arXiv:2303.09852v1 [math.GR] 17 Mar 2023

双曲群的格罗莫夫边界的有理性

DAVIDE PEREGO

Abstract. 在 [BBM21]，Belk、Bleak 和 Matucci 证明，双曲群可以视为有理群的子群。为此，他们为每个双曲群关联了一棵原子树。此前，人们对这棵树与双曲群相关文献之间的联系知之甚少。本文证明了同行性质和指数发散的原子版本，以及其他类似结果。由此得到若干推论：格罗莫夫边界的拓扑维数上界；定义了一种与凯莱图准等距的增广树；以及一种同步识别器，用以描述由商映射所确定的等价关系。该商映射将树的端映到格罗莫夫边界。

Introduction

双曲群的格罗莫夫边界是过去数十年来受到广泛研究的对象。对此持续至今的研究兴趣，可见于综述 [KB02]。人们特别致力于寻找此类边界的“递归”表示：在其论文 [CP93、CP01], 中，Coornaert 和 Papadopoulos 展示了当群无挠时，如何将其视为半马尔可夫空间；而 Pawlik [Paw15] 则提供了一种将其描述为马尔可夫紧空间的方法，并完成了对一般情形下半马尔可夫表示的研究；Barrett [Bar 18] 则给出了一种判定边界是否为圆的算法，并考察了其他拓扑性质。此外，研究成熟的细分规则工具也在这一领域发挥作用，参见例如细分规则，以及 [Rus14、Rus17]。

我们所采用的有理性概念可见于以下著作 [GNS00] ，作者为 Grigorchuk、Nekrashevych 和 Sushchanskiĭ。其思路是借助有限状态机来描述集合，进而描述关系和函数。主要目标之一是通过异步机定义康托尔集 $\{0,1\}^\omega$ 上的同胚（每一步计算以一位，即 0 或 1，作为输入，并输出由 $\{0,1\}$ 组成的有限字符串）。这些同胚即为有理函数。另一方面，同步机对我们而言只有输入，每一步恰好读取一位，它们用于定义有理集和有理关系。

在 [BBM21]Belk、Bleak 和 Matucci 将一种自相似树称为原子树 $\mathcal{A}(\Gamma)$，并将其与任意双曲图 Γ关联起来。随后，他们证明了双曲群在此类树的边界上的作用是有理的，也就是说，群中的任意元素都可以看作一台有限状态机，其输入为一个边界点，输出为该作用下该点的像。他们还证明，边界 $\partial\mathcal{A}(\Gamma)$投影到 $\partial\Gamma$ 的 Γ (利用了 Webster 和 Winchester 的工作 [WW05])。由于任意自相似树都定义了一种语言，即 Σ^ω 的一个子集，其中 Σ是一个有限符号集，而且该语言也是有理的，因此该投影为格罗莫夫边界中的任意元素赋予一种编码。这里，我们的意思是，为每个边界点关联若干个（可能不止一个）

作者是国家高等数学研究所（INdAM）所属的国家代数、几何结构及其应用研究组（GNSAGA）的成员。

属于 Σ^ω 的元素。自然会产生一个问题：由该投影给出的等价关系是否是一种有理关系。

本文尝试回答这些问题以及其他有关原子树与格罗莫夫边界之间关系的问题。

为统一记号，我们在第1节回顾所需的度量几何和几何群论中的主要工具。第2 节给出了本文的首批原创结果，探讨原子与锥和球之间的关系；其中某些结果改进了 [BBM21]中的相关论述。此外，我们引入了原子尖端（定义2.14），它们在我们的研究中颇有用处。

在第3 节中，我们说明原子的无限序列在双曲图中的表现类似于测地射线。对后续讨论最有用的结果如下。

定理 *3.4* 设 Γ 为双曲图， $\mathcal{A}(\Gamma)$为其原子树。设 $u=(u_k)_{k=1}^\infty$ 和 $v=(v_k)_{k=1}^\infty$ 是 $\partial\mathcal{A}(\Gamma)$中的两个元素。那么，存在一个常数 C 以及一个距离族 $\{d_\Gamma{}^k\}_{k=1}^\infty$，其中每个距离都定义在树的某一层上，使得序列 u 和 v 映射到格罗莫夫边界 $\partial\Gamma$ 中的同一个元素，当且仅当对所有 $k\geq 1$，$d_\Gamma{}^k(u_k,v_k)\leq C$。

粗略地说，这类似于测地射线的同行性质。在第4节中，我们证明了测地线指数发散的原子版本（见命题4.6），并定义了原子及原子的无限序列的格罗莫夫积，同时明确说明了后者与 $\partial\Gamma$中元素的格罗莫夫积之间的关系（见引理2.20 及其前面的讨论）。此外，我们还给出了投影 $\partial\mathcal{A}(\Gamma)\twoheadrightarrow\partial\Gamma$ 的纤维的界（定理4.9），因此利用定理4.12，我们提供了另一种界定格罗莫夫边界拓扑维数的方法。第5 节将定理3.4 推广（见定理5.10），并首次尝试使用原子对格罗莫夫边界进行逼近，这里所说的逼近是指弱格罗莫夫–豪斯多夫收敛（见定义5.12）。

从原子树以及第3节的主要结果出发，可以构造尖端集$(\mathbf{T},\mathrm{d}_{\mathcal{H}})$，其中 $\mathrm{d}_{\mathcal{H}}$ 是豪斯多夫度量；还可以构造原子图 $\Gamma_{\mathcal{A}}$，并赋予其图上的标准度量（定义6.4）。特别地，该图是意义上的增广树，参见 [Kai03]。第6 节给出了双曲群的凯莱图与尖端集之间的一个准等距映射（尖端集及该准等距映射的定义见命题6.3 ）。此外，

定理 6.7。设 G 是一个双曲群， Γ 是其凯莱图。那么，原子图 $\Gamma_{\mathcal{A}}$ 与 Γ 是准等距的。

在第7节中，我们先简要回顾语言理论概念，然后介绍描述由投影 $\partial\mathcal{A}(\Gamma)\twoheadrightarrow\partial\Gamma$所给出的等价关系的机器。该语言基于原子树的刚性结构；原子树是一种特殊的自相似结构，它为树中的每条边赋予一个 Σ元素。该机器的构造同样用到了第3节的结果。整个章节可总结为以下内容：

定理 7.34. 商映射 $\partial\mathcal{A}(\Gamma)\twoheadrightarrow\partial\Gamma$ 定义了一个有理等价关系。

我们指出，成为半马尔可夫空间意味着存在一个具有此类性质的映射；一般而言，这两个概念并不等同，而我们的情况似乎不满足半马尔可夫性。

最后，在第8 节中，我们给出一个例子：某个群的格罗莫夫边界是阿波罗尼奥斯垫片。第一部分从通过有限图逼近格罗莫夫边界的角度，考察其原子图。第二部分则致力于部分描述其粘合机器。

1. 背景

1.1. 度量几何。 我们固定一些方便的记号，并回顾度量几何的一些有用事实。

定义 1.1。 设 X 是一个集合。若函数 $\mathrm{d}: X \times X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 满足 $\mathrm{d}(x,y) \geq 0$ 或 $\mathrm{d}(x,y) = \infty$，则称其为**距离**，如果满足以下条件：

(a) 对所有 $x \in X$，$\mathrm{d}(x,x) = 0$；(

b) 对所有 $x, y \in X$，$\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x)$。

在某些情况下，我们还会添加其他条件

($\bar{a}$) 如果 $\mathrm{d}(x,y) = 0$ 且 $x, y \in X$，那么 $x = y$;

(c) 对所有 $x, y, z \in X$，$\mathrm{d}(x,y) \leq \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y)$。

特别地，我们将满足条件 (a) 的距离称为**半度量**，将满足条件 (c) 的距离称为**伪度量**。

定义 1.2。 **度量**是同时也是伪度量的半度量。

度量几何中有一些技术，可以在合理意义下通过改变底层集合，使距离成为度量。我们关注以下两种操作（更多详情参见 [BH13，I.1。24]和 [BBI01，命题 1.1。5]）。

第一步。在空间 X 上取一个距离 d，并按如下方式定义 d：考虑所有从 x 出发并在 y 结束的有限元素序列，取该序列中相邻两个元素之间距离之和的最小值。由此可得，d 是一个伪度量。在这种情况下，我们不修改空间 X。

第二步。在空间 X 上取一个伪度量 d，并考虑商集X/d，其中的元素是由以下关系得到的等价类：$x \sim_{\mathrm{d}} y$ 当且仅当 $\mathrm{d}(x,y) = 0$。由此得到一个度量空间，它是 X 的商集。

给定一个度量空间 (X,d)，我们定义

$$B_k(x) = \{y \in X \mid \mathrm{d}(x,y) \leq k\}$$

为以 x 为中心、半径为 k 的**球**。为简单起见，我们处理带基点空间 (X, x_0)，因此 B_k 是以 x_0 为中心的球。闭球会很有用，因为我们将处理图。

给定一个度量空间 (X,d)，可以通过定义一个新的度量 d，将其转化为长度空间$\widehat{\ }$；该度量满足上述条件，并且路径的长度使用原度量 d 来定义。

现在假设 (X,d) 是一个长度空间，且 Y 是 X 的子集。一般来说，度量空间 (Y, d_Y) 不是长度空间。但是，如上所述，我们可以$\widehat{\ }$考虑 (Y,d_Y)$\widehat{\ }$，并称 d_Y 为 Y 上相对于 d 的**内蕴度量**。

注 1.3. 设 (X，d) 是一个长度空间，且 Y 是赋有内蕴度量 d 的$\widehat{\ }$子集。则以下结论成立。

$\widehat{\ }$- 若 $y_1, y_2 \in Y$，则 $\mathrm{d}(y_1, y_2) \leq \mathrm{d}(y_1, y_2)$。

- 设 y_1, $y_2 \in Y$。假设存在一条测地线 $[y_1, y_2]_X$（相对于度量 $\widehat{\ }$），它完全包含在 Y 中。那么 $\mathrm{d}(y_1, y_2) = \mathrm{d}(y_1, y_2)$。

1.2. 图与群。 图 $\Gamma = (V, E)$是一个局部有限且连通的简单无向图。为方便起见，我们常将 Γ称作 $x \in \Gamma$，表示顶点集合。

我们在图 Γ 上赋予顶点通常的度量 d_Γ 。由于图与其几何实现 $|\Gamma|$之间存在拟等距关系，因此我们将图视为长度空间。由此， Γ中的测地线是一个顶点序列，与 $|\Gamma|$中的测地线准等距。基于这一点，我们还可以定义球面（以指定点 x_0为中心）。令 $n \in \mathbb{N}$。则 n-**球面** S_n 是所有满足下述条件的顶点 x 的集合：存在一条连接 x 与 x_0 、长度为 n的测地线。

我们对群作如下假设，使其凯莱图满足我们对图的要求。

假设。 群总是有限生成群，生成元集总是对称的，也就是说，如果 s 属于生成元集 S，那么 $s^{-1} \in S$也属于该集合，且该集合不包含 1_G。

1.3. 双曲群及其边界。 我们回顾一下，双曲图有两种定义：一种基于三角形的薄性条件，另一种则基于以下内容

$$(\mathfrak{H}) \qquad (x \mid z) \geq \min\{(x \mid y), (y \mid z)\} - \tilde{\delta}.$$

我们将同时使用这两种定义，因此用 $(x \mid y)$ 表示相对于 x_0 的 x 与 y 的格罗莫夫积； δ 表示界定三角形薄性的常数，而 $\tilde{\delta}$ 如上所示。

以下两个结果在该理论中被视为众所周知，此处提及它们是因为它们有助于我们的讨论：

命题 1.4。 设 Γ 是一个双曲图，且 $[z, x]$ 和 $[z, y]$ 是两条测地线，满足 $\mathrm{d}_\Gamma(z, x) = t_x$ 且 $\mathrm{d}_\Gamma(z, y) = t_y$。令 $t_{max} = \max\{t_x, t_y\}$，并用常值映射将较短的一条延长至 $[0, t_{max}]$ 。那么

$$\mathrm{d}_\Gamma([z, x](t), [z, y](t)) \leq 2\,\mathrm{d}_\Gamma(x, y) + 4\delta$$

对所有 $0 \leq t \leq t_{max}$。

证明详见，例如 [BH13，引理 H.1。15]。

命题 *1.5*（指数发散）。设 Γ 是一个双曲图。存在三个常数 E、 E_1 和 E_2 ，使得对于任意两条测地线 $[z, x]$ 和 $[z, y]$，以及给定的 t、$\tilde{t}$，满足 $\tilde{t} + t \leq \min\{d_\Gamma(z, x), d_\Gamma(z, y)\}$；若 $d_\Gamma([z, x](\tilde{t})\ [z, y](\tilde{t})) > E$，且 c 是一条完全包含于 $\Gamma - B_{\tilde{t}+t}(z)$ 中、从 $[z, x](\tilde{t}+t)$ 到 $[z, y](\tilde{t}+t)$ 的可求长路径，则 $\ell(c) > E_1 e^{E_2 t}$。

此外， E_1 和 E_2 仅取决于 δ。

我们还回顾一下，双曲图的格罗莫夫边界 $\partial\Gamma$ 可视为格罗莫夫序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和测地射线 γ 的商集： $[0, \infty[\to \Gamma$。

值得注意的是，将边界添加到图 Γ中，就会得到一个紧致空间（ $\Gamma \cup \partial\Gamma$ 是拓扑空间这一事实将在后文说明）。实际上，每个紧致空间都可以看作某个双曲空间的边界。但由于我们关注的是群，因此可能性较少。事实上，非初等双曲群的格罗莫夫边界是一个没有孤立点的紧致可度量空间。有关这些事实的更多细节，请参阅 [KB02，第 2] 节。由于

文献中对它有不同的表述版本，因此我们回顾一下 $\partial\Gamma$ 上格罗莫夫积的定义

定义 1.6。设 Γ 是一个双曲图，且 $x_\infty, y_\infty \in \partial\Gamma$。那么， x_∞ 与 y_∞ 之间的格罗莫夫积为

$$(x_\infty \mid y_\infty) := \inf \liminf_k (x_k \mid y_k)$$

其中，下确界取遍所有分别收敛到 x_∞ 和 y_∞ 的格罗莫夫序列 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 和 $\{y_k\}_{k=1}^\infty$。

在继续之前，有几点值得指出。关于该论证的完整处理，我们建议参阅 [V¨a05, 第 5] 节。

注 1.7。

(a) 同样，我们可以考虑元素 $x_\infty \in \partial\Gamma$ 与元素 $y \in \Gamma$ 之间的积，取 $y_n = y$, 对每个 n。注意，对于某个格罗莫夫序列 $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ ， $\liminf_n(x_\infty \mid y_n)$ 为无穷大，当且仅当该序列收敛到 x_∞。(b) 双曲不等式（$\mathfrak{H}$）可以推广到 $\Gamma \cup \partial\Gamma$。(c) 为了定义边界上的格罗莫夫积，也可以考虑 inf lim sup，甚至 sup lim inf 或 sup lim sup。我们选择最小的那个， ˜ ˜但它们彼此相关。事实上，它们都落在一个 2δ-区间内，其中 δ 是（$\mathfrak{H}$）中涉及的双曲常数（详情参见 [V¨a05，定义 5。7]）。

为强调树与双曲空间之间的联系，我们给出这一结果，稍后会用到。证明可见 [GMS19]。

引理 1.8。设 Γ 是一个双曲图，且有一个指定点 x_0。设 γ 和η 是 Γ的两条测地射线。那么存在一个拟等距映射，在 $L_1 = 1$ 和$L_2 = 5\delta$ 的条件下，其中 δ 为双曲常数，将 $\gamma \cup \eta$ 映至由这两条射线沿长度为$([\gamma] \mid [\eta])$ 的初始线段粘合而成的三叉树。

下面回顾格罗莫夫边界上的度量定义，以及一些性质和记号：

定义 1.9。设 $\beta > 1$ 是一个固定常数。双曲图的完备化 $\Gamma \cup \partial\Gamma$ 上的**视觉度量** 定义如下

$$\Upsilon(x_*, y_*) := \beta^{-(x_*|y_*)} \text{ with } x_*, y_* \in \Gamma \cup \partial\Gamma,$$

约定 $\beta^{-\infty} = 0$。

引理 1.10. 设 Γ 是一个双曲图。那么

(a) 函数 Υ 在 $\Gamma \cup \partial\Gamma$上定义了一个拓扑；*(b)* 函数 Υ 限制在 $\partial\Gamma$上时是一个半度量；*(c)* 使用定义 *1.2* 之后说明的第一步，并滥用一下记号，我们得到一个新的函数，仍记作 Υ ，它是 $\partial\Gamma$上的一个度量；*(d)* 取 Υ 如上一点所述，则存在一个常数 $\mathcal{B}$，仅依赖于 δ，使得对所有 $1 < \beta \leq \mathcal{B}$ 都有

$$\frac{1}{2}\beta^{-(x_*|y_*)} \leq \Upsilon(x_*, y_*) \leq \beta^{-(x_*|y_*)}.$$

证明。 参见 [V¨a05]中的命题 5.16。 □

请注意，(d) 点在一定程度上解释了 (c) 点中的歧义以及定义中的记号滥用；事实上，从现在起，我们假设 β 满足刚才引入的约束。

最后需要介绍的记号与端有关。

定义 1.11（拓扑端）。设 Γ是一个带有指定点x_0的图。若序列 $\{\mathcal{C}_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足 $\mathcal{C}_{k+1} \subseteq \mathcal{C}_k$，且 $\mathcal{C}_k$ 是$\Gamma - B_{k-1}$ 的一个连通分支，则称其为 Γ的一个**端**。我们用 $\mathcal{E}_{\mathrm{T}}(\Gamma)$表示所有端构成的集合。

定义 1.12（图端）。设 Γ 是一个带有指定点 x_0 的图。我们在测地射线上定义如下等价关系：若对于所有 k，γ_1（$[k,\infty[$）和 γ_2（$[k,\infty[$）都属于 $\Gamma - B_{k-1}$ 的同一个连通分支，则称测地射线 γ_1 和 γ_2 等价。给定一条测地射线 γ，我们用 end（γ）表示其等价类，并称之为 Γ 的一个**端**，而用 $\mathcal{E}$（Γ）表示所有端的集合。

在我们的情形中，也就是双曲图，容易看出，第二个定义诱导出一个满射 $\partial\Gamma \twoheadrightarrow \mathcal{E}(\Gamma)$，使得 $[\gamma] \mapsto end(\gamma)$。该映射给出了图端与 Gromov 边界的连通分支之间的对应。更一般地说，这两个定义是等价的，即只要 Γ 是一个图，$\mathcal{E}(\Gamma)$ 与 $\mathcal{E}_{\mathrm{T}}(\Gamma)$ 之间就存在一个双射（见 [DK03]）。

1.4. **与双曲图相关联的树**。本小节概述原子树。它是一种将有根树与 Γ相关联的方法，同时还给出一个从其边界到格罗莫夫边界上的商映射；这种方法最早由 [BBM21]提出。在文献中，还有更典范的方法可以做到这一点（例如参见 [CP93]）。

