露都会出现；关于承诺的讨论见第2.2节。[6]在一个相当一般的（完全信息）委托人—代理人设定中，Ray （2002）表明，在所有有效率的“自我执行协议”中，代理人的延续价值都被推迟兑现。

（2017）。在 FR 的模型中，委托人拥有一单位可完全分割的知识，可以无成本地传授给受现金约束的代理人。委托人选择一份合同，规定代理人获取知识、付出努力和领取工资的路径。代理人可以随时离开，并带走其当时的知识存量。尽管立即传授知识是有效率的，但委托人的最优合同会逐步传授知识，以压低代理人外部选择的价值。

在我的模型中，接收方的后验方差和行动偏差，分别发挥着与 FR 中委托人的未传递知识存量和代理人的过度努力类似的作用。但两者之间存在重要差异。首先，在我的模型中，发送者提供的信息会随时间推移而过时（因为状态会不断演变）。因此，即使接收方知道当前状态，发送者仍可以 要求接收方产生偏差。其次，我的模型中各方的收益不可转移。帕累托前沿的曲率使发送者在充分揭示状态后要求产生偏差成为最优的 选择。稳态阶段具有完全的信息传递和有偏的行动，这是我的模型中新增的内容。

2 模型

时间是连续的，期限无限。参与者有两方：发送者（女性）和接收方（男性）。在每个时刻 $t \in [0, \infty)$，状态 $\theta_t \in \mathrm{R}$ 实现，接收方选择一个行动 $a_t \in \mathrm{R}$。
发送者和接收方的流效用为

$$u_S(a_t, \theta_t) = -(a_t - \theta_t - \beta)^2, \qquad u_R(a_t, \theta_t) = -(a_t - \theta_t)^2.$$

接收方希望自己的行动与状态相匹配，而发送者希望接收方的行动高于状态，偏差为 β。不失一般性，假设 $\beta > 0$。双方都以指数率r对未来的流效用进行贴现。

初始状态 θ_0 服从正态分布，其均值为 μ_0，方差为 σ_0^2。

随后，状态遵循以下随机微分方程

$$\mathrm{d}\theta_t = \kappa\theta_t\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}Z_t, \tag{1}$$

其中 $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ 是标准布朗运动，且与初始状态θ_0相互独立。[7] 波动率参数 σ 严格为正。假设 $2\kappa < r$。因此，采取恒定行动时，两位参与者的期望效用均有限。该过程可能是爆炸性的（$\kappa > 0$）、均值回归的 （$\kappa < 0$），也可能是布朗运动（$\kappa = 0$）。

状态分布是共同知识，但只有发送者能够观察到状态实现值。发送者也能观察接收方的行动。起初，发送者承诺采用一种动态信息政策 S，该政策由信号实现空间 S 以及针对每段过去状态、信号和行动历史的信号分布构成。给定该政策后，接收方将面临一个动态决策问题。在每个时刻 t，接收方在观察截至时刻 t 发送的信号后，选择一项行动。[8] 接收方只能通过发送者发出的信号了解状态。特别是，接收方无法观察过去的流收益。

2.1 发送者的问题

发送者的信息政策与接收方的行动选择共同决定一个随机过程 $A = \{A_t\}_{t\geq 0}$，我将其称为 决策规则，如Bergemann 和 Morris(2016) 所述。决策规则 A 产生效用

$$u_i(A) = \mathbf{E}\left[\int_0^\infty re^{-rt}u_i(A_t,\theta_t)\right], \qquad i = S, R.$$

决策规则 A 与信息政策 S 相容，当且仅当在每个时点t，发送者截至时点 t 的信号（这些信号取决于接收方此前的行动 A_s，适用于 $s < t$）为接收方选择行动提供了充分信息

[7]若 $\theta_t = 0$，则该过程的漂移被标准化为零。若将（1）替换为 $\mathrm{d}\theta_t = (\mu_t + \kappa\theta_t)\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}Z_t$，其中漂移 μ_t是任意确定性的时变函数，结论仍然成立。[8]将策略限制为纯策略并不会损失一般性。接收方的任何随机化都可以纳入发送者的信号中。

行动 A_t。[9] 决策规则 A 是信息政策 S的最佳响应， A 在所有与 S相容的决策规则中，使接收方的效用最大化。发送者则在所有满足以下性质的配对 u_S（A）中，使自身效用 u_S（A）最大化： A 是 S的最佳响应。

2.2 假设讨论

监控 发送者可以完美观察接收方的行动。因此，发送者可以根据过去的行动来决定未来提供的信息。如果没有监控，接收方就会短视地行动，始终使自己的行动与对状态的期望相匹配。反过来，发送者则会始终完全揭示状态。

承诺 假设发送者拥有完全的动态承诺能力。也就是说，发送者可以在每个“期”内以及跨“期”承诺采取行动依存信号。[10] 单期承诺至关重要，这与静态贝叶斯说服（Kamenica 和 Gentzkow，2011）中的情形一样。在我们主要关注的情形中，多期承诺并非必要。[11] 在最优完全承诺政策下，接收方得到的承诺绝不会超过其保留效用。因此，发送者可以通过另一种仅使用单期惩罚的政策，实现相同的决策规则。如果接收方偏离，发送者将在下一期不提供任何信息。此后，发送者将恢复实施根据接收方当前信念而定的最优政策。这种恢复不会增加接收方的延续收益，因此接收方偏离所获的收益不会改变。

不可观测收益接收方无法观测自身的流收益。在二次效用下，流收益能够完全揭示状态的轨迹，

[9]这种循环性使得形式化定义变得微妙；参见附录 A。[10]这种区别可以通过连续时间模型的离散时间近似来形式化。[11]也就是说，如果 $\beta \geq \sigma/\sqrt{r-2\kappa}$。否则，接收方获得的承诺将超过其保留效用，因此单期惩罚不足以激励接收方。因此，需要多期承诺。

因此，这一假设对于保留接收者的不确定性是必要的。在这些启发性应用中，接收方可能会因自身对状态的不确定性而承受成本，却并不了解状态实现值，这似乎是合理的。无论如何，只要发送者仍比接收方拥有一定的信息优势，模型中的作用机制就应当适用。

3 两期示例

本节通过一个包含两期（ $t = 1$、2）的示例，说明发送者面临的偏差—精度权衡。流收益与主模型相同。每位参与者 i最大化流收益的贴现总和 $u_{i,1} + \delta u_{i,2}$。状态过程由下式给出

$$\theta_1 \sim N(0, \sigma_1^2), \qquad \theta_2 = \rho\theta_1 + \varepsilon, \qquad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2),$$

其中， ε 与 θ_1相互独立。

可以通过逆向归纳分析这个示例。在第二期，由于这是博弈的最后一期，接收方会短视地行动。完全披露能使双方的流收益最大化，因此，在均衡路径上，如果接收方遵从发送者的第一期建议，发送者完全披露状态是最优的。如果接收方不遵从第一期建议，最优做法是不提供任何信息，以施加最大惩罚。

现在考虑第一期。如果发送者的信号使后验方差为 v_1，那么，只要满足以下条件，发送者就可以要求接收方将其行动相对于后验均值偏移 b_1，

$$b_1^2 \leq \delta(\rho^2 v_1 + \sigma^2). \tag{2}$$

这个不等式体现了偏差—精度权衡。右侧—— θ_2 在没有额外信息时的折现残差方差——是接收者因未能在第二期获知状态而产生的折现损失。当这一约束达到等号时，发送者必须付出 $1/(\delta\rho^2)$的代价，即每单位偏差平方所对应的方差更高。

发送者选择 b_1 和 v_1 ，以最大化她的均衡路径上总折现

收益 $-(b_1-\beta)^2-v_1-\delta\beta^2$，满足（2）。共有三种情况。

(i) $\beta \le \sqrt{\delta}\sigma$。此处，(2) 不构成约束，因此最优解为 $\hat{}\, b_1=\beta$ 且 $\hat{}v_1=0$。

(ii) $\rho=0$。此处，v_1 未出现在 (2) 中。揭示 θ_1 不会影响接收方对 θ_2的不确定性，因此不存在偏差与精度之间的权衡。最优解为 $\hat{}\, b_1=\min\{\beta,\sqrt{\delta}\sigma\}$ 且 $\hat{}v_1=0$。

(iii) $\beta>\sqrt{\delta}\sigma$ 和 $\rho\neq 0$。这是我们关注的主要情形。此处，(2) 必须取等号；否则，发送者会严格倾向于在第一期揭示更多信息。最优偏差的一阶条件是令直接边际收益 $2(\beta-b_1)$ 与增加 b_1 所带来的边际成本 $2b_1/(\delta\rho^2)$ 相等，而该边际成本来自方差必须相应增加。[12]

现在，我将详细说明最优偏差 $\hat{b}_1$ 和方差 $\hat{v}_1$ 的比较静态分析，因为在过渡阶段，连续时间解也有相同的结果。随着偏好偏差 β 增大，发送者会隐瞒更多信息（$\hat{v}_1$ 更高），以诱发更大的行动偏差（b_1 更高）。随着波动率 σ 增大，偏差 b_1 保持不变（因为 σ 不出现在偏差的一阶条件中），但方差 $\hat{v}_1$ 会降低，因为诱发相同程度的偏差所需的方差更小。随着 δ 和 ρ^2 增大，接收者因未能学习 θ_2 而遭受的损失对第一期方差 v_1 更为敏感。也就是说，偏差的价格 $1/(\delta\rho^2)$（以方差为单位）会降低。因此，$\hat{}\, b_1$ 会增大。对总“支出” $\hat{v}_1$ 的影响则不确定。

[12]解为

$$\hat{b}_1=\beta\frac{\delta\rho^2}{1+\delta\rho^2},\qquad \hat{v}_1=\beta^2\frac{\delta\rho^2}{(1+\delta\rho^2)^2}-\frac{\sigma^2}{\rho^2}.$$

作为 v_1 的函数，发送方收益是凹函数，因此诱导恒定方差是最优的。这里我假设 $\sigma_1^2\ge\hat{}\, v_1$，因此存在一种信号结构可以诱导该方差 $\hat{v}_1$。

4 缩减问题的维度

在本节中，我将发送者优化问题的定义域从所有信息策略构成的空间，改为更简单的、具有确定性偏差与方差的服从性决策规则空间。

4.1 服从的决策规则

对于给定的信息政策，发送者的效用仅取决于接收方最佳响应所诱导的决策规则。因此，只需对能够由某种信息政策诱导为最佳响应的所有决策规则进行优化。现在我将刻画这类决策规则。

给定决策规则 A，令 $\mathcal{F}_t^A$ 表示由 A_s 生成的 σ 代数，其中 $s \leq t$。该 σ 代数代表接收方在时间 t 前必须掌握的最少信息，以便遵循 A。如果发送者直接给出行动建议，接收方就会恰好获得这些最少信息。

如果对每个 $t \geq 0$、[13]，决策规则 A 都满足以下条件，则称其为服从的

$$-\mathbf{E}\left[\int_t^\infty re^{-r(s-t)}\left(A_s-\theta_s\right)^2 \mathrm{d}s \middle| \mathcal{F}_t^A\right] \geq -\frac{\sigma^2+r\,\mathrm{var}(\theta_t|\mathcal{F}_t^A)}{r-2\kappa}. \tag{3}$$

不等式（3）是 时间t 服从约束。给定截至时间 t的行动历史，接收方遵循该决策规则所获得的预期延续价值至少与其保留效用相等；所谓保留效用，是指他在时间 t偏离该规则、放弃所有未来信息并选择 $A_s=\mathbf{E}[\theta_s|\mathcal{F}_t^A]=e^{\kappa(s-t)}\mathbf{E}[\theta_t|\mathcal{F}_t^A]$时所获得的预期延续价值，其中 $s \geq t$。

