arXiv:2303.09676v1 [math.RT] 16 Mar 2023

奇数阶有限阿贝尔群的韦伊表示的特征

Frieder Ladisch

摘要。 设 V 是一个奇数阶有限阿贝尔群，并赋予非退化交错形式 $\omega\colon V \times V \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$。我们给出与 (V, ω) 相关的韦伊表示的特征标值的封闭公式。这些公式将 S. Gurevich 和 R. Hadani （2007）以及 T. Thomas （2008, 2013）给出的公式从有限向量空间推广到阿贝尔群。我们的公式不涉及对 V 中拉格朗日子群的选择。我们的证明基于 H. N. Ward（1972, 2017）为域上的有限向量空间引入的一种初等代数方法。

数学主题分类（2010）。 主要分类 11F27，次要分类 20C15。**关键词**。 韦伊特征，韦伊表示，辛群，振子表示，有限阿贝尔群。

目录

1. 引言.1
2. 预备知识与记号.5
3. 辛代数.7
4. 韦伊表示.9
5. 韦伊特征：简单性质.11
6. 奇数阶元素上的值.14
7. 主理想环上的双线性形式.15
8. 自同构的符号.17
9. 阿贝尔群上的二次高斯和.20
10. 辛自同构的分解.23
11. 主要定理的证明.25
12. 推论与例子.29
参考文献.33

1. 引言

1.1. 结果

设 R 是一个奇数阶有限交换环，并带有一个本原加性特征 $\lambda\colon (R, +) \to \mathbb{C}^*$，其中本原意为没有非零理想包含于 $\operatorname{Ker} \lambda$ 中。设 V 是 R 上的有限模，配有辛形式 $\omega\colon V \times V \to R$。辛群 $\operatorname{Sp}(V) = \operatorname{Sp}_R(V, \omega)$ 由保持该形式的 V 的 R-线性自同构组成

形式 ω。这个群有一个著名的表示 W，称为韦伊表示，得名于 André Weil 的一篇著名论文 [42], 。他研究了类似的表示，讨论的情形是 V 为局部紧阿贝尔群。本文给出韦伊表示的特征公式，记作$\operatorname{tr} W$， W适用于上述 V有限模的情形。（这包括 V 为奇数阶有限阿贝尔群的情形。）

我们的第一个主要结果如下：

定理 A. 设 $g \in \mathrm{Sp}(V)$ 的阶为奇数。那么

$$\operatorname{tr} W(-g) = \operatorname{tr} W(-1_V) \quad \textit{and} \quad \operatorname{tr} W(g) = \frac{1}{\sqrt{|V|}} \sum_{v \in V} \lambda\left(\tfrac{1}{2}\omega(v, vg)\right).$$

采用本文的方法，可以相当简洁地证明这一结果。正如摘要中所提到的，这种方法本质上源自 H. N. Ward [39, 40],对有限域上向量空间的研究。在 第 3 节和第 4 节中，我们将相当详细且自成一体地阐述 Ward 构造韦伊表示的方法，并将其推广到有限阿贝尔群的情形。我们还将说明如何定义与 （规范）韦伊表示 W 相关联的 (V, ω, λ)，而不论$\mathrm{Sp}(V)$ 是否为完美群。

Ward 的显式构造立即给出 $\operatorname{tr} W$ 的卷积公式（见命题 5.2），由此可以轻松推出 定理 A （见 命题 6.1 和 推论 6.2）。

当 g 和 V的阶都是同一个素数的幂时，定理 A 中的第二个公式由 I. M. Isaacs 证明 [19,定理 6。1],其证明长得多。在不同的背景下，这个公式也出现在我的博士论文中[1] [23, 推论 4。34]。

当 $\operatorname{tr} W(g)$ 在 定理 A 中所给出的公式通常并不正确，尤其是在 $g \in \mathrm{Sp}(V)$ 具有偶数阶时。在介绍一般公式所需的所有定义之前，我们先给出另一种特殊情形。当 α 是某个有限集合上的置换，或诱导出该置换 X时，$\operatorname{sign}_X(\alpha)$ 表示该置换的 符号 或 符号 。

定理 B. 设 $g \in \mathrm{Sp}(V)$ 满足 $1 - g$ 可逆。那么

$$\operatorname{tr} W(g) = (-1)^{\frac{\sqrt{|V|}-1}{2}} \operatorname{sign}_V(1 - g).$$

我们在 第 8 节 汇总有限 R-模上的自同构的符号的若干基本性质。举例来说，当 $R = F$ 是奇数阶有限域且 $\alpha \in \mathrm{GL}(n, F)$ 时，$\operatorname{sign}_{F^n}(\alpha) = 1$ 当且仅当 $\det(\alpha)$ 是 F^* 中的一个平方。这一结果表明，定理 B推广了 S. Gurevich 和 R. Hadani 的结果 [15, 定理 2.2。1], 该结果是通过代数几何得到的。

对于一般公式，我们还需要一些记号。对于 $g \in \mathrm{Sp}(V)$，在 $X = V(1 - g)$ 上定义双线性形式 B_g，如下：

$$B_g(v(1 - g), w(1 - g)) = \omega(v, w(1 - g)) \quad \text{for } v, w \in V.$$

[1]撰写博士论文（2008年）时，我并不知道其中以及 Isaacs 的著作中出现的“魔法特征”，实际上是韦伊表示的特征。

那么 B_g 作为 $X = V(1-g)$ 上的形式是良定义且非退化的 (参见引理 2.4)。

Second，对于任意的对称的，非退化双线性形式 $q\colon X \times X \to R$, se t

$$\gamma_\lambda(q) := \frac{1}{\sqrt{|X|}} \sum_{x \in X} \lambda(\tfrac{1}{2} q(x,x)).$$

我们将在高斯和的第9节中证明这类归一化高斯和的一些基本性质，例如 $\gamma_\lambda(q)^2 = (-1)^{(|X|-1)/2}$。（在有限域的情形下，$\gamma_\lambda(q)$ 是通常意义下的魏尔指标 [42, 27]，，不过我们并不需要这一点。）

以下主要结果将在第11节中证明，而定理 B 可由此推出，作为推论 11.5。

定理 C. 设 $g \in \mathrm{Sp}(V)$，并记作 $X = V(1-g)$。若 $q\colon X \times X \to R$ 是一个非退化对称形式，则存在唯一的 $\alpha \in \mathrm{GL}_R(X)$ 使得对所有 $x, y \in X$，均有 $q(x,y) = B_g(x\alpha, y)$。然后

$$\operatorname{tr} W(g) = \sqrt{|\mathbf{C}_V(g)|}\ \operatorname{sign}_X(\alpha)\, \gamma_\lambda(-q).$$

当 R 是奇数阶有限域时，符号 $\chi(\alpha) = 1$ 在定理 C 中成立，当且仅当 q 与 B_g 具有相同的判别式。（一般而言，B_g 并非对称。）由此可知，在有限域的情形下，定理 C 中的公式简化为 T. Thomas 在其 2013 年论文中提出的公式 [37, 推论 1。4]。Thomas 早期论文中的公式 [36,定理 1A] 可由高斯和求值的基本规则轻易推出（参见例 12.1）。

至少当 R 是有限主理想环时（例如 $R = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$），不难看出，任意有限 R-模上都存在非退化对称形式。在定理 C 的证明中，我们将证明，对于有限主理想环 R，存在这样一个形式 q，使得定理 C 中的 α 具有偶宇称，也就是说，$\operatorname{sign}_\chi(\alpha) = 1$，因此 $\operatorname{tr} W(g) = \sqrt{|\mathbf{C}_V(g)|}\gamma_\lambda(-q)$。（Thomas [37, p. 1538] 认为，形式 B_g 一般并非对称形式，但它决定了 Witt 环模去某个理想后的一个元素。因此，B_g 决定了对称形式的一个等价类，而魏尔指标 γ_λ 在该等价类上为常数。）一般而言，我们总可以将 V 和 X 仅视为阿贝尔群，从而用带有适当 m 的 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 替换 R。

韦伊表示取决于本原线性特征 $\lambda\colon R \to \mathbb{C}^*$。作为我们结果的推论，我们在推论 12.10 中证明了以下优美公式，它将韦伊表示 W_λ 与 W_{λ^2} 的特征联系起来：

$$\operatorname{tr} W_\lambda(g) \cdot \operatorname{tr} W_\lambda(-g) = (-1)^{\frac{\sqrt{|V|}-1}{2}} \cdot \operatorname{tr} W_{\lambda^2}(g^2).$$

对于有限域，这个公式归功于 R. Guralnick、K. Magaard 和 P. H. Tiep [14,定理 1.2]。（当且仅当 2 是 R 中的一个平方时，我们有 $\operatorname{tr} W_\lambda = \operatorname{tr} W_{\lambda^2}$ on $\mathrm{Sp}_R(V)$。）

1.2. 背景

韦伊表示由 A. Weil 引入，适用于 [42] 局部紧阿贝尔群，尤其是局部域或阿代尔环上的向量空间。有限域上的辛向量空间的韦伊表示，最早可能见于 B. Bolt、T. G. Room 和 G. E. Wall 于 1961 年发表的一篇论文 [4], ，其研究独立于 Weil 的工作。尽管 Weil 曾指出，有限阿贝尔群的情形值得深入研究 [42,第 143 页–144],但大多数关于有限阿贝尔群相关韦伊表示的文献，都关注有限域上向量空间的情形。

S. Tanaka [34, 35] 利用与 $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^\ell\mathbb{Z}$ 相关的韦伊表示构造了 SL(2, $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$) 的不可约表示。A. Prasad [28], 、K. Dutta 和 A. Prasad [9] ， 以及 N. Kaiblinger 和 M. Neuhauser [21]也研究了通常意义下有限阿贝尔群的韦伊表示。如今，关于有限环上的 Sp($2n$, R) 和酉群的韦伊表示，也已有大量文献（这里只列举几篇参考文献）。

R. Howe [18]确定了有限域上向量空间的韦伊表示的特征的绝对值。P. Gerardin [11]和 K. Shinoda [31], 给出了有限域上向量空间的辛群的韦伊特征值公式，但这些公式相当复杂，且部分依赖于分类讨论。M. Neuhauser [26], 利用韦伊表示的具体矩阵，给出了辛群一组生成元上的特征标值公式。

与 Howe 同期，但处于完全不同的背景下，I. M. Isaacs 深入研究了与有限阿贝尔 p群相关联的韦伊表示的特征 [19]。（Isaacs 的论文中并未使用“韦伊表示”这一术语。Isaacs 的工作与韦伊表示及其特征之间的联系，或许从他的定理 4.7 和 4.8 中最能看出来。）Isaacs 证明了 $|\mathrm{tr}\ W(g)|^2 = |\mathbf{C}_V(g)|$ [19,定理 3.5(a)、4.8], ，并给出了一种算法，用于确定所有 $\mathrm{tr}\ W(g)$ 的符号$g \in \mathrm{Sp}(V)$，但没有给出闭式公式。他还在假设 定理 A 满足 g 具有 p-幂阶

A. Prasad [28] 对与有限阿贝尔群相关联的韦伊表示提出了一种相当初等的方法。Prasad 运用他的方法，对任意阿贝尔群给出了等式 $|\mathrm{tr}\ W(g)|^2 = |\mathbf{C}_V(g)|$ 的一个非常简洁的证明。

当 V 是有限域上的向量空间时，S. Gurevich 和 R. Hadani[15] 为满足 $g - 1$ 可逆的 $g \in \mathrm{Sp}(V)$找到了一个简单公式，用于计算 $\mathrm{tr}\ W(g)$（本质上就是上文定理 B 中的公式）。他们的证明运用了代数几何的技巧。T. Thomas 在 [36, 定理 1A] [37, 推论 1.4]中，为任意 $g \in \mathrm{Sp}(V)$找到了计算 $\mathrm{tr}\ W(g)$的简单公式，其中 V是（有限或局部）域上的向量空间。Thomas 的方法统一适用于有限域和局部域，并运用了诸如魏尔指标、Maslov 指数，以及将亚辛群构造成由 Witt 群的一个子因子群扩张而成的群等工具。A.-M. Aubert 和 T. Przebinda [2]给出了一个更初等、但相当冗长的证明，以证明 Thomas 的结果。在有限域的情形下，H. N. Ward [40] 给出了一个简短且初等的证明，证明了一个版本的

Thomas 特征公式，其基础是他从 1972 [39]出发研究韦伊表示的方法。我们的定理 C在很大程度上借鉴了 Ward 的预印本 [40]中的思想。我们的证明方法相当初等，并且我们努力使本文内容自成一体。

2. 预备知识与记号

下文中，我们作如下假设：

2.1. 基本设定。 R 是一个有限交换环（含幺元），使得 2 在R中可逆，并且 λ: $R \to \mathbb{C}^*$ 是 R的一个本原加性特征，其中 本原 意指 Ker λ 不包含 R的任何非零理想。（有限环 R 存在本原加性特征，当且仅当 R 是有限弗罗贝尼乌斯环。关于此问题，我们请读者参阅 T. Honold 的论文 [17]及其中的参考文献。）

此外， V是 R 上的有限模，并且 ω: $V \times V \to R$ 是 V上的非退化双线性交错形式。我们将保形式的 R-线性自同构 g 组成的群记作 $\mathrm{Sp}_R(V, \omega)$（当 R 和 ω 的含义清楚时，也简记为 $\mathrm{Sp}(V)$），也就是说，对于所有 v、 $w \in V$，都有 $\omega(vg, wg) = \omega(v, w)$。

（有限阿贝尔群 V为奇数阶的情形由 $R = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$涵盖，其中 m是 V的指数的任意奇数倍。）

若 B: $U \times W \to R$ 是两个 R-模之积上的双线性形式，且 $X \leqslant U$和 $Y \leqslant W$，则记作

$$X^B = \{\, w \in W \mid B(x, w) = 0 \text{ for all } x \in X \,\} \quad \text{and}$$
$$^BY = \{\, u \in U \mid B(u, y) = 0 \text{ for all } y \in Y \,\}.$$

当 $U^B = 0$ 和 $^BW = 0$时，我们称 B 非退化。对于 $B = \omega$，我们用 $X^\perp$ 代替 X^ω。

2.2. 引理。设 R 是一个有限交换环，带有本原加性特征λ: $R \to \mathbb{C}^*$，并设 B: $U \times W \to R$ 是一个非退化双线性形式。那么，由 B 诱导的映射$U \to$ 同态集$_R(W, R)$ 和 $W \to$ 同态集 $_R(U, R)$ 是同构。对于 X,~$X \leqslant U$，有：

(a) $w \in X^B \iff \lambda(B(x, w)) = 1$ 对于所有 $x \in X$。
(b) $^B(X^B) = X$。(c) $(X + \tilde{X})^B = X^B \cap \tilde{X}^B$ 且 $(X \cap \tilde{X})^B = X^B + \tilde{X}^B$。(d) $|U| = |X||X^B| = |W|$。

~对子模 Y, $Y \leqslant W$，另一侧也有类似的结论。

证明。 我们先证明 (a)。对于 $w \in W$和 $X \leqslant U$，集合 $B(X, w)$ 是 R的一个理想。由于 核(λ) 不包含任何非零理想， $\lambda(B(X, w)) = 1$ 推出 $w \in X^B$。“$\Longrightarrow$”这一方向显然成立，因此 (a) 得证。

特别地，我们看到，乘法形式 $\mu(x,\ y) = \lambda(B(x,\ y))$ 诱导出 $\widehat{\ }$ 单射 $W,\ \to U :=$ 同态集$(U,\ \mathbb{C}^*)$ 和 $U,\ \to W$。由 $|U| = |U|$ 和 $|W| = |W|$ 可知，这些 $\widehat{\ }$ 必为同构。同构 $W \to U$ 是单射映射 $w \mapsto B(\cdot\ w) \mapsto \lambda \circ B(\cdot\ w)$ 的复合，因此这些映射都是同构。类似地，对于每个子模 $X \leqslant U$，我们都有一个同构 $W/X^B \to \widehat{X}$。因此 $|W| = |X||X^B|$，其余部分便很容易得出。 □

以下结果将经常在不再特别说明的情况下使用，尤其是 $r = s = 1$ 的情形：

2.3. 引理。 假设 基本设定 *2.1* 且 $g \in \mathrm{Sp}(V)$，并设 $rs = 1_R$ 对 $r,\ s \in R$。则 $\mathrm{Ker}(r - g) = (V(s - g))^{\perp}$。

证明。 我们有 $\omega(v,\ w(s - g)) = \omega(v(s - g^{-1})\ w)$。因此，由 ω 的非退化性可得：$v \in (V(s - g))^{\perp} \iff 0 = v(s - g^{-1}) = v(g - r)sg^{-1} \iff v \in \mathrm{Ker}(r - g)$。 □

