arXiv:2303.09804v1 [math.GR] 17 Mar 2023

对称群虚扩张的交换子子群与晶体学商群

PRAVIN KUMAR、TUSHAR KANTA NAIK、NEHA NANDA 和 MAHENDER SINGH

ABSTRACT. 虚辫群 VB_n、虚双绳群 VT_n 和虚三元群 VL_n 都是对称群 S_n的扩张，其动机来自虚结理论中的 Alexander-Markov 对应。这些群到对称群 S_n 的自然满同态的核分别是纯虚辫群 VP_n、纯虚双生群 PVT_n 和纯虚三元群 PVL_n。本文研究这些群的交换子子群、纯子群和晶体学商群。我们给出纯虚三元群 PVL_n、 VT_n 的交换子子群$VT_n^{'}$ 以及 VL_n的交换子子群 $VL_n^{'}$ 的显式有限表示。我们的结果完善了对这些群的认识，但 $VB_n^{'}$除外，因为目前尚不清楚 $n \geq 4$是否存在有限表示。我们还证明 $VL_n/PVL_n^{'}$ 是一个晶体群，并明确构造了其中无穷多个挠元。

1. 引言

对于 $n \geq 2$，对称群 S_n 具有一个以$\{\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}\}$ 为生成元、并由以下定义关系构成的 Coxeter 表示:

(1) 对于 $1 \leq i \leq n-1, \quad \tau_i^2 = 1$;

(2) 对于 $|i-j|=1, \quad \tau_i\tau_j\tau_i = \tau_j\tau_i\tau_j$;

(3) 对于 $|\, i-j \,| \geq 2, \quad \tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i$ 。

从前述表示中每次省略类型为 (1)、(2) 或 (3) 的全部关系之一，可得到 S_n 的三个典范扩张，分别是辫群 B_n、双群 T_n 和三元群 L_n。

$$(1.0.1) B_n = \Big\langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} \;\mid\; \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \quad \text{for} \quad |i-j| \geq 2, \quad \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j \quad \text{for} \quad |i-j| = 1 \Big\rangle.$$

$$(1.0.2) T_n = \Big\langle s_1, s_2, \ldots, s_{n-1} \;\mid\; s_i^2 = 1 \quad \text{for} \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad s_is_j = s_js_i \quad \text{for} \quad |i-j| \geq 2 \Big\rangle.$$

$$(1.0.3) L_n = \Big\langle y_1, y_2, \ldots, y_{n-1} \;\mid\; y_i^2 = 1 \quad \text{for} \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad y_iy_jy_i = y_jy_iy_j \quad \text{for} \quad |i-j| = 1 \Big\rangle.$$

“双绳群”和“三元群”这两个术语最早出现在 Khovanov 关于 $K(\pi, 1)$ 子空间配置的研究 [20]中。自然满同态的核

$$B_n \to S_n \quad \text{given by} \quad \sigma_i \mapsto \tau_i,$$

数学主题分类 2020年. 主要分类号：20F55、20H15；次要分类号：20F36。关键词与短语： 比伯巴赫群、晶体群、Reidemeister-Schreier 方法、虚辫群、虚三元群、虚双群。

$$T_n \to S_n \quad \text{given by} \quad s_i \mapsto \tau_i$$

and

$$L_n \to S_n \quad \text{given by} \quad y_i \mapsto \tau_i$$

分别是纯辫群 P_n、纯双绳群 PT_n 和纯三元群PL_n。众所周知，纯辫群的Eilenberg–MacLane空间是复超平面配置的补空间。纯双绳群和纯三元群是纯辫群的实数对应物，也存在合适的余维二子空间配置作为其 Eilenberg–MacLane空间 [20]。此外，这些群具有与辫群相似的拓扑解释，并在某些适当的纽结理论中扮演 Alexander-Markov 对应下的群的角色。双生群与二球面上的涂鸦有关。Fenn 和 Taylor [11] 将涂鸦引入为二球面上有限个简单闭曲线的集合，且曲线之间不存在三重或更高阶交点。允许曲线自交后，Khovanov [18] 将这一概念扩展为闭定向曲面上有限个闭曲线的集合，且不存在三重或更高阶交点。类似地，三元群与称为面条的拓扑对象有关。在二球面上固定一个带奇点的余维一叶状结构后，面条是二球面上闭曲线的一个集合，满足任意两个交点都不属于该叶状结构的同一叶片、不存在四重交点，并且任何交点都不位于叶状结构的奇点上。

Khovanov [18] 通过证明二球面上的每个定向涂鸦都是某个双绳的闭合，证明了Alexander定理的一个类比。Gotin [15], 证明了这一背景下的Markov定理的一个类比，尽管这一思想已隐含于 [19]中。对于较小的 n 值，纯双绳群 PT_n 的结构已得到充分理解[6, 13, 24], ，但理解一般情形似乎颇具挑战（参见 [23] 了解一些进展）。关于三元群， [26] 已证明，对于 $n \geq 4$，纯三元群 PL_n 是有限秩非阿贝尔自由群。

虚纽结理论是经典纽结理论的一种广泛推广，由 Kauffman 于 [16] 年提出。受虚结理论中著名的 Alexander-Markov 对应启发，前文提到的 S_n 的三种扩展都可以推广到相应的虚版本，即虚辫群 VB_n [17]、虚双绳群 VT_n [6, 27] 和虚三元群 VL_n（我们将在下文介绍）。

$$\begin{aligned}(1.0.4)\, VB_n = \Big\langle & \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1} \mid \rho_i^2 = 1 \quad \text{for} \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ & \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \quad \rho_i\rho_j = \rho_j\rho_i, \quad \sigma_i\rho_j = \rho_j\sigma_i \quad \text{for} \quad |i-j| \geq 2, \\ & \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j, \quad \rho_i\rho_j\rho_i = \rho_j\rho_i\rho_j, \quad \rho_i\sigma_j\rho_i = \rho_j\sigma_i\rho_j \quad \text{for} \quad |i-j| = 1 \Big\rangle.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1.0.5) VT_n = \Big\langle & s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1} \mid s_i^2 = 1, \quad \rho_i^2 = 1 \quad \text{for} \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ & s_is_j = s_js_i, \quad \rho_i\rho_j = \rho_j\rho_i, \quad s_i\rho_j = \rho_js_i \quad \text{for} \quad |i-j| \geq 2, \\ & \rho_i\rho_j\rho_i = \rho_j\rho_i\rho_j, \quad \rho_is_j\rho_i = \rho_js_i\rho_j \quad \text{for} \quad |i-j| = 1 \Big\rangle.\end{aligned}$$

$$(1.0.6) VL_n = \Big\langle y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1} \mid y_i^2 = 1, \quad \rho_i^2 = 1 \quad \text{for} \quad 1 \le i \le n-1,$$
$$\rho_i\rho_j = \rho_j\rho_i, \quad y_i\rho_j = \rho_j y_i \quad \text{for} \quad |i-j| \ge 2,$$
$$y_iy_jy_i = y_jy_iy_j, \quad \rho_i\rho_j\rho_i = \rho_j\rho_i\rho_j, \quad \rho_iy_j\rho_i = \rho_jy_i\rho_j \quad \text{for} \quad |i-j| = 1\Big\rangle.$$

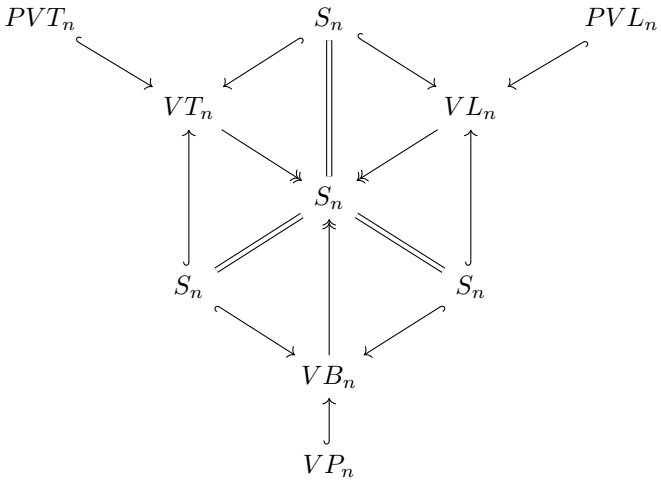
存在自然满同态

$$VB_n \to S_n \quad \text{given by} \quad \sigma_i, \rho_i \mapsto \tau_i,$$
$$VT_n \to S_n \quad \text{given by} \quad s_i, \rho_i \mapsto \tau_i$$

and

$$VL_n \to S_n \quad \text{given by} \quad y_i, \rho_i \mapsto \tau_i.$$

这些满同态的核分别是纯虚辫群 VP_n、纯虚双生群 PVT_n和纯虚三元群 PVL_n。虚群及其纯子群构成如下交换图。



本文研究虚辫群、虚双生群和虚三元群的交换子子群、纯子群，以及某些具有几何动机的商群。根据 [5, 定理 1.1] ，虚辫群 VB_n 的交换子子群VB_n' 在 $n \ge 4$时由 $(2n-3)$ 个元素生成，而VB_3' 则由无穷多个元素生成。目前尚不清楚，当 $n \ge 4$ 时， VB_n' 是否有限表示。本文给出了 VT_n 的交换子子群 VT_n' 的精确有限表示（定理 2.2），以及 VL_n 的交换子子群 VL_n' 的精确有限表示（定理 3.2）。Bardakov 已给出了纯虚辫群的有限表示 [2]。文献 [25] 已证明，纯虚双生群 PVT_n 是不可约右角阿廷群，并且也给出了它的有限表示。我们使用 Reidemeister-Schreier 方法推导出纯虚三元群 PVL_n 的有限表示（定理 4.2）。这使我们对虚设定下这些群的理解更加完整。作为推论，我们得出： VT_n 和 VL_n是剩余幂零的，当且仅当 $n = 2$ （推论 2.4 和 3.4）。

晶体群在研究欧几里得空间的等距变换群中发挥着关键作用。事实上，无挠晶体学

群（称为比伯巴赫群）与紧致平坦黎曼流形类之间存在对应关系[9, 定理 2.1。1]。关于虚辫群和虚双生群的晶体学商群，已有文献 [28]进行研究。本文考察虚三元群的情形。更确切地说，我们证明，对于 $n \geq 2$， VL_n/PVL_n' 是维数为 $n(n-1)/2$ 的晶体群（定理 5.4），且其中含有无穷多个挠元（推论 5.6）。事实上，我们给出了在 VL_n/PVL_n'中构造无穷多个挠元的明确方法。

我们将群 G 的下中心列的第 n项记为 $\gamma_n(G)$，其中$\gamma_1(G) = G$ 和 $\gamma_2(G) = G'$ 是 G的交换子子群。

2. Presentation of commutator subgroup of virtual twin group

本节中，我们给出 VT_n的交换子子群VT_n' 的有限表示。这是通过 VT_n的约化表示实现的，我们先证明这一点。

定理 2.1. 虚双绳群 VT_n $(n \geq 3)$ 具有如下约化表示：

(1) $VT_3 = \langle s_1, \rho_1, \rho_2 \mid s_1^2 = \rho_1^2 = \rho_2^2 = (\rho_1\rho_2)^3 = 1\rangle$。*(2)* 对于 $n \geq 4$， VT_n 具有如下由生成集 $\{s_1, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}\}$ 及以下定义关系给出的表示：

$$s_1^2 = 1, \tag{2.0.1}$$

$$\rho_i^2 = 1 \quad for \quad 1 \leq i \leq n-1, \tag{2.0.2}$$

$$\rho_i\rho_j = \rho_j\rho_i \quad for \quad |i-j| \geq 2, \tag{2.0.3}$$

$$\rho_i\rho_{i+1}\rho_i = \rho_{i+1}\rho_i\rho_{i+1} \quad for \quad 1 \leq i \leq n-2, \tag{2.0.4}$$

$$\rho_i s_1 = s_1\rho_i \quad for \quad i \geq 3, \tag{2.0.5}$$

$$(s_1\rho_2\rho_1\rho_3\rho_2)^4 = 1. \tag{2.0.6}$$

证明。 $n = 3$ 的情形显然。对于 $n \geq 4$，我们首先证明 VT_n 的生成集可以缩减为 $\{s_1, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}\}$。

断言 1：对于 $i \geq 1$， $s_{i+1} = (\rho_i\rho_{i-1}\ldots\rho_2\rho_1)(\rho_{i+1}\rho_i\ldots\rho_3\rho_2)s_1(\rho_2\rho_3\ldots\rho_i\rho_{i+1})(\rho_1\rho_2\ldots\rho_{i-1}\rho_i)$。

情形 $i = 1$ 由关系得出

$$\rho_i s_j \rho_i = \rho_j s_i \rho_j \quad \text{for} \quad |i-j| = 1. \tag{2.0.7}$$

假设命题对 i 成立，并对 $j = i+1$ 使用关系 (2.0.7)，得到

$$s_{i+1} = \rho_i\rho_{i+1}(\rho_{i-1}\rho_{i-2}\ldots\rho_2\rho_1)(\rho_i\rho_{i-1}\ldots\rho_3\rho_2)s_1(\rho_2\rho_3\ldots\rho_{i-1}\rho_i)(\rho_1\rho_2\ldots\rho_{i-2}\rho_{i-1})\rho_{i+1}\rho_i.$$

现在，由关系 (2.0.3) 得到

$$s_{i+1} = (\rho_i\rho_{i-1}\ldots\rho_2\rho_1)(\rho_{i+1}\rho_i\ldots\rho_3\rho_2)s_1(\rho_2\rho_3\ldots\rho_i\rho_{i+1})(\rho_1\rho_2\ldots\rho_{i-1}\rho_i), \tag{2.0.8}$$

这正是所需结果。因此，我们可以消去 $i \geq 2$ 的生成元 s_i。

接下来，我们证明，涉及 s_i 的 VT_n 对于 $i \geq 2$ 的关系可以从定理陈述中列出的关系推导出来。

断言 2：对于 $1 \leq i \leq n-2$ 的 $\rho_i s_{i+1} \rho_i = \rho_{i+1} s_i \rho_{i+1}$ 关系可以从关系式 (2.0.2) 和 (2.0.3) 推导出来。
利用 (2.0.8)，我们有

$$\begin{aligned}
\rho_i s_{i+1} \rho_i &= \rho_i(\rho_i \dots \rho_1)(\rho_{i+1} \dots \rho_2) s_1 (\rho_2 \dots \rho_{i+1})(\rho_1 \dots \rho_i)\rho_i \\
&= (\rho_{i-1} \dots \rho_1)\rho_{i+1}(\rho_i \dots \rho_2) s_1 (\rho_2 \dots \rho_i)\rho_{i+1}(\rho_1 \dots \rho_{i-1}) \\
&= \rho_{i+1}(\rho_{i-1} \dots \rho_1)(\rho_i \dots \rho_2) s_1 (\rho_2 \dots \rho_i)(\rho_1 \dots \rho_{i-1})\rho_{i+1} \\
&= \rho_{i+1} s_i \rho_{i+1},
\end{aligned}$$

这正是所需的。

断言 3：关系 $s_i \rho_j = \rho_j s_i$ for $|i-j| \geq 2$ 可以利用关系 (2.0.3)、(2.0.4) 和 (2.0.5) 恢复。