命题1 (服从性)
决策规则 A 是某种信息政策的最佳响应，当且仅当 A是服从的。

服从的必要性显而易见。如果违反服从性，那么在某个时刻 t，接收方可以通过在一组非平凡的行动历史上改为采取短视策略而获利。为证明充分性，我将证明任何服从性决策规则 A

[13]所有涉及条件期望的不等式均按几乎处处理解。

都是某种规范信息政策的最佳响应——即直接严厉触发信息政策：只要接收方遵循了此前的所有建议，该政策就会发送信号 $S_t = A_t$。如果接收方曾有任何偏离，此后该政策将永远发送无信息量的信号。时点 t 的服从约束确保接收方不会因在时点 t 开始偏离而获利。

发送者的问题现在已简化为在所有服从性决策规则中求最大值。接下来我将说明，只需在这些决策规则的更简单汇总统计量中求最大值即可。

4.2 偏差与方差

对于任意决策规则 A，定义其诱导的偏差与方差过程如下：

$$B_t = A_t - \mathbf{E}[\theta_t|\mathcal{F}_t^A] \quad \text{and} \quad V_t = \text{var}(\theta_t|\mathcal{F}_t^A).$$

该偏差 B_t 是时刻 t 行动与接收方基于截至时刻 t的行动建议对状态的预期之间的差距。方差 V_t 是给定截至时刻 θ_t的行动建议后，状态 t的后验方差。参与者的收益以及服从性条件（3）都可以仅用偏差与方差过程来表示。[14] 一般而言， B_t 和 V_t 都是随机变量，但我将证明，帕累托前沿可由偏差与方差均为确定性的决策规则描绘出来。

命题 2（确定性偏差与方差）
对于每个服从性决策规则 A，都存在一个偏差和方差均为确定性的服从性决策规则 A'，使得双方都弱偏好于 A'，而非 A。

下面给出证明思路。考虑一个服从性决策规则 A，其偏差与方差过程分别为 $\{B_t\}_{t\geq 0}$ 和 $\{V_t\}_{t\geq 0}$。对每个 t，令 $b(t) = \mathbf{E}[B_t]$，且 $v(t) = \mathbf{E}[V_t]$。我将构造一个新的决策规则 A'，其具有确定性偏差 b和确定性方差 v。双方对 A' 的偏好都不弱于对 A的偏好，因为他们的

[14]具体而言，期望状态 $\mathbf{E}[\theta_t|\mathcal{F}_t^A]$ 并不会单独出现，因为发送者的偏差 β 与状态无关。

流收益关于方差是线性的，关于偏差则严格凹。接收方的保留效用关于方差是线性的，因此 A' 是服从的。为了完成命题 2的证明，我需要构造一种信号结构，使其诱导出所需的方差函数 v。下一节将介绍一种称为延迟报告的通用构造方法。

4.3 贝叶斯可行性与延迟报告

首先，我引入方差过程与贝叶斯更新相一致的一个必要条件。假设在时间 t，θ_t 的后验方差为 V_t。如果没有提供额外信息，那么在时间 $t+h$，θ_{t+h} 的后验方差为 $\eta(V_t, h)$，其中函数 η 定义如下

$$\eta(v,h) = \begin{cases} e^{2\kappa h} v + (e^{2\kappa h} - 1)\frac{\sigma^2}{2\kappa} & \text{if } \kappa \neq 0, \\ v + \sigma^2 h & \text{if } \kappa = 0. \end{cases} \tag{4}$$

若函数 $v\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 满足以下条件，则称其为 贝叶斯可行

(i) $v(0) \le \sigma_0^2$; (ii) $v(s) \le \eta(v(t), s-t)$ 对所有 $s > t \ge 0$ 均成立。

根据全方差公式，若要使方差过程$\{V_t\}_{t\ge 0}$ 由某个决策规则诱导，则一个必要条件是函数 v 定义为$v(t) = \mathbf{E}\, V_t$ 是贝叶斯可行的。条件 i 是初始方差约束：发送者的初始披露不会增加期望方差。条件 ii是无披露上界：接收方的期望方差增长速度不会超过发送者不提供任何信息时的增长速度。对于确定性方差过程（我称之为路径），贝叶斯可行性也是充分条件，下面我将对此加以证明。

为证明充分性，我引入延迟报告。在每个时刻 t，发送者报告状态在先前某个时刻的精确实现值。起初没有先前的状态可供报告，因此我将时间 0 之前的一段虚构历史定义为随机化工具。令 $Y = \{Y_t\}_{t\ge 0}$ 为相互独立的标准布朗运动。对于 $t < 0$，令 $\theta_t = \theta_0 + Y_{-t}$。

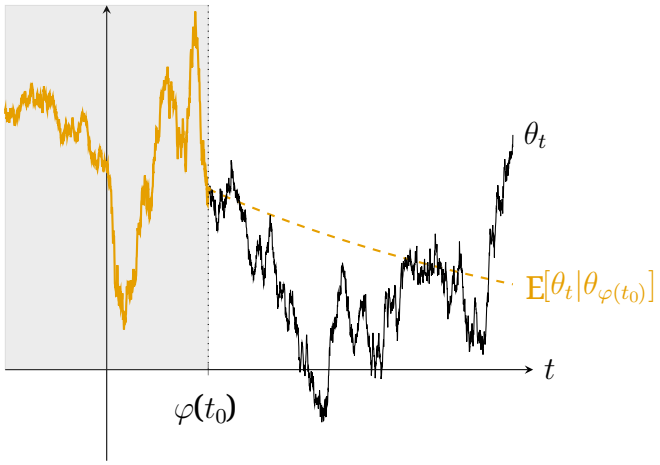

图1. 在时间 t_0的延迟报告，以及接收方更新后的期望

延迟报告由一个报告函数参数化，该函数定义为弱递增函数 φ: $[0,\infty) \to [-\infty,\infty)$，满足 $\varphi(t) \leq t$，对每个t均成立。在每个时刻 t，发送者报告 $\theta_{\varphi(t)}$。如果发送者截至时刻 t尚未提供任何信息，则令 $\varphi(t) = -\infty$ 。图1展示了延迟报告下接收方信息的一个快照。在时刻 t_0，对于 $t \geq \varphi$，接收方关于θ_t 的信念仅取决于$\theta_{\varphi(t_0)}$的值。虚线曲线表示条件期望函数 $\mathrm{E}[\theta_t|\theta_{\varphi(t_0)}] = e^{\kappa(t-t_0)}\theta_{\varphi(t_0)}$。

报告函数 φ 诱导出方差路径 v，若对所有 $t \geq 0$,

$$\mathrm{var}(\theta_t|\theta_{\varphi(t)}) = v(t),$$

约定 $\mathrm{var}(\theta_t|\theta_{-\infty}) = \mathrm{var}(\theta_t)$。

定理1 （延迟报告）
每条贝叶斯可行方差路径都由某个报告函数诱导。

如果方差路径 v 由报告函数 φ诱导，那么对于任意偏差路径 b，以下决策规则具有确定性偏差 b 和方差 v:

$$A_t = \mathbf{E}[\theta_t|\theta_{\varphi(t)}] + b(t). \tag{5}$$

这里， A_t 是随机的，因为条件期望是随机的。

延迟报告简化了接收方的信念更新过程。接收方无需汇总整个信号历史所包含的状态信息，而是在每个时点根据 t 当时的t 信号实现值单独形成自己的信念。此外，一旦 φ 超过0，发送者的信号就是状态历史的确定性函数——发送者无需采用随机化。采用不同状态过程的延迟报告的一个例子是Ely（2017）中的最优邮件通知策略。[15]

5 最优信息政策

现在，我求解发送者的最优偏差函数和方差函数。式（5）给出的延迟报告相关决策规则，是对直接严厉触发信息政策的最佳响应。

发送者的问题是选择偏差函数和方差函数 b 和 v，以求解

$$\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & -\int_0^\infty re^{-rt}\left[(b(t)-\beta)^2+v(t)\right]\mathrm{d}t \\
\text{subject to} \quad & -\int_t^\infty re^{-r(s-t)}\left[b^2(s)+v(s)\right]\mathrm{d}s \geq -\frac{\sigma^2+rv(t)}{r-2\kappa}, \quad t\geq 0 \\
& 0\leq v(s)\leq \eta(v(t),s-t), \quad s>t\geq 0 \\
& 0\leq v(0)\leq \sigma_0^2.
\end{aligned}$$

第一个约束条件是服从性。最后两个约束条件要求满足贝叶斯可行性。

注释 (帕累托前沿)。 对任意偏差 β求解发送者的问题，即可立即得到整个帕累托前沿。固定 π 于 $[0,1)$。最大化社会福利函数 $\pi u_S+(1-\pi)u_R$ 等价于最大化

[15]在 Ely (2017) 中，状态是二元的，表示是否有一封未读邮件正在等待处理。最优策略是在邮件到达后发出“蜂鸣声”，但延迟时长为 Δ。因此，报告函数为 $\varphi(t)=\max\{t-\Delta,0\}$。在这种情形下，初始状态是已知的（没有邮件在等待处理），因此揭示 θ_0 不会提供任何信息。因此，无需虚构历史。

偏差为 $\pi\beta$ 的另一位发送者的效用。这是由分解 n

$$\pi[(b-\beta)^2+v]+(1-\pi)[b^2+v]=(b-\pi\beta)^2+v+\pi(1-\pi)\beta^2.$$

5.1 服从性具有约束力

在最优策略下，只要方差严格为正，服从约束就必须是紧约束。否则，发送者可以在约束不紧的一小段时间内降低方差 v，从而严格提高其收益。这种扰动会放宽先前的服从约束，而不会改变之后的服从约束。[16]

方差为正时，其方差函数（若可微）满足以下微分方程

$$(r-2\kappa)b^2(t)=2\kappa v(t)+\sigma^2-v'(t). \tag{6}$$

这是两期示例中紧约束的服从约束（2）的连续时间对应形式。右侧的前两项描述了接收方在没有收到额外信息时，其后验方差的变化。如果发送者提供的信息能够使接收方的后验方差（相对于其外生变化）以 $b(t)$ 的速率降低，接收方才愿意让自己的行动产生$r-2\kappa)b^2(t)$的偏差。因此，$r-2\kappa$ 就是诱导偏差平方所需付出的价格（以方差计）。这对应于两期示例中的价格 $\delta^{-1}\rho^{-2}$，其中 $\delta=e^{-r}$ 且 $\rho=e^{\kappa}$。价格越高，发送者最初必须扣留越多信息，才能诱导出期望的偏差路径。如果接收方更缺乏耐心（r更高），或者过程的持续性更弱（κ更低），接收方就会要求方差有更大幅度的降低，才愿意选择给定水平的偏差。