沿用 C. E. Wall [38] 和 T. Thomas [36, 37], 的做法，我们在任意 $g \in \mathrm{Sp}(V)$ 的情形下，于$V(1 - g)$上引入一个双线性形式。

2.4. 引理。 假设 基本设定 *2.1* 并设 $g \in \mathrm{Sp}(V)$。定义

$$B_g(v(1 - g), w(1 - g)) = \omega(v, w(1 - g)).$$

Then

$$B_g \colon V(1 - g) \times V(1 - g) \to R$$

是一个良定义的非退化双线性形式，且对所有$x,\ y \in V(1 - g),\ B_g(x, y) - B_g(y, x) = \omega(x, y)$。

这里我们应注意，$B_g(x, y) = -\sigma_g(x, y) = -\Theta_g(y, x)$，其中 σ_g 是 T. Thomas [37], 使用的形式，而 Θ_g 是 H. N. Ward 的 [40]“θ 型”。我们的约定遵循 C. E. Wall [38]。

引理的证明 引理 *2.4*。 (参见 [38, 引理 1.1.1，等式 1.1。3], [40, 引理 3。4]) 令 $\alpha = 1 - g$，也就是说，$g = 1 - \alpha$。那么方程 $\omega(vg, wg) = \omega(v, w)$ 可转化为

$$\omega(v\alpha, w\alpha) = \omega(v, w\alpha) + \omega(v\alpha, w).$$

因此，$v_1\alpha = v_2\alpha$ 推出 $\omega(v_1, w\alpha) = \omega(v_2, w\alpha)$，所以 B_g 是良定义的。此外，若 $w\alpha$ 满足对所有 $v \in V,\ 0 = B_g(v\alpha, w\alpha) = \omega(v, w\alpha)$，则由 ω的非退化性可得 $w\alpha = 0$。因此 B_g 是非退化的。最后，由

$$\begin{aligned}\omega(v\alpha, w\alpha) &= \omega(v, w\alpha) + \omega(v\alpha, w)\\ &= \omega(v, w\alpha) - \omega(w, v\alpha)\\ &= B_g(v\alpha, w\alpha) - B_g(w\alpha, v\alpha),\end{aligned}$$

我们看到 $B_g(x,\ y) - B_g(y,\ x) = \omega(x,\ y)$，其中 $x, y \in V\alpha = V(1 - g)$。 □

当 $B\colon\ X\times X\to R$ 是一个双线性形式，且 2 在 R 中可逆时，我们可以写成 $B=B_s+B_a$，其中 $B_s(x,y)=(1/2)\big(B(x,y)+B(y,x)\big)$ 对称，而 $B_a(x,y)=(1/2)\big(B(x,y)-B(y,x)\big)$ 交错。我们已经看到 $(B_g)_a=\omega/2$（在 $V(1-g)$ 上）。在第11节中，我们需要关于对称部分（也称为凯莱形式 [37]）的以下事实：

2.5. 引理。 设 $Q_g(x,y)=(1/2)\big(B_g(x,y)+B_g(y,x)\big)$。则

$$Q_g(x,y)=\frac{1}{2}(\omega(vg,w)+\omega(wg,v))=\frac{1}{2}B_g(x(1+g),y)$$

对于 $x=v(1-g)$、$y=w(1-g)$。Q_g 的根基是 $\mathrm{Ker}(1+g)$。

证明。 Q_g 的公式可以通过直接计算验证。注意，对所有 $v\in V$，$v=(1/2)v(1-g)+(1/2)v(1+g)$，因此 $\mathrm{Ker}(1+g)\subseteq V(1-g)$。关于根基的断言由 B_g 是非退化的这一点得出。 □

3. 辛代数

在本节中，我们将 Ward [39, 40] 关于 R 为有限域的情形下的定义和结果推广到更一般的情形。证明本质上相同。

3.1. 定义。 假设 基本设定 2.1 并设 $\mathbb{K}\subseteq\mathbb{C}^*$ 是一个包含 λ 的取值的域。**辛代数** $\mathcal{A}=\mathcal{A}(\mathbb{K},V,\lambda\circ\omega)$ 是 V 上以 $\mathbb{K}$ 为底、因子集为 $\lambda\circ(\frac{1}{2}\omega)$ 的扭群环。这意味着 $\mathcal{A}$ 有一个 $\mathbb{K}$-基

$$\{\,b_v\mid v\in V\,\}$$

由 V 标记，乘法定义为

$$b_vb_w=\lambda(\tfrac{1}{2}\omega(v,w))\,b_{v+w}=(\lambda\circ\omega)\,(v/2,w)\;b_{v+w}. \tag{1}$$

（由于 2 在 R 中可逆，这样定义是有意义的。）

Ward 的定义中没有因子 $_{1\,2}$。为了与海森堡群的通常定义保持一致，我们引入了这个因子。**海森堡群** $H=H(V,R,\omega)$ 是集合 $V\times R$，其乘法定义为

$$(v,r)(w,s)=(v+w,r+s+\frac{1}{2}\omega(v,w)).$$

容易验证，H 在此乘法下构成一个群，其中心为 $\mathbf{Z}(H)=0\times R\cong R$。此外，$(v,\ r)\mapsto b_v\lambda(r)$ 是从 H 到 $\mathcal{A}$ 的单位群的群同态，其核为 $\mathrm{Ker}\,\lambda$。如下文所示，$\mathcal{A}$ 同构于 $\mathbb{K}$ 上的一个矩阵环。由此得到的 H 的表示称为型为 λ 的薛定谔表示，并且是覆盖 λ 的 H 的唯一不可约表示。这些事实使我们能够在本文采用的方法与 A. Prasad [28]等人采用的方法之间进行转换。

3.2. 引理。代数 A 具有以下性质：

(a) $b_0 = 1_{\mathcal{A}}$ 是单位元。(b) 每个 b_v 都是单位，其逆元为 $(b_v)^{-1} = b_{-v}$。(c) $b_w^{-1} b_v b_w = \lambda(\omega(v, w)) b_v$。(d) A 的中心为 $\mathbf{Z}(A) = \mathbb{K}1_{\mathcal{A}}$。

证明。简单计算即可。(d) 由 (c) 以及 $\lambda \circ \omega$ 的非退化性可得。 □

3.3. 命题（参见 [39, 定理 1。3]）。辛代数 A 同构于 $n \times n$ 上的矩阵代数 $\mathbb{K}$，其中 $n^2 = |V|$。

证明。设 $L \leqslant V$ 是一个拉格朗日子模，即满足 $L^\perp = L$ 的子模。（注意，任何满足 $L \subseteq L^\perp$ 的极大子模都是拉格朗日子模。）根据 $|V| = |L|^2$ 引理 2.2，令

$$e := \frac{1}{|L|} \sum_{x \in L} b_x.$$

那么，对 $x \in L$ 和 $e^2 = e$，$eb_x = b_x e = e$ $t \notin L$。我们有

$$\begin{aligned} eb_t e &= \frac{1}{|L|^2} \sum_{x,y \in L} b_x b_t b_y \\ &= \frac{1}{|L|^2} b_t \sum_{x,y \in L} \lambda(\omega(x,t)) b_x b_y && \text{(Lemma 3.2(c))} \\ &= \frac{1}{|L|^2} b_t \sum_{z,x \in L} \lambda(\omega(x,t)) b_z = 0, \end{aligned}$$

其中，最后一个等号成立，是因为 $x \mapsto \lambda(\omega(x, t))$ 是 L 上的非平凡特征，适用于 $t \notin L$。

现在令 T 为 V 中 L 的一组陪集代表元，即 $V = \dot{\bigcup}_{t \in T}(L + t)$，并构成元素集合

$$e_{st} := b_s^{-1} e b_t, \quad s, t \in T.$$

From 由上述可知 $e_{st} e_{qr} = \delta_{tq} e_{sr}$。此外，利用 引理 3.2(c)，我们得到 t

$$\sum_{t \in T} e_{tt} = \sum_{t \in T} \frac{1}{|L|} \sum_{x \in L} b_t^{-1} b_x b_t = \frac{1}{|L|} \sum_{x \in L} \sum_{t \in T} \lambda(\omega(x,t)) b_x = b_0 = 1_{\mathcal{A}}.$$

（这里我们利用了 $t \mapsto \lambda(\omega(x, t))$ 是 V/L 上的非平凡特征这一点，适用于 $x \neq 0$。）因此，对 s 和 $t \in T$，元素 e_{st} 构成一组完整的矩阵单位，其 $\mathbb{K}$-张成空间是一个在 $\mathbb{K}$ [24, 17 上的 $|T| \times |T|$ 矩阵环。4, 17.5]。由于对于某个 $\mu(s, v) \in \mathbb{K}$ 以及满足 $L + s + v = L + t$ 的 $t \in T$，有 $e_{ss} b_v = \mu(s, v) b_s^{-1} e b_t = \mu(s, v) e_{st}$，我们看出 $b_v = \sum_s e_{ss} b_v$ 属于 e_{st} 的 $\mathbb{K}$-张成空间，因此这些矩阵单位张成 $\mathcal{A}$。由于 $|V| = |L||T| = |T|^2$，命题得证。

□

3.4. 注记。最后一个结果及其证明在以下情形中仍然成立：$\mathbb{K}$ 是一个环，$|V|$ 在 $\mathbb{K}$ 中可逆，且存在一个本原特征 λ：$R \to \mathbb{K}^*$。

由于$\mathcal{A}$ 是一个矩阵环，它具有迹函数 tr: $\mathcal{A} \to \mathbb{K}$。我们需要求出典范基上的迹。

3.5. 引理。 $\operatorname{tr} b_v = n\delta_{v,0}$，其中 $n = \sqrt{|V|}$。

证明。 $\operatorname{tr} b_0 = n$ 显然，因为 $b_0 = 1_{\mathcal{A}}$。对于 $v \neq 0$，存在 $w \in V$使得 $\lambda(\omega(v,w)) \neq 1$。因此 $\operatorname{tr} b_v = 0$ 对于 $v \neq 0$ 可由 引理 3.2(c)得出。 □

4. 韦伊表示

$\mathrm{Sp}_R(V,\omega) = \mathrm{Sp}(V)$ 在 $\mathcal{A}$ 上有一个自然作用，即

$$\left(\sum_{v\in V} c_v b_v\right)^g = \sum_{v\in V} c_v b_{vg} \quad (c_v \in \mathbb{K}).$$

韦伊表示的通常构造如下：由于 $\mathcal{A} \cong \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$，对于任意 $g \in \mathrm{Sp}(V)$，存在一个可逆元素 $P(g) \in \mathcal{A}$（在相差一个标量的意义下唯一），使得对所有 $v \in V$， $b_{vg} = b_v^{P(g)}$成立。我们可以将 P: $\mathrm{Sp}(V) \to \mathcal{A}^* \cong \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ 视为射影表示，并且可以证明它能够提升为真正的表示。

本文采用一种更具构造性的处理方法，这种方法本质上源自 H. N. Ward [39, 命题 2。1], 他考虑了 R 是有限域的情形。同样的思路也适用于我们更一般的情形。我们使用 B_g 中引入的引理 2.4所给出的形式。

4.1. 定理。 对于 $g \in \mathrm{Sp}(V)$,

$$P(g) = \sum_{x\in V(1-g)} \lambda(\tfrac{1}{2}B_g(x,x)) \cdot b_x \in \mathcal{A} \tag{2}$$

可逆，并且有$(b_v)^{P(g)} = b_{vg}$对所有 $v \in V$ 都成立。对于 $g, h \in \mathrm{Sp}(V)$，有$P(g)P(h) = c(g,h)P(gh)$其中

$$c(g,h) = \sum_{x\in V(1-g)\cap V(1-h)} \lambda\left(\tfrac{1}{2}(B_g(x,x) + B_h(x,x))\right).$$

证明。 设 $v \in V$。那么

$$b_v \cdot b_v^{-g} = b_v \cdot b_{-vg} = \lambda(\tfrac{1}{2}\omega(v,-vg)) \cdot b_{v-vg} = \lambda(\tfrac{1}{2}B_g(x,x)) \cdot b_x$$

对于 $x = v(1-g)$。这表明

$$P(g) = \frac{1}{|\mathbf{C}_V(g)|}\sum_{v\in V} b_v b_v^{-g}. \tag{3}$$

由此可得

$$\begin{aligned} b_w \cdot P(g) \cdot b_w^{-g} &= \frac{1}{|\mathbf{C}_V(g)|}\sum_{v\in V} \lambda(\tfrac{1}{2}\omega(w,v))\, b_{w+v} \left(\lambda(\tfrac{1}{2}\omega(w,v))b_{w+v}\right)^{-g} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{C}_V(g)|}\sum_{v\in V} b_{w+v}b_{w+v}^{-g} = P(g) \end{aligned}$$

因此 $b_w \cdot P(g)P(g^{-1}) = P(g)P(g^{-1}) \cdot b_w$ 对所有 $w \in V$ 均成立。因此，$P(g)P(g^{-1}) \in \mathbf{Z}(\mathcal{A}) = \mathbb{K}b_0$。因此，要证明 $P(g)$ 可逆，只需证明 $P(g)P(g^{-1})$ 中 b_0 的系数不为零。

更一般地，对于 $g, h \in \mathrm{Sp}(V)$，令 $c(g, h)$ 为 b_0 在 $P(g)P(h)$ 中的系数。那么

$$\begin{aligned} c(g,h) &= \sum_{x \in V(1-g) \cap V(1-h)} \lambda(\tfrac{1}{2}B_g(x,x))\lambda(\tfrac{1}{2}B_h(-x,-x))\lambda(\tfrac{1}{2}\omega(x,-x)) \\ &= \sum_{x \in V(1-g) \cap V(1-h)} \lambda\left(\tfrac{1}{2}(B_g(x,x) + B_h(x,x))\right). \end{aligned}$$

对于 $h = g^{-1}$，等式 $v(1-g) = -vg(1-g^{-1})$ 给出 $V(1-g) = V(1-g^{-1})$，并且对所有 $x \in V(1-g)$，都有 $B_{g^{-1}}(x, x) = -B_g(x, x)$。因此 $c(g, g^{-1}) = |V(1-g)| \neq 0$，且 $P(g)$ 可逆。

又由于 $P(g)P(h)P(gh)^{-1} \in \mathbf{Z}(\mathcal{A}) = \mathbb{K}b_0$，且 b_0 在 $P(gh)$ 中的系数为 1，我们看到 $P(g)P(h) = c(g, h)P(gh)$，正如所述。证明完毕。 □

尽管这一点众所周知，即使在如此一般的情形下 [7, 19, 28]，，我们仍在此给出一个简单的证明，说明 P 可以转化为真正的表示。我们给出证明，是因为与此同时还定义了“典范韦伊表示”。

4.2. 引理。设

$$T = \frac{1}{\sqrt{|V|}} \sum_{v \in V} b_v.$$

则对所有 $g \in G$，$T^2 = 1_{\mathcal{A}}$、迹 $T = 1$ 和 $TP(g) = P(g)T$。

证明。$T^2 = 1_{\mathcal{A}}$ 可由在 $\mathcal{A}$ 中的直接计算得到；或者由 $T = \left(1/\sqrt{|V|}\right) P(-\mathrm{id}_V)$ 和定理 4.1 得到。对于迹，使用引理 3.5。最后，$T^{P(g)} = T$ 由 $(b_v)^{P(g)} = b_{vg}$ 显然成立。 □

由命题 3.3，A 是一个矩阵环。设 M 是一个简单 A-模，因此 $M \cong \mathbb{K}^{\sqrt{|V|}}$。设 $E_\pm$ 是 T 在 M 中对应特征值 ± 1 的特征子空间。于是 $M = E_+ \oplus E_-$。当 $c \in \mathrm{A}$ 中心化 T 时，c 将 $E_\pm$ 映入自身。特别地，对于所有 $g \in \mathrm{Sp}(V)$，$E_\pm$ 在 $P(g)$ 作用下保持不变。

4.3. 定理。设 T、M 和 $E_\pm$ 如上。则对于任意 $g \in \mathrm{Sp}(V)$，存在唯一的 $W(g) \in A^*$，使得

(a) $(b_v)^{W(g)} = b_{vg}$ 对所有 $v \in V$ 成立，

且(b) $\det W(g)|_{E_+} = \det W(g)|_{E_-}$。

此外，对于所有 $g, h \in \mathrm{Sp}(V)$，$W(gh) = W(g)W(h)$。

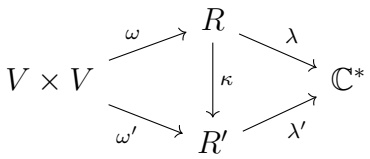
证明。设 $d_\pm = \dim_{\mathbb{K}} E_\pm$。则 $d_+ - d_- = \mathrm{tr}\ T = 1$。对于 $c \in \mathcal{A}^*$ 且满足 $cT = Tc$ 的情形，考虑 $\eta(c) := \det{}^{c|_{E_+}} \cdot (\det{}^{c|_{E_-}})^{-1}$。对于标量 μ，有 $\eta(\mu c) = \mu^{d_+ - d_-}\eta(c) = \mu\eta(c)$。由此可得 $\eta(\eta(c)^{-1}c) = 1$，且这是使 η 等于 1 的 c 的唯一标量倍数。