若 $j \leq i-2$，则有

$$\begin{aligned}
& s_i \rho_j \\
=\ & (\rho_{i-1}\rho_{i-2} \dots \rho_2\rho_1)(\rho_i\rho_{i-1} \dots \rho_3\rho_2) s_1 (\rho_2\rho_3 \dots \rho_{i-1}\rho_i)(\rho_1\rho_2 \dots \rho_{i-2}\rho_{i-1})\rho_j \\
=\ & (\rho_{i-1}\rho_{i-2} \dots \rho_2\rho_1)(\rho_i\rho_{i-1} \dots \rho_3\rho_2) s_1 (\rho_2 \dots \rho_{i-1}\rho_i)(\rho_1\rho_2 \dots \rho_j\rho_{j+1}\rho_j \dots \rho_{i-1}) \ \text{(By (2.0.3))} \\
=\ & (\rho_{i-1}\rho_{i-2} \dots \rho_2\rho_1)(\rho_i\rho_{i-1} \dots \rho_3\rho_2) s_1 (\rho_2 \dots \rho_{i-1}\rho_i)(\rho_1 \dots \rho_{j+1}\rho_j\rho_{j+1} \dots \rho_{i-1}) \ \text{(By (2.0.4))} \\
=\ & (\rho_{i-1}\rho_{i-2} \dots \rho_2\rho_1)(\rho_i\rho_{i-1} \dots \rho_3\rho_2) s_1 (\rho_2 \dots \rho_{j+1}\rho_{j+2}\rho_{j+1} \dots \rho_i)(\rho_1 \dots \rho_{i-1}) \ \text{(By (2.0.3))} \\
=\ & (\rho_{i-1}\rho_{i-2} \dots \rho_2\rho_1)(\rho_i\rho_{i-1} \dots \rho_3\rho_2) s_1 (\rho_2 \dots \rho_{j+2}\rho_{j+1}\rho_{j+2} \dots \rho_i)(\rho_1 \dots \rho_{i-1}) \ \text{(By (2.0.4))} \\
=\ & (\rho_{i-1}\rho_{i-2} \dots \rho_2\rho_1)(\rho_i \dots \rho_{j+2}\rho_{j+1}\rho_{j+2} \dots \rho_2) s_1 (\rho_2 \dots \rho_i)(\rho_1 \dots \rho_{i-1}) \ \text{(By (2.0.3) and (2.0.5))} \\
=\ & (\rho_{i-1}\rho_{i-2} \dots \rho_2\rho_1)(\rho_i \dots \rho_{j+1}\rho_{j+2}\rho_{j+1} \dots \rho_2) s_1 (\rho_2 \dots \rho_i)(\rho_1 \dots \rho_{i-1}) \ \text{(By (2.0.4))} \\
=\ & (\rho_{i-1} \dots \rho_{j+1}\rho_j\rho_{j+1} \dots \rho_1)(\rho_i \dots \rho_2) s_1 (\rho_2 \dots \rho_i)(\rho_1 \dots \rho_{i-1}) \ \text{(By (2.0.3))} \\
=\ & (\rho_{i-1} \dots \rho_j\rho_{j+1}\rho_j \dots \rho_1)(\rho_i \dots \rho_2) s_1 (\rho_2 \dots \rho_i)(\rho_1 \dots \rho_{i-1}) \ \text{(By (2.0.4))} \\
=\ & \rho_j(\rho_{i-1} \dots \rho_1)(\rho_i \dots \rho_2) s_1 (\rho_2 \dots \rho_i)(\rho_1 \dots \rho_{i-1}) \ \text{(By (2.0.3))} \\
=\ & \rho_j s_i,
\end{aligned}$$

这正是所需的。若 $j \geq i+2$，则该断言可由关系 (2.0.3) 和 (2.0.5) 得出。

断言 4：$s_i s_j = s_j s_i$ $1 \leq i \leq j-2 \leq n-3$ 的关系可以从关系 (2.0.1) 到 (2.0.6) 中恢复。

为清楚起见，我们将使用所引用关系进行修改的项加下划线。首先，我们考虑 $i=1$，此时有

$$\begin{aligned}
& s_1 s_j \\
=\ & \underline{s_1(\rho_{j-1} \dots \rho_1)}(\rho_j \dots \rho_2) s_1 \underline{(\rho_2\rho_3 \dots \rho_j)}(\rho_1\rho_2 \dots \rho_{j-1}) \\
=\ & (\rho_{j-1} \dots \rho_3)\underline{s_1\rho_2\rho_1(\rho_j \dots \rho_3\rho_2)} s_1\rho_2\rho_1\rho_3\rho_2(\rho_4 \dots \rho_j)(\rho_3 \dots \rho_{j-1}) \\
=\ & (\rho_{j-1} \dots \rho_3)(\rho_j \dots \rho_4)(s_1\rho_2\rho_1\rho_3\rho_2)^2(\rho_4 \dots \rho_j)(\rho_3 \dots \rho_{j-1}) \\
=\ & (\rho_{j-1} \dots \rho_3)(\rho_j \dots \rho_4)(\rho_2\rho_3\rho_1\rho_2 s_1)^2(\rho_4 \dots \rho_j)(\rho_3 \dots \rho_{j-1}) \\
=\ & (\rho_{j-1} \dots \rho_1)(\rho_j \dots \rho_2) s_1 \underline{(\rho_2\rho_3 \dots \rho_j)}(\rho_1\rho_2 \dots \rho_{j-1}) s_1 \\
=\ & s_j s_1.
\end{aligned}$$

接下来，我们假设 $i \geq 2$。于是有

$$
\begin{aligned}
& s_i s_j \\
= \; & (\rho_{i-1}\dots\rho_1)(\rho_i\dots\rho_2)s_1(\rho_2\dots\rho_i)(\rho_1\dots\rho_{i-1})(\rho_{j-1}\dots\rho_{i+2}\rho_{i+1}\rho_i\dots\rho_1)(\rho_j\dots\rho_2)s_1 \\
& (\rho_2\dots\rho_j)(\rho_1\dots\rho_{j-1}) \\
= \; & (\rho_{j-1}\dots\rho_{i+2})(\rho_{i-1}\dots\rho_1)(\rho_i\dots\rho_2)s_1(\rho_2\dots\rho_i)\rho_{i+1}(\rho_{1\dots}\rho_{i-1})(\rho_i\dots\rho_1)(\rho_j\dots\rho_2)s_1 \\
& (\rho_2\dots\rho_j)(\rho_1\dots\rho_{j-1}) \quad \text{(By (2.0.3))} \\
= \; & (\rho_{j-1}\dots\rho_{i+2})(\rho_{i-1}\dots\rho_1)(\rho_i\dots\rho_2)s_1(\rho_2\dots\rho_i\rho_{i+1})(\rho_i\dots\rho_2\rho_1\rho_2\dots\rho_i)(\rho_j\dots\rho_2)s_1 \\
& (\rho_2\dots\rho_j)(\rho_1\dots\rho_{j-1}) \quad \text{(By (2.0.4))} \\
= \; & (\rho_{j-1}\dots\rho_{i+2})(\rho_{i-1}\dots\rho_1)(\rho_i\dots\rho_2)s_1(\rho_{i+1}\dots\rho_3\rho_2\rho_3\dots\rho_{i+1})(\rho_1\dots\rho_i) \\
& (\rho_j\dots\rho_{i+3}\rho_{i+2}\rho_{i+1}\dots\rho_2)s_1(\rho_2\dots\rho_j)(\rho_1\dots\rho_{j-1}) \quad \text{(By (2.0.4))} \\
= \; & (\rho_{j-1}\dots\rho_{i+2})(\rho_j\dots\rho_{i+3})(\rho_{i-1}\dots\rho_1)(\rho_i\dots\rho_2)(\rho_{i+1}\dots\rho_3)s_1(\rho_2\dots\rho_{i+1})\rho_{i+2} \\
& (\rho_1\rho_2\dots\rho_i)(\rho_{i+1}\rho_i\dots\rho_2)s_1(\rho_2\dots\rho_j)(\rho_1\dots\rho_{j-1}) \quad \text{(By (2.0.3) and (2.0.5))} \\
= \; & (\rho_{j-1}\dots\rho_{i+2})(\rho_j\dots\rho_{i+3})(\rho_{i-1}\dots\rho_1)(\rho_i\dots\rho_2)(\rho_{i+1}\dots\rho_3)s_1(\rho_2\dots\rho_{i+2}) \\
& \rho_1(\rho_{i+1}\dots\rho_3\rho_2\rho_3\dots\rho_{i+1})s_1(\rho_2\dots\rho_j)(\rho_1\dots\rho_{j-1}) \quad \text{(By (2.0.4))} \\
= \; & (\rho_{j-1}\dots\rho_{i+2})(\rho_j\dots\rho_{i+3})(\rho_{i-1}\dots\rho_1)(\rho_i\dots\rho_2)(\rho_{i+1}\dots\rho_3)s_1(\rho_2\rho_3\dots\rho_{i+2}) \\
& (\rho_{i+1}\dots\rho_3)\rho_1\rho_2 s_1(\rho_3\dots\rho_{i+1})(\rho_2\dots\rho_j)(\rho_1\dots\rho_{j-1}) \quad \text{(By (2.0.3) and (2.0.5))} \\
= \; & (\rho_{j-1}\dots\rho_{i+2})(\rho_j\dots\rho_{i+3})(\rho_{i-1}\dots\rho_1)(\rho_i\dots\rho_2)(\rho_{i+1}\dots\rho_3)s_1\rho_2(\rho_{i+2}\dots\rho_4\rho_3\rho_4\dots\rho_{i+2}) \\
& \rho_1\rho_2 s_1(\rho_3\dots\rho_{i+1})(\rho_2\dots\rho_j)(\rho_1\dots\rho_{j-1}) \quad \text{(By (2.0.4))} \\
= \; & (\rho_{j-1}\dots\rho_{i+2})(\rho_j\dots\rho_{i+3})(\rho_{i-1}\dots\rho_1)(\rho_i\dots\rho_2)(\rho_{i+1}\dots\rho_3)(\rho_{i+2}\dots\rho_4) \\
& s_1\rho_2\rho_3\rho_1\rho_2 s_1(\rho_4\dots\rho_{i+2})(\rho_3\dots\rho_{i+1})(\rho_2\dots\rho_j)(\rho_1\dots\rho_{j-1}) \quad \text{(By (2.0.3) and (2.0.5))}.
\end{aligned}
$$

注意到 $\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \rangle \cong S_n$，不难看出 **(2.0.3)** 和 **(2.0.4)** 给出

$$
\begin{aligned}
(2.0.9) \qquad & (\rho_4\dots\rho_{i+2})(\rho_3\dots\rho_{i+1})(\rho_2\dots\rho_i\rho_{i+1}\dots\rho_j)(\rho_1\dots\rho_{i-1}\rho_i\dots\rho_{j-1}) \\
= \; & \rho_2\rho_1\rho_3\rho_2(\rho_4\rho_3\rho_2\rho_1)\dots(\rho_{i+2}\rho_{i+1}\rho_i\rho_{i-1})(\rho_{i+3}\dots\rho_j)(\rho_{i+2}\dots\rho_{j-1}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2.0.10) \qquad & (\rho_4\rho_3\rho_2\rho_1)\dots(\rho_{i+2}\rho_{i+1}\rho_i\rho_{i-1}) \\
= \; & (\rho_4\dots\rho_{i+2})(\rho_3\dots\rho_{i+1})(\rho_2\dots\rho_i)(\rho_1\dots\rho_{i-1}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2.0.11) \qquad & (\rho_{i+1}\dots\rho_3)(\rho_{i+2}\dots\rho_4)(\rho_2\rho_3\dots\rho_j)(\rho_1\dots\rho_{j-1}) \\
= \; & (\rho_2\dots\rho_j)(\rho_1\dots\rho_{j-1})(\rho_{i-1}\dots\rho_1)(\rho_i\dots\rho_2).
\end{aligned}
$$

利用 (2.0.9)，我们可以写成

$$s_i s_j = (\rho_{j-1}\dots\rho_{i+2})(\rho_j\dots\rho_{i+3})(\rho_{i-1}\dots\rho_1)(\rho_i\dots\rho_2)(\rho_{i+1}\dots\rho_3)(\rho_{i+2}\dots\rho_4)s_1(\rho_2\rho_3\rho_1\rho_2 s_1\rho_2\rho_1\rho_3\rho_2)(\rho_4\rho_3\rho_2\rho_1)\dots(\rho_{i+2}\rho_{i+1}\rho_i\rho_{i-1})(\rho_{i+3}\dots\rho_j)(\rho_{i+2}\dots\rho_{j-1}) = (\rho_{j-1}\dots\rho_{i+2})(\rho_j\dots\rho_{i+3})(\rho_{i-1}\dots\rho_1)(\rho_i\dots\rho_2)(\rho_{i+1}\dots\rho_3)(\rho_{i+2}\dots\rho_4)(\rho_2\rho_1\rho_3\rho_2 s_1\rho_2\rho_1\rho_3\rho_2)s_1(\rho_4\rho_3\rho_2\rho_1)\dots(\rho_{i+2}\rho_{i+1}\rho_i\rho_{i-1})(\rho_{i+3}\dots\rho_j)(\rho_{i+2}\dots\rho_{j-1})$$ (根据 (2.0.6))

$$= (\rho_{j-1}\dots\rho_{i+2})(\rho_j\dots\rho_{i+3})(\rho_{i-1}\dots\rho_1)(\rho_i\dots\rho_2)(\rho_{i+1}\dots\rho_3\rho_2\rho_1)(\rho_{i+2}\dots\rho_4\rho_3\rho_2)s_1\rho_2\rho_1\rho_3\rho_2 s_1(\rho_4\dots\rho_{i+2})(\rho_3\dots\rho_{i+1})(\rho_2\dots\rho_i)(\rho_1\dots\rho_{i-1})(\rho_{i+3}\dots\rho_j)(\rho_{i+2}\dots\rho_{j-1})$$ (根据 (2.0.3)、(2.0.5) 和 (2.0.10))

$$= (\rho_{j-1}\dots\rho_{i+2})(\rho_j\dots\rho_{i+3})(\rho_{i-1}\dots\rho_1)(\rho_i\dots\rho_2)(\rho_{i+1}\dots\rho_3\rho_2\rho_1)(\rho_{i+2}\dots\rho_4\rho_3\rho_2)s_1\rho_2\rho_1\rho_3\rho_2 s_1(\rho_4\dots\rho_{i+2}\rho_{i+3}\dots\rho_j)(\rho_3\dots\rho_{i+1})(\rho_2\dots\rho_i)(\rho_1\dots\rho_{i-1})(\rho_{i+2}\dots\rho_{j-1})$$ (根据 (2.0.3))

$$= (\rho_{j-1}\dots\rho_{i+2})(\rho_j\dots\rho_{i+3})(\rho_{i-1}\dots\rho_1)(\rho_i\dots\rho_2)(\rho_{i+1}\dots\rho_3\rho_2\rho_1)(\rho_{i+2}\dots\rho_4\rho_3\rho_2)s_1(\rho_2\rho_3\rho_4\dots\rho_{i+2}\rho_{i+3}\dots\rho_j)(\rho_1\rho_2\dots\rho_{i+1}\rho_{i+2}\dots\rho_{j-1})s_1(\rho_2\dots\rho_i)(\rho_1\dots\rho_{i-1})$$ (根据 (2.0.3) 和 (2.0.5))

