arXiv:2303.09739v1 [math.CO] 17 Mar 2023

关于图的逆特征值问题的新结果

Roberto C.Díaz[a*] 和 Ana I. Julio[a]

[a]北方天主教大学数学系

邮政信箱 1280，智利安托法加斯塔。

摘要

本文考虑的所有图都是简单无向图。图 G 的逆特征值问题（IEP-G）旨在求出所有可能的谱，使得矩阵的第 (i, j)–个元素当 $i \neq j$ 时非零，当且仅当 i 与 j 相邻。图 G 中的一个簇是一个顶点子集对 (C, S)，其中 C 是一个基数为 $|C| \geq 2$ 的极大集合，由共享同一邻点集合 S（其基数为 $|S|$ ）的独立顶点构成。设 G 是一个有 n 个顶点、含有簇 (C, S) 的连通图，H 是一个阶为 $|C|$ 的图。令 G(H) 为这样得到的连通图：将 H 的顶点与 C 中的顶点对应识别，并把 H 的边加入 G 的边集中。本文构造了一个关联图为完全图的对称矩阵，并证明了它满足一些有趣的性质。利用这一结果，我们为图 G 的逆特征值问题建立了新的充分条件，其中 G 是一个阶为 n、含有一个阶为 k 的团及一个簇 (C, S) 的图，且 $|C| = n - k$、$|S| = r \leq k$；此外，也为图 $G(K_{n-k})$建立了相应条件，其中 G 如前所述。特别地，当 G 是从 K_n 中删去一条边 $e_k \in E(K_n)$所得的图时，我们给出了图的逆特征值问题的一个充要条件。文中给出了若干说明性示例。我们的结果具有构造性，可据此生成算法流程，从而始终能够计算出一个解矩阵。

2010年数学主题分类：05C50, 05C76, 15A18, 15B57, 65F18.

关键词：图运算；对称矩阵；特征值；逆特征值问题；簇；团。

1 引言

设 $G = (V(G), E(G))$ 是一个简单无向图，其顶点集为 $V(G) = \{1, \ldots, n\}$，边集为 $E(G) = \{ij : i, j \in V(G)\}$。V (G) 的基数称为 G 的阶。当 $e_k = ij \in E(G)$ 的端点为 i 和 j 时，我们称 i 和 j 相邻。若 $i \in V(G)$，则 $N_G(i)$ 是 G 中 i 的邻点集，即 $N_G(i) = \{j \in V(G) : ij \in E(G)\}$。$N_G(i)$ 的基数称为 i 的度。

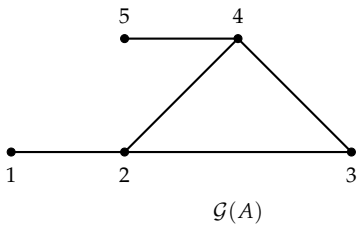
*通讯作者

阶为 n 的图 G 的邻接矩阵 A(G) 是一个 $0-1$阶为 n 的矩阵，其元素为 a^{ij}，满足：若 ij $\in$ E(G)，则 $a_{ij}=1$；否则 $a_{ij}=0$。图 G 上的其他矩阵包括拉普拉斯矩阵 L (G) $=$D (G) $-$A (G) 和无符号拉普拉斯矩阵 Q (G) $=$D (G) $+$L (G)，其中 D (G) 是顶点度构成的对角矩阵。众所周知，L (G) 和 Q (G) 是半正定矩阵，且 (0, 1) 是 L (G) 的一个特征对，其中 1 是全1向量。图 G 上的其他矩阵还有归一化邻接矩阵 $\widehat{\mathcal{A}}(G)=\sqrt{D(G)}^{-1}A(G)\sqrt{D(G)}^{-1}$、归一化拉普拉斯矩阵 $\widehat{\mathcal{L}}(G)=\sqrt{D(G)}^{-1}L(G)\sqrt{D(G)}^{-1}=I_n-\widehat{\mathcal{A}}(G)$ 以及归一化无符号拉普拉斯矩阵 $\widehat{\mathcal{Q}}(G)=\sqrt{D(G)}^{-1}Q(G)\sqrt{D(G)}^{-1}=I_n+\widehat{\mathcal{A}}(G)$，其中 $\sqrt{D(G)}=\mathrm{diag}\{\sqrt{d_1},\ldots,\sqrt{d_n}\}$。

我们用 $S_n(\mathbb{R})$ 表示实对称 n $\times$n 矩阵的集合。给定 M $\in S_n(\mathbb{R})$，M(i) 表示从 M 中删去第 i$-$行和第 i$-$ 列后得到的子矩阵，$\lambda_i(M)$，i $=1,\ldots,n$，其特征值以及 M 的谱（特征值的多重集）分别记作 $\sigma(M)=\{\lambda_1(M),\lambda_2(M),\ldots,\lambda_n(M)\}$。我们用 $\lambda^{[m]}$ 表示代数重数为 m 的特征值 λ。

本文致力于研究图的逆特征值问题（IEP-G）。在介绍这一问题的相关信息之前，我们需要给出一个额外的定义：给定$A=(a^{ij})\in S_n(\mathbb{R})$，矩阵$A$的图 $\mathcal{G}(A)$是一个顶点集为 $\{1,\ldots,n\}$、边集为$\{ij:a_{ij}\neq 0$ 且$i\neq j\}$的图。注意，确定(A)时，对A 的对角线元素没有任何限制。例如，对于矩阵

$$A=\begin{bmatrix}-1&\frac{1}{2}&0&0&0\\ \frac{1}{2}&0&-2&1&0\\ 0&-2&1&-1&0\\ 0&1&-1&1&-\frac{3}{2}\\ 0&0&0&-\frac{3}{2}&2\end{bmatrix}\quad\rightsquigarrow$$