我们首先考虑阿贝尔群 $\mathcal{F} = \mathbb{Z}^{\Gamma}$，它由从 Γ 的顶点（我们将其认作 Γ）到 $\mathbb{Z}$ 的函数构成。这个空间赋有乘积拓扑（由于 Γ 的顶点集合是离散的，这也就是紧开拓扑）。特别地，若取 $\mathcal{F}$（即 $\mathcal{F}$ 对常值函数子群取商得到的商空间），它便继承商拓扑。

我们考虑函数 $d_x : \Gamma \to \mathbb{Z}$，定义为 $d_x(-) := \mathsf{d}_\Gamma(x, -)$，其中 $x \in \Gamma$。类 d_x 在 $\mathcal{F}$ 中于 x 处取得全局最小值。因此存在典范嵌入 $\iota : \Gamma \to \mathcal{F}$，因为 d_x 是 $\Gamma\iota$ 中的孤立点。

定义 1.13. 设 Γ 是一个双曲图。Γ 的**视距函数边界**$\partial_h\Gamma$是 $\Gamma\iota$ 的极限点集合。

称 $\partial_h\Gamma$ 的一个元素为 **horofunction**。根据定义，若顶点序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛到一个 horofunction u，当且仅当序列 $\{d_{x_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛到 u（在紧开意义下）。格罗莫夫最初在 [BGS85], 中引入了视距函数，他将其称为“度量边界”；此后，这一概念得到了广泛研究。关于一种不同但相关的概念，参见定义4.10。

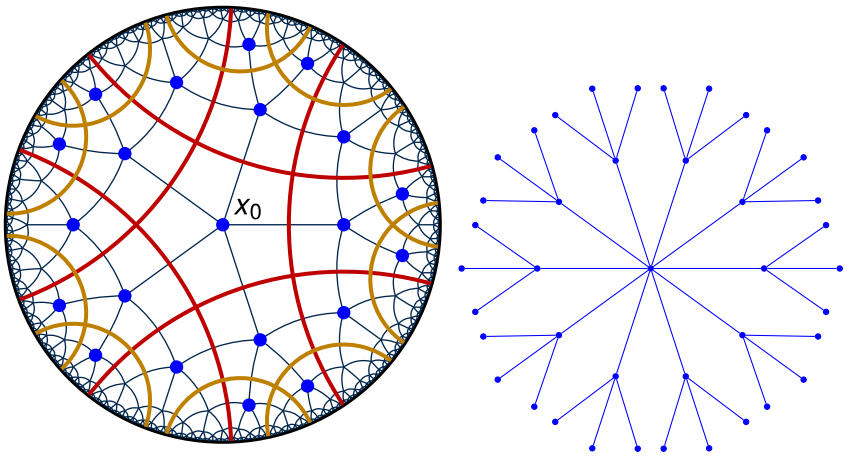
在视距函数中，还有所谓的 **布塞曼点**。具体而言，若一个 horofunction 是某条测地射线的极限（按上述意义），则称它为布塞曼点。这一概念是引出下一个结果的第一步，但请注意，在一般的双曲情形下，存在并非布塞曼点的视距函数（例如参见 [WW06]）。

这个边界始终可以构造，无需像格罗莫夫边界那样要求双曲性。此外，当二者都有定义时，我们可以从视距函数出发恢复$\partial\Gamma$。事实上，我们有如下

命题 1.14. 设 Γ 为一个双曲图。则存在一个连续满射 $\pi_h : \partial_h\Gamma \twoheadrightarrow \partial\Gamma$。

证明. 参见 [WW05，第 4]节。 □

特别地，如果一个序列收敛到 $\partial_h\Gamma$ 中的一个点，那么它会以格罗莫夫意义趋于无穷远。



(A) 在图中观察到的原子，作为.....的子集连同半径为 2 的球（蓝色）。 (B) 树的前两层。

FIGURE 1. 由五个正方形在每个顶点处相交所构成的双曲平面均匀铺砌的 1-骨架中，原子的前两层。

还有一种表示视距函数的方法，称为**原子树**([BBM21，定义 3。4])。其思路是构造一个由 Γ （视为顶点集合）组成的适当划分族，然后赋予其树结构。

设 x 是双曲图 Γ中的一个元素。我们考虑函数

$$f_x(-) := \mathrm{d}_\Gamma(-, x) - \mathrm{d}_\Gamma(x_0, x) : \Gamma \to \mathbb{Z} \tag{$\mathfrak{F}$}$$

对所有 $x \in \Gamma$。
现在我们固定 k 为一个非负整数。 k-划分由以下等价关系给出：两个顶点 x 和 y 等价，当且仅当 f_x 和 f_y在以 x_0 为中心、半径为 k 的球 B_k 上相同（这意味着 $d_x = d_y$）。我们将包含无限多个顶点的等价类称为 k-**层原子**，并用 $\mathcal{A}_k(\Gamma)$ 表示这类等价类的集合。当 Γ 明确时，我们会在记号中省略它。

可以证明，每个划分都是有限的，并且是前一个划分的细化。事实上，给定 $x \in \Gamma$ 和 $k \in \mathbb{N}$， f_x 在 B_k上的限制只有有限种可能。此外，由于我们讨论的是限制，如果 f_x和 f_y 在 B_{k+1}上相同，那么它们在 B_k上也相同。特别地，如果我们考虑原子，它们具有一棵无限树的结构

$$\mathcal{A}(\Gamma) := \coprod_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k(\Gamma).$$

关于这一构造的更多细节，请参见 [BBM21，第 3 小节。1]。

例 1.15. 考虑图中所示双曲铺砌的 1-骨架1.(a)。第一层由十个原子组成：在图 1 中，红线所示的细分给出了全部十个原子，以及一个有限区域，其中 x_0 是唯一的元素。第二层可以描述如下：每个 1级原子都有三个子节点，它们由该原子与棕色线的交集给出。

关于原子的渐近行为，以下是第一个相关性质

命题 1.16 ([BBM21], 命题 3.5)。 每个 k层原子都包含于$\Gamma - B_{k-1}$。

但这一结构的关键之处如下

定理 1.17 ([BBM21], 定理 3.6)。 设 Γ 是一个双曲图。那么， $\mathcal{A}(\Gamma)$ 的边界与 $\partial_h\Gamma$同胚。

这意味着我们可以通过原子的无限嵌套序列来表示视距函数。具体而言，若 u 是 $\partial_h\Gamma$的一个元素，则存在唯一的嵌套序列 $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ ，使得 u_k 是一个 k层原子；根据同胚，该视距函数与此序列相对应。用符号表示，我们将简单地写作 $u = (u_k)_{k=1}^{\infty}$。我们将经常把这种表示称为**视距函数的原子编码**。

注 1.18。 设 $u =(u_k)_{k=1}^{\infty}$ 是一个视距函数。若我们用 f_u 表示 u 的代表元，使得 $f_u(x_0) = 0$。那么 $f_{u_{|B_k}} = f_{u_k}$ ，其中 f_{u_k} 定义为 f_x 在 B_k 上的限制，对所有 $x \in u_k$ 均成立；这里 f_x 是式（$\mathfrak{F}$）中引入的函数。

2. Old and New Results about Atoms

本节旨在描述原子的一些更多性质。特别地，我们将介绍它们与格罗莫夫边界的一种初步关系，以及它们与锥和球的其他关系；这些关系将有助于建立与 $\partial\Gamma$ 的完整联系。我们还将以一种不同的（且不恰当，但非常有用的）方式定义原子上的格罗莫夫积和视距函数。除非另有说明，本节中的结果均视为新的。

在开始之前，我们先说明一种从现在起将要使用的记号。若 $x \in \Gamma$和 $B \subseteq \Gamma$, 则用 $\mathsf{d}_\Gamma(x, B)$ 表示 B 中所有元素相对于 d_Γ 到 x的距离的最小值。

我们还将在本节的两种不同情形下讨论两种不同的类型 定义。之所以如此，是因为在文献中，类型的集合通常指顶点的一个划分。

我们先定义一些点集。

定义 2.1. 设 Γ 是一个双曲图，具有指定点 x_0 ，并且设x 是某个 $k \in \mathbb{N}$ 的 $\Gamma - B_k$ 中的一个元素。

(a) x 的**最近邻** 是 B_k 中满足 $\mathsf{d}_\Gamma(B_k, x)$ $=\mathsf{d}_\Gamma(x, x)$ 的顶点 x 。(b) 如果对于从 p到 x 的每条测地线 $[p, x]$， $[p, x] \cap B_k = \{p\}$ ，则点 $p \in B_k$ 对 x 是**可见的**。(c) 若点 $p \in S_n$ 满足 $n \leq k$ ，则称其对 x 是 n-近端的（当 n 明确时，也简称为**近端**），如果存在一条测地线 $[x_0, p]$ ，使得对于每条测地线 $[x_0, x]$ ，我们都有：以 p_i 表示 $[x_0, p]$ 的 i-顶点，以 x_i 表示 $[x_0, x]$的 i-顶点。

$$\mathsf{d}_\Gamma(p_i, x_i) \leq 4\delta + 2 \text{ for } 1 \leq i \leq n$$

我们用 $N(x, B_k)$ 表示 B_k 中 x 的最近邻集合；用$V(x, B_k)$ 和 $P(x, S_n)$ 分别表示可见点集合和近端点集合。

引理 2.2. 设 Γ 是一个双曲图，且 $x \in a$ 是某个 k 层原子 a。则以下性质成立。

(a) x 的每个最近邻都是可见点，且每个可见点都是近端点，简言之 $N(x, B_k) \subseteq V(x, B_k) \subseteq P(x, S_k)$。*(b)* 点 p 是 k 近端的，当且仅当存在一个 $(k-1)$ 近端点，其与 p 的距离为 *1*，且对所有 $q \in V(x, B_k)$，$d_\Gamma(p, q) \leq 4\delta + 2$。特别地，$P(x, S_k)$ 的直径有界于 $8\delta + 4$。*(c)* 若 p 是 B_k 中 $x \in a$ 的一个最近邻，则它也是 a 中所有元素的最近邻。对于 $V(x, B_k)$ 和 $P(x, S_k)$，同样的结论也成立。

一个直接推论是，$N(a, B_k)$、$V(a, B_k)$ 和 $P(a, S_k)$ 都是定义良好的。

证明。所有这些结论的证明都可以在 [BBM21]中找到：(a) 的第一部分显而易见，第二部分见命题 3.19；(b) 见命题 3.21 和推论 3.22；至于 (c)，则需要结合命题 3.15 和推论 3.24。□

我们注意到，如果对于某个 $x \in \Gamma - B_k$，x 属于 $N(x, B_k)$，那么存在一条经过 x 的测地线 $[\bar{x_0}, x]$，即 $x \in [x_0, x]$。事实上，这可以看作另一种定义。

现在我们简要回顾一下锥和锥类型，因为在证明中我们会明确用到它们。

定义 2.3. 设 Γ是一个双曲图，且有一个指定点 x_0。若 p 是 Γ的一个顶点，则我们将它的**锥** 定义为

$$C(p) := \{x \in \Gamma \mid \mathrm{d}_\Gamma(x_0, x) = \mathrm{d}_\Gamma(x_0, p) + \mathrm{d}_\Gamma(p, x)\}.$$

等价地，点 x 属于 p 的锥，当且仅当存在一条测地线 $[x_0, x]$使得 $p \in [x_0, x]$。

对于情形 $\Gamma = \Gamma(G, S)$，以及其中 G 为某个双曲群的 $x_0 = id$，我们可以定义所谓的锥类型。

定义 2.4. 设 G 是一个双曲群，S 是它的一个生成集。若 $g \in G$，则它的**锥类型** 是集合

$$\{h \in G \mid \ell(hg) = \ell(h) + \ell(g)\}$$

其中，g 表示连接 id 与 g 的一条测地线，而 ℓ 表示长度。

特别地，若 g_1 和 g_2 具有相同的锥类型，则映射 $g_1^{-1}g_2$ 是锥之间的等距变换。

现在我们回顾一个关于双曲群中锥类型的基本结果，该结果由 Cannon 提出 [可84]

命题 2.5. 设 G 是一个双曲群。那么，其凯莱图的锥类型数量有限。

证明。例如，参见 [L¨o17]中的命题 7.5.4。□

现在我们回到本文的目的，即将原子与格罗莫夫边界联系起来，进而与格罗莫夫积联系起来。以下性质描述了该积在一个原子上的行为

注 2.6. 若 $p \in S_k$，即 $\mathrm{d}_\Gamma(x_0, p) = k$，那么格罗莫夫积限制在其锥上的值大于或等于 k。事实上，取 $x, y \in C(p)$，我们有

$$(x \mid y) = \frac{1}{2}\left[k + \mathrm{d}_\Gamma(p, x) + k + \mathrm{d}_\Gamma(p, y) - \mathrm{d}_\Gamma(x, y)\right]$$

由三角不等式可得此结论。

可以看出，锥与原子之间存在一种弱联系，即

注 2.7. 设 x 是 S_k的一个元素。那么， $C(x)$ 是若干适当的 k-原子的有限不交并。事实上，我们取 $y \in C(x)$，并记 a_y 为包含 y的那个 k-原子。于是 $C(x) \subseteq \cup_{y\in C(x)} a_y$。由于 x 是 y的一个最近邻，因此 x 也是每个 $z \in a_y$ 的最近邻。因此，对所有 $z \in a_y$，都有 $z \in C(x)$。所以 $\cup_{y\in C(x)} a_y \subseteq C(x)$。

命题 2.8. 设 Γ 是一个带有指定点 x_0 的双曲图，且a 是一个 k-层原子。那么

$$a \subseteq \bigcap_{p\in N(a,B_k)} C(p) - \bigcup_{q\in S_k - N(a,B_k)} C(q).$$

证明。 由定义可立即得出， a 位于其最近邻锥的交集中。

现在假设 $x \in a$和 $x \in C(q)$，且 $q \in S_k - N(a, B_k)$。这意味着存在 $p \in B_k$，使得 $\mathsf{d}_\Gamma(q, x) > \mathsf{d}_\Gamma(p, x)$。因此 $\mathsf{d}_\Gamma(x_0, x) = \mathsf{d}_\Gamma(x_0, q) + \mathsf{d}_\Gamma(q, x) \geq \mathsf{d}_\Gamma(x_0, p) + \mathsf{d}_\Gamma(q, x) > \mathsf{d}_\Gamma(x_0, p) + \mathsf{d}_\Gamma(p, x) \geq \mathsf{d}_\Gamma(x_0, x)$，这就证明了该断言。□

命题的目标应当是用几何术语（即通过锥）全面刻画原子。尽管这个问题仍未解决，我们可以用 Cannon 引入的所谓 N-类型来界定原子（其他应用见 [Can84] and [CP93]）。如果 Γ是某个双曲群的凯莱图，我们称两个元素 x和 y 具有相同的 N-类型，当且仅当对所有 $z \in B_N(id)$，$\mathsf{d}_\Gamma(xz, id) - \mathsf{d}_\Gamma(x, id) = \mathsf{d}_\Gamma(yz, id) - \mathsf{d}_\Gamma(y, id)$。事实上，它们是证明命题 2.5 的有用工具。

注 2.9。 设 Γ 是某个双曲群的凯莱图。那么， x， $y \in \Gamma$属于同一个 N-层原子，当且仅当 x^{-1}和 y^{-1}具有相同的 N-类型。注意到 $\mathsf{d}_\Gamma(x, id) = \mathsf{d}_\Gamma(x^{-1}, id)$ 且 $\mathsf{d}_\Gamma(xz, id) = \mathsf{d}_\Gamma(z, x^{-1})$ 后，这一点便显而易见。

问题在于， N-类型与锥之间的联系仍未得到充分理解。

我们可以有所论述的一个主题是 $\partial\Gamma$ 中原子的拓扑。更确切地说，利用 π_h 给出的对应，我们可以将 k 层原子 a 的**阴影**定义为

$$\partial a := \{u \in \partial_h\Gamma \mid f_u = f_{a_k} \text{ on } B_k\}.$$

。我们知道它们是 $\partial_h\Gamma$ 的闭子集；由于 π_h 是闭映射（它是从紧致空间到可度量空间的连续映射），因此 $\partial a\pi_h$ 在 $\partial\Gamma$ 中是闭集。

在此情境下， $\partial a\pi_h$ 关于视觉度量的直径不超过 β^{-k}，其中 $a \in \mathcal{A}_k$。

我们暂且回到此前（虽未明言）的群作用： G 在 Γ 上的作用。特别是，我们利用它引出 $\mathcal{A}$（Γ）的子树之间的态射概念。

定义 2.10。 设 G 是一个群，它在双曲图Γ 上几何作用，且该图有一个指定点 x_0。设 $a_n \in \mathcal{A}_n$ 和 $a_m \in \mathcal{A}_m$。若元素 $g \in G$ **诱导一个态射**，连接 a_n 与 a_m，则称

- $a_n g = a_m$, - $(a_n \cap B_{n+k})g = a_m \cap B_{m+k}$ 对于所有 $k \geq 0$， - 对于每个 $k > 0$ 以及包含在 a_n 中的每个原子 $\tilde{a}_{n+k} \in \mathcal{A}_{n+k}$，都存在一个包含在 a_m 中的原子 $\tilde{a}_{m+k} \in \mathcal{A}_{n+k}$，使得 $\tilde{a}_{n+k}g = \tilde{a}_{m+k}$。

第二个条件可以用以下方式重新表述

$$(\mathfrak{L}) \qquad \mathrm{d}_\Gamma(x_0, gx) - m = \mathrm{d}_\Gamma(x_0, x) - n \quad \forall x \in a_n.$$

第三个条件符合 $\mathcal{A}(\Gamma)$ 的子树背景。事实上，我们可以将包含在某个固定原子 a 中的原子视为以 a 为根的子树 $\mathcal{A}(\Gamma)_a$，而该条件允许存在由 g 给出的这类子树之间的同构。基于这一点，我们给出以下

定义 2.11。设 G 是一个在双曲图 Γ 上几何作用且带有指定点 x_0 的群。若存在由 G 中某个元素给出的同构将 Γ 的两个原子相互对应，则它们属于同一**类型**。

对于锥，以下重要性质成立（完整证明见 [BBM21]，更多细节见第 7 节）。

定理 2.12。设 G 是一个在带有指定点 x_0 的双曲图 Γ 上几何作用的群。那么，$\mathcal{A}(\Gamma)$ 中不同类型的原子数量有限。

利用这些考量，我们得到一个关于原子及其球的工具，在下一节中会用到：

钩连引理 2.13. 存在一个常数 λ_a，它界定了原子与其球之间的距离。

从现在起，我们用符号 λ_a 表示**钩连常数**。

证明。条件（$\mathfrak{L}$）表明，原子与其球之间的距离仅取决于该原子的类型。由于该图是双曲的，我们知道它只有有限种类型（由引理 2.12可知）。结合这两项事实，我们可以取所有类型对应距离的最大值，从而得到该常数。□

开放问题。*</style}*是否存在一种方法，可以用 δ 表示 λ_a？

我们定义的最后一类顶点是尖端。

定义 2.14. 我们称原子 $a \in \mathcal{A}_k$ 的尖点为集合 $T(a) := \{x \in a \mid \mathrm{d}_\Gamma(B_k, x) = \mathrm{d}_\Gamma(B_k, a)\}$，或者等价地，称其为 $a \cap S_{k+i}$ 与 $i \geq 0$ 的第一个非空交集。