$$= (\rho_{j-1}\dots\rho_{i+2})(\rho_j\dots\rho_{i+3})(\rho_{i-1}\dots\rho_1)(\rho_i\dots\rho_2)(\rho_{i+1}\dots\rho_3)(\rho_{i+2}\dots\rho_4)(\rho_2\rho_1\rho_3\rho_2)s_1(\rho_2\rho_3\rho_4\dots\rho_{i+2}\rho_{i+3}\dots\rho_j)(\rho_1\rho_2\dots\rho_{i+1}\rho_{i+2}\dots\rho_{j-1})s_1(\rho_2\dots\rho_i)(\rho_1\dots\rho_{i-1})$$ (根据 (2.0.3))

$$= (\rho_{j-1}\dots\rho_{i+2})(\rho_j\dots\rho_{i+3})(\rho_{i-1}\rho_i\rho_{i+1}\rho_{i+2})\dots(\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4)(\rho_2\rho_1\rho_3\rho_2)s_1(\rho_2\dots\rho_j)(\rho_1\dots\rho_{j-1})s_1(\rho_2\dots\rho_i)(\rho_1\dots\rho_{i-1})$$ (根据 (2.0.10))

$$\dots\dots\dots = (\rho_{j-1}\dots\rho_{i+2})\rho_{i+1}(\rho_j\dots\rho_{i+3})(\rho_{i-1}\rho_i\rho_{i+1}\rho_{i+2})\dots(\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4)(\rho_1\rho_3\rho_2)s_1(\rho_2\dots\rho_j)(\rho_1\dots\rho_{j-1})s_1(\rho_2\dots\rho_i)(\rho_1\dots\rho_{i-1})$$

$$\dots\dots\dots = (\rho_{j-1}\dots\rho_{i+2})\rho_{i+1}\rho_i(\rho_j\dots\rho_{i+3})(\rho_{i-1}\rho_i\rho_{i+1}\rho_{i+2})\dots(\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4)(\rho_3\rho_2)s_1(\rho_2\dots\rho_j)(\rho_1\dots\rho_{j-1})s_1(\rho_2\dots\rho_i)(\rho_1\dots\rho_{i-1})$$

$$\dots\dots\dots = (\rho_{j-1}\dots\rho_i)(\rho_j\dots\rho_{i+3})\rho_{i+2}(\rho_{i-1}\rho_i\rho_{i+1}\rho_{i+2})\dots(\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4)\rho_2 s_1(\rho_2\dots\rho_j)(\rho_1\dots\rho_{j-1})s_1(\rho_2\dots\rho_i)(\rho_1\dots\rho_{i-1})$$

$$\dots\dots\dots = (\rho_{j-1}\dots\rho_i)(\rho_j\dots\rho_{i+3})\rho_{i+2}\rho_{i+1}(\rho_{i-1}\rho_i\rho_{i+1}\rho_{i+2})\dots(\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4)s_1(\rho_2\dots\rho_j)(\rho_1\dots\rho_{j-1})s_1(\rho_2\dots\rho_i)(\rho_1\dots\rho_{i-1})$$

$$= (\rho_{j-1}\dots\rho_i)(\rho_j\dots\rho_{i+1})(\rho_{i-1}\dots\rho_1)(\rho_i\dots\rho_2)(\rho_{i+1}\dots\rho_3)(\rho_{i+2}\dots\rho_4)s_1(\rho_2\dots\rho_j)(\rho_1\dots\rho_{j-1})s_1(\rho_2\dots\rho_i)(\rho_1\dots\rho_{i-1})$$ (根据 (2.0.10))

$$= (\rho_{j-1}\dots\rho_1)(\rho_j\dots\rho_2)s_1(\rho_{i+1}\dots\rho_3)(\rho_{i+2}\dots\rho_4)(\rho_2\dots\rho_j)(\rho_1\dots\rho_{j-1})s_1(\rho_2\dots\rho_i)(\rho_1\dots\rho_{i-1})$$ (根据 (2.0.3) 和 (2.0.5))

$$= (\rho_{j-1}\dots\rho_1)(\rho_j\dots\rho_2)s_1(\rho_2\dots\rho_j)(\rho_1\dots\rho_{j-1})(\rho_{i-1}\dots\rho_1)(\rho_i\dots\rho_2)s_1(\rho_2\dots\rho_i)(\rho_1\dots\rho_{i-1})$$ (根据 (2.0.11))

$$= s_j s_i.$$

这就完成了该定理的证明。 □

我们的主要计算工具是 Reidemeister-Schreier 方法 [22, 定理 2.6]。给定群 $G = \langle S \mid R\rangle$ 的子群 H，我们固定一组陪集代表元的 Schreier 系统 Λ，它们代表 H 在 G 中的陪集。对于元素 $w \in G$，令 $\overline{w}$ 表示 w 在 Schreier 集 Λ 中所属陪集的唯一陪集代表元。于是，根据 Reidemeister-Schreier 定理，子群 H 有如下生成集表示

$$\left\{\gamma(\mu, a) := (\mu a)(\overline{\mu a})^{-1} \mid \mu \in \Lambda \text{ and } a \in S\right\}$$

以及定义关系集

$$\{\tau\left(\mu r \mu^{-1}\right) \mid \mu \in \Lambda \text{ and } r \in R\}.$$

这里，τ 是改写过程，也就是说，给定某个 $g_i \in S$ 的 $g = g_1 g_2 \dots g_k \in G$，我们有

$$\tau(g) = \gamma(1, g_1)\gamma(\overline{g_1}, g_2)\cdots\gamma(\overline{g_1 g_2 \dots g_{k-1}}, g_k).$$

现在我们利用定理 2.1 和 Reidemeister-Schreier 方法，给出 $n \geq 2$ 的 VT_n' 表示。由于 VT_n 的阿贝尔化同构于阶为 4 的初等阿贝尔 2-群，我们可以取陪集代表元的 Schreier 系统为

$$\mathrm{M} = \{1, s_1, \rho_1, s_1\rho_1\}.$$

根据定理 2.1，我们取 $S = \{s_1, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}\}$ 作为 VT_n 的生成集。

的生成元VT_n'： VT_n' 的生成集 $\{\gamma(\mu,\ a) \mid \mu \in \mathrm{M}\ \ a \in S\}$ 可明确确定。更确切地说，对于每个 $2 \leq i \leq n-1$，我们有

$$\begin{aligned}
&\gamma(1, s_1) = s_1(\overline{s_1})^{-1} = 1, && \gamma(\rho_1, s_1) = \rho_1 s_1(\overline{\rho_1 s_1})^{-1} = (\rho_1 s_1)^2,\\
&\gamma(1, \rho_1) = \rho_1(\overline{\rho_1})^{-1} = 1, && \gamma(\rho_1, \rho_1) = \rho_1\rho_1(\overline{\rho_1\rho_1})^{-1} = 1,\\
&\gamma(1, \rho_i) = \rho_i(\overline{\rho_i})^{-1} = \rho_i\rho_1, && \gamma(\rho_1, \rho_i) = \rho_1\rho_i(\overline{\rho_1\rho_i})^{-1} = \rho_1\rho_i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\gamma(s_1, s_1) = s_1 s_1(\overline{s_1 s_1})^{-1} = 1, && \gamma(s_1\rho_1, s_1) = s_1\rho_1 s_1(\overline{s_1\rho_1 s_1})^{-1} = (s_1\rho_1)^2,\\
&\gamma(s_1, \rho_1) = s_1\rho_1(\overline{s_1\rho_1})^{-1} = 1, && \gamma(s_1\rho_1, \rho_1) = s_1\rho_1\rho_1(\overline{s_1\rho_1\rho_1})^{-1} = 1,\\
&\gamma(s_1, \rho_i) = s_1\rho_i(\overline{s_1\rho_i})^{-1} = s_1\rho_i\rho_1 s_1, && \gamma(s_1\rho_1, \rho_i) = s_1\rho_1\rho_i(\overline{s_1\rho_1\rho_i})^{-1} = (s_1\rho_i\rho_1 s_1)^{-1}.
\end{aligned}$$

对于 $2 \leq i \leq n-1$，令

$$x_i := \rho_i\rho_1, \quad z_i := s_1\rho_i\rho_1 s_1 \quad \text{and} \quad w := (\rho_1 s_1)^2,$$

我们看到，VT_n' 由以下集合生成

$$\{x_i, z_i, w \mid i = 2, 3, \dots, n-1\}.$$

中的关系 VT_n'： 现在，我们确定 VT_n 的表示中由定理 2.1 给出的每个关系在 VT_n' 中对应的关系。

(1) 首先，我们考虑关系 $s_1^2=1$。然后得到

$$\begin{aligned}
\tau(1s_1s_11) &= \gamma(1,s_1)\gamma(\overline{s_1},s_1)=1,\\
\tau(s_1s_1s_1s_1) &= (\gamma(1,s_1)\gamma(s_1,s_1))^2=1,\\
\tau(\rho_1s_1s_1\rho_1) &= \gamma(1,\rho_1)\gamma(\rho_1,s_1)\gamma(s_1\rho_1,s_1)\gamma(\rho_1,\rho_1)=1,\\
\tau(s_1\rho_1(s_1s_1)\rho_1s_1) &= \gamma(1,s_1)\gamma(s_1,\rho_1)\gamma(s_1\rho_1,s_1)\gamma(\rho_1,s_1)\gamma(s_1\rho_1,\rho_1)\gamma(s_1,s_1)=1.
\end{aligned}$$

(2) 接下来，我们考虑适用于 $1\le i\le n-1$ 的关系 $\rho_i^2=1$。这种情况给出 s

$$\begin{aligned}
\tau(1\rho_i\rho_i1) &= \gamma(1,\rho_i)\gamma(\overline{\rho_i},\rho_i)=1,\\
\tau(s_1\rho_i\rho_is_1) &= \gamma(1,s_1)\gamma(s_1,\rho_i)\gamma(s_1\rho_1,\rho_i)\gamma(s_1,s_1)=1,\\
\tau(\rho_1\rho_i\rho_i\rho_1) &= \gamma(1,\rho_1)\gamma(\rho_1,\rho_i)\gamma(1,\rho_i)\gamma(\rho_1,\rho_1)=1,\\
\tau(s_1\rho_1(\rho_1\rho_1)\rho_1s_1) &= \gamma(1,s_1)\gamma(s_1,\rho_1)\gamma(s_1\rho_1,\rho_1)\gamma(s_1,\rho_1)\gamma(s_1\rho_1,\rho_1)\gamma(s_1,s_1)=1,\\
\tau(s_1\rho_1(\rho_i\rho_i)\rho_1s_1) &= \gamma(1,s_1)\gamma(s_1,\rho_1)\gamma(s_1\rho_1,\rho_i)\gamma(s_1,\rho_i)\gamma(s_1\rho_1,\rho_1)\gamma(s_1,s_1)=z_i^{-1}z_i=1\\
&\quad \text{for } i\ge 2.
\end{aligned}$$

(3) 考虑以下关于 $|i-j|\ge 2$ 的关系 $(\rho_i\rho_j)^2=1$。在这种情况下，我们得到

$$\begin{aligned}
\tau(1(\rho_i\rho_j)^21) &= (\gamma(1,\rho_i)\gamma(\rho_1,\rho_j))^2\\
&= \begin{cases} x_j^{-2} & \text{for} \quad j\ge 3,\\ (x_ix_j^{-1})^2 & \text{for} \quad i\ge 2 \text{ and } i+2\le j\le n-1,\end{cases}\\
\tau(s_1(\rho_i\rho_j)^2s_1) &= (\gamma(s_1,\rho_i)\gamma(s_1\rho_1,\rho_j))^2\\
&= \begin{cases} z_j^{-2} & \text{for} \quad 3\le j\le n-1,\\ (z_iz_j^{-1})^2 & \text{for} \quad 2\le i\le n-2 \quad \text{and} \quad j\ge i+2,\end{cases}\\
\tau(\rho_1(\rho_i\rho_j)^2\rho_1) &= (\gamma(\rho_1,\rho_i)\gamma(1,\rho_j))^2\\
&= \begin{cases} x_j^{2} & \text{for} \quad 3\le j\le n-1,\\ (x_i^{-1}x_j)^2 & \text{for} \quad i\ge 2 \quad \text{and} \quad i+2\le j\le n-1,\end{cases}\\
\tau(s_1\rho_1(\rho_i\rho_j)^2\rho_1s_1) &= (\gamma(s_1\rho_1,\rho_i)\gamma(s_1,\rho_j))^2\\
&= \begin{cases} z_j^{2} & \text{for} \quad j\ge 3,\\ (z_i^{-1}z_j)^2 & \text{for} \quad i\ge 2 \quad \text{and} \quad i+2\le j\le n-1.\end{cases}
\end{aligned}$$

因此， VT_n' 中的非平凡关系为

$$x_j^2 = 1 \quad \text{for} \quad 3 \le j \le n-1, \tag{2.0.12}$$

$$z_j^2 = 1 \quad \text{for} \quad 3 \le j \le n-1, \tag{2.0.13}$$

$$(x_i x_j^{-1})^2 = 1 \quad \text{for} \quad 2 \le i \le n-2 \quad \text{and} \quad j \ge i+2, \tag{2.0.14}$$

$$(z_i z_j^{-1})^2 = 1 \quad \text{for} \quad 2 \le i \le n-2 \quad \text{and} \quad j \ge i+2. \tag{2.0.15}$$

（4）考虑关系 $(\rho_i\rho_{i+1})^3 = 1$，对于 $1 \le i \le n-2$，得到

$$\begin{aligned}
\tau(1(\rho_i\rho_{i+1})^3 1) &= (\gamma(1,\rho_i)\gamma(\rho_1,\rho_{i+1}))^3 \\
&= \begin{cases} x_2^{-3} & \text{for} \quad i=1, \\ (x_i x_{i+1}^{-1})^3 & \text{for} \quad 2 \le i \le n-2, \end{cases} \\
\tau(s_1(\rho_i\rho_{i+1})^3 s_1) &= (\gamma(s_1,\rho_i)\gamma(s_1\rho_1,\rho_{i+1}))^3 \\
&= \begin{cases} z_2^{-3} & \text{for} \quad i=1, \\ (z_i z_{i+1}^{-1})^3 & \text{for} \quad 2 \le i \le n-2, \end{cases} \\
\tau(\rho_1(\rho_i\rho_{i+1})^3 \rho_1) &= (\gamma(\rho_1,\rho_i)\gamma(1,\rho_{i+1}))^3 \\
&= \begin{cases} x_2^3 & \text{for} \quad i=1, \\ (x_i^{-1} x_{i+1})^3 & \text{for} \quad 2 \le i \le n-2, \end{cases} \\
\tau(s_1\rho_1(\rho_i\rho_{i+1})^3 \rho_1 s_1) &= (\gamma(s_1\rho_1,\rho_i)\gamma(s_1,\rho_{i+1}))^3 \\
&= \begin{cases} z_2^3 & \text{for} \quad i=1, \\ (z_i^{-1} z_{i+1})^3 & \text{for} \quad 2 \le i \le n-2. \end{cases}
\end{aligned}$$

因此，我们在 VT_n' 中得到以下非平凡关系

$$x_2^3 = 1, \tag{2.0.16}$$

$$z_2^3 = 1, \tag{2.0.17}$$

$$(x_i x_{i+1}^{-1})^3 = 1 \quad \text{for} \quad 2 \le i \le n-2, \tag{2.0.18}$$

$$(z_i z_{i+1}^{-1})^3 = 1 \quad \text{for} \quad 2 \le i \le n-2. \tag{2.0.19}$$