设 $P(g)$ 如定理 4.1 所述。则 $W(g) := \eta(P(g))^{-1}P(g)$ 是 A^* 中满足 (a) 和 (b) 的唯一元素。由于 $\eta\Big(W(g)W(h)\Big) = \eta(W(g))\ \eta(W(h)) = 1$，因此必有 $W(g)W(h) = W(gh)$。 □

我们将与 ω, λ相关联的$W = W_{\omega,\lambda}$ （典范）**韦伊表示**称为.....（注意， V和 R 在 ω和 λ中是隐含的。）由于 $\mathcal{A} \cong \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(M) \cong \mathrm{M}_{\sqrt{|V|}}(\mathbb{K})$，我们可以将 $W\colon \mathrm{Sp}(V) \to \mathcal{A}^* \cong \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(M)$视为通常意义下的表示。 W 的特征$\psi = \psi_{\omega,\lambda}$ 称为（**典范**）**韦伊特征**。

本文旨在为$\psi_{\omega,\lambda}(g)$找出一个公式。下一条注记的要点是，假设 $R = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$并不失一般性。（若我们像 [7,9, 28]中那样研究 ψ 分解为不可约特征的情形，则情况会有所不同。）

4.4. 注记。 由于 $\lambda(R) \subseteq \mathbb{C}^*$ 是一个阶为 m （记作 m ）的有限循环子群，我们可以写成 $\lambda = \lambda' \circ \kappa$，其中 $\kappa\colon R \to R' := \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 是一个满射群同态，而 λ' 是$(R', +)$的忠实线性特征。我们得到以下交换图：



一般而言， κ 不是环同态，因为核 λ 不包含R的任何非零理想，但复合形式 $\omega' = \kappa\circ \omega$ 是双加性的，因此是 R'-双线性的，因为 $R' = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$。因此$(V, R', \omega', \lambda')$ 满足基本设定 2.1。辛代数仅取决于双线性形式（双特征） $\lambda \circ \omega\colon V \times V \to \mathbb{C}^*$。显然，

$$\mathrm{Sp}_R(V, \omega) \subseteq \mathrm{Sp}_{R'}(V, \omega') = \mathrm{Sp}_{\mathbb{Z}}(V, \lambda \circ \omega).$$

对于 $g \in \mathrm{Sp}_R(V, \omega)$，我们有$W_{\omega',\lambda'}(g) = W_{\omega,\ \lambda}(g)$。这一点很容易证明：首先注意到， P 中定义的定理 4.1 具有类似的结论。

5. 韦伊特征：简单性质

在本节及下一节中，我们假设基本设定 2.1，并令 $W\colon \mathrm{Sp}(V) \to \mathcal{A}$ 为与数据相关联的典范韦伊表示(V, R, ω, λ)，且 $\psi = \mathrm{tr}\ W$为其特征。

在下一个结果中， $E_\pm$ 如前定理 4.3中所定义。我们也简记 -1为$\mathrm{Sp}(V)$ 中将 v 映为 $-v$的中心对合。

5.1. 命题。 设 ψ_+ 和 ψ_- 分别是 W 在 E_+ 和 E_-上的特征。那么

$$\psi(-1) = (-1)^{\frac{\sqrt{|V|}-1}{2}},$$
$$\psi_+(g) = \frac{\psi(g) + \psi(-1)\psi(-g)}{2} \quad \textit{and} \qquad \psi_-(g) = \frac{\psi(g) - \psi(-1)\psi(-g)}{2}.$$

证明。我们使用定理 4.3 的证明中的记号：由该证明可得$W(-1) = (\det T_{|E_+})(\det T_{|E_-})^{-1} \cdot T = (-1)^{d_-} T$。因此 $\psi(-1) = (-1)^{d_-} \operatorname{tr} T = (-1)^{d_-}$。由 $d_+ + d_- = \dim M = \sqrt{|V|}$和 $d_+ - d_- = \operatorname{tr} T = 1$可得 $d_- = (\sqrt{|V|} - 1)/2$。

M到 $E_\pm$的投影由 $e_\pm = (1 \pm T)/2 = (1 \pm \psi(-1)W(-1))$给出。由此可得其他公式。 □

利用 Ward 给出的、与 W等价的射影表示的具体公式，我们得到 ψ的卷积公式：

5.2. 命题。设 $g, h \in \mathrm{Sp}(V)$。则

$$\psi(gh) = \frac{\psi(g)\psi(h)}{\sqrt{|V|}} \sum_{x \in V(1-g) \cap V(1-h)} \lambda\left(\tfrac{1}{2}(B_g(x,x) + B_h(x,x))\right).$$

证明。设 $P(g)$如定理 4.1 中所定义。则对于某个 $\mu(g) \in \mathbb{K}$，有 $W(g) = \mu(g)P(g)$（事实上，我们已在定理 4.3 的证明中计算出 $\mu(g)$）；取迹可知，必有 $\psi(g) = \mu(g)\sqrt{|V|}$。由 $W(gh) = W(g)W(h)$以及 $P(g)P(h) = c(g,h)P(gh)$可得

$$\frac{\psi(gh)}{\sqrt{|V|}} = \frac{\psi(g)}{\sqrt{|V|}} \frac{\psi(h)}{\sqrt{|V|}} c(g,h).$$

根据 $c(g,h)$ 在 定理 4.1中的取值，结论得证。 □

为求完整起见，我们给出以下结果的一个简单证明，尽管该结果众所周知 [18, 19, 28]。

5.3. 命题。我们有

$$|\psi(g)|^2 = |\mathrm{Ker}(g-1)| = |\mathbf{C}_V(g)| \quad \textit{for all } g \in \mathrm{Sp}(V).$$

证明。线性映射 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 将 a 映射到 $a^{W(g)}$，其迹为

$$\operatorname{tr} W(g)^{-1} \operatorname{tr} W(g) = |\psi(g)|^2,$$

从将一组矩阵单位用作$\mathcal{A}$的基时即可看出。另一方面，$\{ b_v \mid v \in V \}$ 是$\mathcal{A}$的一个基，且 $b_v^{W(g)} = b_{vg}$。结论得证。 □

5.4. 命题。

(a) 特征 $g \mapsto \det W(g)$ 的阶整除 λ 的阶。(b) 设 $g \in \mathrm{Sp}(V)$ 的阶与 $|V|$ 互素。

那么 $\psi(g)$ 是有理的。

证明。迄今为止的结果在域 $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(\lambda)$ 上均成立，该域由λ的取值生成。因此，$\operatorname{tr} W(g)$、$\det W(g)$ 和 $\det W(g)_{|E_\pm} \in \mathbb{K}$（其中 $E_\pm = \mathrm{Ker}(I \mp T)$ 如定理 4.3 前所定义）。这已经表明 $\det W(g)_{|E_+}$ 的阶整除 2 o(λ)。由于 $\det W(g) = (\det W(g)_{|E_+})^2$,，故 (a) 得证。

现在假设 $\gcd(\mathrm{o}(g), |V|) = 1$。$W(g)$ 的特征值属于域 $\mathbb{L}$，该域是将 g 次本原单位根添加到 $\mathbb{Q}$ 后得到的，因此 $\operatorname{tr} W(g) \in \mathbb{L}$。由于 $\gcd(\mathrm{o}(g), |V|) = 1$，由第 204] 页的推论可知 $\mathbb{K} \cap \mathbb{L} = \mathbb{Q}$ [25,。因此，$\psi(g) = \operatorname{tr} W(g) \in \mathbb{Q}$，如所声称。 □

（a）的另一种证明方法是证明 $\mathrm{Sp}(V)$ 由阶整除 λ 的阶的元素生成（由于 λ 是本原的， λ 的阶与 R 的特征一致）。事实上，除了某些例外，$\mathrm{Sp}(V)$ 似乎是完美群，因此 $\mathrm{Sp}(V)$ 要么没有非平凡线性特征，要么只有阶为 3 的线性特征。（例如，当 $V = (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^2$ 或 $V = (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$, 时，辛群 $\mathrm{Sp}(V)$ 不是完美群。）W. Klingenberg [22, 的定理 3] 推论证明了：当 $V \cong R^{2n}$ 且 R 是满足 $|R/\mathrm{J}(R)| > 3$ 的局部环时，$\mathrm{Sp}_R(V)$ 是完美群。他的证明可以扩展到 $|R/\mathrm{J}(R)| = 3$ 且 $n > 1$ 的情形。

下一个结果，加上 $\psi(g)^2 = |\mathbf{C}_V(g)|$ 和 $\psi(g)$ 是有理数这一事实，使我们能够对 2 的幂阶元素归纳地计算 $\psi(g)$。我们只需要考虑 $g^2 = 1$ 这一情形，它也可以直接证明。

5.5. 命题。 设 $g \in \mathrm{Sp}(V)$ 的阶为 2^k。那么

$$\psi(g) \equiv (\psi_{\langle g^2\rangle}, 1_{\langle g^2\rangle})_{\langle g^2\rangle} \mod 4.$$

（这里，$(\alpha, \beta)_H = (1/|H|)\sum_{h\in H} \alpha(h)\beta(h)$ 表示有限群 H 上类函数的通常内积，而 1_H 是 H 的平凡特征。）

命题的证明 命题 5.5。 $W(g)$ 的特征值是 2^k次单位根。由于 $W(g)$作为矩阵可在 $\mathbb{Q}(\lambda)$ 上实现，单位根 ε 和 $\varepsilon^{-1} = \varepsilon$ 作为 $W(g)$ 中的特征值具有相同的重数；除了 $\varepsilon = \pm 1$之外， ε 和 $-\varepsilon$ 也具有相同的重数。因此

$$\psi(g) = \operatorname{tr} W(g) = m_1 + m_{-1} \quad \text{and} \quad \det W(g) = (-1)^{m_{-1}},$$

其中 $m_{\pm 1}$ 是特征值 ± 1的重数。根据命题 5.4 (a)，有$\det W(g) = 1$，因此 m_{-1}必须为偶数。于是

$$\psi(g) = m_1 - m_{-1} \equiv m_1 + m_{-1} \mod 4.$$

但是， $m_1 + m_{-1}$ 是 $W(g^2)$ 的特征值 1 的重数。这是平凡特征在 $\langle g^2\rangle$ 的限制特征标 $\psi_{\langle g^2\rangle}$ 中作为组成成分的重数。根据特征标理论的正交关系，结论得证。 □

5.6. 推论。 设 $t \in \mathrm{Sp}(V)$ 为一个对合，并令 $c = \sqrt{|\mathbf{C}_V(t)|}$, $d = \sqrt{|V(1-t)|}$。则 c和 d 为正整数，并且

$$\psi(t) = (-1)^{\frac{d-1}{2}} c.$$

证明。 根据 命题 5.3 和 命题 5.4， $\psi(t) = \pm c \in \mathbb{Q}$。根据 命题 5.5 及$k = 1$，可知 $\psi(t) \equiv \psi(1) = cd$ 模 4，从而得到结论。 □

5.7. 例子。 设 $g \in \mathrm{Sp}(V)$ 是满足 $g^2 = -1$ 的一个元素。（此类元素的韦伊表示编码了离散傅里叶变换。）根据命题 5.5，有 $\psi(g) \equiv (\psi(1) + \psi(-1))/2$ 模 4。由此可得，若 $\psi(1) \equiv 1$, 3 模 8，则 $\psi(g) = 1$；若 $\psi(1) \equiv 5$, 7 模 8，则 $\psi(g) = -1$；更简洁地说， $\psi(g) = \left(\frac{-2}{\psi}\right)$（雅可比符号）。

6. 奇数阶元素上的值

我们沿用上一节中引入的记号，尤其是命题 5.1中的记号。下一个证明的思路取自 Isaacs 的论文 [19, 定理 5.3]。

6.1. 命题。对于任意奇数阶的 $g \in \mathrm{Sp}(V)$，

$$\psi(-g) = \psi(-1) \quad and \quad \psi_+(g) - \psi_-(g) = 1.$$

证明。回顾一下，$\psi_\pm$ 是 W 在 $E_\pm$上的特征。由命题 5.1 中的公式可得，$\psi_+(g) - \psi_-(g) = \psi(-1)\psi(-g)$ 对所有 $g \in \mathrm{Sp}(V)$都成立。由于 $\psi(-1) = \pm 1$，命题的两个断言可由彼此推出。

设 $g \in \mathrm{Sp}(V)$ 为奇数阶。则 $C_V(-g) = \mathrm{Ker}(1+g) = 0$。由命题 5.3 可得 $|\psi_+(g) - \psi_-(g)| = |\psi(-g)| = 1$。设 $U \leqslant \mathrm{Sp}(V)$ 是一个奇数阶子群，并令 $(\cdot,\cdot)_U$ 表示 U 上类函数的通常内积。考虑虚特征标 $\psi_+ - \psi_-$。那么

$$(\psi_+ - \psi_-, \psi_+ - \psi_-)_U = \frac{1}{|U|} \sum_{g \in U} |\psi_+(g) - \psi_-(g)|^2 = 1$$

因此 $\pm(\psi_+ - \psi_-)_U \in \mathrm{Irr}\, U$。由于 $\psi_+(1) - \psi_-(1) = 1$，可知 $\mu := (\psi_+ - \psi_-)_U$ 是 U 的线性特征。取行列式得 $\det(\psi_+)_U = \mu \det(\psi_-)_U$，因此根据典范韦伊特征标 ψ 的定义，$\mu = 1_U$。这表明对所有奇数阶的 g，均有 $1 = (\psi_+ - \psi_-)(g)$，如所述。 □

接下来的结果是引言中定理 A 的第二部分。

6.2. 推论。设 $g \in \mathrm{Sp}(V)$ 的阶为奇数。则

$$\psi(g) = \frac{1}{\sqrt{|V|}} \sum_{v \in V} \lambda\left(\tfrac{1}{2}\omega(v, vg)\right).$$

证明。由命题 5.2 应用于 $g = (-1)(-g)$所得的卷积公式，我们有

$$\psi(g) = \frac{\psi(-1)\psi(-g)}{\sqrt{|V|}} \sum_{x \in V(1-(-1)) \cap V(1-(-g))} \lambda\left(\tfrac{1}{2}(B_{-1}(x,x) + B_{-g}(x,x))\right).$$

由命题 6.1，$\psi(-1)\psi(-g) = 1$。由引理 2.5（或直接计算），对于所有 $x \in V(1-(-1)) = 2V = V$，$B_{-1}(x,x) = 0$。由于 g 的阶为奇数，$\mathrm{Ker}(1+g) = \{0\}$，因此$V(1-(-g)) = V(1+g) = V$。对于 $x = v(1+g)$，我们有

$$B_{-g}(x,x) = \omega(v, v(1+g)) = \omega(v, vg).$$

因此结论得证。 □

我们以一段题外话结束本节，并证明我们对典范韦伊表示 W 的定义与 Isaacs 的定义 [19, (5.2)]等价。这也为 W提供了一种更具表示论特征的刻画。

6.3. 注记。 设 π 为整除 $|V|$的素数集合， G 为任意一个通过辛自同构作用于 V的群（因此定义了一个同态 $G \to \mathrm{Sp}(V)$）。那么，典范韦伊表示在 G 上的限制是唯一的群同态 $W\colon G \to \mathcal{A}^*$，满足以下条件：

(a) $W(g)^{-1}aW(g) = a^g$对所有 $a \in \mathcal{A}$， $g \in G$均成立。(b) 特征 $g \mapsto \det W(g)$ 的阶是一个 π-数。(c) 对任意 π-子群 U，平凡特征 1_U 是特征 ψ_U 中以奇重数出现的唯一组成成分。

证明。 典范韦伊表示具备所有这些性质： (b) 由命题 5.4 (a)得出。根据 命题 6.1，有 $(\psi_+ - \psi_-)_U = 1_U$ 对任意奇数阶子群 U成立，因此 $\psi_U = (\psi_+ - \psi_-)_U + 2(\psi_-)_U = 1_U + 2(\psi_-)_U$。因此 (c) 对奇数阶子群成立，其中包括 π-子群。

$\widetilde{\ }$还需证明这些性质能够唯一确定 W。假设 W 是另一个满足这些条件的$\widetilde{\ }$同态。由于 $\mathrm{Z}(\mathrm{A}) = \mathbb{K}1_{\mathcal{A}}$，由条件 (a) 可得 $W(g) = \mu(g)W(g)$，其中 $\mu\colon G \to \mathbb{K}^*$是一个线性特征。由于 $\det \widetilde{W}(g) = \mu(g)^{\psi(1)} \det W(g)$ 和 $\det W(g)$ 的阶均为 a π-数，且 $\psi(1) = \sqrt{|V|}$ 也是一个 π-数，因此 $\mathrm{o}(\mu)$ 是一个 π-数。令 U 为一个 π-子群。由于 1_U 在 ψ_U 中以奇$\widetilde{\ }$重数出现， μ_U 在 $(\mu\psi)_U$ 中也以奇重数出现。由条件 (c)，对 W 而言，我们必须有 $\mu_U = 1_U$。现在我们已经证明 $\mathrm{o}(\mu)$ 是一个 π-数，但 μ 在任意 π-$\widetilde{\ }$子群上的限制都是平凡的。因此，正如所声称的， $\mu = 1$ 和 $W = W$。 □

7. 主理想环上的双线性形式

这是 为证明主要结果（定理 C而作准备的若干节中的第一节).