$\mathcal{G}(A)$

给定一个简单无向图 $G=(V(G),E(G))$，我们定义

$$\mathcal{S}(G)=\{A\in S_n(\mathbb{R}):\mathcal{G}(A)=G\}.$$

注意，A_G、L_G、Q_G，$\widehat{\mathcal{A}}_G$，$\widehat{\mathcal{L}}_G$，$\widehat{\mathcal{Q}}_G\in\mathcal{S}(G)$。刻画所有可作为矩阵 $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ 的谱的实数列表 $A\in\mathcal{S}(G)$ 的问题称为图 G 的逆特征值问题（IEP-G）。一般而言，这个问题很难解答，其研究动机源于振动理论[11, 12]。弦的振动研究引出了经典的逆斯图姆-刘维尔问题。当G 为路径时，IEP-G 对应于弦的逆斯图姆-刘维尔问题的离散化，并引出了对雅可比矩阵逆特征值问题的经典研究，该问题由一系列论文[13, 14, 16]解决。因此，IEP-G 可以看作以下问题的离散版本：给定结构（图）上允许出现何种振动行为（谱）？

照例，令P_n、C_n、S_n 和K_n 分别表示具有n 个顶点的路径、环、星形图和完全图。接下来，我们给出几个在本研究中起重要作用的定义：

定义 1。1 [7, 8, 19] 图 G 中的簇 是一个顶点子集对(C,S)，其中C 是一个具有基数 $|C| \geq 2$的极大独立顶点集（彼此不相邻的顶点），且这些顶点具有相同的邻点集合S $|S|$ 。

例 1 设 G 为图 *1* 所示的图：

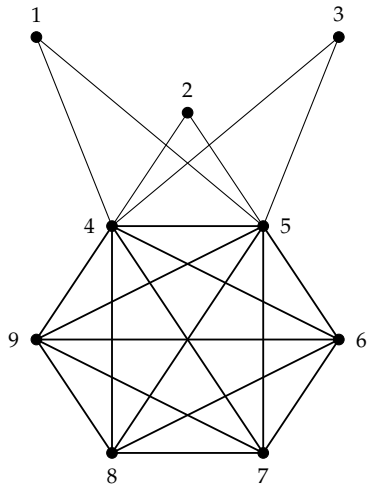


图 *1.* 图 G

我们看到，$(C,\ S)$，其中 $C\ =\{1,2,3\}$ 且 $S\ =\{4,5\}$，是 G 中的一个簇。

定义 1.2 设 G 是一个具有簇$(C,\ S)$的图。设 H 是一个阶为 $|C|$ 的图。令 $G(H)$ 为由 G 和 H 得到的图，其构造方式是将 H 的顶点与 C 中的顶点对应识别，并将 H 的边加入 G 的边中。

例2 设 G 为例 *1*中的图。图 $G(K_3)$ 如图 *2* 所示：

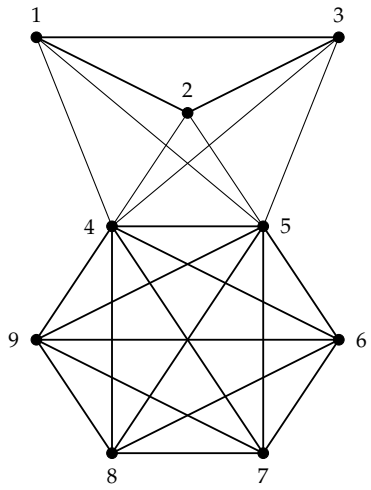


图 *2.* 图 $G(K_3)$

本文旨在推进对图的逆特征值问题解的研究。本文结构安排如下：第2节介绍全文所用主要概念的背景知识和预备内容。第3节给出主要结果。具体而言，我们构造一个矩阵 $A \in \mathcal{S}(K_n)$，其谱为 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$，其中 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，并且该矩阵满足一些有趣的性质。利用这一结果，我们针对图的逆特征值问题得出新的充分条件：当 G 是一个 n 阶图，具有一个 k 阶团和一个簇 (C, S)，其中 $|C| = n - k$ 且 $|S| = r \leq k$ 时；此外，对于 $G(K_{n-k})$，其中 G 同前，也得到相应结果。特别地，当 G 是从 K_n 中删除单条边 $e_k \in E(K_n)$得到的图时，我们得到一个充要条件。文中给出了一些示例。我们结果的构造性使其能够生成算法过程，从而始终可以计算出一个解矩阵。

2 预备知识

图的逆特征值问题仅对少数几类图得到了解决。本节将介绍一些关于图的逆特征值问题的已知背景，并说明全文将用到的主要概念的预备知识。

▶ **路径 P_n 与圈 C_n：** 当$G = P_n$时，图的逆特征值问题已在研究雅可比矩阵的逆特征值问题时得到解决

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & & b_n \\ b_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & b_2 & a_3 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}, \quad b_k > 0 \text{ for all } k = 1, \ldots, n-1, \text{ and } b_n = 0, \tag{1}$$

相关研究见 [14], 以及 [13, 16], ，作者提出了一种构造性方法，可根据给定的特征值显式计算矩阵的各个元素；而当 $G = C_n$时，图的逆特征值问题已在研究周期 Jacobi 矩阵的逆特征值问题时得到解决（即在（1） $b_k > 0$中，对所有 $k = 1, \ldots\ldots, n$）。Ferguson 在 [10] 中研究了雅可比矩阵和周期 Jacobi 矩阵的谱性质。作者提出了构造具有给定谱的雅可比矩阵和周期 Jacobi 矩阵的算法。这些算法在实际应用中证明非常有用。例如，它们已用于研究周期托达格，也用于研究斯图姆–刘维尔方程和希尔方程的逆特征值问题。特别是，Ferguson 所得的结果使得当 $G = C_n$时，图的逆特征值问题得以解决。

为推进对图的逆特征值问题解的认识，图的逆特征值问题（IEP-G）出现了一种改进形式，即图 G 的逆特征值问题，其问题如下：

问题 2.1 (λ,μ–图的逆特征值问题) [9, 2] 给定一个有 n 个顶点的图 G，$i \in V(G)$ 以及满足交错不等式的 $2n$ 个实数 $-1 \quad \lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n$，是否存在矩阵 $M \in \mathcal{S}(G)$，使得 $\sigma(M) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ 且 $\sigma(M(i)) = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}\}$?