（5）考虑关系 $(\rho_i s_1)^2 = 1$ 对 $3 \le i \le n-1$ 给出

$$\tau(1(\rho_i s_1)^2 1) = \gamma(1,\rho_i)\gamma(\rho_1,s_1)\gamma(s_1\rho_1,\rho_i) = x_i w z_i^{-1} \quad \text{for} \quad i \ge 3,$$

$$\tau(s_1(\rho_i s_1)^2 s_1) = \gamma(s_1,\rho_i)\gamma(s_1\rho_1,s_1)\gamma(\rho_1,\rho_i) = z_i w^{-1} x_i^{-1} \quad \text{for} \quad i \ge 3,$$

$$\tau(\rho_1(\rho_i s_1)^2 \rho_1) = \gamma(\rho_1,\rho_i)\gamma(s_1,\rho_i)\gamma(s_1\rho_1,s_1) = x_i^{-1} z_i w^{-1} \quad \text{for} \quad i \ge 3,$$

$$\tau(s_1\rho_1(\rho_i s_1)^2 \rho_1 s_1) = \gamma(s_1\rho_1,\rho_i)\gamma(1,\rho_i)\gamma(\rho_1,s_1) = z_i^{-1} x_i w \quad \text{for} \quad i \ge 3.$$

因此，我们在 VT_n' 中有以下非平凡关系

$$z_i = x_i w \quad \text{for} \quad 3 \le i \le n-1. \tag{2.0.20}$$

(6) 最后，我们考虑关系 $(s_1\rho_2\rho_1\rho_3\rho_2)^4 = 1$。于是得到

$$\begin{aligned}
&\tau(1(s_1\rho_2\rho_3\rho_1\rho_2 s_1\rho_2\rho_1\rho_3\rho_2)^2 1)\\
=\ &(\gamma(s_1,\rho_2)\gamma(s_1\rho_1,\rho_3)\gamma(s_1\rho_1,\rho_2)\gamma(1,\rho_2)\gamma(1,\rho_3)\gamma(\rho_1,\rho_2))^2\\
=\ &(z_2 z_3^{-1} z_2^{-1} x_2 x_3 x_2^{-1})^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tau(s_1(s_1\rho_2\rho_3\rho_1\rho_2 s_1\rho_2\rho_1\rho_3\rho_2)^2 s_1)\\
=\ &(\gamma(1,\rho_2)\gamma(\rho_1,\rho_3)\gamma(\rho_1,\rho_2)\gamma(s_1,\rho_2)\gamma(s_1,\rho_3)\gamma(s_1\rho_1,\rho_2))^2\\
=\ &(x_2 x_3^{-1} x_2^{-1} z_2 z_3 z_2^{-1})^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tau(\rho_1(s_1\rho_2\rho_3\rho_1\rho_2 s_1\rho_2\rho_1\rho_3\rho_2)^2\rho_1)\\
=\ &(\gamma(\rho_1,s_1)\gamma(s_1\rho_1,\rho_2)\gamma(s_1,\rho_3)\gamma(s_1,\rho_2)\gamma(s_1\rho_1,s_1)\gamma(\rho_1,\rho_2)\gamma(\rho_1,\rho_3)\gamma(1,\rho_2))^2\\
=\ &(w z_2^{-1} z_3 z_2 w^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} x_2)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tau(s_1\rho_1(s_1\rho_2\rho_3\rho_1\rho_2 s_1\rho_2\rho_1\rho_3\rho_2)^2\rho_1 s_1)\\
=\ &(\gamma(s_1\rho_1,s_1)\gamma(\rho_1,\rho_2)\gamma(1,\rho_3)\gamma(1,\rho_2)\gamma(\rho_1,s_1)\gamma(s_1\rho_1,\rho_2)\gamma(s_1\rho_1,\rho_3)\gamma(s_1,\rho_2))^2\\
=\ &(w^{-1} x_2^{-1} x_3 x_2 w z_2^{-1} z_3^{-1} z_2)^2.
\end{aligned}$$

因此，我们在 VT_n' 中得到以下两个非平凡关系

$$(z_2 z_3^{-1} z_2^{-1} x_2 x_3 x_2^{-1})^2 = 1, \tag{2.0.21}$$

$$(w z_2^{-1} z_3 z_2 w^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} x_2)^2 = 1. \tag{2.0.22}$$

利用 (2.0.20)，我们可以消去 $3 \le i \le n-1$ 的生成元 z_i。令 $z := z_2$，可见关系 (2.0.16) 至 (2.0.22) 得出以下结果。

定理 2.2。 VT_n 的交换子子群 VT_n' 满足：

(1) $VT_2' \cong \mathbb{Z}$，且由 $(\rho_1 s_1)^2$ 生成。*(2)* $VT_3' \cong \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}$，且具有如下表示

$$\langle \rho_2\rho_1, s_1\rho_2\rho_1 s_1, (\rho_1 s_1)^2 \mid (\rho_2\rho_1)^3 = (s_1\rho_2\rho_1 s_1)^3 = 1 \rangle.$$

(3) 对于 $n \ge 4$, VT_n'，其表示的生成集为

$$\{x_i, z, w \mid i = 2, 3, \ldots, n-1\}$$

定义关系如下：

$$\begin{aligned}
x_2^3 &= 1, \\
x_j^2 &= 1 \quad for \quad 3 \le j \le n-1, \\
z^3 &= 1, \\
(x_i x_{i+1}^{-1})^3 &= 1 \quad for \quad 2 \le i \le n-2, \\
(x_i x_j^{-1})^2 &= 1 \quad for \quad 2 \le i \le n-2 \quad and \quad j \ge i+2, \\
(x_j w)^2 &= 1 \quad for \quad 3 \le j \le n-1, \\
(zw^{-1}x_3^{-1})^3 &= 1, \\
(zw^{-1}x_j^{-1})^2 &= 1 \quad for \quad 4 \le j \le n-1, \\
(zw^{-1}x_3^{-1}z^{-1}x_2x_3x_2^{-1})^2 &= 1, \\
(wz^{-1}x_3wzw^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}x_2)^2 &= 1.
\end{aligned}$$

已知，对于辫群 B_n，当 $n \ge 3$ [14] 时，下中心列的第二项与第三项相同；对于虚辫群 VB_n，当$n \ge 4$ [3, 时亦然，见命题 **7(c)**]。双群则不满足这一结论，见定理 **4.**5]。然而，事实证明，该结论对虚双生群成立。

命题 2.3。 $VT_n' = \gamma_3(VT_n)$ 当 $n \ge 3$。

证明。只需证明 $VT_n/\gamma_3(VT_n)$ 是阿贝尔的。群 $VT_n/\gamma_3(VT_n)$ 由以下元素生成

$$\tilde{s}_i := s_i\gamma_3(VT_n) \quad \text{and} \quad \tilde{\rho}_i := \rho_i\gamma_3(VT_n),$$

其中 $1 \le i \le n-1$。容易看出

$$\rho_{i+1} = \rho_i[\rho_i, [\rho_i, \rho_{i+1}]] \quad \text{and} \quad s_{i+1} = s_i[[\rho_{i+1}, [\rho_{i+1}, \rho_i]], s_i]^{-1}.$$

由此得到

$$\tilde{\rho}_{i+1} = \rho_{i+1}\gamma_3(VT_n) = \rho_i[\rho_i, [\rho_i, \rho_{i+1}]]\gamma_3(VT_n) = \rho_i\gamma_3(VT_n) = \tilde{\rho}_i$$

and

$$\tilde{s}_{i+1} = s_{i+1}\gamma_3(VT_n) = s_i[[\rho_{i+1}, [\rho_{i+1}, \rho_i]], s_i]^{-1}\gamma_3(VT_n) = s_i\gamma_3(VT_n) = \tilde{s}_i.$$

对每个 $1 \le i \le n-2$。由于

$$\tilde{\rho}_1\tilde{s}_1 = \tilde{\rho}_3\tilde{s}_1 = \tilde{s}_1\tilde{\rho}_3 = \tilde{s}_1\tilde{\rho}_1,$$

该断言得证。 □

推论 2.4。 VT_n 是剩余幂零的，当且仅当 $n = 2$。

我们以关于 PVT_n 的交换子子群自由性的一个结果结束本节。若一个图中每个含有多于三个顶点的圈都含有一条弦（即连接圈上两个不相邻顶点的一条边），则称该图为弦图。图的一个团（或完全子图）是顶点的一个子集 C，其中 C 中任意两个顶点之间都有一条边相连。众所周知，一个图是弦图，当且仅当其顶点可以按某种顺序排列，使得每个顶点的较小邻点构成一个团。

命题 2.5。 PVT_n 的交换子子群是自由群，当且仅当 $n \le 4$。

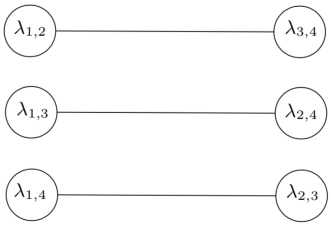


FIGURE 1.PVT_4的图。

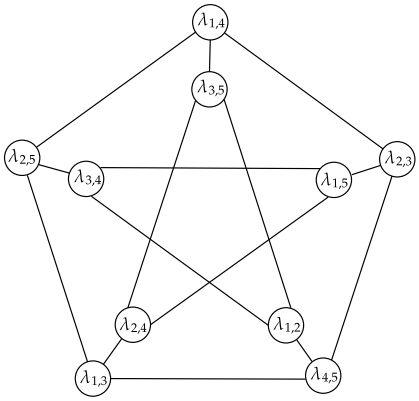


FIGURE 2. PVT_5的图。

证明。 根据 [25, 定理 3.3], , 纯虚双生群 PVT_n 对每个 $n \geq 2$都是不可约右阿廷群，并且有如下表示

$$PVT_n = \langle \lambda_{i,j},\ 1 \leq i < j \leq n \ \mid\ \lambda_{i,j}\lambda_{k,l} = \lambda_{k,l}\lambda_{i,j} \text{ for distinct integers } i,j,k,l \rangle,$$

其中，对每个 $1 \leq i \leq n-1$ 和 λ_i，$_{i+1} = s_i\rho_i\lambda_{i,i+1} = s_i\rho_i$；对每个 $1 \leq i < j \leq n$ 和 $j \neq i+1$，$_j = \rho_{j-1}\rho_{j-2}\cdots\rho_{i+1}\lambda_{i,i+1}\rho_{i+1}\cdots\rho_{j-2}\rho_{j-1}$。此时，对 $n = 2,3$，该断言显然成立。 PVT_4 的图（见图 1）显然是弦图。

根据 [29, 推论 4.4], , 右角阿廷群的交换子子群是自由群，当且仅当其关联图是弦图，因此 PVT_4 是自由的。

对于 $n \geq 5$，在图的顶点集上固定一个序，例如在我们的情形中可以取字典序。令 $\lambda_{i,j}$ 为一个极大顶点，并令 $p,q,r \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{i,j\}$ 为三个互不相同的整数。那么，$\lambda_{p,q}$ 和 $\lambda_{p,r}$ 都是 $\lambda_{i,j}$ 的较小邻点，但 $\lambda_{p,q}$ 与 $\lambda_{p,r}$ 之间不可能有边。因此，顶点 $\lambda_{i,j}$ 的较小邻点不构成一个团，所以该图不是弦图。□

3. Presentation of commutator subgroup of virtual triplet group

在本节中，我们确定 VL_n 的交换子子群 VL_n' 的一个有限表示。我们采用的方法与上一节类似。我们需要 VL_n 的以下约化表示。

定理 3.1。 虚三元群 $VL_n\,(n \geq 3)$ 有一个表示，其生成集为 $\{y_1, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}\}$，定义关系如下：

$$y_1^2 = 1, \tag{3.0.1}$$

$$\rho_i^2 = 1 \quad for \quad 1 \leq i \leq n-1, \tag{3.0.2}$$

$$\rho_i\rho_j = \rho_j\rho_i \quad for \quad |i-j| \geq 2, \tag{3.0.3}$$

$$\rho_i\rho_{i+1}\rho_i = \rho_{i+1}\rho_i\rho_{i+1} \quad for \quad 1 \leq i \leq n-2, \tag{3.0.4}$$

$$\rho_i y_1 = y_1\rho_i \quad for \quad i \geq 3, \tag{3.0.5}$$

$$(y_1\rho_1\rho_2 y_1\rho_2\rho_1)^3 = 1. \tag{3.0.6}$$

证明。 在定理 2.1 的证明中，将断言 1 里的 s_i 替换为 y_i，得到

$$y_{i+1} = (\rho_i\rho_{i-1}\ldots\rho_2\rho_1)(\rho_{i+1}\rho_i\ldots\rho_3\rho_2)y_1(\rho_2\rho_3\ldots\rho_i\rho_{i+1})(\rho_1\rho_2\ldots\rho_{i-1}\rho_i) \tag{3.0.7}$$

对于 $i \geq 2$。因此，我们可以消去 $i \geq 2$对应的生成元 y_i。
接下来，我们证明， VL_n 中涉及 y_i、适用于 $i \geq 2$ 的关系可以从定理陈述中列出的关系推导出来。首先，在定理 2.1 的证明中，将断言 2 中的 s_i 替换为 y_i，可知 $\rho_i y_{i+1}\rho_i = \rho_{i+1}y_i\rho_{i+1}$ 对于$1 \leq i \leq n-2$ 的关系可以从关系 (3.0.2) 和 (3.0.3) 推导出来。同样，$y_i\rho_j = \rho_j y_i$对于 $|i-j| \geq 2$的关系是关系 3.0.3、3.0.4 和 3.0.5 的推论。接下来，我们断言，关系 $y_iy_{i+1}y_i = y_{i+1}y_iy_{i+1}$ 是 (3.0.7) 以及 (3.0.1) 至 (3.0.6) 这些关系的推论。我们计算得