命题 2.15. 设 a 是 Γ 的一个原子。那么

$$\operatorname{diam} T(a) := \max_{x,y \in T(a)} \mathrm{d}_\Gamma(x, y)$$

由 $2\lambda_a$ 所界。

证明. 只需构造一个由测地线组成的三角形，其顶点为 $T(a)$ 中的两个元素以及 a 的一个最近邻；也就是说，若 $\widehat{x}, \widehat{y} \in T(a)$ 且 $x \in N(a, B_k)$，则 $\mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x}, \widehat{y}) \leq \mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x}, x) + \mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x}, \widehat{y})$。由钩引理可得结论。□

为了了解尖点可以有多小，我们给出以下

引理 2.16. 设 $a_k \in \mathcal{A}_k$。假设 $B_k \cap a_k \neq \emptyset$，则 $B_k \cap a_k$ 由一个点组成。这意味着 $T(a_k) = N(a_k, B_k)$ 由一个点组成。

证明. $B_k \cap a_k = T(a_k) = N(a_k, B_k)$ 这一事实显而易见。只需证明 $T(a_k)$ 是一个点：取属于 $T(a_k)$、因而也属于 S_k 的 x 和 y，根据原子的定义，我们得到

$$\mathrm{d}_\Gamma(x, y) - k = \mathrm{d}_\Gamma(x, x) - k = -k$$

也就是说 $\mathrm{d}_\Gamma(x, y) = 0$，结论成立。□

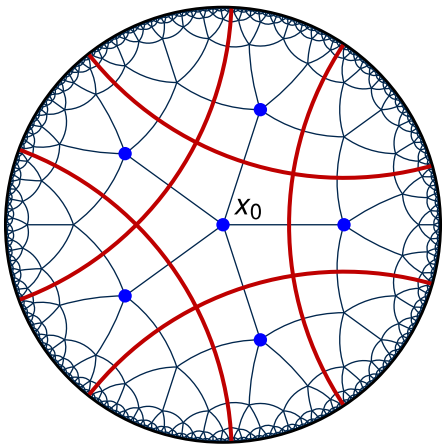


FIGURE 2. 蓝色部分为半径为 1 的球。球面上的每个元素都与一个1级原子 的尖端重合。

例 2.17。 我们再次考虑由正方形构成的双曲平面的均匀铺砌，其中每个顶点的度为 5。回想一下，我们有十个 1级原子。它们平均分为两种不同的类型。其中一种类型具有上述性质。事实上，球面 S_1 上的每个元素都是五个原子之一的尖点。为清晰起见，请见图 2 。

注 2.18。 值得指出的是，两个不同的原子 a 和 b ，若 b是 a 的子节点，则它们可以有相同的尖端。这可能发生在以下情形之一：

– 原子 b 是 a 唯一的子节点，且与其等距。示例见第 8 节中的窄型原子。– 原子 a 分裂成不同的子节点，但其中一个具有相同的尖端。类型 C 和 D 原子见示例 7.19。

尖端的一个初步应用是，两个投影 π_h 和 $\partial\Gamma \twoheadrightarrow \mathcal{E}_{\mathrm{T}}(\Gamma)$ 是相容的。

注 2.19。 我们由满射族 ι_k （从 $\mathcal{A}_k$ 映射到 $\Gamma - B_{k-1}$ 的连通分支集）诱导出映射 $\widehat{\iota}$: $\partial_h\Gamma \twoheadrightarrow \mathcal{E}_{\mathrm{T}}(\Gamma)$，其定义如下： $a_k \mapsto \mathcal{C}_k$ 如果 $a_k \subseteq \mathcal{C}_k$。注意，任何一个 k 级原子 a 都完全包含在 $\Gamma - B_{k-1}$ 的某个连通分支中，因为若 x， $y \in a$，为了在二者之间得到一条路径，可以考虑一条从 x 到最近邻 x 的测地线，再接上一条从 x 到 y的测地线。现在，取一个 horofunction$u = (u_k)_{k=1}^{\infty}$，其像为 $\mathcal{C}_u = (\mathcal{C}_k^u)_{k=1}^{\infty}$，其中 $u_k \subseteq \mathcal{C}_k^u$且 $u_{k+1} \subseteq u_k \subseteq \mathcal{C}_k^u$，因此$\mathcal{C}_{k+1}^u \subseteq \mathcal{C}_k^u$。此外，下图中的图表是交换的。

$$\begin{array}{ccc} \partial_h\Gamma & & \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_h} & \searrow{\scriptstyle \widehat{\iota}} & \\ \partial\Gamma & \twoheadrightarrow & \mathcal{E}_{\mathrm{T}}(\Gamma) \end{array}$$

为证明这一点，设 $[\gamma_u]$ 是格罗莫夫边界中的一个点，使得 $u\pi_h = [\gamma_u]$。令 $\mathcal{C}_\gamma \in \mathcal{E}(\Gamma)$ 满足 $end(\gamma) = \mathcal{C}_\gamma$ ， 且 $\mathcal{C}_\gamma$ 对应于某个序列 $(\mathcal{C}_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{E}_{\mathrm{T}}(\Gamma)$。我们希望 $\mathcal{C}_\gamma \simeq \mathcal{C}_u$。

现在， $\mathcal{C}_n$ 满足 $\gamma([0,\infty[) \subseteq \mathcal{C}_n$ ，并且存在一个序列 $\{\widehat{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ ，属于 Γ ，使得

$\widehat{x}_k \in T(u_k)$，因此按照格罗莫夫意义趋于无穷，并收敛到u，且满足 $(\widehat{x}_k \mid \gamma(k)) \to \infty$。因此，$\widehat{x}_k$ 和 $\gamma(k)$ 必须位于同一个连通分支中。否则

$$\mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x}_k, x_0) + \mathrm{d}_\Gamma(\gamma(k), x_0) - \mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x}_k, \gamma(k)) \leq \lambda_a + 2\overline{k} \qquad \forall k > \overline{k}.$$

事实上，根据钩引理，$\mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x}_k, x_0) \leq k + \lambda_a$；由于 γ 是一条测地射线，因此 $\mathrm{d}_\Gamma(\gamma(k)\ x_0) = k$，且 $\mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x}_k, \gamma(k)) \geq 2k - 2\overline{k}$，其中 $k \in \mathbb{N}$ 满足：$\mathcal{C}_k$ 是第一个不包含 $\widehat{x}_k$ 的分量。由此可得 $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_n^u$，从而得到所述结论。⁻

本节的结论部分旨在描述一种适用于原子的不同格罗莫夫积。我们给出的格罗莫夫积定义可以应用于 $\mathcal{A}$ 作为一棵树的情形，我们将其记作 $(\cdot \mid \cdot)_{\mathcal{A}}$；这在后续章节中会很有用，并且它对应一个视觉度量 $\Upsilon_{\mathcal{A}}$。这里我们要做的是定义同一层原子之间的格罗莫夫积，以及视距函数之间的格罗莫夫积（回顾定理 1.17 和原子编码），以追踪底层双曲图中的变化。具体而言，我们定义

$$(a_k \mid b_k)_k := \max_{\widehat{x}\in T(a_k), \widehat{y}\in T(b_k)} (\widehat{x} \mid \widehat{y}) \text{ and } (u \mid v) := \liminf_k (u_k \mid v_k)_k$$

我们总会在记号中省略 k，因为上下文会说明它的含义。

我们需要检查，这个概念是否与关于格罗莫夫边界上的点的概念相一致。

引理 2.20. 设 u 和 v 是 Γ 的两个视距函数。那么

$$(u\pi_h \mid v\pi_h) \leq (u \mid v) \leq (u\pi_h \mid v\pi_h) + 2\tilde{\delta}.$$

证明. 根据定义 1.6，我们有 $(u\pi_h \mid v\pi_h) \leq (u \mid v)$。对于第二个不等式，我们先说明

$$(u \mid v) \leq \max_{x_k\in T(u_k), y_k\in T(v_k)} \liminf_k (x_k|y_k),$$

这里的意思是，最大值需要在所有可能的顶点序列对上取，其中这些序列满足 $x_k \in T(u_k)$ 和 $y_k \in T(v_k)$。现在

$$\max_{x_k\in T(u_k), y_k\in T(v_k)} \liminf_k (x_k|y_k) \leq \sup_{\{x_k\}\in u\pi_h, \{y_k\}\in v\pi_h} \liminf_k (x_k|y_k),$$

因此，结合这两个不等式并利用注 1.7(c)，我们得到 $(u \mid v) \leq (u\pi_h \mid v\pi_h) + 2\delta$。
□

3. 通过原子粘合关系

既然我们已经分别介绍了双曲图视距函数边界的两种观点 Γ以及关于原子树的一些工具，现在希望在二者之间建立联系，以理解由商映射 π_h 给出的粘合关系：$\partial_h\Gamma \twoheadrightarrow \partial\Gamma$。更确切地说，我们的目标是通过考察原子树来确定两个视距函数何时被粘合。这将导出所谓同行性质的粗略版本。

为此，我们引入如下

定义 3.1. 设 Γ 是一个双曲图，$\mathcal{A}(\Gamma)$ 是它的原子树。对于所有 k，我们选取一个定义在 $\mathcal{A}(\Gamma)$ 的 k 层上的半度量 d^k。如果存在一个常数 C，使得对于给定的两个视距函数 $u = (u_k)_{k=1}^\infty$ 和 $v = (v_k)_{k=1}^\infty$，则称 d^k **表示粘合**：

$$u\pi_h = v\pi_h \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \geq 0 \ \ \mathrm{d}^k(u_k, v_k) \leq C.$$

由此可见，在这样一族半度量下，能够粘合的视距函数具有与在 $\partial\Gamma$ 上粘合的两条测地线相似的行为，或者说，具有广义化的行为。

我们将引入三个半度量，并证明它们刻画了粘合关系。

我们考虑的第一个半度量源自一种自然的思路，用来衡量原子之间的距离。设 a 和 b 是两个 k层原子，则

$$\mathrm{d}_\Gamma{}^k(a,b) := \min_{x\in a, y\in b} \mathrm{d}_\Gamma(x,y).$$

由于 $\mathsf{d}_\Gamma{}^k$ 定义在同一层 k的原子之间，我们总是将 $\mathsf{d}_\Gamma{}^k$ 简称为 d_Γ，其中 k 已由 a 和 b确定。每当我们处理不同层的原子，因而涉及 $\mathsf{d}_\Gamma{}^k$ 和 $\mathsf{d}_\Gamma{}^{k+1}$时，都会明确说明。此外，在陈述和讨论中，我们可能会考虑半度量族 $\{\mathsf{d}_\Gamma{}^k\}_{k=1}^\infty$，并简称为半度量 d_Γ（注意，d_Γ定义在 Γ上，而它是一个度量）。

由于我们关注视距函数，给定 $u = (u_k)_{k=1}^\infty$ 和 $v = (v_k)_{k=1}^\infty$，我们将考虑 $\{\mathsf{d}_\Gamma(u_k, v_k)\}_{k=1}^\infty$。首先注意，距离序列是非递减的。事实上，取 $x_{k+1} \in u_{k+1}$ 和 $y_{k+1} \in v_{k+1}$，使得 $\mathsf{d}_\Gamma(u_{k+1}, v_{k+1}) = \mathsf{d}_\Gamma(x_{k+1}, y_{k+1})$。但是 $x_{k+1} \in u_k$和 $y_{k+1} \in v_k$，因此根据定义

$$\mathrm{d}_\Gamma(u_k, v_k) \le \mathrm{d}_\Gamma(x_{k+1}, y_{k+1}).$$

尽管我们是从几何视角来看待 $\partial_h\Gamma$，但可以采用一种更具解析性的距离

$$\mathrm{d}_h(u,v) := \|f_u - f_v\|_\infty.$$

特别地，我们有以下结果，它显然与我们的目标相关，并且对我们的证明很有用。

命题 3.2. 设 Γ 为一个双曲图。设 u 和 v 是Γ 的两个视距函数，$f_u \in u$ 和 $f_v \in v$ 是它们的两个代表元，且 $f_u(x_0) = f_v(x_0) = 0$。那么，当且仅当存在一个 λ_h（与 u和 v无关）使得 u 和 v 在 $\partial\Gamma$ 上粘合时，

$$d_h(u,v) := \|f_u - f_v\|_\infty < \lambda_h.$$

我们始终用 λ_h表示这个常数。

证明。 参见 [WW05，命题 4。4] □

注意，若 $u = (u_k)_{k=1}^\infty$ 是一个horofunction，且 f_u 是满足$f_u(x_0) = 0$的代表元。当我们将其限制到 B_k时，得到

$$f_{u_k} := \mathrm{d}_\Gamma(-, u_k) - \mathrm{d}_\Gamma(x_0, u_k)$$

且 $\mathsf{d}_h(u_k, v_k) = \|f_{u_k} - f_{v_k}\|_\infty$。

借助以下结果，我们将几何距离与解析距离联系起来。

引理 3.3。 对于所有 $k \in \mathbb{N}$，以及所有 k 层原子对 u_k 和 v_k，我们有

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{d}_h(u_k, v_k) \le \mathrm{d}_\Gamma(u_k, v_k) \le \mathrm{d}_h(u_k, v_k) + 2\lambda_a.$$

证明。 第一部分由两次三角不等式推出。事实上，对于所有 $p \in \Gamma$，我们有

$$|\,\mathrm{d}_\Gamma(u_k, p) - \mathrm{d}_\Gamma(v_k, p)| \le \mathrm{d}_\Gamma(u_k, v_k),$$

并且由于我们还有

$$\begin{aligned}|\,\mathrm{d}_\Gamma(u_k, p) - \mathrm{d}_\Gamma(u_k, x_0) - \mathrm{d}_\Gamma(v_k, p) + \mathrm{d}_\Gamma(v_k, x_0)| \le \\ |\,\mathrm{d}_\Gamma(u_k, p) - \mathrm{d}_\Gamma(v_k, p)| + |\,\mathrm{d}_\Gamma(v_k, x_0) - \mathrm{d}_\Gamma(u_k, x_0)|,\end{aligned}$$

由 $p \in B_k$，将第一个不等式应用两次，可得 $\mathrm{d}_h(u_k, v_k) \leq 2\,\mathrm{d}_\Gamma(u_k, v_k)$。

对于第二部分，我们首先取 $x \in u_k$ 和 $x \in B_k$ （分别取 $y \in v_k$ 和 $y \in B_k$），使得

$$\mathrm{d}_\Gamma(B_k, u_k) = \mathrm{d}_\Gamma(\overline{x}, x) \quad (\text{resp. } \mathrm{d}_\Gamma(B_k, v_k) = \mathrm{d}_\Gamma(\overline{y}, y)).$$

根据 f_{v_k} 和 y 的定义，我们知道 $f_{v_k}(y) = k$。这意味着 $f_{u_k}(y) + k \leq d_h(u_k, v_k)$。等价地，我们有 $\mathrm{d}_\Gamma(y, x) - \mathrm{d}_\Gamma(x_0, \overline{x}) + k \leq d_h(u_k, v_k)$，并利用 x 的定义，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_\Gamma(\overline{y}, x) - [\mathrm{d}_\Gamma(x_0, \overline{x}) + \mathrm{d}_\Gamma(\overline{x}, x)] + k = \\ \mathrm{d}_\Gamma(\overline{y}, x) - [k + \mathrm{d}_\Gamma(\overline{x}, x)] + k \leq d_h(u_k, v_k).\end{aligned}$$

这意味着 $\mathrm{d}_\Gamma(y, x) \leq \mathrm{d}_\Gamma(x, x) + d_h(u_k, v_k)$。

Now

$$\mathrm{d}_\Gamma(u_k, v_k) \leq \mathrm{d}_\Gamma(x, y) \leq \mathrm{d}_\Gamma(x, \overline{y}) + \mathrm{d}_\Gamma(\overline{y}, y),$$

根据上一段的讨论，我们得到

$$\mathrm{d}_\Gamma(u_k, v_k) \leq \mathrm{d}_\Gamma(x, \overline{x}) + d_h(u_k, v_k) + \mathrm{d}_\Gamma(\overline{y}, y)$$

并且根据钩引理，我们有这些 is. □

结合前面的事实，我们得到关于 d_Γ 的主要结果。

定理 3.4. 设 Γ 是一个双曲图，且 $\pi_h : \partial_h\Gamma \twoheadrightarrow \partial\Gamma$ 是从视距函数边界到格罗莫夫边界的投影。设 $u = (u_k)_{k=1}^\infty$ 和 $v = (v_k)_{k=1}^\infty$ 是两个通过其无限原子序列表达的视距函数。以下条件等价。

(A) 这些视距函数在 $\partial\Gamma$ 上粘合，即 $u\pi_h = z_\infty = v\pi_h$，其中某个 $z_\infty \in \partial\Gamma$。*(B)* 存在一个常数 C 以及两个顶点序列 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 和 $\{y_k\}_{k=1}^\infty$，使得 $x_k \in u_k$ 和 $y_k \in v_k$，并且对所有 $k \geq 1$，$\mathrm{d}_\Gamma(x_k, y_k) \leq C$。

从现在起，λ 将表示粘合常数，即使断言成立的最小常数。注意，由于 $\mathrm{d}_\Gamma(x_k, y_k)$ 是一个自然数，λ 定义良好且为自然数。

证明。 假设 (B) 成立。由于对所有 $k \geq 1$ 都有 $x_k \in u_k$，因此 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 收敛到 horofunction u。由此可知，$\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 以格罗莫夫意义趋于无穷。类似地，我们有 $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ 收敛到 v，并以格罗莫夫意义趋于无穷。更进一步，距离 $\mathrm{d}_\Gamma(x_0, x_k)$ 和 $\mathrm{d}_\Gamma(x_0, y_k)$ 随着 $k \to \infty$ 趋于无穷。根据假设

$$(x_k \mid y_k) \geq \frac{1}{2}\left[\mathrm{d}_\Gamma(x_k, x_0) + \mathrm{d}_\Gamma(y_k, x_0) - C\right]$$

因此 (A) 成立。

剩下的工作是结合前面的结果，从 (A) 推出 (B)。由引理 3.3 可知，$\mathrm{d}_\Gamma(u_k, v_k) \leq d_h(u_k, v_k) + 2\lambda_a$；由命题 3.2 可知，$d_h(u, v) < \lambda_h$，因此 $d_h(u_k, v_k) < \lambda_h$。最后，我们有 $\mathrm{d}_\Gamma(u_k, v_k) < \lambda_h + 2\lambda_a$ 对所有 $k \geq 1$ 均成立，因此存在 $x_k \in u_k$ 和 $y_k \in v_k$，使得 $\mathrm{d}_\Gamma(x_k, y_k) < C$，其中 $C = \lambda_h + 2\lambda_a$。□

我们所寻找的结果可直接得出。

推论 3.5。 半度量 d_Γ 表示粘合。

我们引入的第二种距离，旨在说明粘合在一起的原子以渐近的方式彼此接近；也就是说，在原子所包含的无穷多个点处，距离小于粘合常数 λ。

定义 3.6。我们定义

$$\mathrm{d_F}^k(a,b) := \sup_{A\subset a, B\subset b} \min_{\substack{x\in a-A\\ y\in b-B}} \mathrm{d}_\Gamma(x,y)$$