当选取满足条件的实数集合 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ 时，λ,μ–图的逆特征值问题可用于求解图的逆特征值问题

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n, \tag{2}$$

对于以下图:
▶ **树 T 和连通图** [9, 15]。▶ **完全图和小图（至多有4 个顶点）** [2, 3]。

受放宽条件（2）的启发，文献 [17] 刻画了其图为连通图的矩阵所对应的有序重数列表的可能取值，涉及以下树的子类:

▶ **广义星和双广义星** [17]。
▶ **顶点数不超过5 的图:** Barret 等人 [4] 引入了强谱性质（*SSP*），其表述如下:

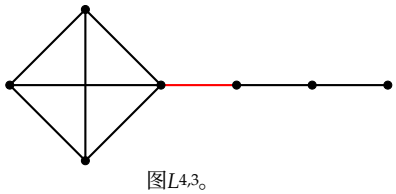
定义 2。1 [4] 若矩阵 $A \in S_n(\mathbb{R})$ 满足以下条件，则称其具有强谱性质 (*SSP*): 零矩阵 $X = O$ 是唯一满足以下条件的矩阵 $X \in S_n(\mathbb{R})$:

$i.[A,X] = AX - XA = O$，且

$ii.\ A \circ X = I \circ X = O$，其中 $\circ$ 表示矩阵的逐项乘积。

事实证明，这一性质是一个强大的工具。Barret 等人 [5] 基于强谱性质提出了用于图的逆特征值问题的新技术。他们解决了至多有 5 个顶点的图的图的逆特征值问题，前提是每一种可能的谱都有一个由具有强谱性质的矩阵实现。利用强谱性质这一新技术，[18] 中的作者彻底解决了一类团-路径图子族的图的逆特征值问题，具体而言，涉及以下图子族:

▶ **棒棒糖图**。$(k,p)-$ 棒棒糖图 $L_{k,p}$ 是一个具有 $k+p$ 个顶点的图，它由在完全图 K_k 的一个顶点与路径图 P_p的一个叶节点之间添加一条边而得到。图 $L_{4,3}$ 如下所示:



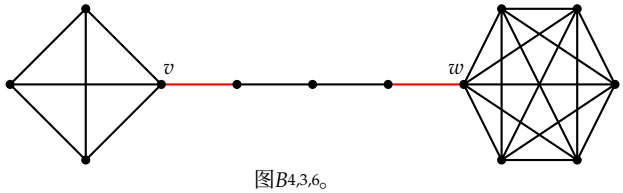
图$L_{4,3}$。

对于棒棒糖图族，作者在[18]中得到了:

定理 2.2 ([18], 推论 2.6) 设 $\sigma = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k, \cdots, \lambda_{k+p}\}$ 是一个含有 $k+p$ 个实数的集合，其中 $k \geq 2$。那么，当且仅当σ 至少包含 p 个不同元素时，σ 是矩阵 $A \in \mathcal{S}(L_{k,p})$ 的谱（A 具有强谱性质）。

给定两个图 G 和 H，G 和 H 的不交并记为 $G \oplus H$。如果G 和 H 各有一个标记为v的顶点，那么G 和 H 在v 处的顶点和 $G \oplus_v H$ 是将$G \oplus H$ 中标记为v的两个顶点合并后得到的图。

▶ **广义哑铃图**。一个广义哑铃图由$k_1 + p + k_2$ 个顶点组成，定义如下：$B_{k_1,p,k_2} = K_{k_1} \oplus_v P_{p+2} \oplus_w K_{k_2}$，其中$v$ 和w 是P_{p+2}的叶顶点。下图展示了广义哑铃图$B_{4,3,6}$ 的一个例子：



图$B_{4,3,6}$。

对于广义哑铃图族，作者在 [18]:

定理 2.3（[18], 推论 2.8）设 $\sigma = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_{k_1}, \cdots, \lambda_{k_1+p}、\ \cdots、\ \lambda_{k_1+p+k_2}\}$ 为一个集合，其中包含 $k_1 + p + k_2$个实数，且 $k_1 \geq 2$和 $k_2 \geq 2$。那么，σ是矩阵 $A \in \mathcal{S}(B_{k_1,\ p,\ k_2})$的谱（$A$ 具有强谱性质），当且仅当 σ 至少包含 p 个不同元素。

因此，许多谱已被证明可由块图实现。图的块 是其极大 2–连通诱导子图。**块图** G 是指其各个块都是团的图（有关这种结构的更多细节，见[18]）。

对于$A \in S_n(\mathbb{R})$，我们用$q(A)$ 表示A的不同特征值个数。对于图G，我们定义

$$q(G) = min\{q(A) \ : \ A \in \mathcal{S}(G)\}.$$

[1] 中给出的一个已知结果如下:

命题 2。4 [1] 假设 G 是由 K_n 删除一条边 e 得到的。那么

$$q(G) = \begin{cases} 1, & if \quad n = 2; \\ 3, & if \quad n = 3; \\ 2, & otherwise. \end{cases}$$

在本研究中，下列结果将发挥关键作用:

引理 1 [6] 设 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ 和 $\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n-1}\}$ 是两个实数集合，满足

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n, \tag{3}$$

其中 $\mu_i \neq \mu_j$对所有 $i \neq j$。于是存在一个 $n \times n$ 阶加边矩阵 $A = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & a \end{bmatrix}$，其特征值为 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$，其中 $A_1 = diag\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n-1}\}$，且 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix}^T$ 满足

$$b_i^2 = -\frac{\prod_{j=1}^{n}(\mu_i - \lambda_j)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1}(\mu_i - \mu_j)}, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

注 2.1 请注意，引理 *1* 回答了问题 *2.1* 当 G 是星形图时，若 (3) 中的所有不等式均为严格不等式。

引理 **2** [20] 设 $B \in S_k(\mathbb{R})$ 是一个特征值为 $\mu_1, \ldots, \mu_k$ 的矩阵，u 是对应于 μ_1 的特征向量，且已归一化，使得 $u^T u = 1$。设 $A = \begin{bmatrix} A_1 & \\ T & \mu_1 \end{bmatrix} \in b\, b\, S_n(\mathbb{R})$ 是一个对角元素为 μ_1、特征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 的矩阵。那么矩阵 $C = \begin{bmatrix} A_1 & bu^T \\ ub^T & B \end{bmatrix} \in S_{n+k-1}(\mathbb{R})$ 的特征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_2, \ldots, \mu_k$。

3 主要结果

本节将介绍我们的主要结果。首先，我们需要一个重要结果，它将发挥关键作用。我们先考虑以下非奇异矩阵：

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & -2 & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & -(n-1) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

在下一个结果中，我们构造一个具有预设谱 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$、满足 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 的 $S(K_n)$ 矩阵，并且该矩阵具有一些重要性质：

定理 3.1 设 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ 是一个至少包含2 个不同元素的实数列表。那么，存在一个阶数为 $n \times n$ 的矩阵 $A = (a^{ij})$，满足：

i. $\sigma(A) = \Lambda$ *ii.* $A \in S(K_n)$

iii. $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$. 此外，对于所有 $k = 2, \ldots, n$，$(\lambda_k, \mathbf{x}_k)$ 是 A 的一个特征对，其中

$$\mathbf{x}_k^T = (1, 1, \ldots, 1, -(n-k+1), \underbrace{0, \ldots, 0}_{(k-2)\ zeros}).$$

iv. $a_{nn} = \left(\frac{1}{n}\right)(\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_2$.

证明 *i.* 设 $D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$，其中 $\lambda_1 \neq \lambda_2$。定义矩阵

$$A = RDR^{-1}$$

其中 R 与（4）中的相同。于是，显然 $\sigma(A) = \Lambda$。

ii. 现在我们证明 $A \in \mathcal{S}(K_n)$。首先，我们证明 A 是对称的。事实上，由（4）可得，$\mathbf{G}_i$ 的 R 各行定义如下

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_1 &= (1,1,\ldots,1)\\ \mathbf{G}_i &= (1,1,\ldots,1,-(i-1),\underbrace{0,\ldots,0}_{(i-2)\text{ zeros}}),\ i=2,\ldots,n,\end{aligned}$$

而 $\mathbf{H}j$ 的$R^{-1}=[\mathbf{H}_1\mid\cdots\mid\mathbf{H}_n]$ 列定义为

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1^T &= \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n(n-1)},\cdots,\frac{1}{3\cdot 2},\frac{1}{2\cdot 1}\right)\\ \mathbf{H}_j^T &= \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n(n-1)},\ldots,\frac{1}{(j+1)j},-\frac{1}{j},\underbrace{0,\ldots,0}_{(j-2)\text{ zeros}}\right),\ j=2,\ldots,n.\end{aligned}$$

那么，对于i、$j=1$、2、.....、n,

$$a_{i,j}=(RDR^{-1})_{i,j}=\mathbf{e}_i^T(RDR^{-1})\mathbf{e}_j=\mathbf{G}_iD\mathbf{H}_j.$$

因此，当$i=1$和$j=2$、.....、n时，我们有

$$\begin{aligned}a_{1,j}=\mathbf{G}_1D\mathbf{H}_j&=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\,\mathbf{H}_j\\ &=\frac{\lambda_1}{n}+\frac{\lambda_2}{n(n-1)}+\cdots+\frac{\lambda_{n-(j-1)}}{(j+1)j}-\frac{\lambda_{n-(j-2)}}{j}\\ &=\mathbf{G}_jD\mathbf{H}_1=a_{j,1}.\end{aligned}\tag{5}$$

类似地，当 $2\le i<j\le n$时，我们有

$$\begin{aligned}a_{i,j}=\mathbf{G}_iD\mathbf{H}_j&=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-(i-1)},-(i-1)\lambda_{n-(i-2)},\underbrace{0,\ldots,0}_{(i-2)\text{ zeros}})\mathbf{H}_j\\ &=\frac{\lambda_1}{n}+\frac{\lambda_2}{n(n-1)}+\cdots+\frac{\lambda_{n-(j-1)}}{(j+1)j}-\frac{\lambda_{n-(j-2)}}{j}\\ &=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-(j-1)},-(j-1)\lambda_{n-(j-2)},\underbrace{0,\ldots,0}_{(j-2)\text{ zeros}})\mathbf{H}_i\\ &=\mathbf{G}_jD\mathbf{H}_i=a_{j,i}.\end{aligned}\tag{6}$$