本节中， R 表示一个主理想环 （PIR），即一个含幺交换环，其中每个理想都是主理想。我们不 假设 R 是整环：例如，这些结果对 $R = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$也成立。下一命题中的思想摘自 P.-Y. Gaillard 的一篇未发表笔记 [10]。

7.1. 命题。 设 R是一个主理想环，且 $B\colon U \times W \to R$是一个双线性形式，其中 U、W是 R-模。那么 $B(U,W) := \{\, B(u,w) \mid u \in U,\, w \in W \}$是一个理想，并且如果$B(U,W) = RB(u,w)$，那么

$$U = Ru + {}^{B}w \quad \text{and} \quad W = Rw + u^{B}.$$

当 B 非退化时，这些和是直和。

证明。 令$\mathcal{I}$为所有形如 $RB(x,y)$的理想所组成的集合，并令 $RB(u,w)$在$\mathcal{I}$中极大。由于 $B(U,w)$是一个理想，且 R是主理想环，因此 $B(U,w) \in \mathcal{I}$，从而 $B(U,w) =$

$RB(u,w)$，由极大性可知。令 $x \in U$。于是，对于某个 $r \in R$，有 $B(x,w) = rB(u,w)$，从而 $x - ru \in {}^B w$。这表明 $U = Ru + {}^B w$。对另一侧作同样的论证可得 $B(u,W) = RB(u,w)$，且 $W = Rw + u^B$。当 B 非退化时，$Ru \cap {}^B w \subseteq {}^B(Rw + u^B) = {}^B W = \{0\}$，因此 $U = Ru \oplus {}^B w$。同理，$U^B = \{0\}$蕴含 $Rw \cap u^B = 0$。

还需证明 $B({}^B w, u^B) \subseteq RB(u, w)$。令 $x \in {}^B w$ 和 $y \in u^B$。那么，对于 $r, s \in R$，有$B(ru + sx, w + y) = rB(u, w) + sB(x, y)$。由此可知，该理想

$$I = \{\, rB(u,w) + sB(x,y) \mid r, s \in R \,\}$$

是 $\mathcal{I}$ 的一个成员。根据极大性，$I = RB(u, w)$，因此 $B(x, y) \in RB(u, w)$。因此$B(U, W) = RB(u, w)$ 是一个理想。 □

7.2. 推论。 设 R 是一个主理想环，$B\colon U \times W \to R$ 是一个非退化双线性形式，其中模 U 和 W 均为有限生成模。那么存在元素 $u_1, \dots, u_r \in U$ 和 $w_1, \dots, w_r \in W$，使得

$$U = Ru_1 \oplus \cdots \oplus Ru_r \quad \text{and} \quad W = Rw_1 \oplus \cdots \oplus Rw_r,$$

以及 $B(u_i, w_j) = \delta_{ij} d_i$，其中 $Rd_1 \geqslant Rd_2 \geqslant \cdots \geqslant Rd_r$。

证明。 根据 命题 7.1，$B(U, W) = RB(u_1, w_1)$ 对于某些 $u_1 \in U$ 和 $w_1 \in W$，并且我们有 $U = Ru_1 \oplus {}^B w_1$ 和 $W = Rw_1 \oplus u_1^B$。接着，我们可以对B重复这一论证：${}^B w_1 \times u_1^B \to R$这个过程会终止，因为 U 和 W 是诺特的。 □

7.3. 推论。 设 R 是一个局部主理想环，且2在 R 中可逆。设 $Q\colon U \times U \to R$ 是模 U 上的对称双线性型。那么存在 $x \in U$，使得 $Q(U,U) = RQ(x,x)$。

证明。 R 的任意理想都具有形式 $R\pi^n$，其中 $R\pi$ 是 R的极大理想。特别地，R 的理想构成一条链。

根据 命题 7.1，存在 u，$w \in U$，使得 $Q(U, U) = RQ(u, w)$。由于

$$Q(u,w) = \frac{1}{2}\Big(Q(u+w, u+w) - Q(u,u) - Q(w,w)\Big),$$

由于 R 的理想构成一条链，因此对于至少一个$x \in \{u + w, u, w\}$，有 $Q(U,U) = RQ(x, x)$。 □

7.4. 推论。 设 R 是一个奇数阶有限主理想环，且 $Q\colon U \times U \to R$ 是模 U上的对称双线性型。则存在 $u \in U$，使得 $Q(U,U) = RQ(u,u)$。

证明。任意有限环都是有限多个有限局部环的直积，记为$R = R_1 \times \cdots \times R_\ell$ [1, 定理 8.7]。相应地，我们有正交幂等元分解 $1 = e_1 + \cdots + e_\ell$，其中 $R_i = Re_i$ 且 $e_i = 1_{R_i}$。于是 $U = e_1U \oplus \cdots \oplus e_\ell U$且 $Q(e_iU, e_jU) = 0$，对 $i \neq j$成立，并且 $Q(e_iU, e_iU) \subseteq Re_i = R_i$。根据推论 7.3，对每个 i，都存在一个元素 $u_i = e_iu_i \in e_iU$，使得 $Q(e_iU, e_iU) = RQ(u_i, u_i)$。于是$u = u_1 + \cdots + u_\ell$具有所需性质。 □

由通常的格拉姆-施密特过程可知，对于 U 有限生成的情形， U/U^Q可以写成循环模的正交和。

如证明所示，当 R 是有限多个局部主理想环的直积，且2 可逆时，上一推论成立。另一方面，推论 7.4对任意主理想环并不成立，即使2 可逆也不成立。例如，多项式环 $R = \mathbb{F}_3[x]$ 上的形式 $U = R^2$ 其格拉姆矩阵为$\left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 1 & x-1 \end{smallmatrix}\right)$ 不能写成正交和 [12, 例 6.19(ii)]。

对于辛形式，我们有如下结论：

7.5. 推论。设 R 是一个主理想环， $\omega\colon V \times V \to R$ 是有限生成 R-模 V上的交错非退化形式。那么 $V = Re_1 \oplus \cdots \oplus Re_m \oplus Rf_1 \oplus \cdots \oplus Rf_m$，其中 $\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij} d_i$ 且 $\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0$ 对所有 i、 j均成立，并且 $Rd_1 \supseteq Rd_2 \supseteq \cdots \supseteq Rd_m$。

证明。 与推论 7.2的证明中一样，先取 $u_1 = e_1$ 和 $w_1 = f_1$ 使得$\omega(V, V) = R\omega(e_1, f_1)$。于是由 命题 7.1， $V = Re_1 \oplus {}^{\perp}f_1 = Rf_1 \oplus e_1^{\perp}$。由于 ω是交错的，我们有 $e_1 \in e_1^{\perp}$和 $f_1 \in f_1^{\perp} = {}^{\perp}f_1$。因此在下一步中，我们可以选取$u_2 = f_1$ 和 $w_2 = e_1$。证毕。 □

8. 自同构的符号

设 U 是一个有限阿贝尔群。 U 的每个自同构 g 都会置换 U，我们将这一置换的符号记作 $\operatorname{sign}(g) = \operatorname{sign}_U(g)$。因此，我们有一个自然的特征 $\operatorname{sign} : \text{自同构群}(U) \to \{\pm 1\}$。许多人研究过这个特征，特别是 P. Cartier [6] 、A. Brunyate 和 P. L. Clark [5]。我们陈述并证明后文所需的结果。

前两个结果实际上并不需要 U 是阿贝尔群，因此我们使用乘法记号（于是 $-u$ 变成 u^{-1}，依此类推）。这些结果归功于 Cartier [6,第 38–39] 页。

8.1. 引理。 设 π 是有限群 U 的一个置换，且与取逆元运算可交换：对所有 $u \in U$，都有$(u^{-1})\pi = (u\pi)^{-1}$。选取 $P \subseteq U$，使得 $U = P \cup P^{-1} \cup I$（不交并），其中 $I = \{\, u \in U \mid u^2 = 1 \,\}$。那么

$$\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^{|P\pi \cap P^{-1}|} \operatorname{sign}(\pi_I).$$

证明。 关于 π 的假设推出 π 将 I 映射到自身。令 τ 为所有换位 $(u,\ u^{-1})$ 的乘积，其中 $u \in P\pi \cap P^{-1}$。那么 $\pi\tau$将 P、 P^{-1}和 I映射到自身，并且 P与 P^{-1}上的置换满足关系 $(u^{-1})\ (\pi\tau) = (u\pi\tau)^{-1}$。因此， $\pi\tau$ 在 $P \cup P^{-1}$ 上的限制是偶置换。结论得证。 □

8.2. 引理。 设 U 是一个奇数阶有限群， $N \trianglelefteq U$ 是一个正规子群。设 $\alpha \in \operatorname{Aut}(U)$ 是一个将 N 映射到自身的自同构。那么 $\operatorname{sign}(\alpha) = \operatorname{sign}(\alpha_{U/N}) \operatorname{sign}(\alpha_N)$。

证明。取 $P_1 \subseteq N$ 和 $P_2 \subseteq U/N$，使得 $N = P_1 \dot\cup P_1^{-1} \dot\cup \{1\}$ 且 $U/N = P_2 \dot\cup P_2^{-1} \dot\cup \{1_{U/N}\}$。令 $\hat{} P_2 = \{ u \in U \mid Nu \in P_2 \}$ 为 P_2 在 U 中的原像。那么对于 $P = \hat{} P_2 \cup P_1$，有 $U = P \dot\cup P^{-1} \dot\cup \{1\}$。由引理 8.1，得

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}(\alpha) = (-1)^{|P\alpha\cap P^{-1}|} &= (-1)^{|\hat{P}_2\alpha\cap\hat{P}_2^{-1}|}(-1)^{|P_1\alpha\cap P_1^{-1}|}\\ &= (-1)^{|N||P_2\alpha_{U/N}\cap P_2^{-1}|}\operatorname{sign}(\alpha_N)\\ &= (-1)^{|P_2\alpha_{U/N}\cap P_2^{-1}|}\operatorname{sign}(\alpha_N)\\ &= \operatorname{sign}(\alpha_{U/N})\operatorname{sign}(\alpha_N).\end{aligned}$$

□

设 R 是有限环，$a \in R$ 可逆。我们用 $\operatorname{sign}_R(a)$ 表示由 $r \mapsto ra$ 定义的 R 上置换的符号。

8.3. 引理 (Zolotarev、Lerch、Frobenius)。

(a) 设 $\mathbb{F}$ 是奇数阶有限域，且 $0 \neq a \in \mathbb{F}$。那么 $\operatorname{sign}_{\mathbb{F}}(a) = 1$ 当且仅当 a 是 $\mathbb{F}$ 中的平方。(b) 设 $R = \mathbb{Z}/m$，其中 m 为奇数，且 $a \in R^*$。那么 $\operatorname{sign}_R(a) = \left(\frac{a}{m}\right)$（雅可比符号）。

证明。$\mathbb{F}^*$ 是偶数阶循环群，而平方构成唯一的指数为 2 的子群。当 $\mathbb{F}^* = \langle a \rangle$ 时，$\operatorname{sign}_{\mathbb{F}}(a) = -1$，因为相应的置换构成一个长度为 $|\mathbb{F}^*| = |\mathbb{F}| - 1$ 的长循环。这就证明了第一部分。

第二部分可以利用 引理 8.2 以及对 m的归纳法来证明：对于 $m = k\ell$且 $k, \ell > 1$，有 $R/kR \cong \mathbb{Z}/k$ 且 $kR \cong \mathbb{Z}/\ell$。对于 m 素数，结论由第一部分得出。

□

我们看到，引理 8.1 将初等数论中的 Gauss-Schering 引理推广了。下一个结果由 I. Schur [30, 第 151] 页针对 $R = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$证明，由 P. Cartier [6, 第 41] 页针对有限域证明，并由 Brunyate 和 Clark [5, 定理 61]作为一个更一般结果的一部分证明。

8.4. 引理。设 R 是一个有限奇数阶交换环，且 $g \in$ 自同构群$_R(R^d) = \mathrm{GL}(d, R)$。那么

$$\operatorname{sign}_{R^d}(g) = \operatorname{sign}_R(\det(g)).$$

（在左侧，我们将 g 视为 R^d的一个置换；在右侧，将 $\det(g)$ 视为 R的一个置换。）

证明。假设 $R = R_1 \times R_2$ 是两个环的直积。设 $1 = e_1 + e_2$ 为相应的幂等元分解。任意 R-模 U 都是直和 $U = Ue_1 \oplus Ue_2$。我们看到 $\det(g) = \det(ge_1) + \det(ge_2)$，其中 $\det(ge_i) \in R_i = Re_i$ 是 ge_i 作为 $\mathrm{GL}(d, R_i)$ 中元素的行列式。此外，$\det(g)$ 在 R_i 上的作用方式与 $\det(ge_i) = \det(g)e_i$ 相同，而 g 在 $R_i^d = R^d e_i$ 上的作用方式与 ge_i 相同。根据引理 8.2，只需证明引理对 R_1 和 R_2 成立。

由于任意有限环 R 都是有限多个局部环 [1, 的直积（定理 8.7],），我们可以假设 R 是局部环。于是，R 上任意一个可逆矩阵的每一列都包含

至少一个单位。由通常的高斯消元过程可知，可逆矩阵是若干个与单位矩阵恰有一个元素不同的矩阵的乘积（当该元素位于主对角线上时，它必须是 R 的一个单位）。对于这类矩阵，结论由 引理 8.2 立即得出。 □

在本节余下部分，我们再次假设 R 是一个有限交换环，带有本原加性特征 λ: $R \to \mathbb{C}^*$，且 2 在其中可逆。

8.5. 定义。 设 B, C: $U \times W \to R$ 是有限 R-模 U 和 W 上的两个非退化双线性形式。则存在唯一的 $\alpha \in$ 自同构群$_R(U)$，使得对所有 $u \in U, w \in W$，都有 $B(u, w) = C(u\alpha, w)$。我们定义 $\mathrm{sign}(B/C) := \mathrm{sign}(\alpha)$。

前述定义中 α 的存在性源于 B 和 C 都诱导出同构 $U \to$ 同态集(W, R) (引理 2.2)。

我们只需要考虑 $U = W$ 的情形。这个定义或许可以由下面的引理及其证明来理解:

8.6. 引理。 设 R 是一个有限域，B, C: $U \times U \to R$ 是两个双线性形式。那么 $\mathrm{sign}(B/C) = 1$ 当且仅当 $\mathrm{disc}(B) = \mathrm{disc}(C)$。

证明。设 S 是相对于 U的某个基的标准内积，且 G_B和 G_C 分别是 B 和 C 相对于该基的格拉姆矩阵。若将 G_B视为线性映射的矩阵，则显然对所有 u、$w \in U$，都有 $B(u, w) = S(uG_B, w)$。类似地，$C(u, w) = S(uG_C, w)$。因此，$B(u, w) = C(uG_B(G_C)^{-1}, w)$，于是 $\mathrm{sign}(C/B) = \mathrm{sign}(G_B G_C^{-1}) = \mathrm{sign}_R(\det G_B)\,\mathrm{sign}_R(\det G_C)^{-1}$，由引理 8.4 得证。由引理 8.3，$\mathrm{sign}_R$是 R上的二次特征。根据定义，B 的判别式是 R中模平方的 $\det G_B$。结论得证。 □

8.7. 引理。设 B: $U \times U \to R$ 是有限模U上的非退化双线性形式。假设 $U = X \oplus Y$满足 $B(Y, X) = 0$。若 Q_X 和 Q_Y 分别是 X 和 Y 上的非退化形式，则 $\mathrm{sign}((Q_X \oplus Q_Y)/B) = \mathrm{sign}(Q_X/B_X)\mathrm{sign}(Q_Y/B_{|Y})$。