如果方差在某个时刻 t首次降为零，那么根据连续性，时刻-t的服从约束必定处于紧约束状态。从时刻 t开始，放松后的延续问题（不再考虑后续服从约束）是选择

[16]在形式化证明中，最优策略是直接推导得出的，无需先证明服从性是有效的。本节中的非正式论证旨在帮助建立直觉。

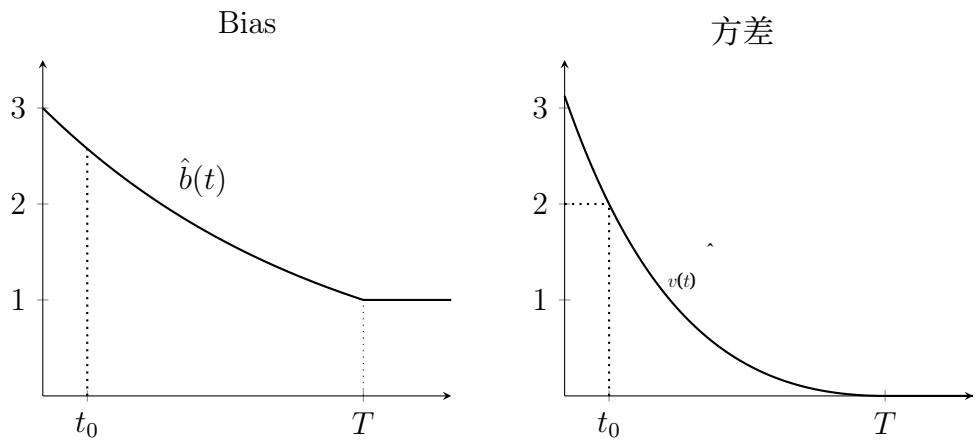

图2. 最优偏差函数和方差函数

对于 $s > t$ ，选择$b(s)$ 和 $v(s)$，以最大化发送者的延续收益，同时满足

$$-\int_t^{\infty} re^{-r(s-t)}[b^2(s)+v(s)]\,\mathrm{d}s = -\frac{\sigma^2}{r-2\kappa}.$$

发送者的流收益随 v 递减，且关于 b为凹函数，因此，她的延续收益在采用稳态策略时达到最大，该策略满足 $v(s) = 0$且$b(s) = \min\{\beta, \sigma/\sqrt{r-2\kappa}\}$，其中 $s > t$。该策略在时间 t满足服从约束，且在此后的所有时间也满足服从约束。因此，该策略是原问题的最优策略。它将构成解的稳态阶段。

5.2 最优策略

主要结果刻画了最优偏差路径和方差路径。

定理 2 （最优偏差与方差）
最优偏差$\hat{b}$ 和方差 $\hat{v}$ 是唯一的，具体如下。[17]

I. If $\beta \le \sigma/\sqrt{r-2\kappa}$, then $\hat{b}(t) = \beta$ and $\hat{v}(t) = 0$.

[17]这里， x_+ 表示实数 x的正部 $\max\{x, 0\}$ 。在某些表达式中，持久性参数 κ 出现在分母中。若将每个表达式替换为 κ 趋于 0 时的极限，则这些结果对 $\kappa = 0$ 仍然成立。

II. 如果 $\beta > \sigma/\sqrt{r-2\kappa}$，则

$$\hat{b}(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{r-2\kappa}} e^{(r-2\kappa)(T-t)_+},$$
$$\hat{v}(t) = -\frac{\sigma^2}{2\kappa} + \frac{\sigma^2(r-2\kappa)}{2(r-\kappa)}\left(\kappa^{-1}e^{-2\kappa(T-t)_+} + (r-2\kappa)^{-1}e^{2(r-2\kappa)(T-t)_+}\right),$$

其中，完全披露时间 T 取唯一值，使得不等式$\hat{}b(0) \leq \beta$ 和$\hat{}v(0) \leq \sigma_0^2$ 同时成立，且至少一个等式成立。

有两种情况。如果 $\beta \leq \sigma/\sqrt{r-2\kappa}$，那么发送者可以诱导出她的一阶最优决策规则 $A_t = \theta_t + \beta$。在每个时点，接收方遵循该规则所获得的延续价值 $-\beta^2$ 弱大于他放弃所有信息、短视地采取行动时的保留效用 $-\sigma^2/(r-2\kappa)$。

下文将聚焦于有趣的情形：$\beta > \sigma/\sqrt{r-2\kappa}$。发送者的一阶最优决策规则并不服从，因此偏差—精度权衡发挥作用。图2 展示了一组固定参数下的最优策略。[18] 最优策略分为两个阶段——一个过渡阶段，持续至完全披露时间T；以及一个稳态阶段，从 T时开始。图3 展示了实现该最优策略的报告函数。当时间 t 趋近于 T时，延迟 $t-\varphi(t)$趋于0。于是，对于 $\varphi(t)$， $=t$ 有 $t \geq T$。当 φ 穿过0 时会出现一个拐点，因为虚构历史的分布与真实状态过程的分布不同。

为推导最优策略，我首先去掉初始方差约束。我为每个时间-t 服从约束配置一个适当的乘子，以求解这个松弛问题。随后，我对这些约束积分，构造拉格朗日函数。在松弛问题的解中，最优偏差的形式为

$$\max\left\{\beta e^{-(r-2\kappa)t}, \frac{\sigma}{\sqrt{r-2\kappa}}\right\}. \tag{7}$$

在（7）中，偏差等于 β 在时间0。在过渡阶段的每个时间点 t ，增加偏差带来的流量收益等于降低方差的影子成本。该影子成本起初为零。随着时间推移，方差不断降低，影子成本随之增加，偏差也逐渐远离 β。

[18]此处， $\beta = 3$、 $r = 3$、 $\kappa = -0.5$和 $\sigma = 2$。初始方差 σ_0^2 足够大，因此初始方差约束不起作用。

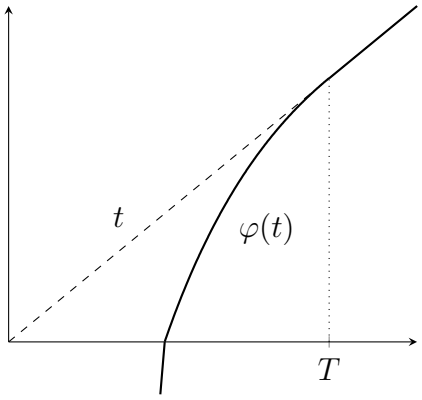

图3. 最优报告函数

稳态阶段在时间 T 开始，此时方差降至零，偏差达到 $\sigma/\sqrt{r-2\kappa}$。

若 σ_0^2 大于放松问题的解中的初始方差，则放松问题的解也就是原问题的解。在这种情况下，发送者会进行初始披露，将接收方的方差降低至 σ_0^2 以下。反之，若 σ_0^2 小于放松问题的解中的初始方差，则放松问题的解不可行。在放松问题的解下，方差向下漂移，并在某个时刻 σ_0^2 达到 t_0。原问题的解是从时刻 t_0 起采用延续策略。在这种情况下，不会初始披露信息，发送者也不会诱导其偏好的行动偏差 β。在图 2中，初始方差为 t_0 时的时刻 $\sigma_0^2 = 2$有所标示。

推论1 (确定性状态下的最优解**)**ˆ若 $\sigma = 0$，则最优偏差 b 和方差 ˆv 唯一，且由下式给出：

$$\hat{b}(t) = b_0 e^{-(r-2\kappa)t}, \qquad \hat{v}(t) = \frac{r-2\kappa}{2(r-\kappa)} b_0^2 e^{-2(r-2\kappa)t},$$

其中， b_0 是 β 和$\sqrt{2\sigma_0^2(r-\kappa)/(r-2\kappa)}$中的较小值。

这个解是当 σ 趋近于 0 时主解的极限。在 $\sigma = 0$ 的情况下，状态会确定性地演变。如果接收方得知当前状态，就能准确预测其未来轨迹，因此此后将永远采取最优决策。当行动偏差为零时，接收方因

行动偏差增加而产生的边际损失会消失。因此，发送方牺牲一些精度来引入轻微偏差是最优的。[19]

5.3 比较静态分析

若某函数在某个点严格增加，且在任何点都不减少，则称该函数会随参数变化而增加。

命题3（比较静态分析）
假设 $\beta > \sigma/\sqrt{r-2\kappa}$，且初始方差约束未生效。

ˆ*1.* 最优偏差函数 b 随 β 和 σ 增加，随$r-2\kappa$减少。

2。最优方差函数 ˆv 随 β 增加，且随 σ.

在稳态阶段，ˆ$b(t) = \sigma/\sqrt{r-2\kappa}$ 和 ˆ$v(t) = 0$，因此偏差随 σ 增加而增加，随 $r-2\kappa$增加而减少。在过渡阶段，偏差与方差路径的比较静态结果，与两期示例中第一期偏差和方差的比较静态结果相同（折现因子为$\delta = e^{-r}$，离散时间持续性为 $\rho = e^{\kappa}$）。随着偏好偏差 β 增加，发送者会隐瞒更多信息，以诱导更大的行动偏差。随着波动率 σ 增加，接收方的保留效用对方差的敏感度不变，但接收方保留效用的水平会降低，从而放宽服从约束。因此，过渡阶段的最优偏差 b 不变，但方差 ˆv 会降低。[20] 回顾公式（6），$r-2\kappa$ 是诱导偏差的价格（以方差衡量）。随着这一价格上升，偏差会降低。然而， r 和 κ 对方差的影响

[19]这与Fudenberg and Rayo（2019年）的可转移效用模型形成对比。当 σ =0 且 $\kappa = 0$ 时，方差路径是贝叶斯可行的，当且仅当它是弱递减的。这与Fudenberg andRayo（2019年）对未传递知识路径的约束完全相同。然而，在他们的最优策略下，这些未传递知识会在有限时间内降至零。此后，代理人获得全部剩余，并有效率地选择努力。[20]由于线性假设，降低方差的影子成本保持不变：收益关于方差呈线性，且状态遵循线性随机微分ˆ方程。如果初始方差约束具有约束力，那么 b 会在 σ 过渡阶段增加。

并不明确。随着 r 增加且 κ 减少，诱导给定水平的偏差所需的方差会增加，但最优偏差路径会降低。哪种效应占主导取决于其他参数值，并且可能随时间变化。

6 多维状态与行动

主模型研究发送者随时间提供多少信息。现在我考虑多维状态，以研究发送者在每个时点提供哪种信息。回到一个启发性例子，假设组织中的主要部门掌握着另外一个部门所关心的两种演变中的情形的私人信息。如果主要部门想从另一个部门那里争取让步，下面的解表明，最优做法是更长时间地隐瞒均值回归较弱的情形的信息，直到完全披露均值回归较强的情形之后才披露前者。

假设状态是 n 维的，记为 $\theta_t = (\theta_{t,\ 1},\ \ldots,\ \theta_{t,\ n}) \in \mathbf{R}^n$。初始状态 θ_0 的各分量相互独立。每个分量$\theta_{0,\ i}$都服从正态分布 $N(\mu_i,\ \sigma^2_{0,\ i})$。此后，各分量独立演变。每个分量 $\theta_{t,\ i}$ 都遵循以下线性随机微分方程

$$\mathrm{d}\theta_{t,i} = \kappa_i \theta_{t,i}\,\mathrm{d}t + \sigma_i\,\mathrm{d}Z_{t,i},$$

其中，$Z_i = \{Z_{t,i}\}_{t\geq 0}$是标准布朗运动，且 Z_1、……、Z_n和 θ_0相互独立。对每个 i，假设 $\sigma_i > 0$ 和 $2\kappa_i < r$。按持续性递增的顺序排列各分量，即 $\kappa_1 \leq \cdots \leq \kappa_n$。

在每个时刻 t，接收方选择一个行动 $a_t = (a_{t,\ 1}、\ldots\ldots、\ a_{t,\ n}) \in \mathbf{R}^n$。发送者和接收方的流效用为

$$u_S(a_t, \theta_t) = -\sum_{i=1}^{n}(a_{t,i} - \theta_{t,i} - \beta_i)^2, \qquad u_R(a_t, \theta_t) = -\sum_{i=1}^{n}(a_{t,i} - \theta_{t,i})^2.$$