具有 a 和 b 个 k层原子，以及 A 和 B 个有限集。

同样，当 k 明确时，或当我们要表示 $\{\mathrm{d_F}^k\}_{k=1}^{\infty}$的集合时，我们将写作 $\mathrm{d_F}$ 。注意，若 $\mathrm{d_F}(a,\ b)$ 有限，则其上确界实际上就是最大值。

接下来的目的、定义和讨论将说明，我们如何将 $\mathrm{d_F}$ 视为 d_Γ的极限。

这种距离的一个特殊优点是，对于固定的层，可以通过考察下一层来计算。事实上，$\mathrm{d_F}(a,\ b)$ 是 a 和 b 的所有子节点之间距离的最小值。

我们先陈述一些性质，以便与 d_Γ 进行比较。

（1）距离 $\mathrm{d_F}$ 是半度量。（2）如果 $a_{k+1}\subseteq a_k$ 和 $b_{k+1}\subseteq b_k$，那么 $\mathrm{d_F}(a_k,\ b_k)\leq \mathrm{d_F}(a_{k+1},\ b_{k+1})$。这可由定义立即得出（与 d_Γ 的情形相同），也可利用我们前面所作的讨论得出。（3）距离 d_Γ 小于或等于距离 $\mathrm{d_F}$。事实上，如果我们在 $\mathrm{d_F}$ 的定义中代入 $A=B=\emptyset$，就会得到 d_Γ。

一般而言，性质（3）的逆命题并不成立：可能存在两个原子，它们 d_Γ-相邻，但不 $\mathrm{d_F}$-相邻。不过，我们可以给出一个更具体的结论。

引理 3.7。设 $u=(u_k)_{k=1}^{\infty}$ 和 $v=(v_k)_{k=1}^{\infty}$ 是两个视距函数。若对所有 $k\geq 1$，都有 $\mathrm{d}_\Gamma(u_k,\ v_k)\leq C$，则对所有 $k\geq 1$，都有 $\mathrm{d_F}(u_k,\ v_k)\leq C$。

证明。固定 k。我们知道，对于所有 $n\geq k$，都存在一个 $\hat{k}\geq k$，使得$u_{\hat{k}}\subseteq u_k-B_n$ 且 $v_{\hat{k}}\subseteq v_k-B_n$。因此

$$\min_{\substack{x\in u_k-B_n\\ y\in v_k-B_n}} \mathrm{d}_\Gamma(x,y)\leq \min_{\substack{x\in u_{\hat{k}}\\ y\in v_{\hat{k}}}} \mathrm{d}_\Gamma(x,y)=\mathrm{d}_\Gamma(u_{\hat{k}},v_{\hat{k}})\leq C.$$

由此可得 $\sup_{n\geq k}\min_{\substack{x\in u_k-B_n\\ y\in v_k-B_n}}\mathrm{d}_\Gamma(x,y)\leq C$。

取 u_k 的一个有限子集A以及 v_k的一个有限子集 B，则存在一个 n，使得 $A\cup B\subseteq B_n$。因此 $u_k-A\supseteq u_k-B_n$ 且 $v_k-B\supseteq v_k-B_n$，这意味着

$$\min_{\substack{x\in u_k-A\\ y\in v_k-B}} \mathrm{d}_\Gamma(x,y)\leq \min_{\substack{x\in u_k-B_n\\ y\in v_k-B_n}} \mathrm{d}_\Gamma(x,y).$$

最后，我们得到 $\mathrm{d_F}(u_k,v_k)\leq \sup_{n\geq k}\min_{x\in u_k-B_n\\ y\in v_k-B_n}\mathrm{d}_\Gamma(x,y)$，结论得证。 □

由定理 3.4 和引理3.7 可立即得到

推论 3.8。半度量 $\mathrm{d_F}$ 表示该粘合。

注 3.9。

– 事实上，我们已经证明，如果存在一个层 k 使得 $\mathrm{d_F}(u_k,v_k)\leq C$，那么就存在两个 horofunctions u 和 v，它们的序列中分别包含 u_k 和 v_k，并且满足 $u\pi_h=v\pi_h$。– 如果 $u\pi_h\neq v\pi_h$，那么 $\mathrm{d}_\Gamma(u_k,v_k)\to\infty$。因此存在一个指标 k，使得 $\mathrm{d_F}(u_k,v_k)$ 有限，且 $\mathrm{d_F}(u_{k+1},v_{k+1})=\infty$。

我们感兴趣的是这样一种距离：既能表示粘合，又能在没有粘合时呈指数增长。很容易看出，d_Γ 增长得太慢。事实上，假设 a 和 b 是两个 k层原子，那么 $\mathrm{d}_\Gamma{}^k(a,b)\leq \mathrm{d}_\Gamma(x,x_0)+\mathrm{d}_\Gamma(x_0,y)\leq 2k+2\lambda_a$ 对于某些 $x\in a$ 和 $y\in b$ 成立。另一方面，$\mathrm{d_F}$ 则

如前一条注的第二点所述，增长得太快。为此，我们给出如下

定义 3.10. 设 k 是一个大于或等于 1 的整数。我们将 $\Gamma - B_{k-1}$ 视为相对于顶点子集 $\Gamma - B_{k-1}$ 的诱导子图。我们可以在 $\Gamma - B_{k-1}$ 上赋予图上的标准度量，并将其记作 $\mathsf{d}_B{}^k$。

记号遵循此前对 d_Γ 和 d_F 使用的相同约定。
请注意，$\mathsf{d}_B{}^k$ 有限当且仅当 $\Gamma - B_{k-1}$ 连通，并且根据命题 1.16，有 $\mathcal{A}_k \subseteq \Gamma - B_{k-1}$。

与定义半度量 d_Γ 的方式相同，我们规定

$$\mathrm{d}_B(a,b) = \min_{x\in a, y\in b} \mathrm{d}_B(x,y)$$

其中 $a,\ b \in \mathcal{A}_k$。
注意到，d_B 是相对于 d_Γ的内蕴度量，因此我们知道 $\mathsf{d}_\Gamma \le \mathsf{d}_B$ （见注 1.3），即 $\mathsf{d}_\Gamma(a,b) \le \mathrm{d}_B(a,b)$ 对所有 $a,b \in \mathcal{A}_k$ 以及所有k都成立。由此可知，作为定义在原子上的半度量，d_B 比 d_Γ 更快。我们将证明一个技术引理，它将有助于证明 d_B表示该粘合。

引理 3.11。 设 $a,b \in \mathcal{A}_k$ 满足 $\mathrm{d}_F(a,b) \le C$。那么存在 $n \ge k$，使得存在 $\tilde{x} \in a - B_n$ 和 $\tilde{y} \in b - B_n$，满足以下性质：$\mathrm{d}_\Gamma(\tilde{x},\tilde{y}) = \min_{x\in a-B_n} \mathrm{d}_\Gamma(x,y)$，并且存在一条测地线 $[\tilde{x},\tilde{y}]_\Gamma$ （相对于 d_Γ）$_{y\in b-B_n}$

完全包含于 $\Gamma - B_{k-1}$ 中。

证明。 根据假设，我们知道，对于所有 $n \ge k$，都有 $\min_{x\in a-B_n} \mathsf{d}_\Gamma(x,y) \le_{y\in b-B_n}$

C。我们取 $n \ge \dfrac{C}{2} + k - 1$ 和 $\tilde{x},\tilde{y} \in \Gamma$，使得

$$l := \mathrm{d}_\Gamma(\tilde{x},\tilde{y}) = \min_{\substack{x\in a-B_n \\ y\in b-B_n}} \mathrm{d}_\Gamma(x,y).$$

假设存在 $[\tilde{x},\tilde{y}]_\Gamma = \{z_i\}_{i=0}^{l}$，且存在一个 $j \in \{0,\dots,l\}$ 使得 $z_j \in B_{k-1}$。现在

$$C \ge \mathrm{d}_\Gamma(\tilde{x},\tilde{y}) = \mathrm{d}_\Gamma(\tilde{x},z_j) + \mathrm{d}_\Gamma(z_j,\tilde{y}) > C$$

由此即可得出结论。 □

结合引理 3.11 与注 1.3，在 $\mathsf{d}_F(a,b) \le C$ 的情况下，我们得到

$$\mathrm{d}_B(a,b) \le \mathrm{d}_B(\tilde{x},\tilde{y}) = \mathrm{d}_\Gamma(\tilde{x},\tilde{y}) \le \mathrm{d}_F(a,b).$$

注意，$\mathsf{d}_F(a,\ b) = \infty$ 这个不等式成立。因此我们可以陈述如下

命题 3.12。 半度量 d_B 比d_F增长得更慢，即$\mathrm{d}_B \le \mathrm{d}_F$，这意味着$\mathrm{d}_B(a,b) \le \mathrm{d}_F(a,b)$ 对所有 a、 $b \in \mathcal{A}_k$ 以及所有 k 均成立。

将前面的命题与我们关于内蕴度量的讨论结合起来，可得如下

推论 3.13. 半度量 d_B 表示这种粘合。

4. Distances on tips and consequences

本节将结合原子和尖端上的距离，以回答上一节末尾提出的关于原子编码指数行为的问题；更确切地说，我们将找到一种具有以下性质的距离：

定义 4.1。原子编码上的距离 d 具有**指数性质**，如果取两个视距函数 $u=(u_k)_{k=1}^{\infty}$ 和 $v=(v_k)_{k=1}^{\infty}$，则以下条件之一成立

(1) $u\pi_h = v\pi_h$ 且 $\mathsf{d}(u_k, v_k)$ 有一个上界，该上界由某个常数给出（仅取决于 Γ），对所有 k 均成立（即 d 表示粘合）；(2) $u\pi_h \neq v\pi_h$ 且 $\mathsf{d}(u_k, v_k) \geq E_1 e^{E_2(k-j)}$ 对于某个常数 E_1 和 E_2，对所有 $k \geq j$ 且 j 充分大时均成立（我们称 d**呈指数发散**）。

注意，这一定义类似于双曲空间中测地线的性质（参见命题 1.5），稍后将借助更强大的工具再次讨论这一点，以将其与格罗莫夫积联系起来。

我们还将证明，豪斯多夫距离可以表示粘合，并给出 π_h 的纤维界。

我们先引入一个有用的记号。给定 $\mathcal{A}_k$ 某一层上的半度量 d，我们记

$$\mathrm{T}^*\,\mathrm{d}(a,b) := \mathrm{d}(T(a), T(b)) \quad \text{with } a, b \in \mathcal{A}_k.$$

这里回顾一下，$T(a)$ 和 $T(b)$ 分别表示 a 和 b 的尖端。

注 4.2. 我们指出，关于 $\mathsf{T}^*\mathrm{d}_\Gamma$，我们已经知道一件重要的事情。事实上，查看定理 3.4 的证明可知，我们实际上证明了*(A)* 蕴含 *(B)* 对于 $\mathsf{T}^*\mathrm{d}_\Gamma$成立；而对于反方向，我们可以轻松运用证明中的相同技巧得到结论。

因此我们有如下结论

推论 4.3. 半度量 $\mathrm{T}^*\mathrm{d}_\Gamma$ 表示粘合。

事实上，我们可以证明关于 d_Γ 与 $\mathsf{T}^*\mathsf{d}_\Gamma$ 之间关系的一个更强结果。

命题 4.4. 设 a，$b \in \mathcal{A}_k$。则

$$\mathrm{d}_\Gamma(a,b) \leq \mathrm{T}^*\,\mathrm{d}_\Gamma(a,b) \leq 2\,\mathrm{d}_\Gamma(a,b) + 4\delta + 2\lambda_a.$$

证明。我们只需证明第二个不等式。设 $x \in a$ 和 $y \in b$ 满足 $\mathsf{d}_\Gamma(a,b) = \mathsf{d}_\Gamma(x,y)$。根据命题 2.8，存在某个 $x \in N(a, B_k)$，使得 $x \in C(x)$。y和 $y \in \bar{N}(b, B_k)$也同样如此。现在，我们分别对测地线 $[x_0, x]$ 和 $[x_0, y]$ 应用命题 1.4，这两条测地线分别经过时刻 k的两个最近邻，因此 $\mathsf{d}_\Gamma(x,y) \leq 2(\mathsf{d}_\Gamma(x,y) + 2\delta)$。为完成证明，我们结合钩引理和三角不等式

$$\mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x},\widehat{y}) \leq \mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x},\overline{x}) + \mathrm{d}_\Gamma(\overline{x},\overline{y}) + \mathrm{d}_\Gamma(\overline{y},\widehat{y}) \leq 2\,\mathrm{d}_\Gamma(x,y) + 4\delta + 2\lambda_a,$$

由此得到 $\mathsf{d}_\Gamma(\widehat{x}, \widehat{y}) \leq 2\,\mathsf{d}_\Gamma(x, y) + 4\delta + 2\lambda_a$，对任意两个顶点 $\widehat{x} \in T(a)$ 和$\widehat{y} \in T(b)$ 均成立。

□

稍加推导，我们也可以对 $\mathsf{T}^*\mathsf{d}_\mathsf{B}$ 得出一些结论。

命题 4.5. 半度量 $\mathrm{T}^*\mathrm{d}_\mathsf{B}$ 表示该粘合。

证明。由于 $\mathsf{d}_\Gamma \leq \mathsf{d}_\mathsf{B}$，可得 $\mathsf{T}^*\,\mathsf{d}_\Gamma \leq \mathsf{T}^*\,\mathsf{d}_\mathsf{B}$；更确切地说，对于所有 $a, b \in \mathcal{A}_k$ 以及所有 k，$\mathsf{T}^*\,\mathsf{d}_\Gamma(a,b) \leq \mathsf{T}^*\,\mathsf{d}_\mathsf{B}(a,b)$。尚需证明：若 $u=(u_k)_{k=1}^{\infty}$和 $v=(v_k)_{k=1}^{\infty}$ 是两个视距函数，且存在 C_1 使得对于所有 $k \geq 1$，$\mathsf{T}^*\,\mathsf{d}_\Gamma(u_k, v_k) \leq C_1$，则存在 C_2 使得对于所有 $k \geq 1$，$\mathsf{T}^*\,\mathsf{d}_\mathsf{B}(u_k, v_k) \leq C_2$。

令 $\hat{x} \in T(u_k)$ 和 $\hat{y} \in T(v_k)$。我们知道，若 $u_{\tilde{k}} \subseteq u_k$ 和 $v_{\tilde{k}} \subseteq v_k$ 满足 $u_{\tilde{k}} \cup v_{\tilde{k}} \subseteq \Gamma - B_{\frac{C_1}{2}+k-1}$，则 $\mathrm{T}^* \mathrm{d}_{\mathrm{B}}{}^k(u_{\tilde{k}}, v_{\tilde{k}}) = \mathrm{T}^* \mathrm{d}_\Gamma(u_{\tilde{k}}, v_{\tilde{k}})$（这与引理 3.11 中的论证相同）。

我们取 $u_{\tilde{k}}$ 和 $v_{\tilde{k}}$ 为包含在 $\Gamma - B_{\frac{C_1}{2}+k-1}$中的原子的首次出现（即分别是包含在 u_k 和 v_k 中、与 x_0 距离最小的原子）。我们设定 $\tilde{x} \in T(u_{\tilde{k}})$ 和 $\tilde{y} \in T(v_{\tilde{k}})$，使得 $\mathrm{T}^* \mathrm{d}_\Gamma(u_{\tilde{k}}, v_{\tilde{k}}) = \mathrm{d}_\Gamma(\tilde{x}, \tilde{y})$。注意，根据钩引理，我们知道 $T(u_{\tilde{k}}) \cup T(v_{\tilde{k}}) \subseteq \Gamma - B_{\frac{C_1}{2}+k-1+\lambda_a}$。

由于我们想研究 $\mathrm{d}_{\mathrm{B}}(\hat{x}, \hat{y})$，因此先应用三角不等式和主要假设：

$$\mathrm{d}_{\mathrm{B}}(\hat{x}, \hat{y}) \leq \mathrm{d}_{\mathrm{B}}{}^k(\hat{x}, \tilde{x}) + \mathrm{d}_{\mathrm{B}}{}^k(\tilde{x}, \tilde{y}) + \mathrm{d}_{\mathrm{B}}{}^k(\tilde{y}, \hat{y}) \leq \mathrm{d}_{\mathrm{B}}{}^k(\hat{x}, \tilde{x}) + C_1 + \mathrm{d}_{\mathrm{B}}{}^k(\tilde{y}, \hat{y}).$$

现在 $x \in \left(\Gamma - B_{\frac{C_1}{2}+k-1+\lambda_a}\right) \cap C(p)$ 对每个 $p \in N(u_k, B_k)$。我们知道存在 $[p, \tilde{x}]_\Gamma \subseteq \Gamma - B_{k-1}$，且其长度不大于 $\frac{C_1}{2} - 1 + \lambda_a$。再次运用钩引理，可得

$$\mathrm{d}_{\mathrm{B}}{}^k(\hat{x}, \tilde{x}) \leq \mathrm{d}_{\mathrm{B}}{}^k(x, p) + \mathrm{d}_{\mathrm{B}}{}^k(p, \tilde{x}) = \mathrm{d}_\Gamma(x, p) + \mathrm{d}_\Gamma(p, \tilde{x}) \leq \frac{C_1}{2} - 1 + 2\lambda_a.$$

以类似的方式，我们得到 $\mathrm{d}_{\mathrm{B}}{}^k(\hat{y}, \tilde{y}) \leq \frac{C_1}{2} - 1 + 2\lambda_a$；因此结论成立。 □

接下来证明

命题 4.6。 半度量 $\mathrm{T}^*\mathrm{d}_{\mathrm{B}}$ 呈指数发散。

证明。 设 $u, v \in \partial_h \Gamma$ 满足 $u\pi_h \neq v\pi_h$。由于 $\mathrm{d}_\Gamma(u_k, v_k)$ 在 k趋于无穷时无界，因此我们可以选取 j，使得 $\mathrm{d}_\Gamma(u_j, v_j)$ 任意大。事实上，取 $x \in N(u_j, B_j)$ 和 $y \in N(v_j, B_j)$，由钩引理可知

$$\mathrm{d}_\Gamma(\overline{x}, \overline{y}) \geq \mathrm{d}_\Gamma(u_j, v_j) - 2\lambda_a$$

因此，我们可以令 $\mathrm{d}_\Gamma(\overline{x}, \overline{y})$ 任意大。

现在，对于所有 $k \geq j$，都有 $x_k \in u_k$ 属于 $C(x)$，对于$y_k \in v_k$ 和 $C(y)$ 也同样成立。我们构造一对测地线 $[x_0, x_k]$ 和 $[x_0, y_k]$，分别经过 x 和 y。根据命题1.5，我们知道它们的伴行者呈指数级发散。我们将 x 视为 x_k 的最近邻，使其属于 $[x_0, x_k] \cap S_k$；对于 $y \in [x_0, y_k] \cap S_k$也同样处理，因此有

$$\mathrm{d}_{\mathrm{B}}{}^k(x, y) \geq E_1 e^{E_2(k-j)}$$

对于某些常数 E_1 和 E_2。最后，取 $x_k \in T(u_k)$ 和 $y_k \in T(v_k)$（其中 $\mathrm{d}_{\mathrm{B}}{}^k(x_k, y_k) = \mathrm{T}^* \mathrm{d}_{\mathrm{B}}{}^k(u_k, v_k)$），则有

$$\begin{aligned} \mathrm{T}^* \mathrm{d}_{\mathrm{B}}{}^k(u_k, v_k) = \mathrm{d}_{\mathrm{B}}{}^k(x_k, y_k) &\geq \mathrm{d}_{\mathrm{B}}{}^k(x, y) - \mathrm{d}_{\mathrm{B}}{}^k(x, x_k) - \mathrm{d}_{\mathrm{B}}{}^k(y, y_k) \\ &\geq E_1 e^{E_2(k-j)} - \mathrm{d}_{\mathrm{B}}{}^k(x, x_k) - \mathrm{d}_{\mathrm{B}}{}^k(y, y_k). \end{aligned}$$