当然，$Q_X \oplus Q_Y$是定义在 $X \oplus Y$上的形式

$$(Q_X \oplus Q_Y)(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = Q_X(x_1, x_2) + Q_Y(y_1, y_2)$$

对于 x_1、$x_2 \in X$、y_1、$y_2 \in Y$。当 Q_X和 Q_Y是对称的时，$Q_X \oplus Q_Y$也是对称的。

引理 引理 *8.7*的证明。 由于 $B(Y, X) = 0$ 且 B 是非退化的，限制 $B_{|X}$ 和$B_{|Y}$ 也都是非退化的。因此存在 $\sigma \in$ 自同构群(X) 和 $\tau \in$ 自同构群(Y) 使得

$$Q_X(x_1, x_2) = B(x_1\sigma, x_2) \quad \text{and} \quad Q_Y(y_1, y_2) = B(y_1\tau, y_2).$$

由于 $B_{|Y}$ 是非退化的，对于每个 $x \in X$，都存在一个元素 $x\kappa \in Y$，使得对所有 $y \in Y$，$B(x, y) = B(x\kappa, y)$。映射 κ: $X \to Y$是一个同态。定义

$\alpha\colon U \to U$，由 $(x+y)\alpha = x\sigma - x\sigma\kappa + y\tau$ 给出。于是

$$\begin{aligned} B((x_1+y_1)\alpha, x_2+y_2) &= B(x_1\sigma - x_1\sigma\kappa + y_1\tau, x_2+y_2) \\ &= B(x_1\sigma, x_2) + B(x_1\sigma, y_2) - B(x_1\sigma\kappa, y_2) + B(y_1\tau, y_2) \\ &= Q_X(x_1, x_2) + Q_Y(y_1, y_2) \\ &= (Q_X \oplus Q_Y)(x_1+y_1, x_2+y_2). \end{aligned}$$

因此符号$((Q_X \oplus Q_Y)/B) =$符号(α)。现在$\alpha_{|Y} = \tau$，并且 α 在 $U/Y \cong X$ 上是 σ。结论由引理 8.2得出。 □

9. 阿贝尔群上的二次高斯和

如基本设定 2.1中所述，令 R 为一个奇数阶有限交换环（等价地，2 在 R中可逆），并令 $\lambda\colon R \to \mathbb{C}^*$ 为一个线性特征，使得核 λ 不包含 R的任何非零理想。令 X 为一个有限 R-模，并令 $q\colon X \times X \to R$ 为一个对称的非退化双线性形式。我们将定义与高斯和 $\gamma_\lambda(q)$对应于 λ 和(X, q) 的（广义二次）

$$\gamma_\lambda(q) := \gamma_\lambda(X, q) := \frac{1}{\sqrt{|X|}} \sum_{x \in X} \lambda(\tfrac{1}{2}q(x,x)).$$

（因子$_{1\ 2}$ 的存在是为了确保与有限域 [36, 42] 上的魏尔指标一致。否则，这个因子并不十分重要。）

根据 引理 2.2，形式 $\lambda \circ q\colon X \times X \to \mathbb{C}^*$ 也是非退化的，而且显然，$\gamma_\lambda(q)$ 仅取决于 $\lambda\circ q$。

高斯和具有以下众所周知的性质：

9.1. 引理。

(a) $\gamma_\lambda(q_1 \oplus q_2) = \gamma_\lambda(q_1)\gamma_\lambda(q_2)$，对于定义在 X_i $(i = 1, 2)$ 上的形式 q_i，以及它们在 $X_1 \oplus X_2$ 上的直和形式 $q_1 \oplus q_2$。*(b)* 当 $U \leqslant X$ 是各向同性的（即 $U \subseteq U^q$）时，q 在 U^q/U 上诱导出非退化形式 $\tilde{q}$，且 $\gamma_\lambda(q) = \gamma_\lambda(\tilde{q})$。*(c)* 当 (X, q) 含有拉格朗日子模 L（即 $L^q = L$）时，$\gamma_\lambda(q) = 1$。*(d)* $|\gamma_\lambda(q)| = 1$。

证明。 命题 (a) 是一个常规计算。在 (b) 的情形下，我们有 $(U^q)^q = U$，因此 $\tilde{q}(s_1 + U,\ s_2 + U) := q(s_1,\ s_2)$ (其中 $s_1,\ s_2 \in U^q$) 定义良好且非退化。记

$$X = \bigcup_{t \in T}^{\cdot}(t + U^q) \quad \text{and} \quad U^q = \bigcup_{s \in S}^{\cdot}(s + U).$$

我们假设 $0 \in T$。对于 $t \in T$、$s \in S$ 和 $u \in U$，

$$q(t+s+u, t+s+u) = q(t,t) + q(s,s) + 2q(t,s) + 2q(t,u),$$

因为 $q(u,\ u) = q(s,\ u) = 0$。因此

$$\begin{aligned}\gamma_\lambda(q) &= \frac{1}{\sqrt{|X|}} \sum_{t\in T}\sum_{s\in S}\sum_{u\in U} \lambda\Big(\tfrac{1}{2}q(t,t) + \tfrac{1}{2}q(s,s) + q(t,s) + q(t,u)\Big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{|X|}} \sum_{t\in T} \lambda\Big(\tfrac{1}{2}q(t,t)\Big) \sum_{s\in S} \lambda\Big(\tfrac{1}{2}q(s,s)\Big)\, \lambda\Big(q(t,s)\Big) \sum_{u\in U} \lambda\Big(q(t,u)\Big)\\ &= \frac{|U|}{\sqrt{|X|}} \sum_{s\in S} \lambda\Big(\tfrac{1}{2}q(s,s)\Big) = \gamma_\lambda(\widetilde{q})\,.\end{aligned}$$

这里，第三个等式由 $\sum_{u\in U}\lambda(q(t,u)) = 0$ 推出，除非 $t \in U^q$，此时求和为 $|U|$，且 $t = 0$ 根据我们的假设成立。最后一个等式由 $|U||U^q| = |X|$(引理 2.2) 得出。这表明 (b)成立，而 (c) 是一个特例。

我们有

$$|\gamma_\lambda(q)|^2 = \gamma_\lambda(q)\overline{\gamma_\lambda(q)} = \gamma_\lambda(q)\gamma_\lambda(-q) = \gamma_\lambda(q \oplus (-q)).$$

但是，$(X \oplus X, q \oplus (-q))$ 有一个拉格朗日子模，即 $L = \{(x,x) \mid x \in X\}$。因此(d)由 (c)得出。 □

顺便指出，(a) 和 (b) 将 γ_λ 的计算化归为以下情形：(X,q) 是各向异性且不可分解的。在这种情况下，$F := R/\mathrm{ann}_R(X)$ 是一个域，且$\dim_F(X) \leqslant 1$。

令 $q\colon\ X\times X \to R$ 与之前一样是对称且非退化的。沿用 I. Schur [30],参见 [29], ，我们考虑 $X \times X$ 矩阵

$$F_\lambda(q) = \frac{1}{\sqrt{|X|}}\Big(\lambda(\tfrac{1}{2}q(x,y))\Big)_{x,y\in X}.$$

显然，$\mathrm{tr}(F_\lambda(q)) = \gamma_\lambda(q)$。以下结果的证明是对 Schur 论证的直接推广。

9.2. 命题。

(a) $\gamma_\lambda(q)^2 = (-1)^{\left(\frac{|X|-1}{2}\right)} = \left(\dfrac{-1}{|X|}\right)$.

(b) $\gamma_\lambda(q) = (-1)^{\left(\frac{|X|^2-1}{8}\right)} \det(F_\lambda(q)) = \left(\dfrac{2}{|X|}\right) \det(F_\lambda(q))$.

（再次说明，$(\cdot\, n)$ 表示雅可比符号。）

证明。 记 $F := F_\lambda(q)$ 和 $T = F^2$。那么， T 的 $t_{x,\ y}$ 项为

$$\begin{aligned}t_{x,y} &= \frac{1}{|X|}\sum_{u\in X} \lambda(\tfrac{1}{2}q(x,u))\lambda(\tfrac{1}{2}q(u,y))\\ &= \frac{1}{|X|}\sum_{u\in X} \lambda(\tfrac{1}{2}q(x+y,u)) = \delta_{x+y,0}.\end{aligned}$$

由于 $|X|$ 是奇数，我们可以对 X 的元素进行排列，使得 F^2 具有如下形式

$$F^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可得 $F^4 = I$。

由此可知，F 的特征值来自集合 $\{\pm 1, \pm i\}$。令 m_k 为特征值 i^k $(k = 0, 1, 2, 3)$ 的重数。因此

$$G := \gamma_\lambda(q) = (m_0 - m_2) + (m_1 - m_3)i \quad \text{and} \quad \det(F) = i^{2m_2 + m_1 - m_3}.$$

由 $|G| = 1$ 可得 $G \in \{\pm 1, \pm i\}$。考察 F^k $(k = 0, 1, 2, 3)$ 的迹，可得以下四个等式

$$\sum m_k = |X|, \qquad \sum m_k i^k = G,$$
$$\sum m_k (-1)^k = 1, \qquad \sum m_k i^{-k} = \overline{G}.$$

（回想一下，我们已经在上文计算出了 F^2。）因此

$$4m_0 = |X| + 1 + G + \overline{G} \quad \text{and} \quad 4m_2 = |X| + 1 - (G + \overline{G}).$$

由于右边必须能被 4 和 $G \in \{\pm 1, \pm i\}$整除，因此可得$G \in \{\pm 1\}$ 当 $|X| \equiv 1$ 模 4 时，以及 $G \in \{\pm i\}$ 当 $|X| \equiv -1$ 模 4时。这就得到了 (a)。

为证明 (b)，先假设 $|X| \equiv 1$ 模 4，因此 $G = \pm 1$。于是我们有

$$m_2 = \frac{|X| + 1 - 2G}{4} \quad \text{and} \quad \det(F) = (-1)^{m_2}.$$

由此可得 $G = \det(F)$ 当 $|X| \equiv 1$ 模 8时成立，而 $G = -\det(F)$ 当 $|X| \equiv 5$模 8时成立。因此 (b) 对 $|X| \equiv 1$ 模 4成立。

现在假设 $|X| \equiv -1$ 模 4，因此 $G = (m_1 - m_3)i = \pm i$。在这种情况下，我们有

$$\det(F) = (-1)^{m_2} i^{m_1 - m_3} = (-1)^{m_2}(m_1 - m_3)i = (-1)^{m_2} G.$$

由于现在

$$m_2 = \frac{|X| + 1}{4},$$

我们得到 m_2 当 $|X| \equiv -1$ 模 8时为偶数，而 m_2 当 $|X| \equiv 3$ 模 8时为奇数，并且 (b) 在这种情况下也成立。 □

9.3. 推论。 设对称非退化形式 $q_1, q_2 \colon X \times X \to R$ 由 $q_2(x, w) = q_1(x\sigma, w)$关联，其中 $\sigma \colon X \to X$。那么 $\gamma_\lambda(q_2) =$ 符号 $(\sigma)\gamma_\lambda(q_1)$。

当 $X = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^d$ 时，这一结果可追溯至 H. Weber [41]（参见 C. Jordan [20]）。我们的证明本质上与 Schur 的证明相同 [30]。

证明。注意，σ 必然可逆，因此会诱导出 X 的一个置换。我们有 $F_\lambda(q_2) = P(\sigma)F_\lambda(q_1)$，其中 $P(\sigma)$ 是对应于 σ 的置换矩阵。因此 $\det(F_\lambda(q_2)) = \operatorname{sign}(\sigma)\det(F_\lambda(q_1))$。由命题 9.2(b) 可知，商 $\gamma_\lambda(q_i)/\det(F_\lambda(q_i))$ 仅取决于 $|X|$，而不取决于形式 q_i 本身。结论由此得出。 □

9.4. 注记。 这里应当提到，矩阵 $F_\lambda(q)$ 可以解释为某个 $g \in \mathrm{Sp}(V)$ 在韦伊表示的一个显式矩阵形式下的像（相差一个标量）。具体而言，设 $V = X \oplus X$ 带有辛形式 $\omega((x,y),(z,w)) = \frac{1}{2}(q(x,w) - q(y,z))$，并设 $g \in \mathrm{Sp}(V)$ 由 $(x,y)g = (-y,x)$ 定义。

设 $L = X \oplus 0$ 和 $T = 0 \oplus X$（拉格朗日子模）。在 命题 3.3 的证明中，我们构造了辛代数 $\mathcal{A}$ 与 $\mathbf{M}_X(\mathbb{K})$ 之间的一个显式同构，该同构与 L 和 T 相关。通过（繁琐的）计算可以证明，在此同构下，$P(g)$ 对应于 $|X|\gamma_\lambda(-q)F_\lambda(q)$，其中 $P(g)$ 如 定理 4.1 中所述。

众所周知，对于 $X = R = \mathbb{Z}/m$ 和 $q(a,\ b) = ab$，矩阵 $F_\lambda(q)$ 表示离散傅里叶变换 [3, 16]。（通常定义时不带因子 $\frac{1}{2}$，这样也涵盖了 m 为偶数的情形。）

10. 辛自同构的分解

假设 基本设定 2.1。（本节的结果可以推广到更一般的情形，但为使记号简洁，我们不考虑这种更一般的情形。）回顾一下，在 引理 2.4中，我们定义了一个非退化双线性形式 B_g: $V(1-g) \times V(1-g) \to R$，对任意 $g \in \mathrm{Sp}(V)$，并且该形式具有如下性质

$$B_g(x,y) - B_g(y,x) = \omega(x,y) \quad \text{for all } x,y \in V(1-g).$$

10.1. 命题。 *[38, 定理 1.1.1–2] [40, 定理 3.5]* 设 X 是V的一个子模，且 B: $X \times X \to R$ 是一个非退化双线性形式，满足

$$B(x,y) - B(y,x) = \omega(x,y) \quad \textit{for all } x,y \in X. \tag{4}$$

于是存在唯一的 $g \in \mathrm{Sp}(V)$，使得 $X = V(1-g)$ 且 $B = B_g$。

证明。定义 α: $V \to X$，要求对所有 $x \in X$ 和 $v \in V$，有 $\omega(v,x) = B(v\alpha, x)$。这是可行的，因为非退化型 B 诱导了一个从 X 到 $\mathrm{Hom}_R(X,R)$ 的同构（引理 2.2）。于是 α 是 R-线性的，且 $\operatorname{Ker}\alpha = X^\perp$ 和 $V\alpha \subseteq X$，因此 $V\alpha = X$。

令 $g = 1_V - \alpha$。这是满足对所有 $v \in V$ 和 $x \in X$，有 $\omega(v,x) = B(v(1-g),\ x)$ 的唯一映射 g: $V \to V$。接下来需证明 g 保持形式 ω:

$$\begin{aligned}\omega(vg,wg) &= \omega(v,w) - \omega(v,w\alpha) - \omega(v\alpha,w) + \omega(v\alpha,w\alpha)\\ &= \omega(v,w) - B(v\alpha,w\alpha) + B(w\alpha,v\alpha) + \omega(v\alpha,w\alpha)\\ &= \omega(v,w),\end{aligned}$$

其中最后一个等式由（4）得出。因此 $g \in \mathrm{Sp}(V)$ 如所声称。 □

10.2. **引理。** 设 $h, k \in \mathrm{Sp}(V)$ 并假设 $V(1-h) \cap V(1-k) = \{0\}$。该 n

$$V(1-hk) = V(1-h) \oplus V(1-k) \quad \textit{and} \quad B_{hk}(V(1-k), V(1-h)) = 0.$$

证明。由于 $v(1-hk) = v(1-h)+vh(1-k)$，我们总有 $V(1-hk) \subseteq V(1-h)+V(1-k)$。由 $V(1-h) \cap V(1-k) = \{0\}$ 可得

$$\begin{aligned} V = \{0\}^\perp &= (V(1-h) \cap V(1-k))^\perp \\ &= (V(1-h))^\perp + (V(1-k))^\perp && \text{(Lemma 2.2(c))} \\ &= \mathbf{C}_V(h) + \mathbf{C}_V(k), && \text{(Lemma 2.3)} \end{aligned}$$

因此也有

$$V = Vh^{-1} = \mathbf{C}_V(h) + \mathbf{C}_V(k)h^{-1}.$$

由此可得

$$\begin{aligned} V(1-h) &= \mathbf{C}_V(k)(1-h) = \mathbf{C}_V(k)h^{-1}(1-h) \\ \text{and} \quad V(1-k) &= \mathbf{C}_V(h)(1-k). \end{aligned}$$