发送者的偏好偏差是一个向量 $\beta = (\beta_1、\ldots\ldots、\ \beta_n) \in \mathbf{R}^n$。

只需对主模型中的论证稍作修改，即可

证明最优策略会产生确定性偏差与方差函数，它们现在是向量值的。对于每个 i，令

$$b_i(t) = A_{t,i} - \mathbf{E}[\theta_{t,i}|\mathcal{F}_t^A] \quad \text{and} \quad v_i(t) = \operatorname{var}(\theta_{t,i}|\mathcal{F}_t^A).$$

写出 $b(t) = (b_1(t)\ldots, b_n(t))$ 以及 $v(t) = (v_1(t)\ldots, v_n(t))$。为每个分量 η_i 分别定义一个方差更新函数，如（4）所示 i。

发送者选择向量值偏差函数和方差函数 b 以及 v 来求解

$$\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & -\int_0^\infty re^{-rt} \sum_{i=1}^n \left[(b_i(t)-\beta_i)^2 + v_i(t)\right] \mathrm{d}t \\
\text{subject to} \quad & -\int_t^\infty re^{-r(s-t)} \sum_{i=1}^n \left[b_i^2(s) + v_i(s)\right] \mathrm{d}s \geq -\sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2 + rv_i(t)}{r-2\kappa_i}, \quad t \geq 0 \\
& 0 \leq v_i(s) \leq \eta_i(v_i(t), s-t), \quad i = 1,\ldots,n, \quad s > t \geq 0 \\
& 0 \leq v_i(0) \leq \sigma_{0,i}^2, \quad i = 1,\ldots,n.
\end{aligned}$$

时间-t 服从约束是各分量的单维时间-t服从约束之和。可以为每个分量分别选择单维最优策略，但通常这并非最优。

与主模型中一样，服从约束在每个时刻t都必须是紧约束。方差向量（在可微时）满足微分方程

$$\|b(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{2\kappa_i v_i(t) + \sigma_i^2 - v_i'(t)}{r-2\kappa_i}. \tag{8}$$

这是式（6）的多维对应形式。服从约束中只涉及偏差向量的大小，因此最优做法始终是选择与b（t）平行的 β。在单维状态下，偏差的价格以方差为单位，为 $r-2\kappa$，而方差是唯一的计价单位。当有 n 个状态分量时，就有 n 种计价单位。偏差的价格以 $r-2\kappa_i$ 为单位，等于 v_i。波动率参数不会影响价格，因为它们不会影响敏感度。

保留效用对当前方差的敏感度。由于方差 v_1、……、v_n 对发送者流收益的影响相同，发送者更愿意使用价格最低的计价单位支付，也就是 κ_i 最高的计价单位。如果初始方差 $\sigma_{0,\ n}^2$足够大，发送者就只通过关于持续性最高的分量 n 的信息来补偿代理人。所有其他分量都会立即揭示。如果$\sigma_{0,\ n}^2$ 太小，发送者就必须同时扣留有关其他分量的信息。各分量按照持续性由低到高的顺序依次揭示，从而以最低的价格支付最大的一笔账单。

为陈述该定理，令 $\hat{}\sigma_j^2 = \sum_{i=1}^{j} \sigma_i^2/(r-2\kappa_i)$ 对于 $j = 1$，……，n。设 $\hat{}\sigma = \hat{}\sigma_n$。由（8）可知，$\hat{}\sigma$ 是发送者在使接收方始终完全知情的同时能够诱导出的偏差幅度。

定理3（多维状态下的最优解）
若状态是 n 维的，则以下向量值偏差与方差$\hat{}$路径 b 和 $\hat{}v$ 为最优解。当 $\kappa_1 < \cdots < \kappa_n$ 时，最优解唯一。

$\hat{}$*I.* 若 $\|\beta\| \leq \hat{}\sigma$，则 $b(t) = \beta$ 且 $\hat{}v(t) = 0$。

II. 若 $\|\beta\| > \hat{}\sigma$，则存在一个唯一确定的临界分量 i_0 和完全披露时间 $0 = t_1 = \cdots = t_{i_0-1} < t_{i_0} \cdots < t_n$，[21]

$$\hat{b}(t) = \hat{\sigma} \exp\left(\sum\nolimits_{i=i_0}^{n} (r-2\kappa_i)(t_i - t \vee t_{i-1})_+\right) \frac{\beta}{\|\beta\|}.$$

对于 $i < i_0$，我们有$\hat{}v_i(t) = 0$。对于 $i \geq i_0$，方差$\hat{}v_i$ 定义为

[21]如果$\sigma_{0,i}^2 = 0$对所有 i均成立，那么$(t_1, \ldots, t_n) = 0$，因此严格来说 $i_0 = n+1$。除这一边界情形外，我们有 $i_0 \leq n$，完全披露时间由以下条件确定：

(i) $\|\hat{}b(0)\| \leq \|\beta\|$、$\hat{}v_{i_0}(0) \leq \sigma_{0,\ i_0}^2$，以及$\hat{}v_i(0) = \sigma_{0,\ i}^2$，对于 $i > i_0$；(ii) $\|\hat{}b(0)\| = \|\beta\|$ 或$(i_0$、$\hat{}v_1(0)) = (1, \sigma_{0,\ 1}^2)$。

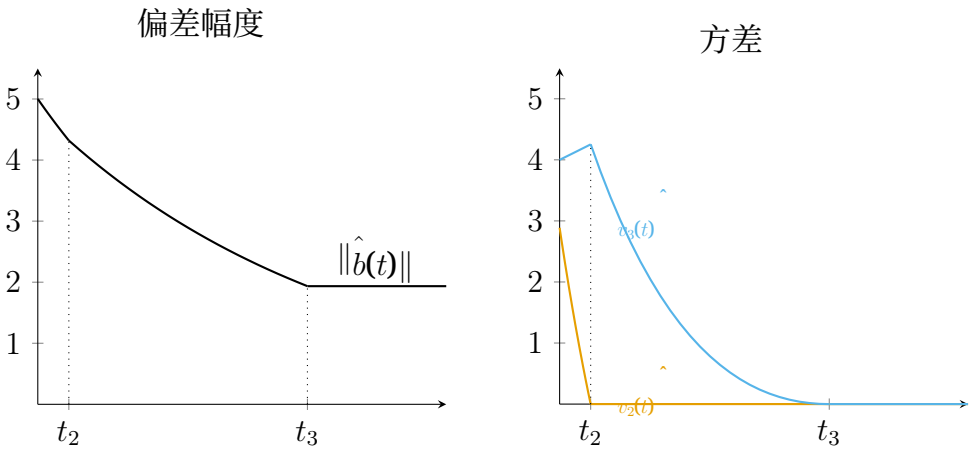

图4. 具有三维状态的最优信息策略

分段定义。对于 $t \geq t_{i-1}$,

$$\hat{v}_i(t) = \frac{\hat{\sigma}_i^2(r-2\kappa_i)}{2\kappa_i}\left(e^{-2\kappa_i(t_i-t)_+}-1\right) + \frac{\hat{\sigma}^2(r-2\kappa_i)e^{2\tau_{i+1}}}{2(r-\kappa_i)}\left(e^{2(r-2\kappa_i)(t_i-t)_+}-e^{-2\kappa_i(t_i-t)_+}\right), \quad (9)$$

其中 $\tau_j = \sum_{i=j}^{n}(r-2\kappa_i)(t_i-t_{i-1})$ 对应 $j = 1\ldots,\ n$。对于 $t < t_{i-1}$,

$$\hat{v}_i(t) = -\frac{\sigma_i^2}{2\kappa_i} + \left(\hat{v}_i(t_{i-1}) + \frac{\sigma_i^2}{2\kappa_i}\right)e^{2\kappa_i(t-t_{i-1})}.$$

我关注的是这种有趣的情形：$\|\beta\| > \hat{}\sigma$。图4 绘制了一个包含三个分量的示例中的最优策略。[22] （方差 $v_1(t)$ 始终为零，因此未绘出。）临界分量为 $i_0 = 2$。在时点$t_1 = 0$，发送者完全披露分量1 ，并部分披露分量2。随后，发送者逐步提供分量2的信息，同时让接收方充分了解分量1 ，且不提供有关分量3的信息。在时点 t_2，分量2 被完全

[22]这里，$\|\beta\| = 5$、$r = 3$、$(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = (-0.75, -0.25, 0.25)$，以及 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_{0,3} = 2$。初始方差 $\sigma_{0,2}^2$ 足够大，因此状态2的初始方差约束不构成限制。$\sigma_{0,3}^2$ 的取值不会影响解。

披露。随后，发送者逐步披露分量3，同时让接收方充分了解分量1和2。在时点 t_3，整个状态ˆ被完全披露，稳态阶段随之开始： $\|b(t)\| = \hat{}\sigma$ 且ˆ$v(t) = 0$ 对于$t \geq t_3$。在阈值时点 t_{i-1} 和 t_i之间，偏差幅度以$r-2\kappa_i$的速率呈指数衰减；在以分量 i 为状态的单维模型中，这是最优衰减速率。

7 结论

本文研究长期关系中信息的最优提供。发送者无法诱导出既偏向自身利益、又能精准适应状态的行动。她通过采用一种非稳态策略，随着时间推移逐步揭示信息，从而化解这一权衡。起初，行动虽有偏差，却不够精准。在过渡阶段，行动逐渐变得更加精准，但偏差有所减小，最终进入稳态阶段，此时行动具有完美的精准度和恒定偏差。在整个关系过程中，接收方选择这些带有偏差的行动，以便继续从发送者那里获取信息。这种信息关系的动态是内生形成的，并非因为发送者开始“信任”接收方，而是动态激励问题的解。

策略的形式化定义

固定一个概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathrm{P})$，它足够丰富，能够承载下文引入的所有随机对象。驱动过程 $Z = \{Z_t\}_{t\geq 0}$ 是标准布朗运动。初始状态 θ_0 服从正态分布 $N(\mu_0, \sigma_0^2)$，且独立于 Z。令

$$\theta_t = \theta_0 e^{\kappa t} + \sigma \int_0^t e^{\kappa(t-s)}\, \mathrm{d}Z_s, \tag{10}$$

其中，该积分是伊藤积分。此过程满足式（1）中的随机微分方程。令 $\{\mathcal{F}_t^\theta\}$ 表示由 $\{\theta_t\}$生成的滤过，[23]并令 $\mathcal{F}_\infty^\theta = \sigma(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t^\theta)$。

作为一种随机化工具，发送者配备了一个与 $\mathcal{F}_\infty^\theta$ 独立的标准布朗运动 $Y = \{Y_t\}_{t\geq 0}$。令 $\tilde{\mathcal{F}}_t^\theta = \sigma(\sigma(Y) \cup \mathcal{F}_t^\theta)$。滤过 $\{\tilde{\mathcal{F}}_t^\theta\}$ 表示发送者可获得的外生信息。

为定义接收方的行动路径，令 $\mathrm{RC}[0,\infty)$ 表示从 $[0,\infty)$ 到 R 的所有右连续函数构成的空间。赋予 $\mathrm{RC}[0,\infty)$ 柱滤过 $\{\mathcal{C}_{t-}\}$，其中 $\mathcal{C}_{t-}$ 表示由严格早于 t 时刻的投影映射生成的 σ-代数。

一项信息政策 由一个可测空间 $(\mathrm{S}\ \mathcal{S})$ 和一个映射构成

$$S\colon [0,\infty) \times \Omega \times \mathrm{RC}[0,\infty) \to \mathrm{S}$$

即适应于滤过 $\{\tilde{\mathcal{F}}_t^\theta \otimes \mathcal{C}_{t-}\}$ on $\Omega\times\mathrm{RC}[0,\infty)$ 。其含义是，发送者在时间 t 的信号可以依赖于：（i）发送者的外生信息，通过 $\tilde{\mathcal{F}}_t^\theta$；以及（ii）接收方在时间 t之前采取的行动，通过 $\mathcal{C}_{t-}$。将整个信息政策记为 S。