$$\begin{aligned}
& y_iy_{i+1}y_i \\
= \; & (\rho_{i-1}\ldots\rho_1)(\rho_i\ldots\rho_2)y_1(\rho_2\ldots\rho_i)(\rho_1\ldots\rho_{i-1})(\rho_i\ldots\rho_1)(\rho_{i+1}\ldots\rho_2)y_1 \\
& (\rho_2\ldots\rho_{i+1})(\rho_1\ldots\rho_i)(\rho_{i-1}\ldots\rho_1)(\rho_i\ldots\rho_2)y_1(\rho_2\ldots\rho_i)(\rho_1\ldots\rho_{i-1}) \quad \text{(By (3.0.7))} \\
= \; & (\rho_{i-1}\ldots\rho_1)\,(\rho_i\ldots\rho_2)\,y_1(\rho_2\ldots\rho_i)\,(\rho_i\ldots\rho_2\,\rho_1\rho_2\ldots\rho_i)\,(\rho_{i+1}\ldots\rho_2)\,y_1 \\
& (\rho_2\ldots\rho_{i+1})\,(\rho_i\ldots\rho_2\rho_1\,\rho_2\ldots\rho_i)(\rho_i\ldots\rho_2)y_1\,(\rho_2\ldots\rho_i)\,(\rho_1\ldots\rho_{i-1}) \quad \text{(By (3.0.4))} \\
= \; & (\rho_{i-1}\ldots\rho_1)\,(\rho_i\ldots\rho_2)\,y_1(\rho_1\,\rho_2\ldots\rho_i)(\rho_{i+1}\rho_i\ldots\rho_2)y_1(\rho_2\ldots\rho_i\rho_{i+1})(\rho_i\ldots\rho_2\,\rho_1)y_1 \\
& (\rho_2\ldots\rho_i)\,(\rho_1\ldots\rho_{i-1}) \quad \text{(By (3.0.2))} \\
= \; & (\rho_{i-1}\ldots\rho_1)\,(\rho_i\ldots\rho_2)\,y_1\rho_1(\rho_{i+1}\ldots\rho_3\rho_2\rho_3\ldots\rho_{i+1})y_1(\rho_{i+1}\ldots\rho_3\rho_2\rho_3\ldots\rho_{i+1})\rho_1y_1 \\
& (\rho_2\ldots\rho_i)\,(\rho_1\ldots\rho_{i-1}) \quad \text{(By (3.0.4))} \\
= \; & (\rho_{i-1}\ldots\rho_1)\,(\rho_i\ldots\rho_2)\,(\rho_{i+1}\ldots\rho_3)\,y_1\rho_1\rho_2y_1(\rho_3\ldots\rho_{i+1})\,(\rho_{i+1}\ldots\rho_3)\rho_2\rho_1y_1\,(\rho_3\ldots\rho_{i+1}) \\
& (\rho_2\ldots\rho_i)\,(\rho_1\ldots\rho_{i-1}) \quad \text{(By (3.0.3) and (3.0.5))} \\
= \; & (\rho_{i-1}\ldots\rho_1)\,(\rho_i\ldots\rho_2)\,(\rho_{i+1}\ldots\rho_3)\,y_1\rho_1\rho_2y_1\rho_2\rho_1y_1\,(\rho_3\ldots\rho_{i+1})\,(\rho_2\ldots\rho_i)\,(\rho_1\ldots\rho_{i-1}) \quad \text{(By (3.0.2))} \\
= \; & (\rho_{i-1}\ldots\rho_1)\,(\rho_i\ldots\rho_2)\,(\rho_{i+1}\ldots\rho_3)\rho_1\rho_2y_1\rho_2\rho_1y_1\rho_1\rho_2y_1\rho_2\rho_1(\rho_3\ldots\rho_{i+1})\,(\rho_2\ldots\rho_i)\,(\rho_1\ldots\rho_{i-1}) \\
& \text{(By (3.0.6))} \\
= \; & (\rho_{i-1}\ldots\rho_1)(\rho_i\ldots\rho_1)(\rho_{i+1}\ldots\rho_2)y_1\rho_2\rho_1y_1\rho_1\rho_2y_1(\rho_2\ldots\rho_{i+1})(\rho_1\ldots\rho_i)(\rho_1\ldots\rho_{i-1}) \text{ (By (3.0.3))}
\end{aligned}$$

and

$$
\begin{aligned}
& y_{i+1}y_iy_{i+1} \\
= \;& (\rho_i\dots\rho_1)(\rho_{i+1}\dots\rho_2)y_1(\rho_2\dots\rho_{i+1})(\rho_1\dots\rho_i)(\rho_{i-1}\dots\rho_1)(\rho_i\dots\rho_2)y_1 \\
& (\rho_2\dots\rho_i)(\rho_1\dots\rho_{i-1})(\rho_i\dots\rho_1)(\rho_{i+1}\dots\rho_2)y_1(\rho_2\dots\rho_{i+1})(\rho_1\dots\rho_i) \quad \text{(By (3.0.7))} \\
= \;& (\rho_i\dots\rho_1)\,(\rho_{i+1}\dots\rho_2)\,y_1\,(\rho_2\dots\rho_{i+1})\,(\rho_i\dots\rho_2\rho_1\ \rho_2\dots\rho_i)\,(\rho_i\dots\rho_2)y_1 \\
& (\rho_2\dots\rho_i)\,(\rho_i\dots\rho_2\ \rho_1\rho_2\dots\rho_i)\,(\rho_{i+1}\dots\rho_2)\,y_1\,(\rho_2\dots\rho_{i+1})\,(\rho_1\dots\rho_i) \quad \text{(By (3.0.4))} \\
= \;& (\rho_i\dots\rho_1)\,(\rho_{i+1}\dots\rho_2)\,y_1(\rho_2\dots\rho_{i+1})\,(\rho_i\dots\rho_2\ \rho_1)\,y_1\,(\rho_1\ \rho_2\dots\rho_i)\,(\rho_{i+1}\dots\rho_2) \\
& y_1\,(\rho_2\dots\rho_{i+1})\,(\rho_1\dots\rho_i) \quad \text{(By (3.0.2))} \\
= \;& (\rho_i\dots\rho_1)\,(\rho_{i+1}\dots\rho_2)\,y_1(\rho_{i+1}\dots\rho_3\rho_2\rho_3\dots\rho_{i+1})\rho_1y_1\rho_1(\rho_{i+1}\dots\rho_3\rho_2\rho_3\dots\rho_{i+1})y_1 \\
& (\rho_2\dots\rho_{i+1})\,(\rho_1\dots\rho_i) \quad \text{(By (3.0.4))} \\
= \;& (\rho_i\dots\rho_1)\,(\rho_{i+1}\dots\rho_2)\,(\rho_{i+1}\dots\rho_3)\ y_1\rho_2\rho_1y_1\rho_1\rho_2y_1\ (\rho_3\dots\rho_{i+1})\,(\rho_2\dots\rho_{i+1})\,(\rho_1\dots\rho_i) \\
& \text{(By (3.0.2), (3.0.3) and (3.0.5)).}
\end{aligned}
$$

但是，(3.0.3) 和 (3.0.4) 给出

$$(\rho_i\dots\rho_1)\,(\rho_{i+1}\rho_i\rho_{i-1}\dots\rho_2)\,(\rho_{i+1}\rho_i\dots\rho_3) = (\rho_{i-1}\dots\rho_1)\,(\rho_i\dots\rho_1)\,(\rho_{i+1}\dots\rho_2)\,,$$

该断言成立，证明至此完成。 □

由于 VL_n 的阿贝尔化同构于阶为 4 的初等阿贝尔 2-群，我们可以取

$$\mathrm{M} = \{1, y_1, \rho_1, y_1\rho_1\}$$

作为陪集代表元的 Schreier 系统。我们使用定理 3.1 给出的 VL_n 的表示，并令 $S = \{y_1, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}\}$。

的生成元： 我们首先显式计算生成集 $\{\gamma(\mu,\ a)\ \mid \mu \in \mathrm{M}\quad a \in S\}$。由于该生成集和 Schreier 系统与 VT_n 的情形相似，忽略平凡生成元后，我们看到 VL_n' 由以下集合生成

$$\{\alpha_i, \beta_i, \delta\ \mid\ i = 2, 3, \dots, n-1\},$$

其中

$$
\begin{aligned}
\alpha_i &:= \rho_i\rho_1 = \gamma(1, \rho_i) = \gamma(\rho_1, \rho_i)^{-1}, \\
\beta_i &:= y_1\rho_i\rho_1y_1 = \gamma(y_1, \rho_i) = \gamma(y_1\rho_1, \rho_i)^{-1}, \\
\delta &:= (\rho_1y_1)^2 = \gamma(\rho_1, y_1) = \gamma(y_1\rho_1, y_1)^{-1}.
\end{aligned}
$$

中的关系： 现在，我们确定 VL_n 的表示（由定理 3.1 给出）中的每个关系在 VL_n' 中对应的关系。由于计算与定理 2.2 证明中的计算类似，我们只详细说明那些在 VL_n' 中产生非平凡关系的计算。

(1) 关系 $y_1^2 = 1$ 在 VL_n' 中仅给出平凡关系。(2) 类似地， $1 \le i \le n-1$ 对应的关系 $\rho_i^2 = 1$ 在VL_n'中仅给出平凡关系。

(3) Ne 接下来，我们考虑 $|i-j|\geq 2$ 的关系 $(\rho_i\rho_j)^2=1$。在这种情况下，我们得到 t

$$\begin{aligned}
\tau(1(\rho_i\rho_j)^2 1) &= (\gamma(1,\rho_i)\gamma(\rho_1,\rho_j))^2 \\
&= \begin{cases} \alpha_j^{-2} & \text{for} \quad j\geq 3, \\ (\alpha_i\alpha_j^{-1})^2 & \text{for} \quad i\geq 2 \quad \text{and} \quad i+2\leq j\leq n-1, \end{cases} \\
\tau(y_1(\rho_i\rho_j)^2 y_1) &= (\gamma(y_1,\rho_i)\gamma(y_1\rho_1,\rho_j))^2 \\
&= \begin{cases} \beta_j^{-2} & \text{for} \quad 3\leq j\leq n-1, \\ (\beta_i\beta_j^{-1})^2 & \text{for} \quad 2\leq i\leq n-2 \quad \text{and} \quad j\geq i+2, \end{cases} \\
\tau(\rho_1(\rho_i\rho_j)^2\rho_1) &= (\gamma(\rho_1,\rho_i)\gamma(1,\rho_j))^2 \\
&= \begin{cases} \alpha_j^{2} & \text{for} \quad 3\leq j\leq n-1, \\ (\alpha_i^{-1}\alpha_j)^2 & \text{for} \quad i\geq 2 \quad \text{and} \quad i+2\leq j\leq n-1, \end{cases} \\
\tau(y_1\rho_1(\rho_i\rho_j)^2\rho_1 y_1) &= (\gamma(y_1\rho_1,\rho_i)\gamma(y_1,\rho_j))^2 \\
&= \begin{cases} \beta_j^{2} & \text{for} \quad j\geq 3, \\ (\beta_i^{-1}\beta_j)^2 & \text{for} \quad i\geq 2 \quad \text{and} \quad i+2\leq j\leq n-1. \end{cases}
\end{aligned}$$

因此，我们在 VL_n' 中得到以下非平凡关系

$$\alpha_j^2 = 1 \quad \text{for} \quad 3\leq j\leq n-1, \tag{3.0.8}$$

$$\beta_j^2 = 1 \quad \text{for} \quad 3\leq j\leq n-1, \tag{3.0.9}$$

$$(\alpha_i\alpha_j^{-1})^2 = 1 \quad \text{for} \quad 2\leq i\leq n-2 \quad \text{and} \quad j\geq i+2, \tag{3.0.10}$$

$$(\beta_i\beta_j^{-1\ 2}) = 1 \quad \text{for} \quad 2\leq i\leq n-2 \quad \text{and} \quad j\geq i+2. \tag{3.0.11}$$

(4) 我们 现在考虑关系 $(\rho_i\rho_{i+1})^3 = 1$，其中 $1 \le i \le n-2$。于是我们得到
n

$$\begin{aligned}
\tau(1(\rho_i\rho_{i+1})^3 1) &= (\gamma(1,\rho_i)\gamma(\rho_1,\rho_{i+1}))^3 \\
&= \begin{cases} \alpha_2^{-3} & \text{for} \quad i=1, \\ (\alpha_i\alpha_{i+1}^{-1})^3 & \text{for} \quad 2 \le i \le n-2, \end{cases} \\
\tau(y_1(\rho_i\rho_{i+1})^3 y_1) &= (\gamma(y_1,\rho_i)\gamma(y_1\rho_1,\rho_{i+1}))^3 \\
&= \begin{cases} \beta_2^{-3} & \text{for} \quad i=1, \\ (\beta_i\beta_{i+1}^{-1})^3 & \text{for} \quad 2 \le i \le n-2, \end{cases} \\
\tau(\rho_1(\rho_i\rho_{i+1})^3 \rho_1) &= (\gamma(\rho_1,\rho_i)\gamma(1,\rho_{i+1}))^3 \\
&= \begin{cases} \alpha_2^{3} & \text{for} \quad i=1, \\ (\alpha_i^{-1}\alpha_{i+1})^3 & \text{for} \quad 2 \le i \le n-2, \end{cases} \\
\tau(y_1\rho_1(\rho_i\rho_{i+1})^3 \rho_1 y_1) &= (\gamma(y_1\rho_1,\rho_i)\gamma(y_1,\rho_{i+1}))^3 \\
&= \begin{cases} \beta_2^{3} & \text{for} \quad i=1, \\ (\beta_i^{-1}\beta_{i+1})^3 & \text{for} \quad 2 \le i \le n-2. \end{cases}
\end{aligned}$$

因此，我们在 VL_n' 中有以下非平凡关系

$$\alpha_2^3 = 1, \tag{3.0.12}$$

$$\beta_2^3 = 1, \tag{3.0.13}$$

$$(\alpha_i\alpha_{i+1}^{-1})^3 = 1 \quad \text{for} \quad 2 \le i \le n-2, \tag{3.0.14}$$

$$(\beta_i\beta_{i+1}^{-1})^3 = 1 \quad \text{for} \quad 2 \le i \le n-2. \tag{3.0.15}$$

(5) 关系 $(\rho_i y_1)^2 = 1$ 对 $3 \le i \le n-1$ 给出

$$\begin{aligned}
\tau(1(\rho_i y_1)^2 1) &= \alpha_i\delta\beta_i^{-1}, \\
\tau(y_1(\rho_i y_1)^2 y_1) &= \beta_i\delta^{-1}\alpha_i^{-1}, \\
\tau(\rho_1(\rho_i y_1)^2 \rho_1) &= \alpha_i^{-1}\beta_i\delta^{-1}, \\
\tau(y_1\rho_1(\rho_i y_1)^2 \rho_1 y_1) &= \beta_i^{-1}\alpha_i\delta
\end{aligned}$$

对于每个 $3 \le i \le n-1$。因此，VL_n' 中的非平凡关系为

$$\beta_i = \alpha_i\delta \quad \text{for} \quad 3 \le i \le n-1. \tag{3.0.16}$$

(6) 最后，我们考虑关系 $(y_1\rho_1\rho_2y_1\rho_2\rho_1)^3 = 1$。在这种情况下，我们得到

$$\begin{aligned}
\tau(1(y_1\rho_1\rho_2y_1\rho_2\rho_1)^3 1) &= (\gamma(y_1\rho_1,\rho_2)\gamma(1,\rho_2))^3 = (\beta_2^{-1}\alpha_2)^3,\\
\tau(y_1(y_1\rho_1\rho_2y_1\rho_2\rho_1)^3 y_1) &= (\gamma(\rho_1,\rho_2)\gamma(y_1,\rho_2))^3 = (\alpha_2^{-1}\beta_2)^3,\\
\tau(\rho_1(y_1\rho_1\rho_2y_1\rho_2\rho_1)^3 \rho_1) &= (\gamma(\rho_1,y_1)\gamma(y_1,\rho_2)\gamma(y_1\rho_1,y_1)\gamma(\rho_1,\rho_2))^3 = (\delta\beta_2\delta^{-1}\alpha_2^{-1})^3,\\
\tau(y_1\rho_1(y_1\rho_1\rho_2y_1\rho_2\rho_1)^3 \rho_1 y_1) &= (\gamma(y_1\rho_1,y_1)\gamma(1,\rho_2)\gamma(\rho_1,y_1)\gamma(y_1\rho_1,\rho_2))^3 = (\delta^{-1}\alpha_2\delta\beta_2^{-1})^3.
\end{aligned}$$

因此，我们在 VL_n'中还有以下非平凡关系

$$(\alpha_2^{-1}\beta_2)^3 = 1, \tag{3.0.17}$$

$$(\delta\beta_2\delta^{-1}\alpha_2^{-1})^3 = 1. \tag{3.0.18}$$

利用关系 (3.0.16) 消去 $3 \le i \le n-1$ 的生成元 β_i，并令$\beta := \beta_2$。结合关系 (3.0.12) 至 (3.0.18)，可得以下结果。

定理 3.2. 交换子子群VL_n'（属于 VL_n）满足以下性质：

(1) $VL_2' \cong \mathbb{Z}$，由$(\rho_1y_1)^2$生成。(2) $VL_3' \cong \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}$，其表示为

$$\langle \rho_2\rho_1, y_1\rho_2\rho_1y_1, (\rho_1y_1)^2 \mid (\rho_2\rho_1)^3 = (y_1\rho_2\rho_1y_1)^3 = 1\rangle.$$