但对于 $d \in \mathbf{C}_V(k)h^{-1}$，有 $d(1-h) = d - dh = d - dhk = d(1-hk) \in V(1-hk)$，这说明 $V(1-h) \subseteq V(1-hk)$。类似地，对于 $c \in C_V(h)$，有 $c(1-k) = c - ck = c - chk = c(1-hk)$，因此 $V(1-k) \subseteq V(1-hk)$。

对于 $x \in V(1-h)$ 和 $y = c(1-k) \in V(1-k)$，其中 $c \in \mathbf{C}_V(h)$，我们有

$$B_{hk}(c(1-k), x) = B_{hk}(c(1-hk), x) = \omega(c, x) = 0$$

作为 $\mathbf{C}_V(h) \perp V$（{v6)。 □

10.3. 命题。设 $g \in Sp(V)$，并假设 $V(1-g) = X \oplus Y$ 满足 $B_g(Y, X) = 0$。那么存在 h，$k \in Sp(V)$，使得 $X = V(1-h)$、$Y = V(1-k)$ 且 $B_h = (B_g)|_X, B_k = (B_g)|_Y$。对于这些 h 和 k，我们有 $g = hk$。

证明。由于 $B_g(Y, X) = 0$，限制 $(B_g)|_X$ 和 $(B_g)|_Y$ 是非退化的。根据命题 10.1，存在 h 和 $k \in \mathrm{Sp}(V)$，使得 $V(1-h) = X$ 且 $V(1-k) = Y$，并且对于所有 $x \in X$，$y \in Y$ 和 $v \in V$，有 $\omega(v, x) = B_g(v(1-h), x)$，以及 $\omega(v, y) = B_g(v(1-k), y)$。

设 $\alpha = 1-h$ 和 $\beta = 1-k$。我们要证明 $g = hk$，这等价于 $1-g = \alpha + \beta - \alpha\beta$。令 $x \in X$, $v \in V$。利用 $V\beta = Y$ 和 $B_g(Y, X) = 0$，我们得到

$$B_g(v(\alpha+\beta-\alpha\beta), x) = B_g(v\alpha, x) = \omega(v, x) = B_g(v(1-g), x)\,.$$

接下来，令 $y \in Y$, $v \in V$。则

$$\begin{aligned} B_g(v(\alpha+\beta-\alpha\beta), y) &= B_g(v\alpha, y) + B_g(v(1-\alpha)\beta, y) \\ &= B_g(v\alpha, y) + \omega(v(1-\alpha), y). \end{aligned}$$

根据 引理 2.4，我们有 $B_g(v\alpha, y) - B_g(y, v\alpha) = \omega(v\alpha, y)$。结合 $B_g(y, v\alpha) \in B_g(Y, X) = 0$，我们得到

$$\begin{aligned} B_g(v(\alpha+\beta+\alpha\beta), y) &= \omega(v\alpha, y) + \omega(v(1-\alpha), y) \\ &= \omega(v, y) = B_g(v(1-g), y). \end{aligned}$$

我们现在已经证明了

$$B_g(v(\alpha+\beta-\alpha\beta), z) = B_g(v(1-g), z)$$

对所有的 $z \in X \cup Y$ 和 $v \in V$。由于 B_g 在 $V(1-g) = X \oplus Y$ 上是非退化的，因此可得 $1 - g = \alpha + \beta - \alpha\beta$，从而有 $g = hk$。 □

11. 主要定理的证明

本节旨在证明定理 C和定理 B。以下始终假设基本设定2.1。我们将需要推论6.2（定理 A）的以下表述：

11.1. 推论。当 $g \in \mathrm{Sp}(V)$ 具有奇数阶时，则

$$\psi(g) = \sqrt{|\mathbf{C}_V(g)|}\gamma_\lambda(-Q_g),$$

其中 $Q_g(x, y) = (1/2)\big(B_g(x, y) + B_g(y, x)\big) = B_g(x^{\frac{1+g}{2}}, y)$ 如 引理 2.5所示。

证明。由于 $\omega(v, vg) = -\omega(v, v(1-g)) = -B_g(x, x) = -Q_g(x, x)$ 对于 $x = v(1-g)$，这只是对 推论 6.2中公式的重新表述。 □

11.2. 定理。假设 基本设定 2.1，且 R 是一个主理想环。令$g \in \mathrm{Sp}(V)$ 并令 $B_g\colon V(1-g) \times V(1-g) \to R$ 为 引理 2.4中的形式。则存在一个非退化的对称型 $q\colon V(1-g) \times V(1-g) \to R$。对于任意这样的形式 q，我们有

$$\psi(g) = \sqrt{|C_V(g)|}\ \mathrm{sign}(q/B_g)\ \gamma_\lambda(-q), \tag{5}$$

其中，$\psi = \psi_{\omega,\ \lambda}$ 是与 ω, λ 相关联的韦伊特征。

证明。我们首先注意到，公式 (5) 右侧与 q 的选取无关：如果 $\tilde{q}$ 是 $V(1-g)$ 上另一个非退化对称形式，那么 $\mathrm{sign}(\tilde{q}/B_g) = \mathrm{sign}(q/B_g)\ \mathrm{sign}(\tilde{q}/q)$，因此根据推论 9.3，$\mathrm{sign}(\tilde{q}/B_g)\gamma_\lambda(-\tilde{q}) = \mathrm{sign}(q/B_g)\gamma_\lambda(-q)$。

我们将同时证明，存在一个非退化对称型[2] q，定义在$V(1-g)$上，其符号为 $\mathrm{sign}(q/B_g) = 1$，且 $\psi(g) = \sqrt{|\mathbf{C}_V(g)|}\gamma_\lambda(-q)$。（根据第一段，这

[2]当然，很容易直接证明存在非退化对称的 R-双线性形式$U = V(1-g)$ (例如，根据推论 7.2)。

就证明了该定理。）证明将对 $|V(1-g)|$ 使用归纳法。假设 g 是一个反例，且 $|V(1-g)|$ 的阶尽可能小，并记 $U = V(1-g)$。

首先，假设 $U = V(1-g)$ 是循环 R-模，即 $U = Rx$ 对于某个 $x \in U$。由于对所有 $r, s \in R$，$B_g(rx, sx) = B_g(sx, rx)$，因此形式 B_g 本身是对称且非退化的。于是我们可以选取 $q = B_g = Q_g$。显然，$\mathrm{sign}(q/B_g) = 1$。由于 $Rx \subseteq x^\perp = (V(1-g))^\perp = \mathsf{C}_V(g)$，可得 $(g-1)^2 = 0$，因此 g 的阶整除 $|Rx|$。特别地，g 是奇数阶。因此，由推论 11.1 可得 $\psi(g) = \sqrt{|\mathsf{C}_V(g)|}\gamma_\lambda(-Q_g)$，本定理在此情形下得证。因此，在反例中，$U$ 不可能是循环 R-模。

接下来，假设 $U = V(1-g)$ 有子模 X, Y，使得

$$U = X \oplus Y \quad \text{with} \quad B_g(Y, X) = 0 \quad \text{and} \quad X \neq 0 \neq Y. \tag{6}$$

于是由命题 10.3，我们可以将 $g = hk$ 写作 $V(1-h) = X$, $V(1-k) = Y$ 以及 $B_h = (B_g)|_X$, $B_k = (B_g)|_Y$。由 U 的极小性，存在定义在 X 和 Y 上的非退化对称形式 q_h 和 q_k，使得 $\mathrm{sign}(q_h/B_h) = \mathrm{sign}(q_k/B_k) = 1$，且 (5) 对 h, k 成立。令 $q = q_h \oplus q_k$。由引理 8.7，$\mathrm{sign}(q/B_g) = 1$。于是

$$\begin{aligned}
\frac{\psi(g)}{\sqrt{|V|}} &= \frac{\psi(h)}{\sqrt{|V|}} \cdot \frac{\psi(k)}{\sqrt{|V|}} && \text{(命题 5.2)} \\
&= \frac{\gamma_\lambda(-q_h)}{\sqrt{|V(1-h)|}} \cdot \frac{\gamma_\lambda(-q_k)}{\sqrt{|V(1-k)|}} && \text{(归纳法)} \\
&= \frac{\gamma_\lambda(-q)}{\sqrt{|V(1-g)|}}. && \text{(引理 9.1 (a))}
\end{aligned}$$

因此，g 不是反例，矛盾。因此，不存在如 (6) 中所示的分解。

设 $Q_g(x, y) = (1/2)\big(B_g(x, y) + B_g(y, x)\big)$。由命题 7.1，$I := B_g(U, U)$ 和 $Q_g(U, U)$ 是 R 的理想。我们断言 $Q_g(U, U) < I$。由推论 7.4，存在 $x \in U$，使得 $Q_g(U, U) = RQ_g(x, x)$。若 $Q_g(U, U) = I$，则 $B_g(U, U) = I = RQ_g(x, x) = RB_g(x, x)$，而命题 7.1 推出 $U = Rx \oplus {}^{B_g}x$。根据定义，$B_g({}^{B_g}x, R_1 x) = 0$。当 ${}^{B_g}x \neq 0$ 时，我们就得到如 (6) 中所示的分解，这与上一段矛盾。当 ${}^{B_g}x = 0$ 时，$U = Rx$ 是循环的，而 g 根本不是反例。因此，在 $|U|$ 取极小值的反例中，必有 $Q_g(U, U) < I$。（当 R 是域时，此处可得 g 是对合（引理 2.5），并可像 Ward 的证明 [40] 那样，借助推论 5.6 完成证明。这里我们需要多费一点功夫。）

由于 $Q_g(U, U) < I = B_g(U, U)$，我们有 Q_g 是退化的。根据引理 2.5，$\mathrm{Ker}(g+1) \neq \{0\}$，因此 g 的阶为偶数。因此，$\langle g \rangle$ 含有唯一的对合 t。显然，$\mathsf{C}_V(g) \leqslant \mathsf{C}_V(t)$，于是（根据引理 2.3）$V(1-t) \leqslant V(1-g) = U$。我们有分解 $V = \mathsf{C}_V(t) \oplus V(1-t)$，它关于 ω 正交。与 U 取交得到 $U = (U \cap \mathsf{C}_V(t)) \oplus V(1-t)$。由于 $gt = tg$，我们有 $Ut = U$，并且对于 $x, y \in U$，有 $B_g(xt, yt) = B_g(x, y)$。因此，$B_g(U \cap \mathsf{C}_V(t)\ V(1-t)) = 0$。由分解 (6) 不存在可知，$U \cap \mathsf{C}_V(t) = \{0\}$，因此 $U = V(1-t)$ 且 $\mathsf{C}_V(t) = \mathsf{C}_V(g)$。

记 $t = g^k$。那么对所有 $u \in U$，都有 $ut = -u$。存在 $u \neq 0$ 属于 $U^{Q_g} = \mathrm{Ker}(g+1)$，即 $ug = -u$。于是 $-u = ut = ug^k = (-1)^k u$，所以 k 为奇数。因此 $g = th$，其 h 的阶为奇数。

现在我们应用 命题 5.2 于 $g = th$ 并得出

$$\begin{aligned}\psi(g) &= \frac{\psi(t)\psi(h)}{\sqrt{|V|}} \sum_{u \in V(1-t) \cap V(1-h)} \lambda(\tfrac{1}{2}(B_t(u,u) + B_h(u,u))) \\ &= \frac{\psi(t)\psi(h)}{\sqrt{|V|}} \sqrt{|V(1-h)|}\gamma_\lambda(Q_h)\end{aligned}$$

由于 $V(1-h) \subseteq V(1-g) = V(1-t) = U$ 且 $B_t = 0$。由 推论 5.6 和 推论 11.1，可得

$$\begin{aligned}\psi(g) &= \frac{1}{\sqrt{|V|}} \sqrt{|\mathbf{C}_V(t)|}(-1)^{\frac{\sqrt{|U|}-1}{2}} \sqrt{|\mathbf{C}_V(h)|}\gamma_\lambda(-Q_h) \sqrt{|V(1-h)|}\gamma_\lambda(Q_h) \\ &= \sqrt{|\mathbf{C}_V(t)|}(-1)^{\frac{\sqrt{|U|}-1}{2}} = \sqrt{|\mathbf{C}_V(g)|}(-1)^{\frac{\sqrt{|U|}-1}{2}}\end{aligned}$$

为了完成证明，我们必须证明存在一个形式 q 使得 符号$(q/B_g) = 1$ 且$\gamma_\lambda(-q) = (-1)^{(\sqrt{|U|}-1)/2}$。这将由下一个引理推出；该引理也包含了证明 定理 B的主要工作：

11.3. 引理。 在 定理 *11.2*的情形下，假设 $\mathbf{C}_V(g) \cap U = 0$，其中$U = V(1-g)$。那么 $(1-g)|_U$ 可逆，且存在一个对称型 q 使得

$$\mathrm{sign}(q/B_g) = \mathrm{sign}_U(1-g) \quad \textit{and} \quad \gamma_\lambda(-q) = (-1)^{\frac{\sqrt{|U|}-1}{2}}.$$

证明。 由于 $\mathbf{C}_V(g) =$核$(1-g)$，显然 $(1-g)|_U$可逆。由于核$(1-g) = U^\perp$，我们有 $V =$核$(1-g) \oplus U$ 是关于形式 ω的正交和，因此 $\omega\colon U \times U \to R$ 是非退化的。（特别地，$|U|$ 和 $|\mathbf{C}_V(g)|$ 都是平方。）

根据推论 7.5，我们可以写成 $U = Re_1 \oplus \cdots \oplus Re_k \oplus Rf_1 \oplus \cdots \oplus Rf_k$，其中$\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij} d_i$ 且 $\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0$ 对所有 i, j都成立，并且 $Rd_1 \geqslant Rd_2 \geqslant \cdots \geqslant Rd_k$。注意，对于固定的 i 和 $r \in R$，有 $re_i = 0 \Longleftrightarrow rf_i = 0 \Longleftrightarrow rd_i = 0$。因此，我们可以通过要求 $q(e_i, e_j) = q(f_i, f_j) = \delta_{ij} d_i$ 且 $q(e_i, f_j) = 0$ 对所有 i, j都成立，在 U 上定义一个非退化对称型 q。

存在唯一的自同构群 $\alpha \in \mathrm{Aut}_R(U)$，使得 $e_i\alpha = f_i$, $f_i\alpha = -e_i$ 对所有 i都成立。对于这个 α，有 $\omega(x, y) = q(x\alpha, y)$。由于 $(1-g)|_U$ 可逆，对于 $x, y \in U$，有：

$$B_g(x,y) = \omega(x(1-g)^{-1}, y) = q(x(1-g)^{-1}\alpha, y)\,.$$

因此，符号$(q/B_g) =$符号$_U((1-g)^{-1}\alpha) =$符号$_U(1-g)$ 符号$_U(\alpha)$。

我们断言 $\mathrm{sign}_U(\alpha) = 1$。由于 $\alpha^2 = -1$，只有 $v = 0$ 被 α^2 固定。因此，α 作为 U 上的置换，其循环分解由 $(|U|-1)/4$ 个长度为 4 的循环组成。由于 $|U|$ 是一个平方，$(|U|-1)/4$ 为偶数，断言得证。由此可得 $\mathrm{sign}(q/B_g) =$sign$_U(1-g)$。

为计算 $\gamma_\lambda(-q)$，我们注意到 $(U,-q) \cong (L,-q_L) \oplus (L,-q_L)$，其中 $L = Re_1 \oplus \cdots \oplus Re_k \cong Rf_1 \oplus \cdots \oplus Rf_k$，且 q_L 是 q 在 L 上的限制。由引理 9.1(a) 和命题 9.2(a) 可得

$$\gamma_\lambda(-q) = \gamma_\lambda(-q_L)^2 = (-1)^{\frac{\sqrt{|U|}-1}{2}}.$$

现在结论得证。 □

定理 11.2 的证明（续）。我们处于这样的情形：$g = th$ 与 $t^2 = 1$ 和 h 的阶均为奇数，且 $V(1-g) = V(1-t) = U$。我们声称在此情形下，$\mathrm{sign}_U(1-g) = 1$。在 U 上，元素 t 的作用为 -1。因此，$0 < \mathrm{Ker}(1+g) = \mathrm{Ker}(1+th) \cap U = \mathrm{Ker}(1-h) \cap U$。由此可得 $V(1-h) < V(1-g) = U$。故由归纳法，定理 11.2 对 h 成立。与推论 11.1 对照，必有 $\mathrm{sign}_{V(1-h)}\left(\frac{1+h}{2}\right) = 1$。在 $U/V(1-h)$ 上，元素 $\frac{1+h}{2} = \frac{h-1}{2}+1$ 的作用为单位元。因此由引理 8.2，$\mathrm{sign}_U\left(\frac{1+h}{2}\right) = 1$。结合 $h_{|U} = -g_{|U}$，可得 $\mathrm{sign}_U\left(\frac{1-g}{2}\right) = 1$。由于 $|U|$ 是一个平方，我们有 $\mathrm{sign}_U(1/2) = 1$，从而 $\mathrm{sign}_U(1-g) = 1$，如所声称。