一个决策规则是一个实值的 $\{\tilde{\mathcal{F}}_t^\theta\}$适应随机过程，定义在$(\Omega\ \mathcal{F})$上，且样本路径右连续。根据Karatzas 和 Shreve(1998，命题 1.13，第 5 页)，决策规则关于$\{\tilde{\mathcal{F}}_t^\theta\}$是渐进可测的。

[23]也就是说，对每个 t，$\mathcal{F}_t^\theta = \sigma(\theta_s : s \leq t)$。

接下来，我定义决策规则与信息政策的相容性。给出这一定义后，若决策规则 A 是信息政策的最佳响应 S ，当且仅当：(i) A 与 S相容，且 (ii) $u_R(A) \geq u_R(A')$ 对所有 A' 与 S相容的决策规则Simon and Stinchcombe，1989；Bergin andMacLeod，1993）。在连续行动的情形下，我不知道有什么令人满意的策略限制能够避免所有这些技术问题。[24] 幸运的是，服从刻画（命题1）对于策略的确切定义具有稳健性。为此，我采用以下公理化方法。

发送者仅限于某个子集内的可采纳 信息政策。每个可采纳信息政策都关联着一组与该政策相容 的决策规则。我假设，可采纳性和相容性的这些概念满足以下条件。

C1. 如果决策规则 A 与可采纳信息政策S相容，那么以下述方式定义的任何决策规则 A' 也与之相容。对于某个固定时刻t_0 以及 $\mathcal{F}^A_{t_0}$中的某个事件 G，令 $A'_t(\omega) = A_t(\omega)$，只要 $t < t_0$或 $\omega \notin G$成立；否则，定义 A'，使得对于所有 $t \geq t_0$， GA'_t都是 $\mathcal{F}^A_{t_0}$-可测的。[25]

C2. 以下触发型信息政策均为可采纳的。设 X 为决策规则。设 T: RC $[0,\infty)$ $\times$ RC$[0,\infty)$ $\to$ R 为函数，且对每个时刻 t，事件 $[T < t]$ 属于 $\mathcal{C}_{t-} \otimes \mathcal{C}_{t-}$。 (X,T)-触发型

[24]难点在于，发送者可以选择自己的信号如何依赖接收方在 任意近的 过去所采取的行动。如果信号对行动的依赖是外生且带噪声的，例如像 Sannikov (2008) 中那样通过布朗运动的漂移产生，那么可以相对于外生滤过来定义决策规则。没有这种外生结构，可测性条件就会变成自指的。若不作进一步限制，这些可测性条件无法排除病态决策规则：在这类规则中，接收方利用发送者的反馈规则，即时向自己传递他从未直接收到的外生信息。现有方法仅适用于参与者选择何时在离散行动之间切换的情形。 Simon andStinchcombe (1989) 的网格方法以及 Berginand MacLeod (1993) 的惯性策略，都是针对确定性环境定义的。Kamada and Rao (2021) 为随机环境提出了一种新方法。[25]下文中，我用同一符号表示一个集合及其示性函数。

信息政策 S 定义如下：

$$S(t,\omega,a)=X_{t\wedge T(X(\omega),a)}(\omega).$$

由于 X 是 $\{\tilde{\mathcal{F}}_t^\theta\}$-渐进可测的， S 是 $\{\tilde{\mathcal{F}}_t^\theta\otimes\mathcal{C}_{t-}\}$-适应的。

C3. 决策规则 A 与 (X,T)-触发政策 S 相容，当且仅当

$$[A_t\in B]\cap[T(X,A)\wedge t<s]\in\mathcal{F}_s^X,$$

对于每个博雷尔集 B 以及所有时刻 s 和 t。这尤其意味着， A 是 $\{\mathcal{F}_t^X\}$-适应的。

条件 C1 表示，如果接收方能够遵循信息政策 A 下的决策规则 S，那么从时刻 t_0开始，在事件 G发生的条件下，接收方可以利用时刻 t_0时可用的信息选择不同的行动。条件 C3 表示，发送者停止过程 X 后，接收方的决策不能取决于该过程的实现值。

可以验证，C3 中（针对触发政策）的相容性定义满足 C1。因此，公理允许将发送者限制为使用触发型信息政策，并按 C3 定义相容性。当然，还有许多其他合理的信息政策类别。如果将其他政策纳入可行集合，那么只要与这些新信息政策的相容性定义方式符合 1，服从刻画（命题 C1）仍然成立。

B 证明

B.1 预备知识

在下面的证明中，我采用以下形式的全方差公式。对于任意平方可积随机变量 X 以及满足 $\mathcal{G}\supset\mathcal{H}$ 的任意子-σ-代数 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$,

$$\operatorname{var}(X|\mathcal{H})=\mathbf{E}[\operatorname{var}(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}]+\operatorname{var}(\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H})\geq\mathbf{E}[\operatorname{var}(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}]. \tag{11}$$

令 $\mathcal{H}$ 为平凡的 σ-代数，即可得到通常的全方差公式。

如果 X 和 Y 平方可积，且 X 关于 $\mathcal{G}$可测，那么

$$\mathbf{E}(X-Y)^2 \geq \operatorname{var}(X-Y) \geq \mathbf{E}[\operatorname{var}(X-Y|\mathcal{G})] = \mathbf{E}[\operatorname{var}(Y|\mathcal{G})], \tag{12}$$

其中，中间的不等式用到了通常的全方差公式，最后一个不等式则用到了 X 的 $\mathcal{G}$-可测性。

B.2 命题1的证明

首先，我证明服从性是必要的。我证明其逆否命题。设 A是一个不服从的决策规则。也就是说，存在某个时刻 t 以及$\mathcal{F}_t^A$中的某个正测度集合 G，使得

$$-\mathrm{E}\left[G\int_t^\infty re^{-r(s-t)}(A_s-\theta_s)^2\,\mathrm{d}s\right] < -\mathrm{E}\left[G\frac{\sigma^2+r(\mathbf{E}[\theta_t|\mathcal{F}_t^A]-\theta_t)^2}{r-2\kappa}\right]. \tag{13}$$

定义一个新的决策规则 A'，令 $A'_s = e^{\kappa(s-t)}\,\mathbf{E}[\theta_t|\mathcal{F}_t^A]$ 对 $s \geq t$ 取值为 G，并令 A' 等于 A，否则。由（13）可得 u_R（A'）$> u_R$（A）。只要 A 与某个信息政策相容，那么 A' 也相容（由C1），因此 A不可能是任何政策的最佳响应。

为证明服从性是充分条件，我先定义与固定决策规则 S 相关联的直接严厉触发信息政策 A，即触发决策规则（来自C2），其中 $X = A$ 且

$$T(a,a') = \inf\left\{t \geq 0 : \int_0^t (a_s - a'_s)^2\,\mathrm{d}s > 0\right\},$$

其中空集的下确界等于 ∞。利用 Fubini 定理，可以证明事件 $[T<t]$ 属于 $\{\mathcal{C}_{t-}\otimes\mathcal{C}_{t-}\}$，如所需。信息政策 S 定义为

$$S(t,\omega,a) = A_{t\wedge T(A(\omega),a)}(\omega).$$

现在我证明服从性是充分的。设 A 是一个服从性决策规则。设 S 是与之对应的直接严厉触发信息政策。我声称， A是对 S的最佳响应。显然， A 与 S相容，因为对于所有 ω，都有 $T(A(\omega)\ A(\omega)) = \infty$。令 $A' = \{A'_t\}$ 为任意一个与S相容的决策规则。我声称 $u_R(A) \geq u_R(A')$。若 $u_R(A') = -\infty$，该不等式显然成立，因此假设 $u_R(A')$ 有限。

定义随机时间 T'，使得 $T'(\omega) = T(A(\omega)\ A'(\omega))$。我从上方用简单函数逼近 T'。对于每个 n，定义简单随机时间T_n 如下：

$$T_n = \begin{cases} j/2^n & \text{if } (j-1)/2^n \leq T' < j/2^n,\ j = 1, \ldots, n2^n, \\ \infty & \text{if } T' \geq n. \end{cases}$$

根据构造， $T_n > T'$ 且 $T_n \downarrow T'$。令 A^n 为决策规则：当 $t < T_n$ 时与 A 一致，当 $t \geq T_n$时与 A' 一致。由于 $u_R(A')$ 和$u_R(A)$ 均有限，勒贝格控制收敛定理推出$u_R(A^n) \to u_R(A')$。因此，只需验证对于每个 n， $u_R(A^n) \leq u_R(A)$。

固定 n，令 t_1、.....、t_K 表示 T_n 以正概率取到的有限个值。对于每个 k，令 I_k 为事件 $T_n = t_k$的示性函数。我们有

$$u_R(A) - u_R(A^n) = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{E}\left[I_k \int_{t_k}^{\infty} re^{-rt} \left((A'_t - \theta_t)^2 - (A_t - \theta_t)^2 \right) \mathrm{d}t \right]. \quad (14)$$

对于 $t \geq t_k$，随机变量 $I_k A'_t$是 $\mathcal{F}^A_{t_k}$-可测的，由 C3，因此（12）给出 s

$$\mathbf{E}[I_k (A'_t - \theta_t)^2] \geq \mathbf{E}[I_k \operatorname{var}(\theta_t | \mathcal{F}_{t_k})] = \mathbf{E}[I_k \eta(\operatorname{var}(\theta_{t_k} | \mathcal{F}_{t_k}), t - t_k)], \quad (15)$$

其中 η 是式（4）中定义的函数。为说明式（14）中的每个期望均非负，交换积分次序，代入式（15），然后使用针对 t_k 的时间服从约束 A。由此可得 $u_R(A) \geq u_R(A^n)$。

B.3 命题2的证明

设 A 是服从性决策规则。定义偏差函数和方差函数 b 和 v 如下：

$$b(t) = \mathbf{E}[A_t - \theta_t] \quad \text{and} \quad v(t) = \mathbf{E}[\mathrm{var}(\theta_t|\mathcal{F}_t^A)].$$

首先，我验证 v 是贝叶斯可行的。根据全方差公式，

$$v(0) = \mathbf{E}[\mathrm{var}(\theta_0|\mathcal{F}_0^A)] \leq \mathrm{var}(\theta_0) = \sigma_0^2.$$

对于 $s > t$，式（11）中的更强全方差公式给出

$$\mathbf{E}[\mathrm{var}(\theta_s|\mathcal{F}_s^A)|\mathcal{F}_t^A] \leq \mathrm{var}(\theta_s|\mathcal{F}_t^A) = \eta(\mathrm{var}(\theta_t|\mathcal{F}_t^A), s-t), \tag{16}$$

其中，利用伊藤等距和 $\{\tilde{\mathcal{F}}_t^\theta\}$-适应性，可以由式（10）推导出该等式 A。由于 η 对其第一个参数是线性的，对式（16）两边取期望得到 $v(s) \leq \eta(v(t)$ $s-t)$。

由于 v 是贝叶斯可行的，根据定理 1（下文将证明，且不依赖命题 2），存在一个报告函数 φ，它诱导出 v。定义决策规则 A' 如下

$$A'_t = \mathbf{E}[\theta_t|\theta_{\varphi(t)}] + b(t).$$

对 A 的时间-t 服从约束两边取期望，得到

$$\mathbf{E}\left[\int_t^\infty re^{-r(s-t)}(A'_s - \theta_s)^2\,\mathrm{d}s\right] \leq \frac{\sigma^2 + r\,\mathbf{E}[\mathrm{var}(\theta_t|\theta_{\varphi(t)})]}{r - 2\kappa},$$