(3) 对于 $n \ge 4$，VL_n' 有一个表示，其生成集为

$$\{\alpha_i, \beta, \delta \mid i = 2, 3, \ldots, n-1\}$$

定义关系如下：

$$\begin{aligned}
\alpha_2^3 &= 1,\\
\alpha_j^2 &= 1 \quad for \quad 3 \le j \le n-1,\\
\beta^3 &= 1,\\
(\alpha_i\alpha_{i+1}^{-1})^3 &= 1 \quad for \quad 2 \le i \le n-2,\\
(\alpha_i\alpha_j^{-1})^2 &= 1 \quad for \quad 2 \le i \le n-2 \quad and \quad j \ge i+2,\\
(\alpha_j\delta)^2 &= 1 \quad for \quad 3 \le j \le n-1,\\
(\beta\delta^{-1}\alpha_3^{-1})^3 &= 1,\\
(\beta\delta^{-1}\alpha_j^{-1})^2 &= 1 \quad for \quad 4 \le j \le n-1,\\
(\alpha_2^{-1}\beta)^3 &= 1,\\
(\delta\beta\delta^{-1}\alpha_2^{-1})^3 &= 1.
\end{aligned}$$

命题 3.3。 $L_n' = \gamma_3(L_n)$ 且 $VL_n' = \gamma_3(VL_n)$ 对于 $n \ge 3$。

证明。 考虑短正合列

$$1 \longrightarrow L_n'/\gamma_3(L_n) \longrightarrow L_n/\gamma_3(L_n) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1.$$

由于每个 y_i 的陪集都映射到 $\mathbb{Z}_2$ 的生成元，因此对于每个 $1 \leq i \leq n-1$，都存在 $\alpha_i \in L_n'$，使得 $y_i = \alpha_i y_1$ 模 $\gamma_3(L_n)$，其中 $\alpha_1 = 1$。利用 $L_n/\gamma_3(L_n)$ 中的辫子关系，我们得到

$$\alpha_i y_1 \alpha_{i+1} y_1 \alpha_i y_1 = \alpha_{i+1} y_1 \alpha_i y_1 \alpha_{i+1} y_1 \mod \gamma_3(L_n) \tag{3.0.19}$$

对所有 $1 \leq i \leq n-1$。由于 $\alpha_1 = 1$ 和 $L_n'/\gamma_3(L_n) \subseteq \mathsf{Z}(L_n/\gamma_3(L_n))$，等式 (3.0.19) 给出

$$\alpha_i = 1 \mod \gamma_3(L_n)$$

对所有 $1 \leq i \leq n-1$。这意味着 $L_n/\gamma_3(L_n)$ 是二阶循环群，因此 $L_n'/\gamma_3(L_n) = 1$，这正是所需结论。$VL_n' = \gamma_3(VL_n)$ 的证明与命题 2.3 的证明类似，只需将 s_i 替换为 y_i。□

推论 3.4. *L_n 和 VL_n 是剩余幂零的，当且仅当 $n = 2$。*

4. Presentation of the pure virtual triplet group

回顾一下，对于 $n \geq 2$，虚三元群 VL_n 的表示的生成集为 $\{y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}\}$，其定义关系如下:

$$y_i^2 = 1 \quad \text{for} \quad 1 \leq i \leq n-1, \tag{4.0.1}$$

$$y_i y_{i+1} y_i = y_{i+1} y_i y_{i+1} \quad \text{for} \quad 1 \leq i \leq n-2, \tag{4.0.2}$$

$$\rho_i^2 = 1 \quad \text{for} \quad 1 \leq i \leq n-1, \tag{4.0.3}$$

$$\rho_i \rho_j = \rho_j \rho_i \quad \text{for} \quad |i-j| \geq 2, \tag{4.0.4}$$

$$\rho_i \rho_{i+1} \rho_i = \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \quad \text{for} \quad 1 \leq i \leq n-2, \tag{4.0.5}$$

$$\rho_i y_j = y_j \rho_i \quad \text{for} \quad |i-j| \geq 2, \tag{4.0.6}$$

$$\rho_i \rho_{i+1} y_i = y_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \quad \text{for} \quad 1 \leq i \leq n-2. \tag{4.0.7}$$

令 $\pi\colon VL_n \longrightarrow S_n$ 表示由 $\pi(y_i) = \pi(\rho_i) = \tau_i$（其中 $1 \leq i \leq n-1$）给出的自然满同态，其中 τ_i 表示 S_n 中的对换 $(i,\ i+1)$。于是，我们有$PVL_n = \ker(\pi)$。此外，由 $\tau_i \mapsto \rho_i$ 给出的单同态 $S_n \to VL_n$ 为正合列提供了一个分裂

$$1 \longrightarrow PVL_n \longrightarrow VL_n \xrightarrow{\pi} S_n \longrightarrow 1.$$

我们取集合

$$\mathbf{M}_n = \left\{ m_{1,i_1} m_{2,i_2} \ldots m_{n-1,i_{n-1}} \mid m_{k,i_k} = \rho_k \rho_{k-1} \ldots \rho_{i_k+1} \text{（其中 } 1 \leq k \leq n-1 \text{ 且 } 0 \leq i_k < k) \right\}$$

作为 VL_n 中 PVL_n 的陪集代表元的 Schreier 系统。此外，我们令 $m_{k,\,k} = 1$（其中 $1 \leq k \leq n-1$）。对于一个元素 $w \in VL_n$，令 $\overline{w}$ 表示 w 在 Schreier 集 $\mathbf{M}_n$ 中所属陪集的唯一陪集代表元。于是，PVL_n 由以下元素生成

$$\{\gamma(\mu, a) \mid \mu \in \mathrm{M}_n \text{ and } a \in \{y_1, \ldots, y_{n-1}, \rho_1, \ldots, \rho_{n-1}\}\}$$

并具有以下定义关系

$$\{\tau\left(\mu r \mu^{-1}\right) \mid \mu \in \mathrm{M}_n \text{ and } r \text{ is a defining relation in } VL_n\}.$$

我们定义

$$\kappa_{i,i+1} := y_i \rho_i$$

对每个 $1 \leq i \leq n-1$ 以及

$$\kappa_{i,j} := \rho_{j-1}\rho_{j-2}\cdots\rho_{i+1}\kappa_{i,i+1}\rho_{i+1}\cdots\rho_{j-2}\rho_{j-1}$$

对每个 $1 \leq i < j \leq n$ 和 $j \neq i+1$。设 $\mathcal{S} = \{\kappa_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ 和 $\mathcal{S} \sqcup \mathcal{S}^{-1} = \left\{\kappa_{i,j}^{\pm 1} \mid \kappa_{i,j} \in \mathcal{S}\right\}$。为简化记号，我们令 $\kappa_{j,\,i} := \kappa_i^{-1}{}_{,\,j}$，只要 $i < j$。

引理 4.1. $S_n \cong \langle \rho_1, \ldots, \rho_{n-1} \rangle$ 在 $\mathcal{S} \sqcup \mathcal{S}^{-1}$ 上的共轭作用由下式给出

$$\rho_i : \begin{cases} \kappa_{i,i+1} \longleftrightarrow \kappa_{i,i+1}^{-1}, & \\ \kappa_{i,j} \longleftrightarrow \kappa_{i+1,j} & \textit{for} \quad i+2 \leq j \leq n, \\ \kappa_{j,i} \longleftrightarrow \kappa_{j,i+1} & \textit{for} \quad 1 \leq j < i, \\ \kappa_{k,l} \longleftrightarrow \kappa_{k,l} & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

更确切地说，S_n 按以下规则作用于 $\mathcal{S} \sqcup \mathcal{S}^{-1}$

$$\rho \cdot \kappa_{i,j} = \kappa_{\rho(i),\rho(j)}$$

对每个 $\rho \in S_n$ 和 $\kappa_{i,\,j} \in \mathcal{S}$。

证明。首先，我们考察 $\kappa_{i,i+1}$ 对 $1 \leq i \leq n-1$的生成元的作用。

(1) 若 $1 \leq k \leq i-2$ 或 $i+2 \leq k \leq n-1$，则 $\rho_k\kappa_{i,i+1}\rho_k = \kappa_{i,i+1}$。

(2) 若 $k = i-1$，则

$$\begin{aligned} \rho_k\kappa_{i,i+1}\rho_k &= \rho_{i-1}y_i\rho_i\rho_{i-1} \\ &= \rho_{i-1}y_i\rho_{i-1}(\rho_{i-1}\rho_i\rho_{i-1}) \\ &= \rho_{i-1}(y_i\rho_{i-1}\rho_i)\rho_{i-1}\rho_i \\ &= \rho_i\left(y_{i-1}\rho_{i-1}\right)\rho_i \\ &= \kappa_{i-1,i+1}. \end{aligned}$$

(3) 若 $k = i$，则 $\rho_k\kappa_{i,i+1}\rho_k = \kappa_i^{-1}{}_{,i+1}$。

(4) 若 $k = i+1$，则 $\rho_k\kappa_{i,i+1}\rho_k = \kappa_{i,i+2}$。

接下来，我们考察 $1 \leq i < j \leq n$ 作用下 $\kappa_{i,j}$ 的作用。

(1) 如果 $1 \leq k \leq i-2$ 或 $j+1 \leq k \leq n-1$，那么 $\rho_k\kappa_{i,\,j}\rho_k = \kappa_{i,\,j}$。(2) 对于 $k = i-1$，我们有

$$\begin{aligned} \rho_{i-1}\kappa_{i,j}\rho_{i-1} &= \rho_{i-1}\rho_{j-1}\rho_{j-2}\cdots\rho_{i+1}\kappa_{i,i+1}\rho_{i+1}\cdots\rho_{j-2}\rho_{j-1}\rho_{i-1} \\ &= \rho_{j-1}\rho_{j-2}\cdots\rho_{i+1}(\rho_{i-1}\kappa_{i,i+1}\rho_{i-1})\rho_{i+1}\cdots\rho_{j-2}\rho_{j-1} \\ &= \rho_{j-1}\rho_{j-2}\cdots\rho_{i+1}\rho_i\left(y_{i-1}\rho_{i-1}\right)\rho_i\rho_{i+1}\cdots\rho_{j-2}\rho_{j-1} \\ &= \kappa_{i-1,j}. \end{aligned}$$

(3) 对于 $k=i$，我们有

$$\begin{aligned}\rho_i\kappa_{i,j}\rho_i &= \rho_i\rho_{j-1}\rho_{j-2}\cdots\rho_{i+1}\kappa_{i,i+1}\rho_{i+1}\cdots\rho_{j-2}\rho_{j-1}\rho_i\\ &= \rho_{j-1}\rho_{j-2}\cdots\rho_i\rho_{i+1}\kappa_{i,i+1}\rho_{i+1}\rho_i\cdots\rho_{j-2}\rho_{j-1}\\ &= \rho_{j-1}\rho_{j-2}\cdots(\rho_i\rho_{i+1}y_i)\rho_i\rho_{i+1}\rho_i\cdots\rho_{j-2}\rho_{j-1}\\ &= \rho_{j-1}\rho_{j-2}\cdots\rho_{i+2}y_{i+1}(\rho_i\rho_{i+1}\rho_i\rho_{i+1}\rho_i)\cdots\rho_{j-2}\rho_{j-1}\\ &= \rho_{j-1}\rho_{j-2}\cdots\rho_{i+2}\left(y_{i+1}\rho_{i+1}\right)\rho_{i+2}\cdots\rho_{j-2}\rho_{j-1}\\ &= \kappa_{i+1,j}.\end{aligned}$$

(4) 若 $i+1\le k\le j-2$，则

$$\begin{aligned}\rho_k\kappa_{i,j}\rho_k &= \rho_k\rho_{j-1}\cdots\rho_{k+1}\rho_k\cdots\rho_{i+1}\kappa_{i,i+1}\rho_{i+1}\cdots\rho_k\rho_{k+1}\cdots\rho_{j-1}\rho_k\\ &= \rho_{j-1}\cdots\rho_k\rho_{k+1}\rho_k\cdots\rho_{i+1}\kappa_{i,i+1}\rho_{i+1}\cdots\rho_k\rho_{k+1}\rho_k\cdots\rho_{j-1}\\ &= \rho_{j-1}\cdots\rho_{k+1}\rho_k\rho_{k+1}\rho_{k-1}\cdots\rho_{i+1}\kappa_{i,i+1}\rho_{i+1}\cdots\rho_{k-1}\rho_{k+1}\rho_k\rho_{k+1}\cdots\rho_{j-1}\\ &= \rho_{j-1}\cdots\rho_{k+1}\rho_k\rho_{k-1}\cdots\rho_{i+1}\kappa_{i,i+1}\rho_{i+1}\cdots\rho_{k-1}\rho_k\rho_{k+1}\cdots\rho_{j-1}\\ &= \kappa_{i,j}.\end{aligned}$$

(5) 若 $k=j-1$，则 $\rho_k\kappa_{i,\ j}\rho_k=\kappa_{i,\ j-1}$。

(6) 最后，若 $k=j$，则 $\rho_k\kappa_{i,\ j}\rho_k=\kappa_{i,\ j+1}$。

至此，引理得证。 □

定理 4.2。纯虚三元群 PVL_n 有如下生成集 $\mathcal{S}=\{\kappa_{i,j}\mid 1\le i<j\le n\}$ 及定义关系的表示

$$\kappa_{i,j}\kappa_{i,k}\kappa_{j,k}=\kappa_{j,k}\kappa_{i,k}\kappa_{i,j},$$

其中 $1\le i<j<k\le n$.