根据构造，测地线 $[x, x_k] \subseteq \Gamma - B_{k-1}$，因此 $\mathrm{d}_\Gamma(x, x_k) = \mathrm{d}_{\mathrm{B}}{}^k(x, x_k)$。类似地，我们得到 $\mathrm{d}_\Gamma(y, y_k) = \mathrm{d}_{\mathrm{B}}{}^k(y, y_k)$。

再次，借助钩引理结合前面的不等式，我们最终得到

$$\mathrm{T}^* \mathrm{d}_{\mathrm{B}}{}^k(u_k, v_k) \geq E_1 e^{E_2(k-j)} - 2\lambda_a.$$

□

推论 4.7。 半度量 $\mathrm{T}^*\mathrm{d}_{\mathrm{B}}$ 具有指数性质。

我们还想简要讨论另外两个重要推论，它们来自尖端方法。第一个涉及一种众所周知的度量。

命题 4.8。 豪斯多夫度量 $\mathrm{T}^*\mathrm{d}_{\mathcal{H}}$ 表示粘合。

证明。 设 a， $b \in \mathcal{A}_k$。 由于 $\mathrm{T}^*\,\mathsf{d}_\Gamma$ 是属于尖点 $T(a)$ 和 $T(b)$ 的元素对 $(\widehat{x},\ \widehat{y})$ 中的最小值，显然有

$$\mathrm{T}^*\,\mathrm{d}_\Gamma(a,b) \leq \min_{\widehat{y}\in T(b)} \mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x},\widehat{y}) \leq \max_{\widehat{x}\in T(a)} \min_{\widehat{y}\in T(b)} \mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x},\widehat{y})$$

反过来（交换 a 和 b）也同样成立。因此 $\mathrm{T}^*\,\mathsf{d}_\Gamma(a,\ b) \leq \mathrm{T}^*\,\mathsf{d}_{\mathcal{H}}(a,\ b)$。

对于另一方向，我们需要使用命题 2.15，由此可得

$$\max_{\widehat{x}\in T(a)} \min_{\widehat{y}\in T(b)} \mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x},\widehat{y}) \leq \mathrm{T}^*\,\mathrm{d}_\Gamma(a,b) + 2\lambda_a$$

因此，$\mathrm{T}^*\,\mathsf{d}_{\mathcal{H}}(a,\ b) \leq \mathrm{T}^*\,\mathsf{d}_\Gamma(a,\ b) + 2\lambda_a$，与之前一样。 □

最后一个推论涉及 的纤维。我们已经讨论过其一些性质，特别是定理 3.4 告诉我们何时两个元素属于同一纤维。但现在，我们可以证明以下命题

定理 4.9. 映射 $\pi_h\colon \partial_h\Gamma \twoheadrightarrow \partial\Gamma$ 是有限多对一的。此外，纤维中元素的数量有一个上界，该上界仅取决于 λ_a 和 δ。

证明。我们回顾对图 Γ 的假设：它是局部有限的，因此球都是有限的。我们考虑视距函数 $u = (u_k)_{k=1}^{\infty}$ 的原子编码，并且由命题 2.15 可知，对所有k，尖点 $T(u_k)$ 的直径有限。特别地，它不超过 $2\lambda_a$。我们在 $T(u_k)$ 中选取一个元素，并考虑以该元素为中心、半径为 $2(\lambda_a + 2\delta)$ 的球 $B\ + 2\lambda_a$。根据定理 3.4 和注 4.2，如果两个视距函数的尖点在每一层的距离都不超过 $2(\lambda_a + \delta)$，那么它们映射到格罗莫夫边界上的同一个点。因此，根据球 B 的定义，凡是与 u 属于同一纤维的视距函数，其 k 层尖点都必须与 B 相交。由于这对所有 k 都成立，而且这些常数不依赖于 k，故结论得证。□

尽管存在差异，本节这一部分的思路与 [CP93], 有许多相通之处，尤其是本证明采用了其中所提供的相同技巧。

值得注意的是，这一结果也可以通过另一种方式得到。在他们的著作[CP93，CP01], Coornaert 和 Papadopoulos 使用了另一种 horofunction 概念（这一界定由 Gromov 在 [Gro87]中提出）。

定义 4.10。 设 Γ 为一个双曲图，且 x_0 是 Γ中的一个指定顶点。若映射 $f\colon |\Gamma| \to \mathbb{R}$ 满足 $f(x_0) = 0$，则称其为一个 CP-函数，条件是它满足以下两个条件：

(1) 存在 $\epsilon > 0$ 使得

$$f(l\gamma(t)) \leq (1-t)f(l\gamma(0)) + tf(l\gamma(1)) + \epsilon$$

其中 $\gamma\colon [0,l] \to |\Gamma|$ 为测地线，且 $l\colon [0,1] \to [0,l]$ 将 $t \in [0,1]$ 映射到$lt \in [0,l]$;

(2) 对每个 $x \in |\Gamma|$ 以及每个 $\tilde{t} \in]-\infty,\ f(x)]$，都有 $f(x) = \tilde{t} + \mathrm{d}_\Gamma(x,\ f^{-1}(\tilde{t}))$。

随后，他们成功证明， CP在 Γ 上的、在顶点处仅取整数值的函数空间映射到 $\partial\Gamma$，且商映射是有限对一的（参见 [CP01，命题 4.5]）。因此，要得出纤维是有限的，我们只需证明以下结论

命题 4.11 ([Bel19])。 设 Γ 是一个双曲图。那么，*horofunction* 是一个 CP-函数。

注意，反向命题不成立。存在一些双曲图，其中这两个概念并不一致（详情请见 [Bel19] ）。

定理 4.9 为我们提供了一种工具，用以限制 拓扑维数 的上界： $\partial\Gamma$。

定理 4.12 （胡雷维茨）。 设 X 是一个紧致可度量空间，且是康托尔集的连续像。如果该映射的纤维的基数均不超过整数 $n > 0$，则 X 的拓扑维数小于 $n - 1$。

参见 [Kur66，第 XIX 章]。
该定理在几何群论中有许多应用，例如，参见 [Nek07，命题 57]中对收缩自相似群的极限集的界，以及 [CP93]中以两种不同版本给出的双曲图的界，即命题 3.7 和命题 4.2，后接推论 5.2。

5. Using geodesics and geodesic rays

本节基于以下策略：首先，我们将把准测地射线与原子编码联系起来，然后处理有限测地线，最后也处理测地射线。这种方法使我们能够整合并推广前面各节的内容，并初步通过原子得到格罗莫夫边界。首先，我们需要反复应用钩引理，也就是说

命题 5.1. 设 $u_k \supseteq u_{k+1}$ 为两个原子，其层分别为 k 和 $k+1$。那么

$$\max_{\substack{x\in T(u_k)\\ y\in T(u_{k+1})}} \mathrm{d}_\Gamma(x,y) \le 2\lambda_a + 1.$$

证明。设 $\widehat{x}_{k+1} \in T(u_{k+1})$。根据钩引理，我们知道 $\mathrm{d}_\Gamma(x_0, \widehat{x}_{k+1})$ 小于或等于 $k+1+\lambda_a$。因此，它就是一条从 x_0 出发并经过 u_k 的任意一个最近邻 $x \in S_k$ 的测地线的长度（请回忆，根据引理 2.2.c，我们可以任选一个）。我们知道这样的测地线存在，因为 $\widehat{x}_{k+1} \in u_k$，并且根据命题 2.8 亦可知如此。但这意味着 $\mathrm{d}_\Gamma(x, \widehat{x}_{k+1}) \le \lambda_a + 1$；再次根据钩引理，对于 u_k 尖点中的任意元素 $\widehat{x}_k$，有 $\mathrm{d}_\Gamma(x, \widehat{x}_k) \le \lambda_a$。将这两条结论结合起来，并应用三角不等式，即得所求。□

注意，如果我们考察最小值，即

$$\min_{\substack{x\in T(u_k)\\ y\in T(u_{k+1})}} \mathrm{d}_\Gamma(x,y),$$

那么所给出的估计可能过于粗略。事实上，两个连续尖点中的两个元素可能互为后继。

例 5.2. 观察图 1.(a)，我们得到两个连续尖点的例子。事实上，半径为 2 的球面中，任何属于某个 2 级原子的尖点的元素，都是相应 1 级原子尖点中某个元素的后继。

尽管存在这一情况，我们仍能构造一条准测地射线

命题 5.3. 设 $u = (u_k)_{k=1}^{\infty}$ 是由其原子编码描述的 $\partial_h\Gamma$ 中的一个元素。那么，任意满足 $\widehat{x}_k \in T(u_k)$ 的点序列 $\{\widehat{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ 都有一个子序列，该子序列是一条准测地射线。

证明。 取陈述中所述的 $\{\widehat{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$。有些 $\widehat{x}_k$ 可能相等，因此，对于每个 k，我们删去相同 $\widehat{x}_k$ 的所有重复项，得到一个新序列 $\{\widehat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$。我们断言， $\{\widehat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是从 $\mathbb{N}$ 到 Γ 的拟等距嵌入。

由命题 5.1 可知，$\mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x}_n, \widehat{x}_{n+1}) \le D$，其中常数 D 仅依赖于 λ_a。总之，我们知道，如果 $\widehat{x}_n$， $\widehat{x}_m \in \{\widehat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 且 $n \le m$，那么

$\mathsf{d}_\Gamma(\widehat{x}_n, \widehat{x}_m) \leq D(m-n)$ 由三角不等式反复应用可得。另一方面，$\widehat{x}_n \in B_{n-1+\lambda_a}$ 根据 钩引理 以及 $\widehat{x}_n \in \Gamma - B_{m-1}$ 由命题 1.16，因此 $\mathsf{d}_\Gamma(\widehat{x}_n, \widehat{x}_m) \geq m - n - \lambda_a$。□

值得注意的一个有趣事实是，如果这样的准测地射线是一条测地射线，那么根据定义，该视距函数就是一个 Busemann 点。

注 5.4。注意，两个视距函数 u 和 v 映射到$\partial\Gamma$ 中的同一个点，当且仅当利用前述命题构造出的两条测地射线之间的豪斯多夫距离有界（另见 [BH13，引理 H.3。1] 该文给出了一个不同但等价的 $\partial\Gamma$定义，并由此得到这一结论）。

下述注中使用的技巧不仅能改善准测地射线的结构，而且也是后续大多数证明的关键要素：

注 5.5. 令 $a_n \in \mathcal{A}_n$ 并取 p_n 作为 a_n的一个近端点。根据引理 2.2.b，我们可以考虑一条组合测地线 $[p_0, p_n] = (p_0, p_1, \dots, p_n)$，使得 $p_0 = x_0$且对某些（因而对所有）点 $x \in a_n$和所有 $i \leq n$，都有 $p_i \in P(x, S_i)$。不过，我们还能说得更多；实际上，我们可以找到一条测地线，使得 $p_i \in P(a_i, S_i)$，其中 $a_i \in \mathcal{A}_i$且对所有 $i \leq n$都有$a_i \supseteq a_n$，如 $x \in a_i$所示。

根据定义 1.9 以及其后的讨论，我们将 $\partial\mathcal{A}$ 视为关于 Υ_A的度量空间，它不过是有根树边界上的标准视觉度量。具体而言，我们定义 $\Upsilon_A(u, v) := \beta^{-k}$其中 k 满足 $u_k = v_k$ （这意味着 $u_i = v_i$ 对每个 $i \leq k$ 均成立），且 $u_{k+1} \neq v_{k+1}$。至于与 $\partial\Gamma$ 相关的其他树结构（参见例如 [CP93，命题 2。3]），我们有以下

命题 5.6。映射 $\pi_h : (\partial\mathcal{A}, \Upsilon_A) \twoheadrightarrow (\partial\Gamma, \Upsilon)$ 是利普希茨的。

证明。设 $u = (u_n)_{n=1}^\infty$ 和 $v = (v_n)_{n=1}^\infty$ 是两个视距函数，且满足 $\Upsilon_A(u, v) = \beta^{-k}$。取 $\{\widehat{x}_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{\widehat{y}_n\}_{n=1}^\infty$，使得对所有 n都有 $\widehat{x}_n \in T(u_n)$ 和 $\widehat{y}_n \in T(v_n)$，并且对所有 $n \leq k$都有 $\widehat{x}_n = \widehat{y}_n$；现在由注 1.7(c)可得

$$2\tilde{\delta} + (u\pi_h \mid v\pi_h) \geq \sup(\sup_{n\geq 0} \inf_{m\geq n} (x_m \mid y_m)) \geq \sup_{n\geq 0} \inf_{m\geq n} (\widehat{x}_m \mid \widehat{y}_m)$$

其中，第一个上确界取遍所有满足 x_n收敛到 $u\pi_h$ 且 y_n 收敛到 $v\pi_h$的序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{y_n\}_{n=1}^\infty$。
由于对所有 $m \leq k$都有 $\widehat{x}_m = \widehat{y}_m$，因此 $(\widehat{x}_m \mid \widehat{y}_m) = d(\widehat{x}_m, x_0) \geq m$；而若 $m > k$，则有 $\mathsf{d}_\Gamma(\widehat{x}_m, \widehat{y}_m) \leq \mathsf{d}_\Gamma(\widehat{x}_m, \widehat{x}_k) + \mathsf{d}_\Gamma(\widehat{y}_m, \widehat{y}_k)$，并且

$$\mathsf{d}_\Gamma(\widehat{x}_m, \widehat{x}_k) \leq \mathsf{d}_\Gamma(\widehat{x}_m, \overline{x}_m) + \mathsf{d}_\Gamma(\overline{x}_m, p_m) + \mathsf{d}_\Gamma(p_m, p_k) + \mathsf{d}_\Gamma(p_k, \overline{x}_k) + \mathsf{d}_\Gamma(\widehat{x}_k, \overline{x}_k)$$

其中 $\overline{x_m}$ 和 x_k 分别是 $\widehat{x}_m$ 和 $\widehat{x}_k$ 的最近邻；而 p_m 和 p_k是同一条测地线上的 $\widehat{x}_m$ 和 $\widehat{x}_k$ 的近端点（见注 5.5）。因此，根据钩引理，$\mathsf{d}_\Gamma(\widehat{x}_i, x_i) \leq \lambda_a$；根据引理 2.2.b，对于 $i = k$、$\overline{m}$，$\mathsf{d}_\Gamma(x_i, p_i) \leq 4\delta + 2$。此外，$\mathsf{d}_\Gamma(p_m, p_k) = \overline{m} - k$，所以我们可以得出

$$\mathsf{d}_\Gamma(\widehat{x}_m, \widehat{x}_k) \leq m - k + D \text{ with } D = 2(\lambda_a + 4\delta + 2).$$

$\widehat{y}_m$ 和 $\widehat{y}_k$也同样成立。
回到格罗莫夫积，我们可以说：

$$\mathsf{d}_\Gamma(\widehat{x}_m, x_0) + \mathsf{d}_\Gamma(\widehat{y}_m, x_0) - \mathsf{d}_\Gamma(\widehat{x}_m, \widehat{y}_m) \geq 2m - 2(m - k + D) = 2(k - D)$$

其中 D 是仅依赖于 λ_a 和 δ 的常数。因此，$\Upsilon(u\pi_h, v\pi_h) \leq \tilde{D}\beta^{-k}$ 与 $\tilde{D} = \beta^{D+2\tilde{\delta}}$ 一样，得证。□

开放问题。视觉度量与 $\partial_h\Gamma$ 上的一致度量之间是否存在某种联系，使得我们可以说映射 $(\partial_h\Gamma,\ |\cdot|_\infty) \twoheadrightarrow (\partial\Gamma,\ \Upsilon)$ 是利普希茨的？

从原子编码出发，我们希望找到一条测地射线，使其代表与该原子编码所对应的 horofunction 相同的 $\partial\Gamma$ 元素，更正式地说

命题 5.7. 设 u 是一个 *horofunction*。则存在一条测地射线 γ_u，使得 $\gamma_u(0) = x_0$，且 $\gamma_u(k)$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$均近端于 u_k。此外$[\gamma_u]_{\partial\Gamma} = u\pi_h$。

注意，我们并不是说每个 horofunction 都是 Busemann 点；正如我们前面提到的，这对于双曲图一般而言并不成立。正确的说法是，horofunction u 是 Busemann 点，当且仅当它与由 γ_u定义的 horofunction 重合。

命题的证明涉及以下著名结果，以及前面提到的邻近点技巧。

定理 5.8（阿尔泽`拉-阿斯科利）。设 X 是一个带有指定点 x_0 的适当测地空间。设 $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是一列函数 $\gamma_k :\ [0,\infty[\to X$，满足

(a) $\gamma_k(0) = x_0$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 都成立；
(b) γ_k 是 $[0,k]$ 上的一条测地线。

那么，存在一个子序列 $\{\tilde\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，它在紧集上一致收敛于一条测地射线 $\gamma :\ [0,\infty[\to X$。

证明（命题 5.7）。设 $(u_k)_{k=1}^\infty$ 是表示 u 的原子序列。对每个 k，我们利用注 5.5 得到一条测地线 γ_k，使得对所有 $n \le k$，$\gamma_k(n) \in P(u_n, S_n)$。然后，我们对序列 $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}^\infty$ 应用定理 5.8，令对所有 $t \ge k$，$\gamma_k(t) := \gamma_k(k)$，从而得到一条测地射线 γ。我们断言，γ 的每个 n-顶点（即满足 $n \in \mathbb{N}$ 的 $\gamma(n)$）都是 u_k 的近端点。事实上，我们讨论的是紧集上一致收敛，也就是说

$$\lim_k \max_{t\in[0,n]} \mathrm{d}_\Gamma(\tilde\gamma_k(t), \gamma(t)) = 0$$

换言之

$$\forall\epsilon > 0\ \ \exists j \text{ s.t. } \forall k \ge j \text{ and } \forall t \in [0,n],\ \ \mathrm{d}_\Gamma(\tilde\gamma_k(t), \gamma(t)) < \epsilon.$$

这意味着，任意顶点 $\gamma(n)$ 都可以任意接近某个近端点；但由于我们处于图中，只要将 ϵ 取得足够小，近端点与 $\gamma(n)$ 实际上就是同一个顶点。

为了证明 γ 表示 $u\pi_h$中的同一点，我们沿用之前的论证：利用钩引理来界定元素 $\widehat{x}_k \in \mathrm{T}^*(u_k)$ 与最近邻 x_k 之间的距离，其中 u_k；然后应用引理 2.2.b，得出 x_k 与 $\gamma(k)$ 相距不超过 $(4\delta+2)$。最后利用三角不等式可得 $\mathrm{d}_\Gamma(\gamma(k)\ \widehat{x}_k) \le 4\delta + 2 + \lambda_a$。□