这正是针对 A'的时间-t 服从约束。因此， A' 是服从的。

还需检查两位玩家是否都弱偏好于 A而非 A' 。这是因为

$$\mathbf{E}(A_t - \theta_t)^2 = \mathbf{E}[B_t^2] + \mathbf{E}[V_t] \geq (\mathbf{E}\,B_t)^2 + \mathbf{E}[V_t] = \mathbf{E}(A'_t - \theta_t)^2,$$

类似地，$\mathbf{E}(A_t - \theta_t - \beta)^2 \geq \mathbf{E}(A'_t - \theta_t - \beta)^2$。

B.4 定理 1 的证明

设 $v\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是贝叶斯可行的。那么 v 具有以下单调性性质。若对于某个固定的 w 和 t，$v(t) \le \eta(w,t)$，那么对于 $s > t$，我们有

$$v(s) \le \eta(v(t), s-t) \le \eta(\eta(w,t), s-t) = \eta(w,s),$$

第二个不等式成立，是因为 η 关于其第一个自变量严格递增。此外，当 $v(t) < \eta(w,t)$ 时，第二个不等式严格成立。

通过以下分段方程组隐式定义报告函数 φ（根据 $\varphi(t)$ 的符号分情况）：

$$\begin{cases} \varphi(t) = -\infty & \text{if } v(t) = \eta(\sigma_0^2, t), \\ v(t) = \eta\big((1/\sigma_0^2 - 1/\varphi(t))^{-1}, t\big) & \text{if } \eta(0,t) < v(t) < \eta(\sigma_0^2, t), \\ v(t) = \eta(0, t-\varphi(t)) & \text{if } 0 \le v(t) \le \eta(0,t). \end{cases}$$

这一构造确保 φ 诱导出 v，前提是 φ 是一个定义良好的报告函数。

首先验证 φ 定义良好。根据初始方差约束和单调性，对所有 $t \ge 0$，均有 $v(t) \le \eta(\sigma_0^2, t)$，因此这些情况涵盖了所有可能。在第二种情况下，解是唯一的，因为 η 关于其第一个自变量严格递增。在第三种情况下，解是唯一的，因为 $\eta(0,\cdot)$ 严格递增，且 $\eta(0,0) = 0$。

现在我来验证 φ 是一个报告函数。固定 t，如果属于第二种情形，则有 $\varphi(t) \le 0$。如果属于第三种情形，则有 $0 \le \varphi(t) \le t$。单调性确保随着时间推移，只可能从较早的情形转到较晚的情形（而不会反过来）。在每种情形下，单调性确保 v 随时间弱递增（因为η 关于其第一个自变量严格递增，且函数 $\eta(0,\cdot)$ 严格递增）。

B.5 定理2的证明

假设 $\beta > \sigma/\sqrt{r-2\kappa}$，否则结论显然成立。定理陈述中的完全披露时间 T 是定义良好的，因为 $\hat{v}(0)$ 和 $b(0)$ 关于 T的表达式严格递增。

去掉方差上的无披露界，得到放宽后的问题[26]

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \int_0^\infty re^{-rt}\big[(b(t)-\beta)^2 + v(t)\big]\,\mathrm{d}t \\ \text{subject to} \quad & \int_t^\infty re^{-r(s-t)}\big[b(s)^2 + v(s)\big]\,\mathrm{d}s \le \frac{\sigma^2 + rv(t)}{r-2\kappa}, \quad t \ge 0 \\ & v(t) \ge 0, \quad t \ge 0 \\ & v(0) \le \sigma_0^2. \end{aligned} \tag{17}$$

不难验证 $\hat{v}$ 满足无披露界。我将$\hat{}$证明 $(b,\hat{v})$ 是（17）的唯一解。证明分为两部分。第一部分证明最优性。第二部分准确陈述所声称的唯一性，并予以证明。

最优性 首先，去掉初始方差约束：

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \int_{t_0}^\infty re^{-rt}\big[(b(t)-\beta)^2 + v(t)\big]\,\mathrm{d}t \\ \text{subject to} \quad & \int_t^\infty re^{-r(s-t)}\big[b^2(s) + v(s)\big]\,\mathrm{d}s \le \frac{\sigma^2 + rv(t)}{r-2\kappa}, \quad t \ge 0 \\ & v(t) \ge 0, \quad t \ge 0. \end{aligned} \tag{18}$$

~根据定理陈述中 b和 v 对应的表达式定义辅助函数 b和 $\tilde{v}$ ，但将 T 定义为

$$\beta e^{-(r-2\kappa)T} = \frac{\sigma}{\sqrt{r-2\kappa}}. \tag{19}$$

[26]为简化记号，整个附录中我都使用损失而非效用 .

˜ ˆ 下文将证明，$(b, \tilde{v})$是(18)的解。我声称，这意味着$(b, \hat{v})$是(17)的解。若 $\sigma_0^2 \geq \tilde{v}(0)$，则$(\tilde{b}, \tilde{v})$是(17)的解，并且$(\tilde{b}, \tilde{v}) = (\hat{b}, \hat{v})$。若$\sigma_0^2 < \tilde{v}(0)$，则存在唯一时刻 t_0 ，使得 $\tilde{v}(t_0) = \sigma_0^2$。由于时刻$t_0$ 的服从约束处于紧约束状态，根据贝尔曼最优性原理，映射 $t \mapsto (b(t_0 + t)\ \tilde{v}(t_0 + t))$（等于$(b, \hat{v})$是(17)的解。否则，将$(b, \tilde{v})$中的时刻$t_0$ 延续策略替换为(17)的一个解，会在保留(18)中所有服从约束的同时，严格提高发送方收益。

˜为证明$(b, \ \tilde{v})$ 满足 (18)，为每个按时间索引的服从约束附加非负拉格朗日乘子$e^{-rt}\lambda(t)$，并为每个按时间索引的t 非负性约束附加 $re^{-rt}\mu(t)$ 。对这些约束积分，构造拉格朗日函数t

$$
\begin{aligned}
L(b, v; \lambda, \mu) = &\int_0^\infty re^{-rt}\left[(b(t) - \beta)^2 + v(t)\right] \mathrm{d}t \\
&+ \int_0^\infty e^{-rt}\lambda(t)\left\{\int_t^\infty re^{-r(s-t)}\left[b^2(s) + v(s)\right] \mathrm{d}s - \frac{\sigma^2 + rv(t)}{r - 2\kappa}\right\} \mathrm{d}t \\
&- \int_0^\infty re^{-rt}\mu(t)v(t)\, \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

将大括号中的项拆分后，[27] 服从约束中的二重积分可重新整理为

$$
\int_0^\infty \int_t^\infty re^{-rs}\lambda(t)\left[b^2(s)+v(s)\right] \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty re^{-rs}\left(\int_0^s \lambda(t)\, \mathrm{d}t\right)\left[b^2(s)+v(s)\right] \mathrm{d}s,
$$

其中，我已根据托内利定理交换了积分顺序。接下来，交换该积分中的哑变量名称 s 和 t ，并定义累积乘数

$$
\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\, \mathrm{d}s.
$$

[27]只需为能使发送者损失有限的函数 (b, v) 定义拉格朗日函数。对于这类函数，只要 λ 和 μ 有界，两个积分就都是有限的；下文中它们确实有界。

经过这些简化后，我们得到

$$L(b,v;\lambda,\mu)=\int_0^\infty re^{-rt}\ell\big(b(t),v(t);\lambda(t),\mu(t)\big)\,\mathrm{d}t-\frac{\sigma^2}{r-2\kappa}\int_0^\infty e^{-rt}\lambda(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中 $\ell\big(b(t)\ v(t);\lambda(t)\ \mu(t)\big)$ 等于

$$(b(t)-\beta)^2+\Lambda(t)b^2(t)+\big(1+\Lambda(t)-\lambda(t)/(r-2\kappa)-\mu(t)\big)v(t). \tag{20}$$

定义非负乘子如下

$$\big(\hat\lambda(t),\hat\mu(t)\big)=\begin{cases}\big((r-2\kappa)e^{(r-2\kappa)t},0\big) & \text{if } t<T,\\ \big(0,e^{(r-2\kappa)T}\big) & \text{if } t\geq T.\end{cases}$$

有了这些乘子，$v(t)$ 的系数为零，而式（20）中的被积函数变为

$$(b(t)-\beta)^2+\big(e^{(r-2\kappa)(t\wedge T)}-1\big)b^2(t).$$

该表达式关于 $b(t)$ 为凸函数，一阶条件给出

$$b(t)=\beta e^{-(r-2\kappa)(t\wedge T)}=\frac{\sigma}{\sqrt{r-2\kappa}}e^{(r-2\kappa)(T-t)_+}=\tilde b(t),$$

其中，中间的等号利用了恒等式 $t\wedge T=T-(T-t)_+$ 以及式（T （19）中的定义。

$\tilde{}$ $\hat{}$ 因此，对于每个时刻 t，$(b(t)\ \tilde v(t))$ 都使 $\ell(\cdot,\cdot;\lambda(t),\hat\mu(t))$ 最小，故$\hat{}\ \tilde{}(b,\tilde v)$ 使 $L(\cdot,\cdot;\lambda,\hat\mu)$ 最小。可以验证，$(b,\tilde v)$ 满足可行性条件和互补松弛。因此，所有库恩–塔克条件均得到满足。

唯一性 我主张，如果函数 (b,v) 是 (17) 的解，那么对于几乎所有时间 t，$(b(t)\ v(t))=\hat{}(b(t),\hat{}v(t))$。为说明这一点，假设 (b,v) 是 (17) 的解。$\hat{}\ \hat{}$ 因此，对于几乎所有 t，$b(t)=b(t)$；否则，$(b/2+b/2,v/2+\hat{}v/2)$ 就是可行的严格改进。此外，对于几乎所有 t，$v(t)=\hat{}v(t)$；否则，$(b,v\wedge\hat{}v)$ 就是可行的严格改进，其中 $v\wedge\hat{}v$ 表示逐点

v 与$\hat{v}$中的最小值。[28]

B.6 推论的证明 1

关于唯一性，参照附录 B.5 中定理 2 的证明思路。关于最优性，注意发送方目标函数（记为$u_S(b,v)$）与波动率参数 σ 无关。在 (18) 的松弛问题（不含初始方差约束）中，可行集随着 σ 的增加而扩大$\tilde{}$（按集合包含关系而言）。对于每个 $\sigma > 0$，令 $(b_\sigma, \tilde{v}_\sigma)$ 表示波动率等于 σ 时 (18) 的$\tilde{}$解。按照推论1陈述中的表达式取 $b_0 = \beta$，定义 $(b_0, \tilde{v}_0)$。固定一个满足 $\sigma_n \downarrow 0$ 的正数列 $\hat{}\{\sigma_n\}$。只需验证 $u_S(b_{\sigma_n}, \hat{v}_{\sigma_n}) \to u_S(b_0, \hat{v}_0)$。

$\tilde{}$ $\tilde{}$注意，$(b_{\sigma_n}, \tilde{v}_{\sigma_n})$ 逐点收敛到 $(b_0, \tilde{v}_0)$。根据命题3，对于每个 t，$(\tilde{b}_{\sigma_n}(t)-\beta)^2+\tilde{v}_{\sigma_n}(t)$ 随 n 单调递增，因此根据勒贝格单调收敛定理，$u_S(b_{\sigma_n}, \tilde{v}_{\sigma_n}) \to u_S(b_0, \tilde{v}_0)$。因此，$(b_0, \tilde{v}_0)$ $\hat{}$ 是 (18) 的最优解。根据贝尔曼最优性原理，$(b_0, \hat{v}_0)$ 是 (17) 的最优解。