证明。我们首先观察到

$$\overline{\alpha}=\alpha \quad\text{and}\quad \overline{\alpha_1y_{i_1}\ldots\alpha_ky_{i_k}}=\alpha_1\rho_{i_1}\ldots\alpha_k\rho_{i_k}$$

对于生成元 $\{\rho_1,\ldots,\rho_{n-1}\}$ 中的字 α 和 α_j。因此，我们有

$$\gamma(\mu,\rho_i)=(\mu\rho_i)(\mu\rho_i)^{-1}=1$$

and

$$\gamma(\mu,y_i)=(\mu y_i)(\mu\rho_i)^{-1}=\mu y_i\rho_i\mu^{-1}=\mu\kappa_{i,i+1}\mu^{-1}$$

对每个 $\mu\in\mathbf{M}_n$ 和 $1\le i\le n-1$ 都成立。由引理 4.1 可知，每个 $\gamma(\mu,\ y_i)$ 都属于 $\mathcal{S}\sqcup\mathcal{S}^{-1}$。反过来，若 $\kappa_{i,\ j}\in\mathcal{S}$ 是任意元素，则通过 $(\rho_{i-1}\rho_{i-2}\ldots\rho_2\rho_1)$ $(\rho_{j-1}\rho_{j-2}\ldots\rho_3\rho_2)$ 共轭会将 $\kappa_{1,\ 2}$ 映射为 $\kappa_{i,\ j}$。类似地，通过元素 $(\rho_{i-1}\rho_{i-2}\ldots\rho_3\rho_2)$ $(\rho_{j-1}\rho_{j-2}\ldots\rho_2\rho_1)$ 共轭会将 $\kappa_{1,\ 2}$ 映射为 $\kappa_i^{-1}{}_{,\ j}(=\kappa_{j,\ i})$。因此，$\mathcal{S}\sqcup\mathcal{S}^{-1}$，从而 $\mathcal{S}$ 生成 PVL_n。

接下来，我们确定 PVL_n 中的定义关系。考虑一个元素 $\mu=\rho_{i_1}\rho_{i_2}\ldots\rho_{i_k}\in\mathbf{M}_n$. 由于 $\gamma(\mu,\rho_i)=1$ 对所有 i 都成立，因此无法从 VL_n 的关系 (4.0.3)、(4.0.4) 和 (4.0.5) 得到 PVL_n 的非平凡关系。现在我们考虑 VL_n 的其余关系。

(1) 首先，考虑 $1 \leq i \leq n-1$ 的关系 $y_i^2 = 1$。于是我们有

$$\begin{aligned}
\tau\left(\mu y_i^2 \mu^{-1}\right) &= \gamma\left(\rho_{i_1} \ldots \rho_{i_k} y_i y_i \rho_{i_k} \cdots \rho_{i_1}\right) \\
&= \gamma\left(1, \rho_{i_1}\right) \gamma\left(\overline{\rho_{i_1}}, \rho_{i_2}\right) \ldots \gamma\left(\bar{\mu}, y_i\right) \gamma\left(\overline{\mu y_i}, y_i\right) \ldots \gamma\left(\overline{\mu y_i y_i \rho_{i_k} \ldots \rho_{i_2}}, \rho_{i_1}\right) \\
&= \gamma\left(\bar{\mu}, y_i\right) \gamma\left(\overline{\mu y_i}, y_i\right) \\
&= \gamma\left(\mu, y_i\right) \gamma\left(\mu \rho_i, y_i\right) \\
&= \gamma\left(\mu, y_i\right) \left(\mu \rho_i y_i \mu^{-1}\right) \\
&= \gamma\left(\mu, y_i\right) \gamma\left(\mu, y_i\right)^{-1},
\end{aligned}$$

它不会在 PVL_n 中产生任何非平凡关系。

(2) 对于关系 $(y_i y_{i+1})^3 = 1$ for $1 \leq i \leq n-2$，我们有

$$\begin{aligned}
\tau\left(\mu (y_i y_{i+1})^3 \mu^{-1}\right) &= \gamma\left(\rho_{i_1} \ldots \rho_{i_k} y_i y_{i+1} y_i y_{i+1} y_i y_{i+1} \rho_{i_k} \cdots \rho_{i_1}\right) \\
&= \gamma\left(\bar{\mu}, y_i\right) \gamma\left(\overline{\mu y_i}, y_{i+1}\right) \gamma\left(\overline{\mu y_i y_{i+1}}, y_i\right) \\
&\quad \gamma\left(\overline{\mu y_i y_{i+1} y_i}, y_{i+1}\right) \gamma\left(\overline{\mu y_i y_{i+1} y_i y_{i+1}}, y_i\right) \gamma\left(\overline{\mu y_i y_{i+1} y_i y_{i+1} y_i}, y_{i+1}\right) \\
&= \gamma\left(\mu, y_i\right) \gamma\left(\mu \rho_i, y_{i+1}\right) \gamma\left(\mu \rho_i \rho_{i+1}, y_i\right) \\
&\quad \gamma\left(\mu \rho_i \rho_{i+1} \rho_i, y_{i+1}\right) \gamma\left(\mu \rho_i \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1}, y_i\right) \gamma\left(\mu \rho_i \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \rho_i, y_{i+1}\right) \\
&= \left(\mu \kappa_{i,i+1} \mu^{-1}\right) \left(\mu \kappa_{i,i+2} \mu^{-1}\right) \left(\mu \kappa_{i+1,i+2} \mu^{-1}\right) \\
&\quad \left(\mu \kappa_{i,i+1} \mu^{-1}\right)^{-1} \left(\mu \kappa_{i,i+2} \mu^{-1}\right)^{-1} \left(\mu \kappa_{i+1,i+2} \mu^{-1}\right)^{-1} \\
&= \kappa_{\mu(i),\mu(i+1)} \kappa_{\mu(i),\mu(i+2)} \kappa_{\mu(i+1),\mu(i+2)} \kappa^{-1}_{\mu(i),\mu(i+1)} \kappa^{-1}_{\mu(i),\mu(i+2)} \kappa^{-1}_{\mu(i+1),\mu(i+2)}.
\end{aligned}$$

这给出了非平凡关系

$$\kappa_{\mu(i),\mu(i+1)} \kappa_{\mu(i),\mu(i+2)} \kappa_{\mu(i+1),\mu(i+2)} = \kappa_{\mu(i+1),\mu(i+2)} \kappa_{\mu(i),\mu(i+2)} \kappa_{\mu(i),\mu(i+1)} \tag{4.0.8}$$

在 PVL_n 中。由于 S_n 对 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的作用是三重传递的，(4.0.8) 给出了非平凡关系

$$\kappa_{i,j} \kappa_{i,k} \kappa_{j,k} = \kappa_{j,k} \kappa_{i,k} \kappa_{i,j}, \tag{4.0.9}$$

其中 i， j， k 均互不相同。我们声称，关系 (4.0.9) 是关系的推论

$$\kappa_{p,q} \kappa_{p,r} \kappa_{q,r} = \kappa_{q,r} \kappa_{p,r} \kappa_{p,q}, \tag{4.0.10}$$

其中 $1 \leq p < q < r \leq n$。注意，给定三个互不相同的整数 i， j， k，以下情形之一成立：

(a) $i < j < k$　(b) $i < k < j$　(c) $k < j < i$　(d) $k < i < j$　(e) $j < i < k$　(f) $j < k < i$

情形 (a) 无需处理。在情形 (b) 中，关系 (4.0.9) 变为

$$\kappa_{i,j} \kappa_{i,k} \kappa^{-1}_{k,j} = \kappa^{-1}_{k,j} \kappa_{i,k} \kappa_{i,j}.$$

将其改写为

$$\kappa_{k,j} \kappa_{i,j} \kappa_{i,k} = \kappa_{i,k} \kappa_{i,j} \kappa_{k,j},$$

这就是关系 (4.0.10)。在情形 (c) 中，关系 (4.0.9) 变为

$$\kappa_{j,i}^{-1}\kappa_{k,i}^{-1}\kappa_{k,j}^{-1} = \kappa_{k,j}^{-1}\kappa_{k,i}^{-1}\kappa_{j,i}^{-1}.$$

取逆可得

$$\kappa_{k,j}\kappa_{k,i}\kappa_{j,i} = \kappa_{j,i}\kappa_{k,i}\kappa_{k,j},$$

这就是关系 (4.0.10)。其余情形也可以用类似的方法处理。

(3) 对于关系 $(y_i\rho_j)^2 = 1$ for $|i-j| \geq 2$，我们得到

$$\begin{aligned}
\tau\left(\mu y_i\rho_j y_i\rho_j\mu^{-1}\right) &= \gamma\left(\bar{\mu}, y_i\right)\gamma\left(\overline{\mu y_i}, \rho_j\right)\gamma\left(\overline{\mu y_i\rho_j}, y_i\right)\gamma\left(\overline{\mu y_i\rho_j y_i}, \rho_j\right)\\
&= \gamma\left(\bar{\mu}, y_i\right)\gamma\left(\overline{\mu y_i\rho_j}, y_i\right)\\
&= \gamma\left(\mu, y_i\right)\gamma\left(\mu\rho_i\rho_j, y_i\right)\\
&= \gamma\left(\mu, y_i\right)\left(\mu\rho_i\rho_j y_i\rho_i\rho_j\rho_i\mu^{-1}\right)\\
&= \gamma\left(\mu, y_i\right)\left(\mu\rho_i y_i\mu^{-1}\right)\\
&= \gamma\left(\mu, y_i\right)\left(\mu y_i\rho_i\mu^{-1}\right)^{-1}\\
&= \gamma\left(\mu, y_i\right)\gamma\left(\mu, y_i\right)^{-1},
\end{aligned}$$

这不会在 PVL_n 中导出任何非平凡关系。

(4) 最后，考虑 $\rho_i y_{i+1}\rho_i\rho_{i+1}y_i\rho_{i+1} = 1$ for $1 \leq i \leq n-2$ 的关系。计算

$$\begin{aligned}
\tau\left(\mu\rho_i y_{i+1}\rho_i\rho_{i+1}y_i\rho_{i+1}\mu^{-1}\right) &= \gamma\left(\overline{\mu\rho_i}, y_{i+1}\right)\gamma\left(\overline{\mu\rho_i y_{i+1}\rho_i\rho_{i+1}}, y_i\right)\\
&= \gamma\left(\mu\rho_i, y_{i+1}\right)\gamma\left(\mu\rho_i\rho_{i+1}\rho_i\rho_{i+1}, y_i\right)\\
&= \gamma\left(\mu\rho_i, y_{i+1}\right)\left(\mu\rho_{i+1}\rho_i y_i\rho_{i+1}\mu^{-1}\right)\\
&= \gamma\left(\mu\rho_i, y_{i+1}\right)\left(\mu\rho_{i+1}\rho_i\rho_{i+1}\rho_{i+1}y_i\rho_{i+1}\mu^{-1}\right)\\
&= \gamma\left(\mu\rho_i, y_{i+1}\right)\left(\mu\rho_i\rho_{i+1}\rho_i\rho_i y_{i+1}\rho_i\mu^{-1}\right)\\
&= \gamma\left(\mu\rho_i, y_{i+1}\right)\left(\mu\rho_i\rho_{i+1}y_{i+1}\rho_i\mu^{-1}\right)\\
&= \gamma\left(\mu\rho_i, y_{i+1}\right)\gamma\left(\mu\rho_i, y_{i+1}\right)^{-1},
\end{aligned}$$

在 PVL_n 中只给出平凡关系。

因此， $\mathcal{S}$ 中元素之间唯一的非平凡关系具有以下形式：$\kappa_{i,j}\kappa_{i,k}\kappa_{j,k} = \kappa_{j,k}\kappa_{i,k}\kappa_{i,j}$，其中 $1 \leq i < j < k \leq n$。至此，定理的证明完成。□

5. Crystallographic quotients of virtual triplet groups

豪斯多夫拓扑群 G 的闭子群 H 称为一致的，如果 G/H是一个紧空间。 $\mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ 的离散一致子群 G 称为维数为 n的晶体群。此外，如果 G 还是无挠的，则称其为维数为 n的比伯巴赫群。以下关于晶体群的刻画是众所周知的 [12, 引理。

引理 5.1。群 G 是晶体群，当且仅当存在一个整数n、一个有限群 H 以及一个短正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow G \xrightarrow{\eta} H \longrightarrow 1$$

使得由 $\Theta(h)(x) = zxz^{-1}$定义的整表示 $\Theta : H \longrightarrow$ 自同构群 $(\mathbb{Z}^n)$ 是忠实的，其中 $h \in H$、 $x \in \mathbb{Z}^n$ 和 $z \in G$ 满足 $\eta(z) = h$。

群 H 称为 G的整体群，整数 n 称为 G的维数，而 $\Theta : H \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ 称为 G的整体表示。众所周知，任意有限群都是某个平坦流形 [8, 的整体群（定理 III.5.2]）。此外，比伯巴赫群类与紧致平坦黎曼流形类之间存在一一对应关系（定理 2.1.1]）。文献 [28, 定理 2.4]和 [28,定理 3.5],分别研究了虚辫群和虚双生群的晶体学商群。

定理 5.2. 对于 $n \geq 2$，存在一个分裂短正合列

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{n(n-1)} \longrightarrow VB_n/VP_n^{'} \longrightarrow S_n \longrightarrow 1$$

使得 群 $VB_n/VP_n^{'}$ 是维数为 n（$n-1$）的晶体群。

定理 5.3. 对于 $n \geq 2$，存在一个分裂短正合列

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{n(n-1)/2} \longrightarrow VT_n/PVT_n^{'} \longrightarrow S_n \longrightarrow 1$$

使得群 $VT_n/PVT_n^{'}$是维数为 n（$n-1$）/2的晶体群。

我们证明了关于虚三元群的以下结果。

定理 5.4。 对于 $n \geq 2$，存在一个分裂短正合列

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{n(n-1)/2} \longrightarrow VL_n/PVL_n^{'} \longrightarrow S_n \longrightarrow 1$$

使得群 $VL_n/PVL_n^{'}$是维数为 n（$n-1$）/2的晶体群。证明。 注意到 $PVL_n/PVL_n^{'} \cong \mathbb{Z}^{n(n-1)/2}$。分裂短正合列

$$1 \to PVL_n \to VL_n \to S_n \to 1$$

诱导出所需的分裂短正合列

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{n(n-1)/2} \longrightarrow VL_n/PVL_n^{'} \xrightarrow{\pi} S_n \longrightarrow 1.$$

令 Θ: $S_n \to \text{Aut}(PVL_n/PVL_n^{'})$ 为 S_n在 $PVL_n/PVL_n^{'}$上的作用，该作用由引理 4.1 中给出的作用诱导。也就是说，对于 $\rho \in S_n$和 $\kappa_{i,\ j} \in PVL_n$，有 $\Theta(\rho)(\kappa_{i,\ j}) = \kappa_{\rho(i),\ \rho(j)}$ 模 $PVL_n^{'}$。因此，对于所有$1 \leq i < j \leq n$，$\kappa_{\rho(i),\ \rho(j)} = \kappa_{i,\ j}$模 $PVL_n^{'}$ 当且仅当 $\rho = 1$。由此，整体表示是忠实的，且$VL_n/PVL_n^{'}$是一个晶体群。 □

接下来，我们确定上文所讨论的晶体商群中的挠元。由于$VL_n = PVL_n \rtimes S_n$，任意 $\beta \in VL_n$ 都可以唯一地写成 $\beta = w\theta$，其中 $w \in PVL_n$ 且 $\theta \in S_n$。元素 β 通过其像 $\pi(\beta) = \theta$ 的作用在集合 $\{\kappa_{i,j} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ 上作用（见引理 4.1）。我们将元素 $\kappa_{i,j}$在此作用下的轨道记为 $\mathcal{O}_\theta(\kappa_{i,j})$。下面的定理是虚辫群和虚双生群中类似结果的一个类比： [28, 定理 2.7 和定理 3.6]。

定理 5.5. 对每个 $2 \le t \le n$，令 $1 \le r_1 < r_2 < \cdots < r_{t-1} \le n$ 为一个连续整数序列。令 $\pi\left(\rho_{r_1}\rho_{r_2}\ldots\rho_{r_{t-1}}\right) = \theta$ 和 $\mathcal{T}_\theta$ 表示 $\rho_{r_1}\rho_{r_2}\ldots\rho_{r_{t-1}}$ 在 $\{\kappa_{i,j} \mid 1 \le i \ne j \le n\}$上的作用的轨道代表元集合。那么，元素

$$\left(\prod_{1\le i<j\le n} \kappa_{i,j}^{a_{i,j}}\right)\left(\rho_{r_1}\rho_{r_2}\ldots\rho_{r_{t-1}}\right)$$

当且仅当在 $VL_n/PVL_n^{'}$ 中的阶为 t

$$a_{r,s} + a_{\theta^{-1}(r),\theta^{-1}(s)} + \cdots + a_{\theta^{-(t-1)}(r),\theta^{-(t-1)}(s)} = 0$$

对所有 $\kappa_{r,\ s} \in \mathcal{T}_\theta$。这里，$a_{i,\ j} \in \mathbb{Z}$ 和 $a_{\theta^\ell(r)\,\theta^\ell(s)} := -a_{\theta^\ell(s)\,\theta^\ell(r)}$ 只要 $1 \le \theta^\ell(s) < \theta^\ell(r) \le n$。