结合 引理 11.3，可知 g 也不是反例。由此得到最终矛盾，证明了 定理 11.2。 □

现在假设 R 如 基本设定 2.1所述，但不一定是主理想环。我不知道在这种情况下是否总能找到一个非退化对称型 $q\colon V(1-g) \times V(1-g) \to R$。（注意，我们已知存在非退化但一般不对称的形式 B_g，定义在 $V(1-g)$ 上。）因此，我们在下一个结果中假设 q 存在，该结果是引言中的定理 C：

11.4. 推论。 假设 基本设定 *2.1*。设 $g \in \mathrm{Sp}(V)$，并设 $B_g\colon V(1-g) \times V(1-g) \to R$ 为 引理 *2.4*中的形式。若 $q\colon V(1-g) \times V(1-g) \to R$ 是一个非退化对称形式，则

$$\psi(g) = \sqrt{|C_V(g)|}\ \mathrm{sign}(q/B_g)\,\gamma_\lambda(-q).$$

证明。设 m 为 λ 的阶。根据注记 4.4，我们可以将数据 (V,R,ω,λ) 替换为数据 $(V, R' = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \kappa \circ \omega, \lambda')$，其中 $\kappa\colon R \to R'$ 和 $\lambda'\colon R' \to \mathbb{C}^*$ 满足 $\lambda = \lambda' \circ \kappa$，且不改变 $\psi(g)$。形式 $\kappa \circ B_g$ 是相对于 $\kappa \circ \omega$ 属于 g 的形式。当 $q(x,y) = B_g(x\alpha, y)$ 对于 $\alpha \in \mathrm{Aut}_R(V)$ 成立时，则 $\kappa(q(x,y)) = \kappa(B_g(x\alpha,y))$ 也成立，因此 $\mathrm{sign}(\kappa \circ q/\kappa \circ B_g) = \mathrm{sign}(q/B_g)$。显然，$\gamma_\lambda(-q) = \gamma_{\lambda'}(-(\kappa \circ q))$。由于 R' 是主理想环，结论由定理 11.2 得出。 □

当我们找不到对称非退化形式 $q\colon V(1-g) \times V(1-g) \to R$ 时，总可以像上面的证明那样，将 R 替换为 $R' = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$，并找到一个取值于 q 的形式 R'，这样我们就可以计算定理 11.2中的公式。

最后，下面的推论包含 定理 B，这是 $C_V(g) = \mathrm{核}(1-g) = \{0\}$。

11.5. 推论。 令 $g \in \mathrm{Sp}(V)$ 并设 $U = V(1-g)$。假设 $\mathbf{C}_V(g) \cap U = 0$。则 $(1-g)|_U$ 可逆，且

$$\psi(g) = \sqrt{|\mathbf{C}_V(g)|}(-1)^{\frac{\sqrt{|U|}-1}{2}} \operatorname{sign}_U(1-g).$$

当 R 是一个域，或者更一般地，当 $U \cong R^{2k}$时，符号$_U(1-g)$ = 符号$_R(\det(1-g)|_U)$，由引理 8.4可知。因此，该推论推广了 Gurevich 和 Hadani 的一项结果 [15]。

推论 推论 *11.5*的证明。 不失一般性，我们可以假设 $R = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 其中 m是一个奇整数。于是，结论由定理 11.2和引理 11.3得出。 □

12. 推论与例子

我们采用基本设定 2.1。和之前一样， ψ 表示典范韦伊表示的特征。

12.1. 例子。 设 $R = \mathbb{F}_q$ 是一个有限域。那么，在 $V(1-g)$ 上满足 $\operatorname{sign}(q_g/B_g) = 1$ 的对称形式 q_g，恰好是 $V(1-g)$ 上判别式与 B_g 相同的对称形式。我们得到公式

$$\psi(g) = \sqrt{|\mathbf{C}_V(g)|}\gamma_\lambda(-q_g) = \sqrt{|\mathbf{C}_V(g)|}\,\gamma_\lambda(-1)^{\dim V(1-g)} \operatorname{sign}_{\mathbb{F}_q}(\operatorname{disc} B_g).$$

（这些本质上是 T. Thomas 得到的公式 [36, 37]。回想一下， $B_g = -\sigma_g$，其中 σ_g 如 [36, 37]所示。）

证明。 由 引理 8.6可知，符号$(q_g/B_g) = 1$ 当且仅当 判别式 q_g = 判别式 B_g。

令 disc $B_g = d(\mathbb{F}_q)^2,$，记作如此。 q_g的一种可能取法是对角形式 $\langle 1, 1, \ldots\ldots, 1, d\rangle$。于是

$$\gamma_\lambda(-q_g) = \gamma_\lambda(-1)^{\dim V(1-g)-1}\gamma_\lambda(-d) = \gamma_\lambda(-1)^{\dim V(1-g)} \operatorname{sign}_{\mathbb{F}_q}(d)$$

根据 引理 9.1和 推论 9.3。 □

下面这个观察已在 定理 11.2证明的最后一步中用过，似乎有点奇怪：

12.2. 推论。 假设 $g \in \mathrm{Sp}(V)$ 的阶为奇数。则 符号$_V(1+g) = 1$。

证明。 根据 命题 6.1， $\psi(-g) = \psi(-1) = (-1)^{\frac{\sqrt{|V|}-1}{2}}$根据 推论 11.5 或 定理 B 应用于 $-g$，我们有 $\psi(-g) = (-1)^{\frac{\sqrt{|V|}-1}{2}}$符号$_V(1+g)$。 于是得证。 □

当 $V(1-g) \subseteq \mathbf{C}_V(g)$ 时，$\operatorname{sign}_V(1+g) = 1$ 是平凡的。但我不知道如何在更一般的情形下直接证明这一点。

当 g 的阶为偶数时， $1+g$ 可能不可逆。即使 $\operatorname{Ker}(1+g) = \{0\}$，通常也有 $\operatorname{sign}_V(1+g) \neq 1$。例如， $g = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$，其中 ω 是 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2$ 上的标准辛形式（其格拉姆矩阵仍为 g），且 $m \equiv \pm 3$ 模 8。于是 $\operatorname{sign}_V(1+g) = \left(\frac{2}{m}\right) = -1$。同样的 g 也表明，推论 6.2 中的公式不适用于偶数阶的 g，即使 $\operatorname{Ker}(1+g) = \{0\}$ 也是如此。

12.3. 注记。假设 $V = V_1 \oplus V_2$ 满足 $V_1^\perp = V_2$。则 ω 在 V_1 和 V_2 上非退化。令 ψ_i 为 $\mathrm{Sp}(V_i)$ 和 $g_i \in \mathrm{Sp}(V_i)$ 的韦伊特征。则 $g = (g_1, g_2) \in \mathrm{Sp}(V)$ 通过 $(v_1 + v_2)(g_1, g_2) = v_1 g_1 + v_2 g_2$，且 $\psi(g) = \psi_1(g_1)\psi_2(g_2)$。

证明。我们有 $V(1-g) = V_1(1-g_1) \oplus V_2(1-g_2)$ 并且 $B_g = B_{g_1} \oplus B_{g_2}$，因此根据定理 11.2中的公式可知 $\psi(g) = \psi_1(g_1)\psi_2(g_2)$。 □

当然，这一点众所周知；只需再多花一点功夫，我们就能在 第 4 节证明这一注记。众所周知，研究有限环上的韦伊表示可以归约为研究有限局部环上的韦伊表示，具体如下：

12.4. 推论。有限环 R 可以写成有限局部环的直积，即 $R = R_1 \times \cdots \times R_\ell$。于是存在正交分解 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell$，其中每个 V_i 都是 R_i上的模，并且 $\mathrm{Sp}_R(V) \cong \mathrm{Sp}_{R_1}(V_1) \times \cdots \times \mathrm{Sp}_{R_\ell}(V_\ell)$。此外，$\psi = \psi_1 \times \cdots \times \psi_\ell$，其中 ψ_i 是与 $V_i, \omega\colon V_i \times V_i \to R_i$相关联的类型为 $\lambda_i := \lambda_{|R_i}$ 的韦伊特征。

证明。这是相当标准的结果。R 的乘积分解是交换环论中的一个标准结果 [1, 定理 8.7]。令 e_i 为 R_i的单位元。那么 $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$和 $1_R = e_1 + \cdots + e_\ell$。设 $V_i = e_i V$。那么 $\omega(V_i, V_j) \subseteq e_i e_j R = \delta_{ij} R_i$，因此上述 V 的分解是正交的。每个 V_i 在 $\mathrm{Sp}_R(V)$ 下不变。因此

$$\mathrm{Sp}_R(V) \ni g \mapsto g_{|V_1} \times \cdots \times g_{|V_\ell} \in \mathrm{Sp}_{R_1}(V_1) \times \cdots \times \mathrm{Sp}_{R_\ell}(V_\ell)$$

定义了一个同构。关于韦伊特征的断言由注记 12.3得出。 □

12.5. 推论。对于 $g \in \mathrm{Sp}(V)$，特征值 $\psi(g)$ 是有理数，当且仅当$|V(1-g)|$ 是一个平方。

证明。$|V(1-g)|$ 是一个平方，当且仅当 $|C_V(g)| = \psi(1)^2/|V(1-g)|$ 是一个平方。“仅当”已由命题 5.3 得出。反过来，若 $|V(1-g)|$ 是一个平方，则根据命题 9.2 (a)，对于 $V(1-g)$上的任意非退化对称型 q，$\gamma_\lambda(-q) = \pm 1$。因此 $\psi(g) \in \mathbb{Q}$。 □

当 $(V, R, \omega', \lambda')$ 是满足基本设定 2.1的另一组数据时，与这组数据相关联的韦伊特征为$\psi_{\omega, \lambda}$ 和 $\psi_{\omega', \lambda'}$。

12.6. 命题（改变 ω）。假设 $\omega'\colon V \times V \to R$ 是另一个非退化交错形式，并且 $g \in \mathrm{Sp}_R(V, \omega) \cap \mathrm{Sp}_R(V, \omega')$。那么存在 $a \in \mathrm{GL}_R(V)$，使得对所有 $v, w \in V$，都有 $\omega'(v, w) = \omega(va, w)$。对于这个 a，我们有 $ag = ga$ 且

$$\psi_{\omega', \lambda}(g) = \mathrm{sign}_{V(1-g)}(a)\, \psi_{\omega, \lambda}(g).$$

证明。 由于 ω' 和 ω 都诱导同构 $V \to$ 同态集$_R(V,R)$，因此存在某个 $a \in$GL$_R(V)$，使得对所有 $v, w \in V$，都有 $\omega'(v,w) = \omega(va, w)$。由 $g \in$ Sp$_R(V,\omega) \cap$Sp$_R(V,\omega')$，可得

$$\omega'(v,w) = \omega'(vg, wg) = \omega(vga, wg) \quad \text{and}$$
$$\omega'(v,w) = \omega(va, w) = \omega(vag, wg)$$

对所有 v、 $w \in V$，因此 $vag = vga$。特别地， $V(1-g)$ 是 a-不变的，且 sign$^{V(1-g)}(a)$ 有定义。

设 B_g 和 B'_g 分别为与 ω 和 ω' 相关联的形式。则 $B'_g(x,y) = B_g(xa, y)$。不失一般性，我们可以假设在 $V(1-g)$ 上存在一个非退化对称型 q （如有必要，将 R 替换为 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$）。于是 sign(q/B'_g) =sign(q/B_g) sign$^{V(1-g)}(a)$，结论由定理 11.2 得出。□

对于 λ：设 $R \to \mathbb{C}^*$ 为一个加性特征，且 $s \in R$，定义 λs: $R \to \mathbb{C}^*$，使得 $(\lambda s)(r) = \lambda(sr)$。当 λ 为本原时， $\lambda s = 1 \iff s = 0$，因此 R 的每个特征都具有形式 λs。当且仅当 s 是 R [17,§ 3] 中的单位时，特征 λs 也为本原。

12.7. 推论 (改变 λ)。 设 $\lambda' = \lambda s$: $R \to \mathbb{C}^*$ 是R的另一个本原特征。那么

$$\psi_{\omega,\lambda'}(g) = \mathrm{sign}_{V(1-g)}(s)\ \psi_{\omega,\lambda}(g) \quad \textit{for all} \quad g \in \mathrm{Sp}_R(V,\omega),$$

其中，符号$^{V(1-g)}(s)$ 是 $V(1-g)$ 上的置换的符号，该置换由乘以单位 s所诱导。

证明。我们有 $(\lambda s) \circ \omega = \lambda \circ (s\omega)$，其中 $(s\omega)(v,w) = s\omega(v,w) = \omega(vs, w)$，且 Sp$_R(V,\omega)$ =Sp$_R(V, s\omega)$，因此由命题 12.6 可得结论。 □

注意，$\psi_{\omega,\lambda}$ 和 $\psi_{\omega,\lambda'}$ 不一定是代数共轭（例如，当 R 是平方阶的域，或剩余域具有平方阶的局部环时）。一般而言，推论 12.7 对于 $g \in$ Sp$_{\mathbb{Z}}(V, \lambda \circ \omega)$并不成立，因为通常 Sp$_{\mathbb{Z}}(V, \lambda \circ \omega) \neq$ Sp$_{\mathbb{Z}}(V, \lambda' \circ \omega)$。（这些群同构，事实上在 Aut$_{\mathbb{Z}}(V)$ 中共轭。）另一方面，当 Ker $\lambda =$ Ker λ'时，则 Sp$_{\mathbb{Z}}(V, \lambda \circ \omega)$ =Sp$_{\mathbb{Z}}(V, \lambda' \circ \omega)$，且对于 $s \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$， $\lambda' = \lambda s = \lambda^s$ 成立；相应的韦伊特征是代数共轭。

在下文中，我们将 $\psi_\lambda := \psi_{\omega,\lambda}$ 记作 ω ，因为它将保持固定。

12.8. 推论。 假设 基本设定 *2.1*。

(a) 设 $s \in R^*$。当且仅当 s 是 $R/$*ann*$_R(V)$ 中的一个平方时， $\psi_\lambda = \psi_{\lambda s}$ 才是 *Sp*$_R(V,\omega)$ 上的特征。*(b)* 设 $g \in$ *Sp*$_R(V,\omega)$。对于所有 $s \in R^*$， $\psi_\lambda(g) = \psi_{\lambda s}(g)$ 当且仅当每个简单的 R-模在 $V(1-g)$ 的任意合成列中都以偶数重数出现。（对于局部环 R，这意味着 $V(1-g)$ 的长度为偶数。）

证明。 鉴于 推论 12.4，两个断言都容易归结为 R 是局部环的情形，因此我们作此假设。设 J 为 R 的唯一极大理想。

当 s 是 $R/\operatorname{ann}_R(V)$中的一个平方时，对于任意 R-子模 X，都有 $\operatorname{sign}_X(s) = 1$，因此 $\psi_\lambda = \psi_{\lambda s}$。

现在假设 s 不是 $R/\operatorname{ann}_R(V)$中的平方。有限局部环 R的单位群具有结构 $R^* = (R/J)^* \times (1+J)$。由于 $|R|$是奇数，$|1+J| = |J|$也为奇数，因此 $1+J$ 中的每个元素都是 $1+J$中的平方。因此，s 不是域 R/J中的平方。设 $0 < U \leqslant V$是一个极小子模。那么 $U \cong R/J$，并且我们有 $\operatorname{sign}_U(s) = -1$。由命题 10.1 可知，存在元素 $g \in \operatorname{Sp}(V)$，使得$V(1-g) = U$。（我们有 $U = Ru$，且存在非零对称形式 $U \times U \to I \subseteq R$，其中 $I = \operatorname{ann}_R(J)$。）对于这样的 g，我们有 $\psi_\lambda(g) = -\psi_{\lambda s}(g)$。这证明了 (a)。

现在固定 $g \in \operatorname{Sp}(V)$，并令 $0 = U_0 < U_1 < \cdots < U_\ell = V(1-g)$ 为 $V(1-g)$ 的一个合成列。每个合成因子都同构于唯一的简单 R-模R/J。因此，根据引理 8.2，对于任意 $s \in R^*$，都有 $\operatorname{sign}_V(1-g)(s) = [\operatorname{sign}^{R/J}(s)]^\ell$。当 $s \in R^*$ 满足 $s+J$ 不是 R/J 中的平方时，$\operatorname{sign}^{R/J}(s) = -1$。因此，由推论 12.7 可得 (b)。 □