B.7 命题的证明3

假设 $\beta > \sigma/\sqrt{r-2\kappa}$，且初始方差约束不活跃。我们有

$$\hat{b}(t) = \max\left\{\beta e^{-(r-2\kappa)t}, \frac{\sigma}{\sqrt{r-2\kappa}}\right\},$$

$\hat{}$ 因此，b 的比较静态分析显然。对于方差，注意到定理陈述中$\hat{v}$ 的表达式作为 T 的函数严格递增，且除此之外与 β无关。由于完全披露时间 T 关于 β严格递增，因此$\hat{v}$ 关于 β递增。

最后，我检验 $\hat{v}$ 是否随 σ 递减。固定满足 $0 < \sigma_1 < \sigma_2$ 的 σ_1 和 σ_2。对于每个波动率参数 σ_i，将最优偏差—方差对记为

[28]事实上，还可以得到一个稍强的结果。由于$(\hat{b},\hat{v})$对每个时刻 t都以等式形式满足服从约束，因此对每个时刻 t，$v(t) \geq \hat{v}(t)$。如果(b,v)也满足无披露上界，那么 v 必定是下半连续的，因此对每个 时刻 t，$v(t) = \hat{v}(t)$。

$\hat{}(b_i, \hat{}v_i)$，将完全披露时间记为 T_i。我们有 $T_1 > T_2$。对于 $t \geq T_1$，有 $\hat{}v_1(t) = \hat{}v_2(t) = 0$。对于 $T_2 \leq t < T_1$，有 $\hat{}v_1(t) > \hat{}v_2(t) = 0$。最后，对于 $t < T_2$，注意到 $b_i(t)$ 与 i 无关，并且

$$(r - 2\kappa)\hat{b}_i^2(t) = 2\kappa\hat{v}_i(t) + \sigma_i^2 - \hat{v}_i'(t),$$

因此

$$\hat{v}_1'(t) - \hat{v}_2'(t) = 2\kappa(\hat{v}_1(t) - \hat{v}_2(t)) + \sigma_1^2 - \sigma_2^2 < 2\kappa(\hat{v}_1(t) - \hat{v}_2(t)).$$

在区间 $(0, T_2)$ 上，函数 $f(s) = \hat{}v_2(T_2 - s) - \hat{}v_1(T_2 - s)$ 满足$f'(s) \leq -2\kappa f(s)$。根据格朗沃尔不等式，对于所有 s属于 $[0, T_2]$，都有 $f(s) \leq e^{-2\kappa s} f(0)$，因此

$$\hat{v}_1(t) - \hat{v}_2(t) \geq e^{-2\kappa}(\hat{v}_1(T_2) - \hat{v}_2(T_2)) > 0,$$

对于所有 t 属于 $[0, T_2]$。

B.8 定理3的证明

假设 $\|\beta\| > \hat{}\sigma$，否则结论显然成立。可以证明，完全披露时间是良定义的；详情请参见证明的最后部分。现假定这些时间是良定义的，并证明该结论。

去掉除从时间 0 开始的无披露界之外的所有无披露界，从而得到松弛问题

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \int_0^\infty re^{-rt}\left[\|b(t) - \beta\|^2 + \sum\nolimits_{i=1}^n v_i(t)\right] \mathrm{d}t \\
\text{subject to} \quad & \int_t^\infty re^{-r(s-t)}\left[\|b(s)\|^2 + \sum\nolimits_{i=1}^n v_i(s)\right] \mathrm{d}s \leq \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2 + rv_i(t)}{r - 2\kappa_i}, \quad t \geq 0 \\
& 0 \leq v_i(t) \leq \eta_i(\sigma_{0,i}^2, t), \quad i = 1, \ldots, n, \quad t \geq 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

不难验证，$\hat{}v$ 满足被省略的不披露界。$\hat{}$我将证明$(b, \hat{}v)$ 是（21）的解，然后检验其唯一性。

最优性 为处理初始方差约束，考虑一个辅助ˆ ˆ问题。如果 $i_0 = 1$和 $\|b(0)$ $\| < \|\beta\|$，定义 t_0 ，使得 $b(t_0) = \beta$ （其中ˆ我们根据定理陈述中的表达式，在整个R上定义 b 和ˆv ）。否则，令 $t_0 = 0$。辅助问题是在 $[t_0, \infty)$ 上选择函数 b 和 v，使其满足

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \int_{t_0}^{\infty} r e^{-rt} \left[\|b(t) - b\|^2 + \sum\nolimits_{i=1}^{n} v_i(t) \right] \mathrm{d}t \\
\text{subject to} \quad & \int_{t}^{\infty} r e^{-r(s-t)} \left[\|b(s)\|^2 + \sum\nolimits_{i=1}^{n} v_i(s) \right] \mathrm{d}s \le \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i^2 + r v_i(t)}{r - 2\kappa_i}, \quad t \ge t_0 \\
& v_i(t) \ge 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad t \ge t_0 \\
& v_i(t) \le \eta_i(\hat{v}_i(t_0), t - t_0), \quad i = 1, \dots, n, \quad t \ge t_0.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

˜ ˆ定义辅助函数 b 和 $\tilde{v}$ 于 $[t_0, \infty)$，其表达式由 b 和˜ˆv 给出（采用 t_0的新定义）。下文将证明，$(b, \tilde{v})$ 是 (22) 的解。我ˆ˜主张，这意味着 $(b, \hat{v})$ 是 (21) 的解。若 $t_0 = 0$，则 $(b, \tilde{v})$ 是 (21) 的解，并且 $(\hat{b}, \hat{v})$ 等于 $(\hat{b}, \hat{v})$。若 $t_0 < 0$，则对所有 $i = 1$，均有 $\tilde{v}_i(0) = \sigma_{0,i}^2$ ， ....., n。由于时间零服从约束是有效的，根据贝尔曼最优性原理的委托人˜ ˆ可知，$(b, \tilde{v})$ 在 $[0, \infty)$ 上的限制（即 $(b, \hat{v})$ ）是˜(21) 的解。否则，将 $(b, \tilde{v})$ 中的时间零延续策略替换为 (21) 的一个解，就会严格提高发送方收益，同时保持 (22) 中的所有服从约束。

˜为证明 $(b, \tilde{v})$ 是 (22) 的解，对每个时间-t 服从约束附加非负拉格朗日乘子$e^{-rt}\lambda(t)$，对 $v_i(t)$ 上的非负约束附加 $re^{-rt}\mu_i(t)$，并对 $v_i(t)$ 上的不披露上界附加 $re^{-rt}\gamma_i(t)$。对这些约束积分，构造拉格朗日函数 $L(b, v, \lambda, \mu, \gamma)$。按照单维情形进行化简，可得

$$
\begin{aligned}
L(b, v; \lambda, \mu, \gamma) = & \int_{t_0}^{\infty} r e^{-rt} \ell\big(b(t), v(t), \lambda(t), \mu(t), \gamma(t)\big) \, \mathrm{d}t \\
& - \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i^2}{r - 2\kappa_i} \int_{t_0}^{\infty} e^{-rt} \lambda(t) \, \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{\infty} re^{-rt}\gamma_i(t)\eta_i(\hat{v}_i(t_0), t-t_0)\,\mathrm{d}t,$$

其中，被积函数 $\ell\big(b(t)\ v(t)\ \lambda(t)\ \mu(t)\ \gamma(t)\big)$ 等于

$$\|b(t)-\beta\|^2+\Lambda(t)\|b(t)\|^2+\sum_{i=1}^{n}\left(1+\Lambda(t)-\frac{\lambda(t)}{r-2\kappa_i}-\mu_i(t)+\gamma_i(t)\right)v_i(t). \quad (23)$$

接下来，按如下方式定义乘子。首先，定义 $j\colon [t_0,t_n) \to \{i_0,\ldots,n\}$为 $j(t) = i$，当 $t\in[t_{i-1},t_i)$ 时。令

$$S(t)=\int_{t_0}^{t}(r-2\kappa_{j(s)})\,\mathrm{d}s=\sum_{i=i_0}^{n}(r-2\kappa_i)(t\wedge t_i-t_{i-1})_+.$$

Let

$$\hat{\lambda}(t)=\begin{cases}\big(r-2\kappa_{j(t)}\big)e^{S(t)} & \text{if } t<t_n\\ 0 & \text{if } t\geq t_n.\end{cases}$$

可以证明，$\hat{\Lambda}(t) = e^{S(t)}-1$。接下来，对于 $i=1,\ldots,n$，令

$$(\hat{\mu}_i(t),\hat{\gamma}_i(t))=\begin{cases}\big(0,2(\kappa_i-\kappa_{j(t)})(r-2\kappa_i)^{-1}e^{S(t)}\big) & \text{if } t<t_{i-1},\\ (0,0) & \text{if } t_{i-1}\leq t<t_i,\\ \big(2(\kappa_{j(t)}-\kappa_i)(r-2\kappa_i)^{-1}e^{S(t)},0\big) & \text{if } t_i\leq t.\end{cases}$$

在（23）中，每个 $v_i(t)$ 上的系数均消失，剩下

$$\|b(t)-\beta\|^2+(e^{S(t)}-1)\|b(t)\|^2.$$

该表达式关于 $b(t)$ 是凸的，一阶条件得出 $b(t) = \beta\exp(-S(t))$。根据 t_0 的定义，我们有

$$\beta=\hat{b}(t_0)=\hat{\sigma}\exp\left(S(t_n)\right)\frac{\beta}{\|\beta\|}.$$

结合这些恒等式，我们得到

$$b(t) = \hat{\sigma} \exp\left(S(t_n) - S(t)\right) \frac{\beta}{\|\beta\|} = \tilde{b}(t).$$

~ ^ 因此，对于每个时刻 t,~^ ~，$(b(t)\ \tilde{v}(t))$ 最小化 $\ell(\cdot, \cdot; \lambda(t), \hat{\mu}(t), \hat{\gamma}(t))$，故 $(b, \tilde{v})$ 最小化 $L(\cdot, \cdot; \lambda, \hat{\mu}, \hat{\gamma})$。可以验证，$(b, \tilde{v})$ 满足可行性和互补松弛。因此，所有 Kuhn–Tucker 条件均得到满足。

唯一性 此处的论证与单维情形~不同。根据 Bellman 最优性原理，只需证明 $(b, \tilde{v})$ 是式 (22) 的（几乎处处）唯一解。若函数 (b, v) 是式 (22) 的解，^ ~^ 则 $L(b, v;\ \lambda, \hat{\mu}, \hat{\gamma}) = L(b, \tilde{v};\ \lambda, \hat{\mu}, \hat{\gamma})$，且 (b, v) 与乘子 $(\lambda, \hat{\mu}, \hat{\gamma})$ 满足互补松弛。对于每个 t,

$$\underset{(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+}{\operatorname{argmax}} \ \ell(x, y; \hat{\lambda}(t), \hat{\mu}(t), \hat{\gamma}(t)) = \{\hat{b}(t)\} \times \mathbf{R}_+.$$

^ ^ 因此，对于几乎所有 t，$b(t) = b(t)$。对于每个 t，我们有 $\lambda(t) > 0$。若$\kappa_1 < \cdots < \kappa_n$，则对于每个 i，我们有 $\hat{\gamma}_i(t) > 0$，对 $t < t_{i-1}$ 成立，且 $\hat{\mu}_i(t) > 0$，对$t \geq t_i$成立。因此，互补松弛意味着，对于几乎所有 t，$v(t) = \hat{v}(t)$。[29]