定义 5.9。设 u 为一个 horofunction。我们将命题 γ_u 5.7 所定义的测地射线 称为 **相对于** 的近端射线 u。

我们知道，从某种意义上说，$\partial\Gamma$中两个点的格罗莫夫积衡量了代表这两个点的两条测地射线同行的距离有多长。在下面的结果中，我们将给出这一事实的原子编码版本。

定理 5.10. 设 $u = (u_k)_{k=1}^\infty$ 和 $v = (v_k)_{k=1}^\infty$ 是由原子编码的两个 *horofunction*。则有以下结论。

(a) 若对所有 $i \leq k$，都有 $\mathrm{T}^* \, \mathrm{d}_\Gamma(u_i, v_i) \leq C$，则 $(u\pi_h \mid v\pi_h) \geq k - C'$；
(b) 若 $(u\pi_h \mid v\pi_h) \geq k$，则对所有 $i \leq k$，都有 $\mathrm{T}^* \, \mathrm{d}_\Gamma(u_i, v_i) \leq C''$。
其中 C、C' 和 C'' 是常数。此外，如果 C 仅取决于 λ_a 和 δ，那么 C' 和 C'' 也仅取决于它们。

特别地，当假设对每个3.4 都成立时，我们得到定理 k 的一个新证明。

证明。 对于第一个断言，我们按照证明 π_h 是利普希茨函数的方式进行（见命题 5.6）。当 $l \leq k$ 时，我们有 $(u_l \mid v_l) \geq l - C$，由假设可知。如果 $l > k$，我们考虑以下三角不等式

$$\mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x}_l, \widehat{y}_l) \leq \mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x}_l, \widehat{x}_k) + \mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x}_k, \widehat{y}_k) + \mathrm{d}_\Gamma(\widehat{y}_k, \widehat{y}_l)$$

当 $i = l$ 时，$\widehat{x}_i \in T(u_i)$ 和 $\widehat{y}_i \in T(v_i)$，k。
然后我们使用注 5.5 中的论证，得到两条近端点的测地线，并给出 $\mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x}_l,\ \widehat{x}_k)$ 和 $\mathrm{d}_\Gamma(\widehat{y}_l,\ \widehat{y}_k)$ 的估计，从而得到

$$\mathrm{T}^* \, \mathrm{d}_\Gamma(u_l, v_l) \leq 2(l-k) + 4(\lambda_a + 4\delta + 2) + \mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x}_k, \widehat{y}_k).$$

最后，我们再次利用假设：$\mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x}_k, \widehat{y}_k) \leq C$，因此 $\mathrm{T}^* \, \mathrm{d}_\Gamma(u_l, v_l) \leq 2(l-k) + 4(\lambda_a + 4\delta + 2) + C$。这样，我们为每个形如 $(u_l \mid v_l)$ 的格罗莫夫积找到了一个下界（我们隐含地使用了钩引理，于是结论得证）。

˜需要指出的是，由注$u \mid v) \leq (u\pi_h \mid v\pi_h) + 2\delta$，可知1.7(c)。

对于第二个断言，我们令 γ_u 和 γ_v 分别为相对于 u 和 v 的近端射线（见定义5.9 和命题5.7）。我们考虑

$$\mathrm{T}^* \, \mathrm{d}_\Gamma(u_k, v_k) \leq \mathrm{d}_\Gamma(T(u_k), \gamma_u(k)) + \mathrm{d}_\Gamma(\gamma_u(k), \gamma_v(k)) + \mathrm{d}_\Gamma(\gamma_v(k), T(v_k)).$$

距离 $\mathrm{d}_\Gamma(T(u_k)\ \gamma_u(k))$ 由 $4\delta + 2 + \lambda_a$ 控制，理由与前面相同，即取一个最近邻，并结合引理 2.2.b 和钩引理。$\mathrm{d}_\Gamma(T(v_k)\ \gamma_v(k))$ 也同样如此。根据引理 1.8，距离 $\mathrm{d}_\Gamma(\gamma_u(k)\ \gamma_v(k))$ 有界。更确切地说，如果 $(u\pi_h \mid v\pi_h) \geq k$，这意味着对于所有 $i \leq k$，$\mathrm{d}_\Gamma(\gamma_u(i)\ \gamma_v(i))$ 的距离都由 5δ 控制，这是拟等距所致。□

该定理的这一版本有望从度量视角通过视距函数刻画格罗莫夫边界。

推论 5.11. $\partial_h\Gamma$ 上的函数 $\beta^{-(\cdot|\cdot)}$ 是一个距离；如果 Υ_h 是用第一步计算得到的伪度量，那么通过第二步定义的商集 $\partial_h\Gamma/\Upsilon_h$ 就是 $\partial\Gamma$。

我们回顾一下，这两步操作在 1.2 的定义之后、论文开篇处作了解释。

证明。 我们先证明这个函数是一个距离。对称性显而易见。取 $u \in \partial_h\Gamma$，则

$$\max_{x_k \in T(u_k), y_k \in T(v_k)} \liminf_k (x_k | y_k) = \infty$$

且 $(u \mid u)$ 也是如此，这可由引理 2.20 的证明得出。因此 $\beta^{-(u,u)} = 0$。利用第一步，我们得到伪度量 Υ。接下来要证明度量商就是格罗莫夫边界。需要指出的是，两个视距函数 $u \neq v$ 可能满足 $\beta^{-(u,v)} = 0$，而且当它们粘合时确实如此（它们属于 π_h 的同一纤维）。我们需要证明这只是唯一可能的情形，也就是说，若 $\beta^{-(u,v)} = 0$，则 u 与 v 粘合。但此时 $(u \mid v) = \infty$，因此存在一对

格罗莫夫序列分别收敛到 u 和 v，且它们的格罗莫夫积为无穷大，因此这两个序列在 $\partial\Gamma$ 中是同一个元素。□

在文献中，有许多度量空间（或类似结构）的例子，它们以某种方式收敛到双曲群的格罗莫夫边界。例如，我们引用 Pawlik 的工作 [Paw15] 以及 [GMS19] 中的引理 3.8，该引理指出，以指定点为中心的球面 x_0 并赋予视觉度量 弱收敛于 $\partial\Gamma$ （按格罗莫夫-豪斯多夫的意义）。我们可以把尖端看作球面的粗略版本，因此现在的目标是给出这种收敛的尖端版本。

在接下来的讨论中，我们将采用记号 $\Upsilon_k(u_k, v_k) = \beta^{-(u_k|v_k)}$，其中 u_k 和 v_k 是同一层的原子。我们回顾一下，格罗莫夫积是在引理 2.20 之前定义的，并且 Υ_k 并非度量（甚至不是距离），但在理论中仍发挥着重要作用。鉴于此，即使这些空间不是度量空间，我们也将考察 $(\mathcal{A}_k, \Upsilon_k)$ 的弱 Gromov–Hausdorff 极限，其中 k 趋于无穷大。

我们讨论的极限有如下形式化定义

定义 5.12. 设 $\{\Gamma_i, \mathrm{d}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一列赋有标准度量的图。若对所有 $i \in \mathbb{N}$，都存在一个拟等距映射 $\phi_i \colon \Gamma \to \Gamma_i$，其 L_1^i 不依赖于 i，且 L_2^i 在 i 趋于无穷时趋于零，其中 L_1^i 是拟等距嵌入的乘法常数，L_2^i 是加法常数，则称图 (Γ, d) 为**弱 Gromov–Hausdorff 极限**，或称该序列按 Gromov–Hausdorff 意义弱收敛。

请注意，这是度量几何中标准格罗莫夫-豪斯多夫收敛概念的粗略版本（例如，参见 [BBI01]）。

在证明该结果之前，我们需要一个技术引理，将两个原子之间的格罗莫夫积与两个近端点之间的格罗莫夫积联系起来：

引理 5.13. 设 u_k 和 v_k 是两个 k-层原子。设 $p_k \in P(u_k, S_k)$ 和 $q_k \in P(v_k, S_k)$。则

$$|\mathrm{T}^* \mathrm{d}_\Gamma(u_k, v_k) - \mathrm{d}_\Gamma(p_k, q_k)| \le 8\delta + 4 + 2\lambda_a \text{ 且 } |(u_k|v_k) - (p_k|q_k)| \le 4\delta + 2 + 2\lambda_a.$$

证明。 第一部分是 钩引理 结合引理2.2.b 应用于后的通常推论

$$\mathrm{T}^* \mathrm{d}_\Gamma(u_k, v_k) \le \mathrm{d}_\Gamma(T(u_k), p_k) + \mathrm{d}_\Gamma(p_k, q_k) + \mathrm{d}_\Gamma(q_k, T(v_k))$$

以及交换近端点和原子后得到的三角不等式。

对于第二部分，我们如下利用第一部分

$$2(u_k \mid v_k) \ge 2k - \mathrm{d}_\Gamma(p_k, q_k) - 8\delta - 4 - 2\lambda_a,$$

and

$$2(u_k \mid v_k) \le 2k + 2\lambda_a - \mathrm{d}_\Gamma(p_k, q_k) + 8\delta + 4 + 2\lambda_a.$$

只需注意到 $2k - \mathrm{d}_\Gamma(p_k, q_k) = 2(p_k \mid q_k)$。 □

命题 5.14. 度量空间 $(\partial\Gamma, \Upsilon)$ 是序列 $(\mathcal{A}_k, \Upsilon_k)$ 在 $k \to \infty$ 时的弱 *Gromov–Hausdorff* 极限。

证明。 首先，我们引入所声称会诱导出拟等距映射的映射。

$$\Phi : \partial\Gamma \to T(\mathcal{A}_k)$$
$$x_\infty \mapsto u \mapsto T(u_k)$$

我们考虑一个元素 $x_\infty \in \partial\Gamma$ 和一个截面 $\mathcal{S}_h : \partial\Gamma \to \partial_h\Gamma$，它属于投影 π_h。现在，$x_\infty\mathcal{S}_h = u$ 和 u_k 是原子编码的 k层原子。因此$x_\infty\Phi := T(u_k)$。

拟稠密像。令 $a \in \mathcal{A}_k$。取 $x_\infty \in \partial a\pi_h$ 并计算 $T^*\,\mathrm{d}_\Gamma(x_\infty\Phi,\ a)$。由于存在一个经过 a 并投影到 x_∞的 horofunction，我们知道该 horofunction 与 $x_\infty\mathcal{S}_h$ 在 $\partial\Gamma$上重合。因此，根据定理3.4，它们的原子编码中第 k项的尖端（即 a 和 $x_\infty\Phi$）彼此相距不超过 $2(\lambda_a + \delta)$。

拟等距嵌入。我们将分情况讨论。
若 $(x_\infty \mid y_\infty) \geq k$，则应用定理 5.10(b)，得到 $\mathsf{T}^*\,\mathsf{d}_\Gamma(u_i, v_i) \leq C$对所有$i \leq k$ 成立，因此应用定理 5.10(a)可得 $(u_k|v_k) \geq k - C$。于是，为了得出 $|\,\Upsilon_k(u_k, v_k) - \Upsilon(x_\infty, y_\infty)| \leq \Upsilon_k(u_k, v_k) \leq \beta^{-k+C}$。
如果 $(x_\infty \mid y_\infty) \leq k$，那么我们考虑两条近端射线 $\gamma \in x_\infty$ 和 $\eta \in y_\infty$，并根据引理 1.8，可得

$$|(\gamma(k)|\eta(k)) - (x_\infty|y_\infty)| \leq \frac{5}{2}\delta.$$

剩下要做的就是将其与引理 5.13 结合起来，得到

$$\begin{aligned}|(u_k|v_k) - (x_\infty|y_\infty)| \leq &|(u_k|v_k) - (\gamma(k)|\eta(k))|+\\ &|(\gamma(k)|\eta(k)) - (x_\infty|y_\infty)| \leq 4\delta + 2 + 2\lambda_a + \frac{5}{2}\delta.\end{aligned}$$

因此，对于适当的常数 D，有 $D^{-1}\,\Upsilon\,(x_\infty, y_\infty) \leq \Upsilon_k(u_k, v_k) \leq D\,\Upsilon\,(x_\infty, y_\infty)$，正如所需。
□

6. 拟等距

现在我们继续探讨图 Γ、它的球面、它的测地射线与原子编码树 $\mathcal{A}$、尖端和 horofunctions 之间的对应关系；接下来将介绍尖端集与图 Γ 之间的两种拟等距。

下面的结果将帮助我们在接下来描述的两种拟等距中，将注意力限制在具有无限锥的元素上。

引理 6.1. 设 Γ 是一个与某个双曲群的凯莱图准等距的双曲图。那么存在一个常数 λ_∞，使得每个具有有限锥的元素 $x \in \Gamma$ 都位于一个球内，该球的半径为 λ_∞，且以具有无限锥的某个元素为中心。

从现在起，λ_∞ 将表示这样的常数。

证明. 我们先来确定 λ_∞。由于两个同类型的有限锥具有相同数量的点，因此我们可以将 λ_∞ 取为所有类型的有限锥的基数的最大值（根据命题 2.5，它们都是有限的）。这使我们能够找到 x 的一个前驱 x^c（即属于连接 x_0 与 x的某条测地线的元素），使得 $\mathsf{d}_\Gamma(x^c, x) \leq \lambda_\infty$，且该前驱具有无限锥。事实上，假设每个属于一条测地线 $[x^c, x]$、满足 x^c 的前驱且 $\mathsf{d}_\Gamma(x^c, x) = \lambda_\infty$ 的元素都具有有限锥。这意味着该测地线完全包含在锥 $C(x^c)$ 内，却超过了锥中可能元素的数量。因此产生矛盾。这说明锥 $C(x^c)$ 必须是无限的。□

以下结果有助于证明这两种情况下的拟稠密性。

引理 6.2. 设 Γ 是一个双曲图。如果 S_n^∞ 是 S_n 中所有其锥为无限的元素所组成的子集，那么 $S_n^\infty \subseteq \bigcup_{a\in\mathcal{A}_n} V(a, B_n)$。

证明。设 x' 是 S_n^∞ 的一个元素。现在 $C(x')$ 是无限的，而层级为 n 的原子只有有限多个，因此存在一个原子 $a \in \mathcal{A}_n$，使得 $C(x') \cap a \neq \emptyset$。我们取 $y \in C(x') \cap a$，使得 $[x', y] \cap B_n = x'$，并根据定义，$x' \in V(y, B_n)$。根据可见点的性质（见引理 2.2.c），我们有 $V(y, B_n) = V(a, B_n)$。
□

在第3节中，我们一直在处理许多距离（其中几乎都不是度量），并研究它们之间的联系。随后，我们证明了两个类似拟等距的结果（命题4.4 和命题 4.8）。作为第一步，我们现在要正式证明这些结果自然引出的结论。

命题 6.3. 令$(\mathbf{T},\mathrm{d}_{\mathcal{H}})$ 为不重复的尖端集（这意味着，如果两个原子共享同一个尖点，我们只计一次），并赋予通常的豪斯多夫度量。于是$\mathbf{T}$ 与 Γ 准等距。

我们回顾一下注 2.18 中的讨论，以便更好地理解“无重复”的含义。

证明。我们要证明是准等距的映射 $\mathcal{S}_{\mathbf{T}} : \mathbf{T} \to \Gamma$，定义为$T(a)\mathcal{S}_{\mathbf{T}} := \widehat{x}$，其中 $\widehat{x}$ 是 $T(a)$ 中某个固定的元素。

拟稠密像。令 $x \in \Gamma$。我们考虑满足 $x \in B_{n-1}$ 的 n。
首先，假设 $x \in S_{n-1}^\infty$，那么它至少有一个后继 x' 属于 S_n^∞。由引理 6.2 可知，x' 是某个原子的可见点 $\underline{a} \in \mathcal{A}_n$。现在取 $x \in N(a, B_n)$，并且由可见点的性质（结合引理2.2.a与引理 2.2.b），我们知道 $\mathrm{d}_\Gamma(x', x) \leq 4\delta + 2$。因此 $\mathrm{d}_\Gamma(x, x) \leq 4\delta + 3$，并且由钩引理可得，对于任意点 $\widehat{x} \in T(a)$，都有 $\mathrm{d}_\Gamma(x, \widehat{x}) \leq 4\delta + 3 + \lambda_a$。

现在，假设 x 的锥是有限的。结合引理6.1 与第一种情况，我们得到 $\mathrm{d}_\Gamma(x, T(a)) \leq \lambda_\infty + 4\delta + 3\lambda_a$。

拟等距嵌入。我们按照命题4.8的证明进行论证。
事实上，我们已经知道 $\mathrm{d}_{\mathcal{H}}(T(a)\ T(b)) \leq \min_{\widehat{x}\in T(a),\ \widehat{y}\in T(b)} \mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x},\ \widehat{y}) + 2\lambda_a$ 并且根据命题2.15 可得

$$\mathrm{d}_{\mathcal{H}}(T(a), T(b)) \leq \mathrm{d}_\Gamma(T(a)\mathcal{S}_{\mathbf{T}}, T(b)\mathcal{S}_{\mathbf{T}}) + 4\lambda_a.$$

另一方面，命题4.8 给出

$$\min_{\widehat{x}\in T(a),\widehat{y}\in T(b)} \mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x}, \widehat{y}) \leq \mathrm{d}_{\mathcal{H}}(T(a), T(b)).$$

我们只需将它与

$$\mathrm{d}_\Gamma(T(a)\mathcal{S}_{\mathbf{T}}, T(b)\mathcal{S}_{\mathbf{T}}) \leq \min_{\widehat{x}\in T(a),\widehat{y}\in T(b)} \mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x}, \widehat{y}) + \lambda_a$$

来自命题 2.15。 □

本节的第二步受到 Kaimanovich 关于分形的工作（[Kai03]）以及 Nekrashevych 关于收缩自相似群的极限空间的工作（[Nek03], [BGN03]）的启发。另见 [LW09]，该文给出了在动力系统中的一个应用。

讨论的主要对象是：

定义 6.4. 设 Γ为一个双曲图，$\mathcal{A}$ 为其原子树。我们定义$\Gamma_{\mathcal{A}}$，并按以下方式将其称为**原子图**：
顶点： $\mathcal{A}$ 的所有元素；

垂直边： 给定两个顶点 $a_n \in \mathcal{A}_n$ 和 $a_{n+1} \in \mathcal{A}_{n+1}$，当且仅当 $a_n \supseteq a_{n+1}$ 时，存在一条边；

水平边： 给定两个顶点 a_n，$b_n \in \mathcal{A}_n$ 当且仅当 $\mathsf{d}_\Gamma(a_n, b_n) \leq 2(\lambda_\infty + 4\delta + \lambda_a) + 7$ 时，存在一条边，并将其定义为 λ_e。

和之前一样，λ_e 将是这样的一个常数。它的特殊定义将在拟等距结果的证明过程中得到解释。

定义 6.5. 我们用 $T(\Gamma_\mathcal{A})$ 表示与之前相同的构造，但使用距离 $\mathsf{T}^*\,\mathsf{d}_\Gamma$，并将常数 $2\lambda_e + 4\delta + 2\lambda_a$ 用于水平边。我们称之为**尖端图**。请注意，该图的顶点仍然是原子。

尽管所选常数看起来有些奇怪，但它与 $\mathsf{T}^*\,\mathrm{d}_\Gamma \leq 2\mathrm{d}_\Gamma + 4\delta + 2\lambda_a$（见命题 4.4）有关，下面将对此作出完整解释。