因此，我们已经证明 A 是对称矩阵。另一方面，由（5）和（6），我们可以得出

$$a_{1,j}=a_{i,j},\quad\text{for all}\quad 2\le i<j\le n.\tag{7}$$

还需注意，（5）可以写成

$$a_{1,j} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{n} + \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{n-1} + \cdots + \frac{\lambda_{n-j} - \lambda_{n-(j-1)}}{j+1} + \frac{\lambda_{n-(j-1)} - \lambda_{n-(j-2)}}{j}$$

$$= a_{1,n} + \varphi(j);$$

其中

$$a_{1,n} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{n} \neq 0 \quad \text{and} \quad \varphi(j) = \sum_{s=j}^{n-1} \frac{\lambda_{n-(s-1)} - \lambda_{n-(s-2)}}{s},\ j = 2, \ldots, n-1.$$

注意，若对所有 $i = 3, \ldots, n$，均有 $\lambda_i \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$（此时，$\Lambda$ 仅有 2 个不同元素），则对某个 $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$，以及所有 $j = 2, \ldots, n-1$，有 $\varphi(j) = \alpha a_{1,n}$。因此，对某个 $\beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ 以及所有 $j = 2, \ldots, n-1$，有 $a_{1,j} = \beta a_{1,n}$。于是，由 (7)，$A \in S(K_n)$。

现假设 Λ 至少有三个不同元素。在这种情况下，只需选取集合 $\{2, \ldots, n-1\}$ 的任意一个置换 ϕ，使得

$$\varphi(j) = \sum_{s=j}^{n-1} \frac{\lambda_{n-(\phi(s)-1)} - \lambda_{n-(\phi(s)-2)}}{s} \neq -a_{1,n}, \quad \text{for all} \quad j = 2, \ldots, n-1.$$

因此，对所有 $j = 2, \ldots, n-1$，有 $a_{1,j} = a_{1,n} + \varphi(j) \neq 0$；并且由 (7)，$A \in S(K_n)$。

iii。由于 $R\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}$，$R^{-1}\mathbf{e} = \mathbf{e}_1$。因此，

$$A\mathbf{e} = (RDR^{-1})\mathbf{e} = RD\mathbf{e}_1 = \lambda_1 R\mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}.$$

因此，$A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$。同样，我们观察到 $R\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k$，其中

$$\mathbf{x}_k^T = (1, 1, \ldots, 1, -(n-k+1), \underbrace{0, \ldots, 0}_{(k-2)\text{ zeros}}), \quad k = 2, \ldots, n.$$

因此，$R^{-1}\mathbf{x}_k = \mathbf{e}_k$。因此，

$$A\mathbf{x}_k = (RDR^{-1})\mathbf{x}_k = RD\mathbf{e}_k = \lambda_k R\mathbf{e}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k.$$

因此，$(\lambda_k, \mathbf{x}_k)$ 是 A 的一个特征对。

iv.

$$\begin{aligned} a_{n,n} = \mathbf{G}_n D \mathbf{H}_n &= (\lambda_1, -(n-1)\lambda_2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{(n-2)\text{ zeros}})\mathbf{H}_n \\ &= \frac{\lambda_1}{n} + \frac{(n-1)\lambda_2}{n} \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)(\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_2. \end{aligned}$$

证明完成。 □

定理 3.2 设 G 是一个 n 阶图，含有一个 k 阶团和一个簇(C,S)，其中 $|C| = n - k$ 且 $|S| = r \leq k$。对于由至少 $n - k$ 个不同元素组成的任意实数列表 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$，若其中至少两个元素的代数重数大于或等于2，则存在一个矩阵 $M \in \mathcal{S}(G)$，其谱为 Λ。

证明 记 $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$，其中

$$\Lambda_1 = \{\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \ldots, \lambda_{1,n-k+1}\},$$

是一个元素按严格递减顺序排列的列表。我们选取 $n-k$ 个实数μ_j，$j = 1, \ldots, n-k$，满足

$$\lambda_{1,1} \geq_{n-k} \mu_1 > \lambda_{1,2} > \mu_2 > \lambda_{1,3} > \cdots > \lambda_{1,n-k} > \mu_{n-k} > \lambda_{1,n-k+1},$$

使得 a $= \left(\lambda_{1,1} + \sum_{j=1}(\mu_j - \lambda_{1,j+1})\right) /\in \Lambda_2$。根据引理 1 和注 2.1，我们可以构造一个加边矩阵 A $= \begin{bmatrix} A_1 & b \\ b^T & a \end{bmatrix} \in \mathcal{S}(S_{n-k+1})$，其谱为 Λ_1，其中 $A_1 = \text{diag}\{\mu_1, \ldots\ldots, \mu_{n-k}\}$，且 a $=$ trace(A) $-$ trace(A_1)。现在，我们考虑列表 $\Gamma = \Lambda_2 \cup \{a\}$。由于 Λ 至少有两个代数重数大于或等于 2 的不同元素，且 $a /\in \Lambda_2$，我们得到 Γ 至少有三个不同特征值。参照定理 3.1 的证明，我们构造对角矩阵 D，其对角线元素为 Γ 中的元素，其中 a 位于第 $(k - r + 2, k - r + 2)$ – 个位置。因此，根据定理 3.1 (iii.)，矩阵 $B = RDR^{-1}$ 有一个与 a 对应的特征向量 u，其分量中有 $(k - r)$– 个零。最后，由引理 2 可知

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{b}\mathbf{u}^T \\ \mathbf{u}\mathbf{b}^T & B \end{bmatrix} \in \mathcal{S}(G),$$

且其谱为 Λ。 □

注 3.1

1. 如果在前一定理中，列表 Λ 包含超过 $n - k + 1$ 个不同元素，那么 Λ 中至少有两个元素的代数重数大于或等于 2 这一条件并非必要。

2. 当 G 是星形图时，定理 *3.2* 与注 *2.1* 一致，并使我们能够立即构造一个 $n \times n$ 阶加边矩阵解。

由前一定理得出的一个有趣结论如下:

推论 3.1 设 $G = K_n - \{e\}$。任意包含至少三个不同实数的列表 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ 都是矩阵 $M \in \mathcal{S}(G)$的谱。此外，当 $n = 3$时，$M \in \mathcal{S}(G)$ 当且仅当 $\sigma(M)$恰有三个不同元素。

证明 结合定理 3.2和命题 2.4可得证明。 □

例 3 设 G 是例1中给出的图。设 $\Lambda = \{7^{[2]}, 1^{[2]}, -3^{[3]}, -5^{[2]}\}$。按照定理3.2的证明，我们构造一个矩阵 $C \in \mathcal{S}(G)$，其谱为 Λ。事实上，我们将 Λ划分如下：

$$\Lambda = \{7, 1, -3, -5\} \cup \{7, 1, -3, -3, -5\} = \Lambda_1 \cup \Lambda_2.$$

取实数 $\mu_1 = 6$，$\mu_2 = 0$ 和 $\mu_3 = -4$。因此，得到一个 $= -2$。由引理 1 和注 2.1，我们得到一个加边矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{33}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{70}}{4} \\ 0 & 0 & -4 & -\frac{\sqrt{22}}{4} \\ -\frac{\sqrt{33}}{2} & \frac{\sqrt{70}}{4} & -\frac{\sqrt{22}}{2} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & a \end{bmatrix} \in \mathcal{S}(S_4)$$

其谱为 Λ_1。现在，我们考虑列表 $\Gamma = \Lambda_2 \cup \{-2\}$。由于我们需要一个谱为$\Gamma$ 的矩阵 B，以及一个与 -2相关联且有 $\mathbf{u}$ 4 个零元素的特征向量，因此我们选择对角矩阵 D $=diag\{7, 1, -3, -3, -5, -2\}$，从而得到

$$B = RDR^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{31}{30} & \frac{29}{30} & \frac{37}{15} & \frac{9}{5} & \frac{9}{5} & 1 \\ \frac{29}{30} & -\frac{31}{30} & \frac{37}{15} & \frac{9}{5} & \frac{9}{5} & 1 \\ \frac{37}{15} & \frac{37}{15} & -\frac{38}{15} & \frac{9}{5} & \frac{9}{5} & 1 \\ \frac{9}{5} & \frac{9}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{9}{5} & 1 \\ \frac{9}{5} & \frac{9}{5} & \frac{9}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{6}{5} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

满足条件：$B\mathbf{u} = -2\mathbf{u}$，其中 $\mathbf{u}^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。最后，应用引理 2，我们得到

矩阵

$$C=\begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{b}\mathbf{u}^T \\ \mathbf{u}\mathbf{b}^T & B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{66}}{4} & \frac{\sqrt{66}}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{35}}{4} & -\frac{\sqrt{35}}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -\frac{\sqrt{11}}{4} & \frac{\sqrt{11}}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{66}}{4} & \frac{\sqrt{35}}{4} & -\frac{\sqrt{11}}{4} & -\frac{31}{30} & \frac{29}{30} & \frac{37}{15} & \frac{9}{5} & \frac{9}{5} & 1 \\ \frac{\sqrt{66}}{4} & -\frac{\sqrt{35}}{4} & \frac{\sqrt{11}}{4} & \frac{29}{30} & -\frac{31}{30} & \frac{37}{15} & \frac{9}{5} & \frac{9}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{37}{15} & \frac{37}{15} & -\frac{38}{15} & \frac{9}{5} & \frac{9}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{5} & \frac{9}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{9}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{5} & \frac{9}{5} & \frac{9}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{6}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\in \mathcal{S}(G),$$

其谱为 Λ。

定理 3.3 设 G 是一个阶为 n 的图，它含有一个阶为 k 的团和一个簇$(C,\ S)$，其中 $|C|=n-k$ 且 $|S|=r\leq k$。对于任意实数列表 $\Lambda=\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\ \lambda_n\}$，若其中至少有 3 个不同元素，且至少两个元素的代数重数大于或等于2，则存在一个矩阵 $M\in\mathcal{S}(G(K_{n-k}))$，其谱为 Λ。

证明 记 $\Lambda=\Lambda_1\cup\Lambda_2$，其中

$$\Lambda_1=\{\lambda_{1,1},\lambda_{1,2},\ldots,\lambda_{1,n-k+1}\}\quad\text{and}\quad\Lambda_2=\Lambda-\Lambda_1,$$

其中 Λ_1 和 Λ_2 至少各含有两个不同元素，并且满足

$$\frac{1}{n}(\lambda_{1,1}-\lambda_{1,2})+\lambda_{1,2}\notin\Lambda_2;\qquad\lambda_{1,1}\neq\lambda_{1,2}.$$

由定理 3.1，我们考虑阶为 $n-k+1$ 的矩阵 R（如式 (4) 所示），并构造矩阵 $A=RD_1R^{-1}=(a_{ij})$，其中 D_1 是对角矩阵，其对角元素为 Λ_1 的元素，且 $(D_1)_{n-k+1,n-k+1}=a=\frac{1}{n}(\lambda_{1,1}-\lambda_{1,2})+\lambda_{1,2}$。另一方面，考虑列表 $\Gamma=\Lambda_2\cup\{a\}$。由于 $a=\frac{1}{n}(\lambda_{1,1}-\lambda_{1,2})+\lambda_{1,2}\notin\Lambda_2$, Γ 至少有三个不同特征值。根据定理 3.1 的证明，我们构造对角矩阵 D_2，其对角元素为 Γ的元素，其中 $(D_2)_{k-r+2,k-r+2}=a$。因此，由定理 3.1 (iii.) 可知，矩阵 $B=RD_2R^{-1}$ 有一个与 a 对应的特征向量 u，其零元素有 $(k-r)$—个。最后，由引理 2 可得

$$M=\begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{b}\mathbf{u}^T \\ \mathbf{u}\mathbf{b}^T & B \end{bmatrix}\in\mathcal{S}(G(K_{n-k})),$$