完全披露时间的定义 假设对于某个 i，$\sigma_{0,\ i}^2 > 0$；否则，完全披露时间全都为 0。

在定理陈述中，偏差函数和方差函数是用未来的披露时间表示的。为了证明这些完全披露时间定义良好，我将偏差函数和方差函数表示为它们在时间 0 的取值。正式过程如下。

[29]事实上，依照单维情形中的相同论证，这个等式必须对每个 t都成立。如果在 $\{1, \ldots, n\}$ 的某个子区间 I 内，κ_i 对 i 一致，那么对于 $T = \cup_{i\in I}[t_{i-1}, t_i)$ 中的所有 t，$\hat{\mu}_i(t) = \hat{\gamma}_i(t) = 0$。只有对于 T 中的 t，总和 $\sum_{i\in I} v_i(t)$ 才是确定的。对于 i 属于 I 且 t 属于 T 的情形，选择任意能够导出正确总和的 $v_i(t)$ 贝叶斯可行选择都是最优的。

令 $\mathcal{V}$ 包含零 n 向量以及所有形如 $(0_{i_0-1}, \nu_{i_0}, \sigma^2_{0,i_0+1}, \ldots, \sigma^2_{0,n})$ 的 n 向量，其中某个分量为 $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$，且某个 ν_{i_0} 属于 $(0, \sigma^2_{0,i}]$，这里 0_{i_0-1} 表示有 $i_0 - 1$ 个分量的零向量。集合$\mathcal{V}$ 在通常的逐分量序下是全序的。固定 $\alpha \in [\hat{}\sigma, \infty)$ 和$\nu \in \mathcal{V}$。定义函数 b、v 以及披露时间 $t_1, \ldots, t_n$ 如下。令$t_i = 0$，其中 $i \leq i_0 - 1$。令 $v(0) = \nu$，且 $b(0) = \alpha\beta/\|\beta\|$。对每个 i，已知 $b(t)$ 和 $v(t)$ 对 $t \leq t_{i-1}$ 已定义时，定义时间 t_i 以及取值 $(b(t)\ v(t))$，其中 t 属于 $(t_{i-1}, t_i]$，如下所示。对于偏差，

$$b(t) = b(t_{i-1})e^{-(r-2\kappa_i)(t-t_{i-1})}.$$

对于 $j \leq i-1$，我们有 $v_j(t) = 0$。对于 $j \geq i+1$，我们有 $v_j(t) = \eta(v_j($ $t_{i-1})\ t - t_{i-1})$。最后，$v_i(t)$ 可以显式表示，但更方便的做法是注意到，它是以下微分方程的唯一解

$$v_i'(t) = 2\kappa_i v_i(t) - (r - 2\kappa_i)(\|b(t)\|^2 - \hat{\sigma}_i^2),$$

其具有给定的边界值 $v_i(t_{i-1})$。令 t_i 为满足以下条件之一的最小时间：$t\ \ v_i$ $(t) = 0$，或者 $\|b(t)\| = \hat{}\sigma$。如果 $\|b(t_i)\| = \hat{}\sigma$，则设定 $T = t_i$ 并终止该过程。如果 $\|b(t_i)\| > \hat{}\sigma$，则当 $i < n$ 时继续下一步，否则在 $i = n$时设定 $T = t_n$。此过程通过设定以下内容，确定一个函数 $f\colon [\hat{}\sigma, \infty) \times \mathcal{V} \to \mathbf{R}$

$$f(\alpha, \nu) = \|b(T)\| - \hat{\sigma} - (v_1(T) + \cdots + v_n(T)).$$

这个函数 f 关于问题的参数连续。我声称，f 满足以下单调性：

(i) 对每个 $\nu \in \mathcal{V}$，函数 $f(\cdot, \nu)$ 都严格从下方单交叉。

(ii) 对每个 $\alpha \in [\hat{}\sigma, \infty)$，函数 $f(\alpha, \cdot)$ 都严格从上方单交叉。

首先，我在将这些性质视为已知条件的前提下完成证明。固定 $\nu \in \mathcal{V}$。我们有 $f(\hat{}\sigma,\ \nu) = -(\nu_1 + \cdots + \nu_n) \leq 0$。可以证明，当 α 充分大时，$f(\alpha,$ $\nu) > 0$。由连续性和（i），存在唯一的值 $\alpha^*(\nu) \in [\hat{}\sigma,\ \infty)$

使得 $f(\alpha^*(\nu)\ \nu) = 0$。由（i）和（ii）可知，函数 $\alpha^*\colon \mathcal{V} \to [\hat{}\sigma, \infty)$ 严格递增。注意，$\alpha^*(0) = \hat{}\sigma$。令 $\hat{}\alpha = \alpha^*(\sigma_0^2, 1, \ldots, \sigma_{0,n}^2)$。由连续性可知，像 $\alpha^*(\mathcal{V})$ 是区间 $[\hat{}\sigma, \hat{}\alpha]$，因此 α^* 存在右逆函数 $(\alpha^*)^{-1}\colon [\hat{}\sigma, \hat{}\alpha] \to \mathcal{V}$。因此，完全披露时间可通过应用上述过程确定，初始条件为 $b(0) = (\|\beta\| \wedge \hat{}\alpha)\ \beta/\|\beta\|$，且 $\hat{}v(0) = (\alpha^*)^{-1}(\|\beta\| \wedge \hat{}\alpha)$。

为证明 (i)，固定一个非零的 $\nu \in \mathcal{V}$。（当 $\nu = 0$ 时结论显然，因为对所有 α，$f(\alpha, 0) = \alpha - \hat{}\sigma$。）令 i_0 表示 ν 的第一个非零分量的指标。固定满足 $\bar{\alpha} > \alpha$ 的 α、$\bar{\alpha} \geq \hat{}\sigma$。从初始条件 (α, ν) 和 $(\bar{\alpha}, \nu)$ 出发，应用上述过程，分别得到 $(b, v, t_1, \ldots, t_n, T)$ 和 $\bar{}(b, \bar{v}, \bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n, \bar{T})$。假设 $f(\alpha, \nu) \geq 0$。因此，$v(T) = 0$。我将证明 $f(\bar{\alpha}, \nu) > 0$。由于 $\kappa_1 \leq \cdots \leq \kappa_n$，利用格朗沃尔不等式可以证明：

(a) $\bar{t}_i < t_i$ 对于 $i \geq i_0$;

(b) $\|\bar{b}(t)\| > \|b(t)\|$ 对于 $t \leq$ 分钟$\{T, \bar{T}\}$;

(c) $\bar{v}_i(t) \leq v_i(t)$ 对于 $t \leq$ 分钟$\{T, \bar{T}\}$。

特别是，$\bar{T} > T$不可能成立，否则 $\bar{v}(T) \leq v(T) = 0$。因此 $T \leq \bar{T}$、$\bar{T} \neq \bar{T}$，从而 $\|\bar{b}(T)\| > \|b(T)\| \geq \hat{}\sigma$。于是，$f(\bar{\alpha}, \nu) > 0$。

为证明 (ii)，固定 $\alpha > \hat{}\sigma$。（当 $\alpha = \hat{}\sigma$ 时，结论显然，因为对所有 ν，$f(\hat{}\sigma, \nu) = -(\nu_1 + \cdots + \nu_n)$。）取满足 $\bar{\nu} > \nu$ 的 $\nu, \bar{\nu} \in \mathcal{V}$。从初始条件 (α, ν) 和 $(\alpha, \bar{\nu})$ 出发，应用上述过程，分别得到 $(b, v, t_1, \ldots, t_n, T)$ 和 $\bar{}(b, \bar{v}, \bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n, \bar{T})$。假设 $f(\alpha, \nu) \leq 0$。因此，$\|\bar{b}(T)\| = \hat{}\sigma$，这意味着 ν 非零。我将证明 $f(\alpha, \bar{\nu}) < 0$。由于 $\kappa_1 \leq \cdots \leq \kappa_n$，利用格朗沃尔不等式可证明：

(a) 对于 $i \geq i_0(a, \bar{\nu})$，如果 $\bar{v}_i(T) = 0$，那么 $\bar{t}_i > t_i$;

(b) $\|\bar{b}(t)\| \leq \|b(t)\|$，持续 $t \leq$ 分钟$\{T, \bar{T}\}$;

(c) $\bar{v}_i(t) \geq v_i(t)$，持续 $t \leq$ 分钟$\{T, \bar{T}\}$。

特别是，我们不能有 $T > T$，否则 $\|b(T)\| \leq \|b(T)\| = \hat{}\sigma$。因此，$T \leq T$，从而 $\bar{v}_n(T) > 0$，否则 $t_n < T \leq T$，这就构成矛盾。因此，$f(\alpha, \bar{\nu}) < 0$。

参考文献

Au, P. H. (2015年)：《动态信息披露》，《兰德经济学杂志》，46，791–823。 [5]

Bergemann, D. 和 S. Morris (2016)：《博弈中的贝叶斯相关均衡与信息结构比较》，《理论经济学》，11，487–522。 [7]

Bergin, J. 和 W. B. MacLeod (1993)：《连续时间重复博弈》，《国际经济评论》，34，21–37。 [27]

Bizotto, J., J. Rüdiger 和 A. Vigier (2021)：《具有外部信息的动态劝说》，《美国经济学杂志：微观经济学》，13，179–194。 [5]

Ely, J. C. (2015年)：《蜂鸣声》，工作论文。 [5]——— (2017)：《蜂鸣声》，《美国经济评论》，107，31–53。 [5, 15]

Ely, J. C. 和 M. Szydlowski（2020年）：《移动球门柱》，《政治经济学杂志》，128，486–506。 [5]

Fudenberg, D. 和 L. Rayo（2019年）：《学徒培训与努力动态》，《美国经济评论》，109，3780–3812。 [5, 20]

Garicano, L. 和 L. Rayo（2017）：《关系型知识转移》，《美国经济评论》，107，2695–2730。 [5]

Harris, M. 和 B. Holmstrom（1982）：“工资动态理论”，《经济学研究评论》，49，315–333。 [5]Herrera, H.、E. Reuben 和 M. M. Ting（2017）：“地盘争夺战”，《公共经济学杂志》，152，143–153。 [2]Honryo, T.（2018）：“动态劝说”，《经济理论杂志》，178，36–58。 [5]

Kamada, Y. 和 N. Rao（2021）：“随机连续时间博弈中的策略”，工作论文。 [27]Kamenica, E. 和 M. Gentzkow（2011）：“贝叶斯说服”，《美国经济评论》，101，2590–2615。 [8]Karatzas, I. 和 S. Shreve（1998）：《布朗运动与随机微积分》，数学研究生教材第113卷，施普林格，第2版。 [26]Kaya, A.（2022）：“以信息支付”，工作论文。 [5]Lazear, E. P.（1981）：“代理、收入曲线、生产率与工时限制”，《美国经济评论》，71，606–620。 [5]Orlov, D.、A. Skrzypacz 和 P. Zryumov（2020）：“说服委托人等待”，《政治经济学杂志》，128，2543–2578。 [5]Ray, D.（2002）：“自我执行协议的时间结构”，《计量经济学》，70，547–582。 [5]Renault, J.、E. Solan 和 N. Vieille（2017）：“最优动态信息提供”，《博弈与经济行为》，104，329–349。 [5]Sannikov, Y.（2008）：“委托代理问题的连续时间版本”，《经济学研究评论》，75，957–984。 [27]Simon, L. K. 和 M. B. Stinchcombe（1989）：“连续时间扩展式博弈：纯策略”，《计量经济学》，57，1171–1214。 [27]Smolin, A.（2021）：“动态评估设计”，《美国经济杂志：微观经济学》，13，300–331。 [5]Thomas, J. 和 T. Worrall（1994）：“外国直接投资与征收风险”，《经济学研究评论》，61，81–108。 [5]