注 6.6. $\Gamma_\mathcal{A}$ 具有以下一些直接性质

(a) 树 $\mathcal{A}$ 是该图的生成树；(b) n-球面 $(\Gamma_\mathcal{A})_n$ 的顶点与 $\mathcal{A}_n$之间存在双射；(c) 投影 $\pi_n : (\Gamma_\mathcal{A})_n \twoheadrightarrow (\Gamma_\mathcal{A})_{n-1}$ 是良定义的；(d) 该图是局部有限的。事实上，$\mathcal{A}$是局部有限的，而从一个顶点出发的水平边数量有限，这可由证明 π_h 的纤维有限的同一论证得出（见定理 4.9）。(e) 原子图是尖端图的子图，因为 $\mathsf{d}_\Gamma(a, b) \leq \lambda_e$蕴含 $\mathsf{T}^*\,\mathsf{d}_\Gamma(a, b) \leq 2\lambda_e + 4\delta + 2\lambda_a$。特别地，我们有 $\mathsf{d}_{T(\Gamma_\mathcal{A})}(a, b) \leq \mathsf{d}_{\Gamma_\mathcal{A}}(a, b)$。(f) $\Gamma_\mathcal{A}$ 是 Kai03]意义下的增广树 [。粗略地说，增广树是从一棵树出发构造的图，其中我们在同一层的某些顶点之间添加边，并满足这样的条件：如果 x和 y 是由这样一条边连接的两个顶点，且 $\tilde{x} \in [x_0, x]$, $\tilde{y} \in [x_0, y]$处于同一层，那么 $\tilde{x} = \tilde{y}$，或者它们之间也有一条边（回想一下，x_0 是根）。

定理 6.7。 设 Γ 是一个双曲图。那么，原子图 $\Gamma_\mathcal{A}$ 与 Γ准等距。特别地，它是双曲的，且其边界与$\partial\Gamma$同胚。

证明。 我们的拟等距候选映射 $\mathcal{S}_\mathcal{A} : \Gamma_\mathcal{A} \to \Gamma$ 定义为 $a\mathcal{S}_\mathcal{A} := \widehat{x}$，其中 $\widehat{x}$ 是 $T(a)$中的一个固定元素。

拟稠密像。 此论证与命题 6.3 完全相同，因为两个映射都是从尖端到 Γ中的元素定义的。

拟等距嵌入。 设 $a\mathcal{S}_\mathcal{A} = \widehat{x}$ 和 $b\mathcal{S}_\mathcal{A} = \widehat{y}$。
我们首先证明，对于某个常数 M，有 $\mathsf{d}_\Gamma(\widehat{x}, \widehat{y}) \leq M\,\mathsf{d}_{\Gamma_\mathcal{A}}(a, b)$。

设 $a = a_0, a_1, \ldots, a_l = b$ 是 $T(\Gamma_\mathcal{A})$ 中连接 a 和 b 的一条测地线。若 $\{a_i, a_{i+1}\}$ 是垂直边，则我们回顾连续尖点之间的界（见命题 5.1）。若 $\{a_i, a_{i+1}\}$ 是水平边，根据定义，我们可以得到其两个元素之间的界。需要注意的是：对于原子之外的每个距离，我们都有一个界；但我们还需要给出尖点内部距离的界，以确保用于边 $\{a_{i-1}, a_i\}$ 的界中的某个元素与用于 $\{a_i, a_{i+1}\}$ 的界中的某个元素之间的距离合理。这个内部界源于尖点的直径至多为 $2\lambda_a$ 这一事实（见命题 2.15）。设 D 为两个外部界中的最大值；更明确地说，若 D' 是命题 5.1 为垂直边给出的界，而 D'' 是水平边定义中给出的界，则 $D = \max\{D', D''\}$。综合起来，我们有

$$\mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x},\widehat{y}) \le \sum_{i=0}^{l-1} \mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x}_i,\widehat{x}_{i+1}) + \sum_{i=1}^{l-1} \operatorname{diam} T(a_i) \le Dl + 2\lambda_a(l-1) \le M\, \mathrm{d}_{T(\Gamma_{\mathcal{A}})}(a,b)$$

其中 $\widehat{x}_0 = \widehat{x}$、 $\widehat{x}_l = \widehat{y}$ 和 $\widehat{x}_i \in T(a_i)$ 是参与左边和右边界的两个尖点中的一个元素。并且 $M = D + 2\lambda_a$。

根据（e）注6.6，我们得到所需结论 .

现在我们证明另一部分，即对于某个常数W，有 $\mathrm{d}^{\Gamma_{\mathcal{A}}}(a,b) \le W\,\mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x},\widehat{y})$。我们采用与之前相同的方法。取一条位于 Γ 中、连接 $\widehat{x}$ 和 $\widehat{y}$ 的测地线，具体为 $y_0 = \widehat{x}$, $y_1, y_2, \dots, \widehat{y} = y_l$。由拟稠密性可知，对于每个点 y_i，都存在一个 n_i-原子 a_i，使得 $\mathrm{d}_\Gamma(y_i,a_i) \le \lambda_\infty + 4\delta + 3 + \lambda_a$，且 $\max\{0, \mathrm{d}_\Gamma(x_0,y_i) - \lambda_\infty\} \le n_i \le \mathrm{d}_\Gamma(x_0,y_i)$。这是因为，要么 y_i 有一个无限锥，因此它是一个可见点，原子 a_i 位于层 $\mathrm{d}_\Gamma(x_0,y_i)$（见引理 6.2）；要么 y_i 有一个有限锥，但存在另一个元素 $y \in [x_0,y_i]$，其距离至多为 λ_∞（见引理 6.1），且该元素有一个无限锥，相应的原子 a_i 位于层 $\mathrm{d}_\Gamma(x_0,y)$。注意，这样一来，两个相邻原子之间的距离 d_Γ 小于 λ_e。

我们要证明，两个连续的原子 a_i 和 a_{i+1} 之间的距离在 $\Gamma_{\mathcal{A}}$中有一个常数上界。因此，如果它们处于同一层，根据水平边的定义，它们相邻。如果它们处于两个不同的层 n 和 m，那么$|n-m| \le \lambda_\infty + 1$。事实上，我们结合以下事实：两个连续的顶点 y_i和y_{i+1}满足 $|\mathrm{d}_\Gamma(x_0,y_i) - \mathrm{d}_\Gamma(x_0,y_{i+1})| \le 1$（它们是测地线上的两个连续点），并且 $\max\{0, \mathrm{d}_\Gamma(x_0,y_i) - \lambda_\infty\} \le n_i \le \mathrm{d}_\Gamma(x_0,y_i)$。现在，不失一般性，我们可以假设 $m < n$。我们用 a_i^m表示满足$a_i \subseteq a_i^m$的 m-原子，并且有

$$\mathrm{d}_\Gamma(a_i^m, a_{i+1}) = \min_{x\in a_i^m, y\in a_{i+1}} \mathrm{d}_\Gamma(x,y) \le \min_{z\in a_i, y\in a_{i+1}} \mathrm{d}_\Gamma(z,y) \le \lambda_e.$$

这意味着 a_i^m和 a_{i+1} 相邻，因此 $\mathrm{d}^{\Gamma_{\mathcal{A}}}(a_i,a_{i+1}) \le \mathrm{d}_\Gamma(a_i,a_i^m) + \mathrm{d}_\Gamma(a_i^m,a_{i+1}) \le \lambda_\infty + 1 + 1 = \lambda_\infty + 2$。总之，对于Γ中的测地线的每条边，我们都在 $\Gamma_{\mathcal{A}}$中构造了一条长度至多为 $\lambda_\infty + 2$的测地线，因此 $\mathrm{d}^{\Gamma_{\mathcal{A}}}(a,b) \le W\,\mathrm{d}_\Gamma(\widehat{x},\widehat{y})$，其中 $W = \lambda_\infty + 2$。□

7. Rational gluing of horofunctions

本节的目标是构造一台机器，用来判断由原子编码表示的 $\partial_h G$ 中的两个元素是否属于同一个 π_h 纤维。

我们首先将 Σ 设为有限**字母表**，也就是说，它是由有限个符˜号 $\sigma \in \Sigma$ 组成的集合。由于我们需要同时使用更多字母表，因此也会使用 Σ、 Ξ˜和 Ξ。给定一个字母表 Σ，我们可以构造两种不同的对象：所有有限字符串 Σ^* 组成的集合，以及所有无限字符串 Σ^ω 组成的集合。语言是 Σ^* 或 Σ^ω 的子集。我们通常处理无限字符串，原因在于 Σ^ω 是一个康托尔集。

我们还需要为机器设定一些记号。回顾一下，偏函数是两个集合之间的一种二元关系，它为第一个集合中的每个元素至多关联第二个集合中的一个元素。

定义 7.1. 同步确定性有限状态自动机是一个四元组 $(\Sigma,\ \Theta,\ \to,\ \theta_0)$，其中 Θ 是一个称为状态的有限集，$\theta_0 \in \Theta$ 称为初始状态，而 $\Theta \times \Sigma$ 与 Θ 之间的一个偏函数称为转移函数。

我们回顾一下，确定性的意味着 $\to$ 是一个实际的（部分）函数，或者说，不可能存在从某个状态出发、处理同一个

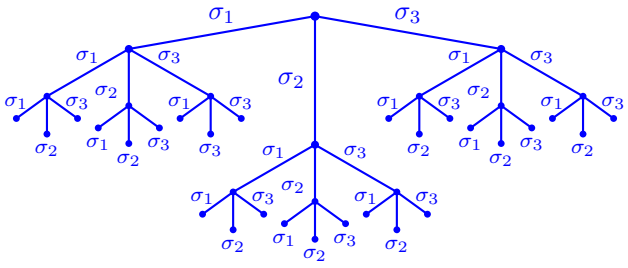


FIGURE 3. 基于字母表$\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ 的长度为 3 的字符串的几何表示。

字母表元素的两条不同转移；它是同步的，因为它每一步处理 Σ 的一个元素。我们将省去所有修饰语，直接称其为自动机，因为这将是唯一一种此类型的机器。

如果一个字符串属于某种语言，当且仅当它由自动机处理时，我们就说该自动机**识别**这种语言。

定义 7.2. 如果一个无限字符串语言由自动机识别，则称其为 Σ^ω的**有理子集**。

定义 7.3. 异步确定性有限状态转换器是一个五元组 $(\Sigma,\ \Xi \cup \{\varepsilon\},\ \Theta,\ \to,\ out,\ \theta_0)$，其中 Θ 是一个称为状态的有限集，$\theta_0 \in \Theta$ 称为初始状态，转移函数定义为 $(\theta_1,\ \sigma) \to \theta_2$，其中 $\theta_1,\ \theta_2 \in \Theta$，且 $\sigma \in \Sigma$，而输出函数定义为 $(\theta,\ \sigma)$ $out = \xi_1 \dots \xi_n$，其中 $\theta \in \Theta$、$\sigma \in \Sigma$ 和 $\xi_i \in \Xi$，或者 $\xi_i = \varepsilon$ **空字符串**。

与之前一样，我们省去所有修饰词，直接称其为转换器。

我们以通常的方式将有限字符串的集合 Σ^* 视为一棵树（见图 3）。由此立即可知，该树的边界是 Σ^ω，因此后者是一个康托尔集。

现在我们想用转换器来定义康托尔集之间的映射：

定义 7.4。两个康托尔集 Σ^ω 与 Ξ^ω 之间的映射 ϕ 称为**有理**映射，如果存在一个转换器，使得对于所有 $w \in \Sigma^\omega$，均有 $w\phi = (\theta_0, w)out$。

可以证明，这些映射构成一个范畴。此外，它们关于乘积拓扑连续；若它们是双射，则为同胚（见 [GNS00，第 23]小节）。

定义 7.5。双射有理映射称为**有理同胚**。

有理同胚的逆也是有理同胚。因此，固定一个字母表 Σ，我们可以定义关于 Σ 的有理同胚群 $\mathcal{R}$。由于两个不同的字母表（至少包含两个元素）会给出两个同构的群，我们就不提底层字母表，而将其中一个简称为 $\mathcal{R}$。

关于这一设定向非有限状态机的推广，以及对该主题的深入了解，请参阅 [GNS00]。这里，我们仅提及以下结果，因为稍后会用到。

命题 7.6 ([GNS00], 命题 2.11)。集合 $\mathcal{L} \subseteq \Xi^\omega$ 当且仅当它是有理映射 ϕ: $\Xi^\omega \to \Xi^\omega$ 其中 Ξ 字母表有限时，才是有理的。

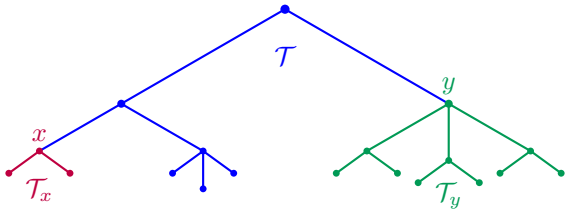


FIGURE 4. 有根子树的两个例子。

语言是 Σ^ω 的任意子集，但我们感兴趣的是有理语言。我们还有 Σ^* 的几何解释。我们想要考虑不一定是正则的有根树，但它们仍具有一些良好的性质。

给定一棵有根树 $\mathcal{T}$和一个顶点 x，我们可以考虑有根子树 $\mathcal{T}_x$，其根为 x （见图4）。

定义 7.7。有根树 $\mathcal{T}$上的一个**自相似结构**是指将顶点划分为有限个类，并配有一组有限的有根树同构，这些同构连接同一类中的每对顶点 x 和 y 所对应的 $\mathcal{T}_x$ 与 $\mathcal{T}_y$，且每个同构都将 $\mathcal{T}_x$ 的顶点映射到 $\mathcal{T}_y$ 中属于同一类的顶点。

此外，我们还要求这些同构满足一些自然条件：它们在取逆、复合和限制下封闭。也就是说，若 $\varphi : \mathcal{T}_x \to \mathcal{T}_y$ 和 $\psi : \mathcal{T}_y \to \mathcal{T}_z$ 属于该自相似结构，则 φ^{-1}、$\varphi\psi$ 和 $\varphi|_{\mathcal{T}_{x'}} : \mathcal{T}_{x'} \to \mathcal{T}_{x'\varphi}$ 也属于该结构。

具有自相似结构的树 $\mathcal{T}$称为**自相似**。请注意，这些等价类最初称为类型，不过为避免混淆，我们不使用这一术语。

若令 Σ 为自相似树 $\mathcal{T}$的类的集合，则可以看出（但这里不再详述），存在格罗莫夫边界 $\partial\mathcal{T}$ 到 $\mathcal{L}$ 的子集 Σ^ω上的投影。此外，可以看出 $\mathcal{L}$ 是一个有理子集；事实上，任意有理子集都可以用这种方式在几何上刻画（例如参见 [BBM21，第 2 小节1]）。为了使投影成为双射，也就是说，使 $\partial\mathcal{T}$ 成为 Σ^ω的子集，我们需要采用另一种编码，它来自刚性结构。这些同样是自相似结构，但满足一些额外的假设。我们将看到，可以从一个先验上并非刚性的自相似结构出发，得到一个刚性结构。以下将给出全部细节。

由于康托集具有以下众所周知的性质

命题 7.8 ([Wil70], 定理 30.7)。设 X 为一个紧致可度量空间。那么存在一个从康托尔集到 X的连续满射。

每个紧致可度量空间都可以由一组无限字符串编码Σ^ω （只要映射仍为满射，这组字符串可以是整个空间的真子集）。也就是说，每个元素都由一个（不一定唯一的）无限字符串表示。这种字符串称为**编码**。

例 7.9。设 $\Sigma = \{0, 1, \dots, 9\}$，并令 $[0, 1]$ 为单位区间。那么，由于十进制展开，$[0, 1]$ 中的每个元素至多有两种编码：无理数恰有一种编码，有理数恰有两种。具体来说，$.\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n0$ 和 $\sigma_1\sigma_2\dots(\sigma_n - 1)9$，其中 $\sigma_n - 1$ 是模 10 的差，且 $.\sigma = \sigma\sigma\dots\sigma\dots$。

注 7.10。 尽管这里出现了树，而且使用了相同的词，为避免歧义，值得一提的是，原子编码并非此处意义上的编码。

为了构造一台机器，判断 $\partial_h G$ 中由原子编码表示的两个元素是否属于同一个 π_h-纤维，我们给出以下

定义 7.11。设 Σ 是一个有限字母表， Σ^ω 是其对应的无限字符串康托尔集。我们称 $\mathcal{G}$ 在 Σ^ω 上的**关系是有理的**，如果它是 $\Sigma^\omega \times \Sigma^\omega$ 意义下的有理子集，见定义7.2。

在证明原子上的粘合关系是有理的之前，我们想先给出几个关于这一性质的例子，并指出该定义在某种意义上是适定的。

例7.12。双曲群的格罗莫夫边界可以看作由测地射线构成的康托尔集的商集（例如，参见 [CP93]）。该关系是有理的，这是因为格罗莫夫边界是半马尔可夫的。定义及无挠情形下的证明见 [CP93]，而半马尔可夫性与有理性的联系，以及带挠群的情形，见 [Paw15]。

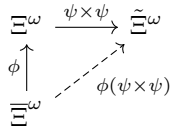
例 7.13. 收缩自相似群的极限空间（粘合关系由作用的轨道给出）。定义见 [Nek07]，特别是关于有理性的命题 5.6。

例 7.14. 分形重排群的极限空间（见 [BF19]）似乎是自然的候选对象。我们提请关注 Donoven 关于更一般的不变因子主题的工作（[Don16]）。我们关注第 4.3 节，该节专门讨论替换系统。尽管他的研究方法类似，这个问题仍未解决。

命题 7.15. 设 $\mathcal{G}$ 是 Σ^ω上的一个有理等价关系。那么， $\mathcal{G}$ 在 Σ^ω的有理同胚下保持不变。

我们要做的是说明，这直接是命题 7.6的推论。

证明。 首先，我们注意到 $\Sigma^\omega \times \Sigma^\omega = (\Sigma \times \Sigma)^\omega$。令 $\Xi = \Sigma \times \Sigma$，根据命题 7.6，我们有一个有理映射 $\phi\colon \Xi^\omega \to \Xi^\omega$，其像为 $\mathcal{G}$。设 $\tilde{\psi}\colon \Sigma^\omega \to \Sigma^\omega$ 是一个有理同胚。我们将 $\psi \times \psi\colon \Xi^\omega \to \Xi^\omega$ 与 $\tilde{\psi} \times \tilde{\psi}\colon \tilde{\Xi}^\omega \to \tilde{\Xi}^\omega$ 映射记作在每个分支上均为 ψ 的映射。由于两个有理映射的复合仍是有理映射，只需证明 $\psi \times \psi$ 是有理的，从而复合映射 $\phi(\psi \times \psi)$ 也为有理映射。



如果 $(\Sigma, \Sigma, \Theta, \to, out)$ 是 ψ 的定义转导器，我们只需创建

$$(\Xi, \tilde{\Xi}, \Theta \times \Theta, \to \times \to, out \times out)$$

使得如果 $(\sigma_j, \theta_j^i) \to \theta_j^o$，且 $j = 1, 2$，那么 $((\sigma_1, \sigma_2), (\theta_1^i, \theta_2^i)) \to (\theta_1^o, \theta_2^o)$，并且输出函数满足一个经过调整的条件。□