且其谱为 Λ。 □

例4 设 $G(K_3)$ 为例 2 中给出的图。设 $\Lambda = \{7, -3^{[4]}, -5^{[4]}\}$。我们要构造一个矩阵 $C \in \mathcal{S}(G(K_3))$，其谱为 Λ。事实上，将 Λ 划分如下：

$$\Lambda = \{7, -3^{[3]}\} \cup \{-3, -5^{[4]}\} = \Lambda_1 \cup \Lambda_2.$$

注意，$14(7-(-3))+(-3) = -\frac{1}{2} \notin \Lambda_2$。我们构造矩阵

$$A = RD_1R^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & -1 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

其中 $D_1 = diag\{7, -3, -3, -3\}$。现在考虑列表 $\Gamma = \Lambda_2 \cup \{-\frac{1}{2}\}$。我们需要构造一个矩阵 B，其谱为 Γ，且有一个特征向量 $\mathbf{u}$，该向量有 $k - r = 4$-个与$-\frac{1}{2}$相关联的零元素。然后，我们选择对角矩阵 $D_2 = diag\{-3, -5, -5, -5, -5, -\frac{1}{2}\}$，其中 $(D_2)_{6,6} = -\frac{1}{2}$。因此，我们有

$$B = RD_2R^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -29 & -23 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ -23 & -29 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & -56 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & -56 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & -56 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & -56 \end{bmatrix},$$

它满足 $B\mathbf{u} = -\frac{1}{2}\mathbf{u}$，其中 $\mathbf{u}^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。最后，应用引理 2，我们得到矩阵

$$C = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{b}\mathbf{u}^T \\ \mathbf{u}\mathbf{b}^T & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5\sqrt{2}}{4} & -\frac{5\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5\sqrt{2}}{4} & -\frac{5\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5\sqrt{2}}{4} & -\frac{5\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5\sqrt{2}}{4} & \frac{5\sqrt{2}}{4} & \frac{5\sqrt{2}}{4} & -\frac{29}{12} & -\frac{23}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{5\sqrt{2}}{4} & -\frac{5\sqrt{2}}{4} & -\frac{5\sqrt{2}}{4} & -\frac{23}{12} & -\frac{29}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{14}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{14}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{14}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{14}{3} \end{bmatrix} \in \mathcal{S}(G(K_3)),$$

其谱为 Λ。

设 n 和 j 为给定的正整数，且 $j \leq n-2$，并考虑以下图族：

$$\mathcal{G}(i) = K_i \vee (K_j \cup K_{n-i-j}), \quad 1 \leq i \leq n-j-1. \tag{8}$$

将 $\mathcal{G}(i)$ 的顶点标记如下：先标记 K_j的顶点，再标记 K_i的顶点，最后标记 K^{n-i-j}的顶点，可得以下结果，它可以看作定理 3.3的一个特例：

推论 3.2 设 $\mathcal{G}(i)$ 是 (8) 中定义的图族。对于任意一个由 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ 个实数构成的列表，若其中至少含有三个不同元素，且至少两个元素的代数重数大于或等于 2，则存在一个矩阵 $M \in \mathcal{S}(\mathcal{G}(i))$，其谱为 Λ。

证明 由定理 3.3 可得：考虑 G_i，其中 $1 \leq i \leq n-j-1$，将其视为一个具有一个 $n-j$ 阶团和一个簇 (C, S) 的图，其中 $|C| = j$ 且 $|S| = i$。因此，对于每个$1 \leq i \leq n-j-1$，$\mathcal{G}(i)$ 可视为图 $G_i(K_j)$。□

例 5 令 $n = 9$、$j = 2$ 和 $\mathcal{G}(4) = K_4 \vee (K_2 \cup K_3)$ 为图 *2* 所示的图：

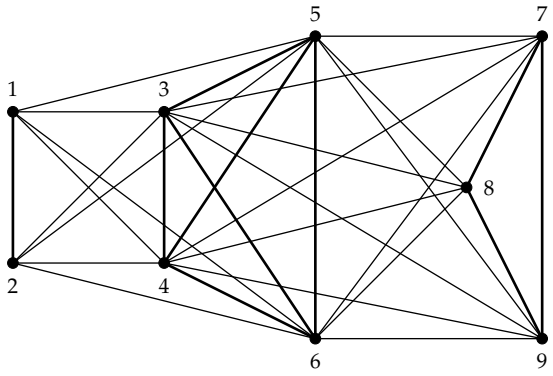


图 *2.* $G_{4,\ 2} = K_4 \vee (K_2 \cup K_3)$

注意，$\mathcal{G}(4) = K_4 \vee (K_2 \cup K_3) = G_4(K_2)$，其中 G_4 是一个图，它包含一个阶为 7 的团和一个簇 (C, S)，其中 $|C| = 2$ 和 $|S| = 4$。令 $\Lambda = \{8, -1^{[3]}, -2^{[5]}\}$。根据推论 *3.2*，我们构造一个矩阵 $M \in \mathcal{S}(\mathcal{G}(4))$，其谱为 Λ。事实上，将 Λ作如下划分：

$$\Lambda = \{8, -1^{[2]}\} \cup \{-1, -2^{[5]}\} = \Lambda_1 \cup \Lambda_2.$$

我们构造矩阵

$$A = RD_1R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} = (a_{ij}),$$

其谱为 Λ_1。此外，注意 $_{33} = 2 \not\in \Lambda_2$。接下来，我们考虑列表 $\Gamma = \Lambda_2 \cup \{2\}$，它有三个不同特征值，并选择 R（如 (4)）的阶为 7。我们构造矩阵

$$B = RD_2R^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{32}{21} & \frac{10}{21} & \frac{10}{21} & -\frac{6}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{10}{21} & -\frac{32}{21} & \frac{10}{21} & -\frac{6}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{10}{21} & \frac{10}{21} & -\frac{32}{21} & -\frac{6}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{6}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{8}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{13}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{13}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{13}{7} \end{bmatrix},$$