证明。我们假设对于所有 $1 \le i \le t-1$，$r_i = i$ 均成立，其余情形可用类似方法证明。注意，对于每个 $2 \le t \le n$，元素 $\rho_1\rho_2\ldots\rho_{t-1}$ 在 VL_n 中的阶为 t。我们将分析 $a_{i,\ j} \in \mathbb{Z}$ 满足哪些条件时，元素 $(\prod_{1\le i<j\le n}\kappa^{a_{i,\ j}}_{i,\ j})(\rho_1\rho_2\ldots\rho_{t-1})$ 的陪集在 $VL_n/PVL_n^{'}$ 中的阶为 t。为此，令 $\pi(\rho_1\rho_2\ldots\rho_{t-1}) = \theta$，并令 $\mathcal{T}_\theta = \{\kappa_{r_1,s_1}, \kappa_{r_2,s_2}, \ldots, \kappa_{r_m,s_m}\}$ 为 $\rho_1\rho_2\ldots\rho_{t-1}$ 在 $\{\kappa_{i,j} \mid 1 \le i \ne j \le n\}$ 上作用的轨道代表元集合。那么，我们有

$$\begin{aligned}
&\left(\left(\prod_{1\le i<j\le n} \kappa_{i,j}^{a_{i,j}}\right)(\rho_1\rho_2\ldots\rho_{t-1})\right)^t \\
=\ &\left(\prod_{1\le i<j\le n} \kappa_{i,j}^{a_{i,j}}\right)(\rho_1\rho_2\ldots\rho_{t-1})\cdots\left(\prod_{1\le i<j\le n} \kappa_{i,j}^{a_{i,j}}\right)(\rho_1\rho_2\ldots\rho_{t-1}) \\
=\ &\left(\prod_{1\le i<j\le n} \kappa_{i,j}^{a_{i,j}}\right)\left((\rho_1\ldots\rho_{t-1})\left(\prod_{1\le i<j\le n} \kappa_{i,j}^{a_{i,j}}\right)(\rho_1\ldots\rho_{t-1})^{-1}\right) \\
&\left((\rho_1\ldots\rho_{t-1})^2\left(\prod_{1\le i<j\le n} \kappa_{i,j}^{a_{i,j}}\right)(\rho_1\ldots\rho_{t-1})^{-2}\right)\cdots \\
&\cdots\left((\rho_1\ldots\rho_{t-1})^{t-1}\left(\prod_{1\le i<j\le n} \kappa_{i,j}^{a_{i,j}}\right)(\rho_1\ldots\rho_{t-1})^{-(t-1)}\right)(\rho_1\ldots\rho_{t-1})^t \\
=\ &\left(\prod_{1\le i<j\le n} \kappa_{i,j}^{a_{i,j}}\right)\left(\theta\cdot\left(\prod_{1\le i<j\le n} \kappa_{i,j}^{a_{i,j}}\right)\right)\left(\theta^2\cdot\left(\prod_{1\le i<j\le n} \kappa_{i,j}^{a_{i,j}}\right)\right)\cdots \\
&\cdots\left(\theta^{t-1}\cdot\left(\prod_{1\le i<j\le n} \kappa_{i,j}^{a_{i,j}}\right)\right)(\rho_1\ldots\rho_{t-1})^t \\
=\ &\left(\prod_{1\le i<j\le n} \kappa_{i,j}^{a_{i,j}}\right)\left(\prod_{1\le i<j\le n} \kappa_{\theta(i),\theta(j)}^{a_{i,j}}\right)\left(\prod_{1\le i<j\le n} \kappa_{\theta^2(i),\theta^2(j)}^{a_{i,j}}\right)\cdots\left(\prod_{1\le i<j\le n} \kappa_{\theta^{t-1}(i),\theta^{t-1}(j)}^{a_{i,j}}\right). \\
=\ &\prod_{1\le i<j\le n}\left(\kappa_{i,j}^{a_{i,j}}\kappa_{i,j}^{a_{\theta^{-1}(i),\theta^{-1}(j)}}\kappa_{i,j}^{a_{\theta^{-2}(i),\theta^{-2}(j)}}\cdots\kappa_{i,j}^{a_{\theta^{-(t-1)}(i),\theta^{-(t-1)}(j)}}\right) \mod PVL_n^{'}.
\end{aligned}$$

最后一个表达式表明，对于每个 $0 \leq \ell \leq t-1$，生成元 $\kappa_{i,\ j}$ （其中 $1 \leq i < j \leq n$）的总指数和与 $\kappa_{\theta^{\ell}(i)\ \theta^{\ell}(j))}$ 的总指数和相同。因此，利用 $\mathcal{T}_{\theta}$，可得

$$\left((\prod_{1 \leq i < j \leq n} \kappa_{i,j}^{a_{i,j}})(\rho_1 \rho_2 \dots \rho_{t-1}) \right)^{t} = 1 \mod PVL_n^{'}$$

当且仅当以下整数方程组有解

$$\begin{cases} a_{r_1,s_1} + a_{\theta^{-1}(r_1),\theta^{-1}(s_1)} + \cdots + a_{\theta^{-(t-1)}(r_1),\theta^{-(t-1)}(s_1)} = 0, \\ a_{r_2,s_2} + a_{\theta^{-1}(r_2),\theta^{-1}(s_2)} + \cdots + a_{\theta^{-(t-1)}(r_2),\theta^{-(t-1)}(s_2)} = 0, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{r_m,s_m} + a_{\theta^{-1}(r_m),\theta^{-1}(s_m)} + \cdots + a_{\theta^{-(t-1)}(r_m),\theta^{-(t-1)}(s_m)} = 0. \end{cases}$$

这就完成了证明。 □

推论 5.6。 设 m_1、m_2、.....、m_r 为正整数（不必互不相同），且均大于 *1*，并满足 $\sum_{i=1}^{r} m_i \leq n$。那么 $VL_n/PVL_n^{'}$ 中存在无穷多个阶为$\mathrm{lcm}\,(m_1$、.....、$m_r)$的元素。此外，还存在这样一个元素，其对应置换的循环类型为$(m_1$、m_2、.....、$m_r)$。

证明。 根据定理 5.5，对于每个 $1 \leq k \leq r$，都存在元素 $w_k \in VL_n$，其陪集在 $VL_n/PVL_n^{'}$ 中的阶为 m_k，其中

$$w_k = \begin{cases} (\prod_{\kappa_{i,j} \in \mathcal{O}_{\theta_1}(\kappa_{1,2})} \kappa_{i,j}^{a_{i,j}})\ (\rho_1 \cdots \rho_{m_1 - 1}) & \text{for} \quad k = 1, \\ (\prod_{\kappa_{i,j} \in \mathcal{O}_{\theta_k}(\kappa_{r_k,s_k})} \kappa_{i,j}^{a_{i,j}})\ (\rho_{\sum_{l=1}^{k-1} m_l + 1} \cdots \rho_{\sum_{l=1}^{k} m_l - 1}) & \text{for} \quad 2 \leq k \leq r, \end{cases}$$

$a_{i,\ j} \in \mathbb{Z}$，$r_k = \sum_{l=1}^{k-1} m_l + 1$，$s_k = \sum_{l=1}^{k-1} m_l + 2$ 和 $\pi(w_k) = \theta_k$。由于 $\rho_{\sum_{l=1}^{k_i - 1} m_l + 1} \cdots \rho_{\sum_{l=1}^{k_i} m_l - 1}$和 $\rho_{\sum_{l=1}^{k_j - 1} m_l + 1} \cdots \rho_{\sum_{l=1}^{k_j} m_l - 1}$ 在 $VL_n/PVL_n^{'}$中可交换，因此元素 $w_1 w_2 \cdots w_r$在 $VL_n/PVL_n^{'}$中的阶为 $\mathrm{lcm}\ (m_1,\ m_2,\ \dots,\ m_r)$。此外，$\pi(w_1 w_2 \cdots w_r)$ 是 S_n 中的一个元素，其循环类型为 $(m_1,\ m_2,\ \dots,\ m_r)$。□

注记 5.7。 前面的推论表明，$VL_n/PVL_n^{'}$ 不是比伯巴赫群。仿照 [4, 问题 3.2]，，确定 $VL_n/PVL_n^{'}$的比伯巴赫子群颇有意义。

最后，我们将辫群、双群、三元群及其虚对应群的结果列表汇总。

	B_n	T_n	L_n
交换子子群	有限表示 以 $n \geq 2$ [14] 而闻名。	有限表示 以 $n \geq 2$ [10] 而闻名。	有限表示 以 $n \geq 2$ [7, 26] 而闻名。
Pure 子群	有限表示 已知于 $n \geq 2$ [1]。	有限表示 已知于 $2 \leq n \leq 6$ [6, 13, 24].	它是一个自由群，其 $n \geq 4$ 的有限秩 [20, 21].
晶体学商	B_n/P' 是晶体学的 对于 $n \geq 2$ [12]。	T_n/PT' 是晶体学的 对于 $n \geq 4$ [21]。	L_n/PL'_n 是晶体学的 对于 $n \geq 4$ [21]。

表1。

	VB_n	VT_n	VL_n
交换子子群	有限生成 对 $n \geq 4$ [5] 已知。 有限表示 对 $n \geq 4$ 未知。	定理 2.2。	定理 3.2。
Pure 子群	有限表示 以 $n \geq 2$ [2] 闻名。	有限表示 以 $n \geq 2$ [25] 闻名。	定理 4.2。
晶体学商	VB_n/VP' 是晶体学的 对于 $n \geq 2$ [28]。	VT_n/PVT' 是晶体学的 对于 $n \geq 2$ [28]。	定理 5.4。

表2。

致谢。 PRAVIN KUMAR 获得 IISER Mohali 的 PMRF奖学金资助。Neha Nand 获得欧盟 Horizon Europe 研究与创新计划的资助，资助依据为玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议，编号为 101066588。MAHENDER SINGH 获得 Swarna Jayanti Fellowship 资助，项目编号为 DST/SJF/MSA-02/2018-19 和 SB/SJF/2019-20。

References

[1] E. Artin, 《辫子理论》, 《数学年刊》（第2辑）48（1947）, 101–126。[2] V. G. Bardakov, 《虚辫与万能辫》, 《数学基础》184（2004）, 1–18。[3] V. G. Bardakov 和 P. Bellingeri, 《虚辫的组合性质》, 《拓扑学及其应用》156（2009）, 第6期, 1071–1082。[4] V. G. Bardakov、I. Emel'yanenkov、M. Ivanov、T. Kozlovskaya、T. Nasybullov 和 A. Vesnin, 《虚辫群与万能辫群及其商群和表示》, J. GroupTheory 25（2022）, 第4期, 679–712。[5] V. G. Bardakov、K. Gongopadhyay 和 M. V. Neshchadim, 《虚辫群与焊接辫群的交换子子群》, 《国际代数与计算杂志》29（2019）, 第3期, 507–533。[6] V. Bardakov、M. Singh 和 A. Vesnin, 《双群与纯双群的结构方面》, 《几何学献刊》203（2019）, 135–154。

[7] N. Bourbaki, 《李群与李代数》第4–6章。Andrew Pressley 从1968年法文原版译出。《数学基础》（柏林），xii+300 页。施普林格出版社，柏林（2002）[8] L. S. Charlap, 《比伯巴赫群与平坦流形》，Universitext。施普林格出版社，纽约，1986年。xiv+242 页。[9] K. Dekimpe, 《几乎比伯巴赫群：仿射与多项式结构》，《数学讲义》，1639。施普林格出版社，柏林，1996年。x+259 页。[10] S. Dey 和 K. Gongopadhyay, 《双生群的交换子子群与格罗滕迪克图示群》，J. Algebra 530（2019），215–234。[11] R. Fenn 和 P. Taylor, 《引入涂鸦》，《低维流形拓扑》（第二届萨塞克斯会议论文集，切尔伍德盖特，1977），第37–43页，《数学讲义》，722，施普林格，柏林，1979。[12] D. L. Goncalves、J. Guaschi 和 O. Ocampo, 《与晶体群相关的阿廷辫群的一个商》，J. Algebra 474（2017），393–423。[13] J. Gonz´alez、J. L. Le´on-Medina 和 C. Roque, 《具有受控碰撞的线性运动规划与纯平面辫》，Homology Homotopy Appl. 23（2021），第1期，275–296。[14] E. A. Gorin 和 V. J. Lin, 《具有连续系数的代数方程及辫的代数理论中的若干问题》，Mat. Sb.（新辑）78（120）（1969），579–610。[15] K. Gotin, 《二球面上涂鸦的Markov定理》（2018），arXiv:1807.05337。[16] L. H. Kauffman, 《虚纽结理论》，European J. Combin. 20（1999），第7期，663–690。[17] L. H. Kauffman 和 S. Lambropoulou, 《虚辫》，《数学基础》184（2004），159–186。[18] M. Khovanov, 《涂鸦群》，Trans. Amer. Math. Soc. 349（1997），2297–2315。[19] M. Khovanov, 《低维拓扑中的新几何构造》（1990），预印本。[20] M. Khovanov, 《来自有限根系的实 $K(\pi, 1)$ 排列》，Math. Res. Lett. 3（1996），261–274。[21] P. Kumar、T. K. Naik 和 M. Singh, 《小型考克斯特群的同余子群与晶体学商群》（2022），arXiv:2212.09084v2。[22] W. Magnus、A. Karrass 和 D. Solitar, 《组合群论：用生成元与关系表示群》，Interscience出版社，纽约—伦敦—悉尼，1966年，xii +444页。[23] J. Mostovoy, 《平面纯辫群的一个表示》（2020），arXiv:2006.08007。[24] J. Mostovoy 和 C. Roque-M´arquez, 《六股平面纯辫》，J. Knot Theory Ramifications 29（2020），第01期，1950097。[25] T. K. Naik、N. Nanda 和 M. Singh, 《纯虚双生群的结构与自同构》，Monatsh. Math.（2023），即将刊出。[26] T. K. Naik 和 M. Singh, 《奇考克斯特群的自同构》，Monatsh. Math. 195（2021），第3期，501–521。[27] N. Nanda 和 M. Singh, 《虚涂鸦的亚历山大定理与Markov定理》，New York J. Math. 27（2021），272–295。[28] O. Ocampo 和 P. C. C. Dos Santos Jr., 《虚辫群、虚双生群与晶体群》（2021），arXiv:2110.02392v1。[29] T. E. Panov 和 Ya. A. Ver¨evkin, 《多面体积与直角阿廷群及考克斯特群的交换子子群》，Mat. Sb. 207（2016），第11期，105–126。[30] Ya. A. Ver¨evkin, 《直角考克斯特群的伴随李代数》，Proc. Steklov Inst. Math. 305（2019），第1期，53–62。

Department of Mathematical Sciences, Indian Institute of Science Education and Research (IISER) Mohali, Sector 81, S. A. S. Nagar, P. O. Manauli, Punjab 140306, India.电子邮箱地址: pravin444enaj@gmail.com

School of Mathematical Sciences, National Institute of Science Education and Re-search, Bhubaneswar, An OCC of Homi Bhabha National Institute, P. O. Jatni, Khurda752050, Odisha, India.

电子邮箱地址: tushar@niser.ac.in

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme UMR CNRS 6139, Université de Caen Normandie, 14000 Caen, France.电子邮箱地址: nehananda94@gmail.com

Department of Mathematical Sciences, Indian Institute of Science Education and Research (IISER) Mohali, Sector 81, S. A. S. Nagar, P. O. Manauli, Punjab 140306, India.电子邮箱地址: mahender@iisermohali.ac.in