作为另一项应用，我们重证 R. Guralnick、K. Magaard 和 P. H. Tiep[14, 定理 1.2], 的一个结果，并将其从有限域推广到有限环。我们先给出一个引理：

12.9. 引理。 设 $g \in \operatorname{Sp}_R(V, \omega)$。则 $\psi_\lambda(-g^2)$ 与本原特征标 $\lambda\colon R \to \mathbb{C}$ 无关。

证明。由推论 12.4，可假设 R 是局部的，其极大理想为 J。由推论 12.8，我们需要证明 $V(1+g^2)$ 的长度为偶数。等价地，我们可以证明 $\operatorname{Ker}(1+g^2)$ 的长度为偶数。令 $q := |R/J|$，并设 ℓ 为 $\operatorname{Ker}(1+g^2)$ 的长度。于是 $|\operatorname{Ker}(1+g^2)| = q^\ell$。对于 $v \in \operatorname{Ker}(1+g^2)$，我们有 $vg^2 = -v$。因此，除 $v = 0$ 外，任意 $v \in \operatorname{Ker}(1+g^2)$ 的 $\langle g\rangle$-轨道都含有 4 个元素。因此 $q^\ell \equiv 1$ 模 4。由此可知，当 $q \equiv 3$ 模 4 时，ℓ 为偶数，正如所要求的。假设 $q \equiv 1$ 模 4。那么 -1 是 R/J 中的一个平方，因此也是 R 中的平方，记作 $-1 = i^2$，其中 $i \in R$。我们有 $1+g^2 = (g+i)(g-i)$。对于 $v \in \operatorname{Ker}(1+g^2)$，我们可以写成

$$v = \frac{1}{2}v(1+ig) + \frac{1}{2}v(1-ig) \in \operatorname{Ker}(g+i) + \operatorname{Ker}(g-i).$$

Thus

$$\operatorname{Ker}(1+g^2) = \operatorname{Ker}(g+i) \oplus \operatorname{Ker}(g-i).$$

由引理 2.3，$\operatorname{核}(g+i) = V(g-i)^\perp$。因此

$$|\operatorname{Ker}(g+i)| = |V(g-i)^\perp| = |V|/|V(g-i)| = |\operatorname{Ker}(g-i)|,$$

因此，$\operatorname{核}(1+g^2)$ 的长度为偶数，这正是所声称的。 □

12.10. 推论。 对于 $g \in \operatorname{Sp}_R(V)$，若 $\lambda\colon R \to \mathbb{C}^*$ 为本原元，则有

$$\psi_\lambda(g)\psi_\lambda(-g) = (-1)^{\frac{\sqrt{|V|}-1}{2}}\psi_{\lambda^2}(g^2).$$

注意，$\psi_\lambda = \psi_{\lambda^2}$ 在 $\mathrm{Sp}_R(V,\omega)$ 中成立，当且仅当 2 是 R中的平方。当 R 是一个局部域，且其剩余域 R/J 的阶为 q时，2 是 R 中的平方，当且仅当 $q \equiv \pm 1$ 模 8。特别地，有限域情形的推论 12.10 是 Guralnick、Magaard 和 Tiep 的一项结果，见 [14, 定理1。2]。

证明推论 *12.10*。 我们想要应用 命题 5.2中的卷积公式来计算 $-g^2 = g\cdot(-g)$。由 $v = (1/2)\Big(v(1+g) + v(1-g)\Big)$ 可知 核$(1-g^2)$ = 核$(1-g)$ $\oplus$ 核$(1+g)$。由此可得

$$\begin{aligned} V(1-g^2) = \mathrm{Ker}(1-g^2)^\perp &= \mathrm{Ker}(1-g)^\perp \cap \mathrm{Ker}(1+g)^\perp \\ &= V(1-g)\cap V(1+g). \end{aligned}$$

接下来，对于 $x = v(1-g^2) \in V(1-g)\cap V(1+g)$，我们有

$$\begin{aligned} B_g(x,x) + B_{-g}(x,x) &= \omega(v(1+g), v(1-g^2)) + \omega(v(1-g), v(1-g^2)) \\ &= 2\omega(v, v(1-g^2)) = 2B_{g^2}(x,x). \end{aligned}$$

卷积公式给出

$$\psi_\lambda(-g^2) = \frac{\psi_\lambda(g)\psi_\lambda(-g)}{\sqrt{|V|}} \sum_{x\in V(1-g^2)} \lambda(B_{g^2}(x,x)).$$

将卷积公式应用于 ψ_{λ^2} 和 $-g^2 = -1\cdot g^2$，得到

$$\begin{aligned} \psi_{\lambda^2}(-g^2) &= \frac{\psi_{\lambda^2}(-1)\psi_{\lambda^2}(g^2)}{\sqrt{|V|}} \sum_{x\in V(1-(-1))\cap V(1-g^2)} \lambda^2\Big(\frac{1}{2}(\underbrace{B_{-1}(x,x)}_{=0} + B_{g^2}(x,x))\Big) \\ &= (-1)^{(\sqrt{|V|}-1)/2}\, \frac{\psi_{\lambda^2}(g^2)}{\sqrt{|V|}} \sum_{x\in V(1-g^2)} \lambda(B_{g^2}(x,x)). \end{aligned}$$

但根据 引理 12.9，$\psi_\lambda(-g^2) = \psi_{\lambda^2}(-g^2)$。约去两个表达式中的公因子后，即得所需结果。 □

参考文献

1. M. F. Atiyah 和 I. G. Macdonald。《交换代数导论》。Addison-Wesley，马萨诸塞州雷丁，1969年。 MR0242802，Zbl. 0175.03601（引文见第 16、18、30 页）。2. Anne-Marie Aubert 和 Tomasz Przebinda。韦尔表示的逆向工程方法。《中欧数学杂志》12，第 10 期（2014），第 1500–1585 页。doi: 10.2478/s11533-014-0428-8。 MR3224014，Zbl. 1297.22008（引文见第 4 页）。3. L. Auslander 和 R. Tolimieri。利用有限傅里叶变换进行计算属于纯数学还是应用数学？《美国数学会通报》（新系列）1，第 6 期（1979），第 847–897 页。doi: 10.1090/S0273-0979-1979-14686-X。 MR546312，Zbl. 0475.42014（引文见第 23 页）。4. Beverley Bolt、T. G. Room 和 G. E. Wall。论克利福德共线变换、变换群与相似变换群。I.《澳大利亚数学会杂志》2（1961），第 60–79 页。doi: 10.1017/S1446788700026379。 MR0125874，Zbl. 0097.01702（引文见第 4 页）。

5. Adrian Brunyate 和 Pete L. Clark。将 Zolotarev-Frobenius方法扩展至二次互反律。Ramanujan J. 37，第 1 期（2015），第 25–50 页。doi: 10.1007/s11139-014-9635-y。MR3338036，Zbl. 1395.11013（引文见第 17、18 页）。6. P. Cartier。关于勒让德-雅可比符号的一种推广。Enseign. Math. (2) 16（1970），第 31–48 页。doi: 10.5169/seals-43850。Zbl. 0195.05802（引文见第 17、18 页）。7. Gerald Cliff、David McNeilly 和 Fernando Szechtman。环上的辛群的 Weil 表示。J. London Math. Soc. (2) 62，第 2 期（2000），第 423–436 页。doi: 10.1112/S0024610700001381。MR1783635(2001i:20088)，Zbl. 1037.20044（引文见第 4、10、11 页）。8. J. Cruickshank、L. Gutiérrez Frez 和 F. Szechtman。通过抽象数据和海森堡群构造 Weil 表示：比较。J. Algebra 547（2020），第 129–161 页。doi:10.1016/j.jalgebra.2019.11.030。MR4039424，Zbl. 1456.20002（引文见第 4 页）。9. Kunal Dutta 和 Amritanshu Prasad。有限阿贝尔群与 Weil 表示的组合学。Pacific J. Math. 275，第 2 期（2015），第 295–324 页。doi: 10.2140/pjm.2015.275.295。MR3347372，Zbl. 1314.05218（引文见第 4、11 页）。10. Pierre-Yves Gaillard。PID。（未发表的笔记 pid-110807e，曾刊于作者网站，现已无法访问。）2011（引文见第 15 页）。11. Paul Gérardin。与有限域相关的 Weil 表示。J. Algebra 46，第 1 期（1977），第 54–101 页。doi: 10.1016/0021-8693(77)90394-5。MR0460477(57#470)，Zbl. 0359.20008（引文见第 4 页）。12. Larry J. Gerstein。Basic Quadratic Forms。Graduate Studies in Mathematics 90。美国数学会，普罗维登斯，RI，2008年。doi: 10.1090/gsm/090。MR2396246，Zbl. 1147.11002（引文见第 17 页）。13. Roderick Gow 和 Fernando Szechtman。与有限局部环相关的酉群的 Weil 特征。Canad. J. Math. 54，第 6 期（2002），第 1229–1253 页。doi: 10.4153/CJM-2002-047-5。MR1940237，Zbl. 1041.20031（引文见第 4 页）。14. Robert M. Guralnick、Kay Magaard 和 Pham Huu Tiep。有限辛群 Weil 表示的对称幂与交错幂。《Bull. Inst. Math. Acad. Sin.》（新系列）13，第 4 期（2018），第 443–461 页。doi: 10.21915/BIMAS.2018405。MR3888881，Zbl. 1483.20029（引文见第 3、32、33 页）。15. Shamgar Gurevich 和 Ronny Hadani。几何 Weil表示。Selecta Math.（新系列）13，第 3 期（2007），第 465–481 页。doi: 10.1007/s00029-007-0047-3。MR2383602(2009e:11078)，Zbl. 1163.22004（引文见第 2、4、29 页）。16. Shamgar Gurevich 和 Ronny Hadani。离散傅里叶变换的对角化。Appl. Comput. Harmon. Anal. 27，第 1 期（2009），第 87–99 页。doi: 10.1016/j.acha.2008.11.003。MR2526889，Zbl. 1165.65089（引文见第 23 页）。17. Thomas Honold。有限弗罗贝尼乌斯环的刻画。Arch. Math. (Basel) 76，第 6 期（2001），第 406–415 页。doi: 10.1007/PL00000451。MR1831096，Zbl. 0984.16017（引文见第 5、31 页）。18. Roger E. Howe。论 Weil 表示的特征。Trans. Amer. Math. Soc. 177（1973），第 287–298 页。doi: 10.1090/S0002-9947-1973-0316633-5，Jstor: 1996597。MR0316633(47#5180)，Zbl. 0263.22014（引文见第 4、12 页）。19. I. Martin Isaacs。可解群与辛群的特征。Amer. J. Math. 95，第 3 期（1973），第 594–635 页。doi: 10.2307/2373731，Jstor: 2373731。MR0332945(48#11270)，Zbl. 0277.20008（引文见第 2、4、10、12、14、15 页）。

20. Camille Jordan. 关于多变量高斯和。C. R. Acad. Sci., Paris 73 (1871), pp. 1316–1319. url: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3030d.f1316. JFM 03.0211.02（引于第 22 页）。21. Norbert Kaiblinger and Markus Neuhauser. 有限阿贝尔群上的元辛算子及 $\mathbb{R}^d$。Indag. Math. (N.S.) 20, no. 2 (2009), pp. 233–246. doi: 10.1016/S0019-3577(09)80011-6. MR2599814, Zbl. 1214.43012（引于第 4 页）。22. Wilhelm Klingenberg. 局部环上的辛群。Amer. J. Math. 85 (1963), pp. 232–240. doi: 10.2307/2373212. MR153749, Zbl. 0117.27201（引于第 13 页）。23. Frieder Ladisch. 有限群中的特征标对应。博士论文。罗斯托克大学，2009。doi: 10.18453/rosdok_id00000491. Zbl. 1360.20001（引于第 2 页）。24. T[sit]Y[uen] Lam. 模与环讲义。数学研究生教材 189。Springer，纽约、柏林和海德堡，1999。doi: 10.1007/978-1-4612-0525-8.MR1653294(99i:16001), Zbl. 0911.16001（引于第 8 页）。25. Serge Lang. 代数。Addison-Wesley，马萨诸塞州雷丁，1965。MR0197234(33#5416), Zbl. 0193.34701（引于第 12 页）。26. Markus Neuhauser. 有限域上的元辛表示的显式构造。J. Lie Theory 12, no. 1 (2002), pp. 15–30. url: https://www.emis.de/journals/JLT/vol.12_no.1/2.html. MR1885034, Zbl. 1026.22018（引于第 4 页）。27. Patrice Perrin. 薛定谔表示、Maslov 指数与元辛群。载于：非交换调和分析与李群（马赛-吕米尼，1980）。Lecture Notes in Math. 880。Springer，柏林、纽约，1981，pp. 370–407. doi: 10.1007/BFb0090417. MR644841, Zbl. 0462.22008（引于第 3 页）。28. Amritanshu Prasad. 关于与有限阿贝尔群相关的韦伊表示的特征标值与分解。J. Analysis 17 (2009), pp. 73–85. arXiv: 0903.1486[math.RT]. MR2722604(2012a:11053), Zbl. 1291.11084（引于第 4、7、10–12 页）。29. M. Ram Murty and Siddhi Pathak. 二次高斯和的求值。Math. Student 86, no. 1-2 (2017), pp. 139–150. MR3699589（引于第 21 页）。30. I[ssai] Schur. 关于高斯和。Nachr. K. Ges. Wiss. Gött., Math.-Phys. Kl. (1921), pp. 147–153. url: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002505932. JFM 48.0130.07（引于第 18、21、22 页）。31. Ken-ichi Shinoda. 与有限域相关的韦伊表示的特征。J. Algebra 66, no. 1 (1980), pp. 251–280. doi: 10.1016/0021-8693(80)90123-4. MR591256(81k:20017), Zbl. 0444.20034（引于第 4 页）。32. Fernando Szechtman. 有限辛群的韦伊表示。（Canadiana: 002057328, ISBN: 0-612-39598-7）。博士论文。阿尔伯塔大学，1999。MR2699530（引于第 4 页）。33. Fernando Szechtman. 非主环上的辛群的韦伊表示。Rocky Mountain J. Math. 35, no. 1 (2005), pp. 309–329. doi: 10.1216/rmjm/1181069783.MR2117610, Zbl. 1088.20023（引于第 4 页）。34. Shun'ichi Tanaka. 有限域上二阶特殊线性群的不可约表示的构造与分类。Osaka J. Math. 4 (1967), pp. 65–84. url: http://projecteuclid.org/euclid.ojm/1200691815. MR219635, Zbl. 0245.20039（引于第 4 页）。

35. Shun'ichi Tanaka. 模 p^λ 的二元模合同群的不可约表示。J. Math. Kyoto Univ. 7 (1967), pp. 123–132. doi: 10.1215/kjm/1250524272.MR229737, Zbl. 0219.20005（引于第 4 页）。36. Teruji Thomas. 韦伊表示的特征。J. London Math. Soc. (2) 77, no.1 (2008), pp. 221–239. doi: 10.1112/jlms/jdm098. MR2389926(2008k:11049), Zbl. 1195.11058（引于第 3、4、6、20、29 页）。37. Teruji Thomas. 韦伊表示与转移因子。代数与数论 7, no. 7 (2013), pp. 1535–1570. doi: 10.2140/ant.2013.7.1535. MR3117500, Zbl. 1300.11039（引于第 3、4、6、7、29 页）。38. G. E. Wall. 关于酉群、辛群和正交群中的共轭类。（英文）。《澳大利亚数学会杂志》3 (1963), pp. 1–62. doi: 10.1017/S1446788700027622. MR0150210, Zbl. 0122.28102（引于第 6、23 页）。39. Harold N. Ward. 辛群的表示。J. Algebra 20 (1972), pp. 182–195. doi: 10.1016/0021-8693(72)90098-1. MR0286909(44#4116), Zbl. 0239.20013（引于第 2、5、7–9 页）。40. Harold N. Ward. 韦伊表示的矩阵（2017 年 5 月 25 日）。arXiv: 1705.09138v1[math.RT] （引于第 2、4–7、23、26 页）。41. Heinrich Weber. 关于多重高斯和。J. Reine Angew. Math. 74 (1872), pp. 14–56. url: http://www.digizeitschriften.de/dms/resolveppn/?PPN=GDZPPN002154854. JFM 03.0211.01（引于第 22 页）。42. André Weil. 关于某些酉算子群。《数学学报》111 (1964), pp. 143– 211. doi: 10.1007/BF02391012. MR0165033(29#2324), Zbl. 0203.03305（引于第 2–4、20 页）。

Frieder Ladisch 罗斯托克大学 数学研究所 18051 罗斯托克 德国电子邮件：
frieder.ladisch@uni-rostock.de