其中 $D_2 = diag\{-1,-2,-2,-2,2,-2,-2\}$。此外，$B\mathbf{u} = 2\mathbf{u}$，作为

$$\mathbf{u}^T = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

最后，应用引理2，我们得到矩阵

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{32}{21} & \frac{10}{21} & \frac{10}{21} & -\frac{6}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{10}{21} & -\frac{32}{21} & \frac{10}{21} & -\frac{6}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{10}{21} & \frac{10}{21} & -\frac{32}{21} & -\frac{6}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2} & -\frac{6}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{8}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{13}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{13}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{13}{7} \end{bmatrix} \in \mathcal{S}(\mathcal{G}(4)),$$

其谱为 Λ。

致谢。

A. I. Julio 的研究得到了智利北方天主教大学 VRIDT 036-2020、UCN 核心 VRIDT-083-2020 的资助。

利益冲突声明

不存在利益冲突。

参考文献

[1] B. Ahmadi, F. Alinaghipour, M. S. Cavers, SH. Fallat, K. Meagher, and SH. Nasserasr,《图的不同特征值的最小数量》，《电子线性代数期刊》，**26**： (2013年) 673–691。[2] W. Barrett, A. Lazenby, N. Malloy, C. Nelson, W. Sexton, R. Smith, J. Sinkovic, and T. Yang,《组合逆特征值问题：完全图与满足严格不等式的小图》，《电子线性代数期刊》，**26**：(2013年), 656-672。[3] W. Barrett, C. Nelson, J. Sinkovic, and T. Yang,《组合逆特征值问题 II：小图的所有情形》，《电子线性代数期刊》，**27**： (2014) 742-778。[4] W. Barrett, Sh. M. Fallat, H. Tracy Hall, L. Hogben, J. C.-H. Lin, and B. L. Shader.《强阿诺德性质及图的不同特征值最小数量的推广》，《电子组合学期刊》，**24(2)**：论文编号 2.40，28，(2017)。[5] W. Barrett, S. Butler, Sh. M. Fallat, H. Tracy Hall, L. Hogben, J. C.-H. Lin, B. L. Shader, and M. Young,《图的逆特征值问题：重数与子式》，《组合理论杂志 B 辑》，**142**： (2020) 276–306。[6] D. L. Boley and G. H. Golub,《矩阵逆特征值问题综述》，《逆问题》，**3**，第4期，(1987) 595-622。[7] D. M. Cardoso and O. Rojo,《具有簇的图上的边扰动：邻接、拉普拉斯和无符号拉普拉斯特征值》，Linear Algebra Appl.，**512**： (2017) 113-128。[8] R. C. Díaz, O. Rojo,《添加边对具有簇的图的距离拉普拉斯谱的影响》，《电子线性代数期刊》，第**35**卷，(2019) 第 511-523 页。[9] A. L. Duarte,《根据谱数据构造无环矩阵》，Linear Algebra Appl.，**113**(1989) 173–182。

[10] W. E. Ferguson, Jr，构造具有指定谱的雅可比矩阵和周期 *Jacobi* 矩阵，Math. Comp.，**35(152)**：1203–1220，1980。

[11] F. P. Gantmacher 和 M. G. Krein，振荡矩阵与核以及机械系统的微小振动。AMS Chelsea Publishing，普罗维登斯，罗得岛州，修订版，2002年。译本基于1941年的俄文原著，由 Alex Eremenko 翻译，Graham M. L. Gladwell 编订并作序。[12] Graham M. L. Gladwell。振动逆问题，固体力学及其应用**第119卷** 。Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特，第二版，2004年。[13] L. J. Gray 和 D. G. Wilson，由谱数据构造雅可比矩阵，Linear Algebra Appl.，**14(2)**：（1976年），131–134。[14] Ole H. Hald，雅可比矩阵的逆特征值问题，Linear Algebra Appl.，**14(1)** ：（1976年），63–85。[15] Keivan Hassani Monfared 和 Bryan L. Shader，构造具有给定图和指定交错谱数据的矩阵，Linear Algebra Appl.，**438(11)**：（2013年），4348–4358。[16] Harry Hochstadt，关于由谱数据构造雅可比矩阵，Linear Algebra Appl.，**8**：（1974年），435–446。[17] Charles R. Johnson、António Leal Duarte 和 Carlos M. Saiago 逆特征值问题与图为树的矩阵的特征值重数列表：广义星图和双广义星的情形，Linear Algebra Appl.，**373**：（2013年），311–330。组合矩阵理论会议（浦项，2002年）特刊。[18]J. C.-H. Lin、P. Oblak、H. Šmigoc，关于块图的逆特征值问题，arXiv:2012.12495v1 [math.CO] 23 2020年12月。[19] R. Merris，图的拉普拉斯矩阵：综述，Linear Algebra Appl.，**197/198** ：（1994年）143-176。[20] Helena Šmigoc，非负矩阵的逆特征值问题，Linear Algebra Appl.，**393**：（2004年），365-374。

Roberto C. Díaz
北方天主教大学数学系，智利安托法加斯塔安加莫斯大道0610号。电子邮件：*rdiaz01@ucn.cl*

Ana I. Julio
北方天主教大学数学系，智利安托法加斯塔安加莫斯大道0610号。电子邮件：*ajulio@ucn.cl*