既然我们已经与文献建立了联系，现在可以开始研究我们的情形了。但在介绍机器之前，我们需要先统一一些记号。首先，我们定义一种稍具刚性的自相似结构。

定义 7.16. 设 $\mathcal{T}$ 是一棵自相似有根树。我们将给定自相似结构中满足以下条件的有根树同构所构成的子集定义为**刚性结构**

(a) 对于同一等价类中的每一对顶点 x 和 y，存在唯一的同构 $\varphi_{x,y}$ 将 $\mathcal{T}_x$ 映射到 $\mathcal{T}_y$；(b) 它对复合封闭，也就是说，对于同一等价类中的 x、y 和 z，有 $\varphi_{x,y}\varphi_{y,z} = \varphi_{x,z}$；(c) 如果 x' 是 x 的子节点且 $y' = x'\varphi_{x,y}$，那么 $\varphi_{x',y'}$ 是 $\varphi_{x,y}$在 $\mathcal{T}_{x'}$上的限制。

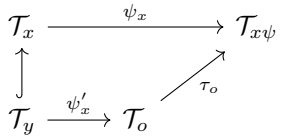
从自相似结构出发，总是可以恢复出刚性结构

命题 7.17. 每棵自相似树都有一个刚性结构。

我们感兴趣的是命题 7.17 （参见[BBM21，命题 2。18] 完整版本见此）。更具体地说，我们需要定义 标记。我们取一个顶点集合，其中每个$\widehat{}$等价类恰好包含一个元素，并且包含根。记作 Ω。令 Ω 为那些$\widehat{}$是 Ω 中元素的子节点的顶点集合。对于每个 $o \in \Omega$，我们选取 τ_o 作为一棵有根树$\widehat{}$同构，它在 o 与 Ω 中属于同一等价类的唯一顶点之间建立映射，并称之为**初等标记**。现在，任取一个顶点 x，并按如下方式定义它的**标记** ψ_x：

(1) 若 x 是根，则 ψ_x 是 $\mathcal{T}$的恒等同构；(2) 若 x 是 $\mathcal{T}$ 的一个顶点，带有标记 ψ_x，且 y 是 x的子对象，则记$\frown o = y\psi_x$ 为 Ω 内部与之对应的 $x\psi_x$ 的子对象，并定义 $\psi_y = \psi_x\tau_{o\infty}$

注意，复合是偏的，这意味着我们实际上考虑的是$\psi_x\tau_o$，其中 ψ'_x 是 ψ_x 在 $\mathcal{T}_y$上的限制。



可以看出，由 $\varphi_{x,y} := \psi_x\psi_y^{-1}$定义的有根树同构，其中 x 和y 是属于同一等价类的两个顶点，实际上是一种刚性结构。

现在我们将这些概念应用于当前情形。首先，我们注意到以下事实。

注 7.18。 相对于由态射和类型给出的结构，原子树是自相似的。

对于每个原子 a，我们关联一个标记 ψ_a，并且对于某个有限指标集 I，有一个集合族 $\{\tau_i \mid i \in I\}$。这些有助于我们按如下方式定义编码：取一个字母表 R，并称其为**刚性类型**的集合；该集合与初等标记的集合之间存在一一对应。通常我们有 $r_i \leftrightarrow \tau_i$。若原子 a 的标记具有如下形式 $\psi_a = \psi_a\tau_i$，其中a 是 a的子对象，则称该原子的刚性类型为 r_i。最后，给定一个 horofunction $(u_n)_{n=1}^{\infty}$，我们根据 R得到与之对应的字符串。

这种编码的一个直接结果是，我们可以构造**类型自动机**（关于这一主题的一般性讨论，见 [BBM21] 中的例 2.5）：状态集合由原子的类型构成，而两种类型之间的转移数，等于一个属于第一种类型的原子所具有的第二种类型的子节点数。容易看出，这个数不依赖于原子的选择，并且可以用刚性类型来标记。

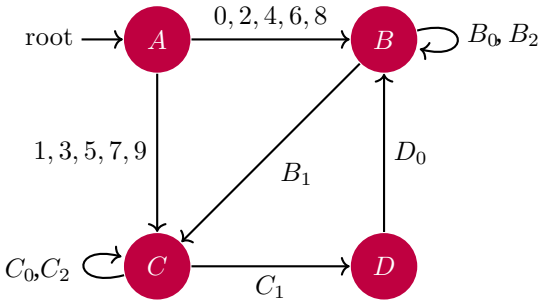


FIGURE 5. 双曲铺砌的 1-骨架的类型自动机。

例 7.19。 我们再次考虑由正方形构成的双曲平面的均匀铺砌，其中每个顶点的度为 5。并考虑由下式给出的等距变换群

$$G = \langle g, h \mid g^5 = 1,\ h^2 = 1,\ (gh)^4 = 1 \rangle$$

其中 g 绕中心旋转 72°，以及 h 绕从中心出发的一条边的中点旋转 180°。通过观察最初几层（见图1.(a)），我们可以认为共有四种原子类型。

- 根，即唯一的 0 级原子；我们称之为 A。
- 第一种类型，我们称之为 B，从x_0出发的每条边都对应一个，因此第一层有五个。
- 第二种类型，我们称之为 C，它们是两个红色区域的交点；第一层同样有五个。

因此，我们需要十个字母 $\{0, 1, \ldots, 9\}$ 来编码第一层。此时我们注意到，每种类型 B 都有三个子节点，其中两个属于 B 类型，一个属于 C类型。因此，我们将使用字母 B_0，B_1，B_2。而对于 C类型，它有三个子节点，其中两个属于 C 类型，并

- 第四种类型，我们称之为 D，它是 C 类型的中间子节点，并且只有一个 B类型的子节点。

总之，我们需要三个字母 C_0，C_1，C_2 以及一个字母 D_0，才能完整编码初等标记。类型自动机见图 5。

定义 7.20。 我们按以下方式定义自动机 $\mathcal{M} = (\Delta_{/\sim}, R^2, \to, (a_0, a_0)_\sim)$:

状态： 集合 $\Delta := \{(a, b) \mid a, b \in \mathcal{A}_n$ 其中某个 $n \in \mathbb{N}, \mathsf{d}_\Gamma(a, b) \leq \lambda\}$ 具有粘合常数，并且商集取自关系 $(a, b) \sim (c, d)$：存在 $g \in G$ 使得 $g = \psi_a \psi_c^{-1} = \psi_b \psi_d^{-1}$。商集的元素记为 $(a, b)_\sim$，其中 $(a, b) \in \Delta$是一个代表元。

字母表： 我们考虑刚性类型集合 R 与自身的笛卡尔积，它对应于基本标记集合的笛卡尔积。**转移函数：** 当存在两个元素 $(a, b) \in (a, b)_\sim$ 和 $(c, d) \in (c, d)_\sim$，使得 c 是 a 的子对象，且特别地 $\psi_c = \psi_a \tau_1$ 与和 r_1相关联的初等标记 τ_1 满足条件时，我们便从 $(a, b)_\sim$ 向 $(c, d)_\sim$ 画一条箭头 $(r_1, x_2) \in R^2$。对 d, c 和 r_2也同样成立。

初始状态： 我们用 a_0 表示 0 级的原子。此记号源自对状态的描述。

注 7.21。 请注意，刚性结构不会定义新的类型，因此， $\sim$ 定义中的要求与要求一个 $g \in G$ 是从 a 到 c、同时也是从 b 到 d的态射相同。

注 7.22. 该自动机包含一个类型自动机的副本。事实上，给定一种类型，就存在一个状态 $(a,a)_\sim$ ，它收集所有与自身配对且属于该类型的 a 。而这两个状态之间的转移，恰好标记为 (r,r)，其中 r 取遍类型自动机所有转移标签构成的集合。

现在我们按以下方式进行：首先需要验证该机器在视距函数上的行为确实符合预期，然后证明它是有限状态的。

命题 7.23. 设 $\mathcal{M}$ 为上述自动机，且$(u_n)_{n=1}^\infty$ 和$(v_n)_{n=1}^\infty$ 是由其编码描述的两个 *horofunction*。我们有，这两个 *horofunction* 在 ∂G 中是同一个元素，当且仅当存在一条经过 $\mathcal{M}$中状态 $\{(a_n,b_n)_\sim\}_{n=1}^\infty$ 的无限转移。

证明。首先假设两个视距函数能够拼接在一起。由定理 3.4，我们知道，对每个 Γ $(u_n,v_n) \leq \lambda$ ， n都成立。因此，根据自动机的定义，我们可以取 $a_n = u_n$ 和 $b_n = v_n$。于是我们知道，经过这些状态，我们可以读出与这些视距函数相关联的双重初等标记所组成的序列。

另一方面，假设我们能够在 $\mathcal{M}$上读出这两个视距函数。还假设，对于 $k \leq n$ ，有$(u_k,v_k) \in (a_k,b_k)_\sim$。特别地，$\mathsf{d}_\Gamma(u_k,v_k) = \mathsf{d}_\Gamma(u_kg,v_kg) = \mathsf{d}_\Gamma(a_k,b_k) \leq \lambda$。我们要证明$(u_{n+1},v_{n+1}) \in (a_{n+1},b_{n+1})_\sim$。根据假设，我们知道$g = \psi_{u_n}\psi_{a_n}^{-1} = \psi_{v_n}\psi_{b_n}^{-1}$。由于我们读入$(r_1,r_2)$，从状态$(a_n,b_n)_\sim$到达状态$(a_{n+1},b_{n+1})_\sim$，因此有

$$\psi_{u_{n+1}} = \psi_{u_n}\tau_1 \text{ and } \psi_{v_{n+1}} = \psi_{v_n}\tau_2,$$

其中 r_i 是与初等标记 τ_i 对应的数字， $i = 1,2$。由同样的道理，我们可以选择代表元 (a_{n+1},b_{n+1})，使得

$$\psi_{a_{n+1}} = \psi_{a_n}\tau_1 \text{ and } \psi_{b_{n+1}} = \psi_{b_n}\tau_2.$$

总之， a_{n+1} 和 u_{n+1} 属于同类型（它们具有相同的标记）， b_{n+1} 和 v_{n+1} 也同样如此。因此，存在 $h_1,h_2 \in G$ ，使得

$$h_1 = \psi_{u_{n+1}}\psi_{a_{n+1}}^{-1} \text{ and } h_2 = \psi_{v_{n+1}}\psi_{b_{n+1}}^{-1}.$$

把所有内容综合起来，我们得到

$$h_1 = \psi_{u_{n+1}}\psi_{a_{n+1}}^{-1} = \psi_{u_n}\tau_1\tau_1^{-1}\psi_{a_n}^{-1} = g = \psi_{v_n}\tau_2\tau_2^{-1}\psi_{b_n}^{-1} = \psi_{v_{n+1}}\psi_{b_{n+1}}^{-1} = h_2.$$

这意味着 $\mathsf{d}_\Gamma(u_{n+1},v_{n+1}) = \mathsf{d}_\Gamma(a_{n+1}g,b_{n+1}g) = \mathsf{d}_\Gamma(a_{n+1},b_{n+1})$。特别地，$(u_{n+1},v_{n+1})$ 属于 Δ，而 $(a_{n+1},b_{n+1})_\sim$，正如所需。□

关于机器的效率和几何解释，还需要作几点说明。

注 7.24。(1) 请注意，停止前的步数并非最优。这是因为我们依赖一个粘合常数，因此可能会创建一些无法从其出发进行任何转移的状态；换言之，该自动机不是约化的。

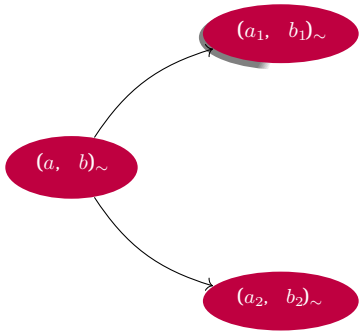
(2) 该自动机通过考察两个点的编码，大致估算它们在格罗莫夫边界上的距离。事实上，根据定理 5.10 以及定义7.20 机器停止时（离散的）时间量与输入的两个元素之间的格罗莫夫积相差不远。

为了使前面的命题尽可能简洁，我们在此汇总得到有理性所需的自动机的性质。

推论 7.25. 机器 $\mathcal{M}$ 是确定性的，并能识别 *horofunctions*。

证明。

确定性。 假设自动机中出现如下情形：



我们要证明 $(a_1, b_1)_\sim = (a_2, b_2)_\sim$。这是刚性结构的推论，即存在

$$(a, b) \in (a, b)_\sim \text{ and } (a_1, b_1) \in (a_1, b_1)_\sim \text{ with } \psi_{a_1} = \tau_r \psi_a,\ \psi_{b_1} = \tau_s \psi_b$$

and

$$(\overline{a}, \overline{b}) \in (a, b)_\sim \text{ and } (a_2, b_2) \in (a_2, b_2)_\sim \text{ with } \psi_{a_2} = \psi_{\overline{a}} \tau_r,\ \psi_{b_2} = \psi_{\overline{b}} \tau_s;$$

此外，存在 $g \in G$ 使得 $g = \psi_a \psi_a^{-1} = \psi_b \psi_{\overline{b}}^{-1}$。因此我们有

$$\psi_{a_2} \psi_{a_1}^{-1} = \psi_{\overline{a}} \tau_r \tau_r^{-1} \psi_a^{-1} = g = \psi_{\overline{b}} \tau_s \tau_s^{-1} \psi_b^{-1} = \psi_{b_2} \psi_{b_1}^{-1},$$

这就得到了所需结论。

识别器。假设

$$(a_0, a_0)_\sim \to (a_1, b_1)_\sim \to \ldots \to (a_n, b_n)_\sim \to \ldots$$

是 $\mathcal{M}$ 上的一个状态转移。我们回顾一下，$(a_0,\ a_0)_\sim$ 是初始状态，与词

$$(r_1, s_1)(r_2, s_2) \ldots (r_n, s_n) \ldots$$

这意味着存在 $a_{n-1} \xrightarrow{r_n} a_n$ 和 $a_n \xrightarrow{r_{n+1}} a_{n+1}$，但 a_n 和 $\overline{a}_n$ 属于同类型，因此 r_{n+1} 也必须是 a_n 的一种允许的刚性类型，所以我们可以给出 a_{n+1}，使得 $a_n \xrightarrow{r_{n+1}} a_{n+1}$。 □

最后一部分旨在证明 $\mathcal{M}$ 是一个有限状态机，也就是说，我们希望为 $\Delta_{/\sim}$的基数给出一个上界。为此，我们需要 [BBM21] 中引入的关键定义，以证明类型的数量是有限的。

在此之前，我们回顾一下：如果两个元素 x 和 y 属于同一个 k 层原子 a，那么 $d_x = d_y$ 在 B_k 上。因此，d_a 在 B_k 上定义良好。如果 Γ_0 是 Γ 的顶点子集，f 是从 Γ_0 到 $\mathbb{Z}$ 的函数，且 $g \in G$，那么我们

定义 fg 为函数 $yfg := yg^{-1}f$，对所有 $y \in \Gamma_0 g$ 均如此。另请注意，如果 f_1 和 f_2 相差一个常数，那么 $f_1 g$ 和 $f_1 g$ 也相差一个常数。结合这两条事实，便得到 $d_a g$ 在 $B_k g$ 上的定义。

定义 7.26. 设 $a \in \mathcal{A}_m$ 和 $b \in \mathcal{A}_n$。我们称元素 $g \in G$ 在 a 与 b 之间诱导出一种**几何等价**，如果

(1) $P(a, S_m)g = P(b, S_n)$; (2) $d_a g = d_b$ 在 $P(b, \overline{S}_n)$ 上; (3) 对所有 $p \in P(a, S_m)$, $C(p)g = C(pg)$。

关于此定义的主要结果如下

命题 7.27. 若 $g \in G$ 在两个原子 a 和 b 之间诱导出几何等价，则它诱导出一个态射。因此，a 和 b 属于同类型。

《[BBM21]》第 3.5 节的大部分内容是对此命题的证明。以下证明取自《[BBM21]》中的推论 3.28；我们在此列出它，以便理解我们的情形。

证明（定理*2.12*）。根据命题 7.27，只需证明测地度量等价类是有限的。

由于 G 对 Γ 的作用是余紧的，因此存在一个紧的、从而有限的顶点子集 K，使得

$$KG = \{Kg \mid g \in G\}$$

是整个图。现在取 $p \in P(a, S_m)$，则存在一个元素 $h \in G$ 使得 $ph \in KG$；利用命题 2.2.b，我们有 $P(a, S_n)$ 包含于 K 的一个 $8\delta+2$-邻域中。这意味着模去 G 的作用后，$P(a, S_m)$ 只有有限种可能。此外，由于 G 的作用是不连续的，且根据命题 2.5，锥类型只有有限种，因此对于每个 $p \in P(a, S_m)$，$C(p)$ 只有有限种选择；而 d_a 在 $P(a, S_m)$ 上的限制也只有有限种选择。□

我们将研究几何等价与类型的一种细微细化。为此，我们考虑相对于 d λ而言，原子的一个邻域。Γ邻域中原子的集合有限，这是因为 $\mathsf{d}_\Gamma \leq \mathrm{T}^* \mathrm{d}_\Gamma \leq \mathrm{d}_\Gamma + \lambda$，其中 λ 粘合常数以及尖端数量有限这一事实共同起作用（参见命题 2.15）。

我们用 a with$\mathcal{A}_\lambda(a)$表示与一个 n 层原子距离不超过 λ 的所有 n 层原子的集合，并称 a 为该邻域的**中心**。

定义 7.28. 若存在一个元素 $g \in G$，它在 $\mathcal{A}_\lambda(a)$ 与 $\mathcal{A}_\lambda(b)$ 之间诱导出一个双射，并且对于所有 $a_\lambda \in \mathcal{A}_\lambda(a)$，$g_{|a_\lambda}$ 都是 a_λ 与 b_λ 之间的类型态射，则两个原子 a, $b \in \mathcal{A}$ 具有相同的 **λ-类型**。

在给出几何等价的相应定义之前，我们想先指出以下内容。

注 7.29.(1) 一个 λ邻域中可以有两个同类型的原子。(2) 由于 g 是等距变换，我们有：λ邻域中两个原子之间的距离仅取决于其中心的 λ类型。

定义 7.30. 若存在 $g \in G$，使得对于所有 $a_\lambda \in \mathcal{A}_\lambda(a)$和 $b_\lambda \in \mathcal{A}_\lambda(b)$，下列条件均成立，则称两个原子 $a, b \in \mathcal{A}$ 是**几何 λ等价**

(1) $P(a_\lambda, S_n)g = P(b_\lambda, S_m)$; (2) $d_{a_\lambda} g$ 在 $P(b_\lambda, \overline{S}_m)$ 上与 d_{b_λ} 一致; (3) 对所有 $p \in P(a_\lambda, S_n)$, $C(p)g = C(pg)$;

其中 n 和 m 是适当的正整数。

我们有如下命题7.27的版本。

引理 7.31。 如果两个原子在几何意义上 λ等价，那么它们具有相同的λ类型。

证明。 根据定义，元素 g 所诱导的几何 λ等价也在属于 $\mathcal{A}_\lambda(a)$的每个原子上诱导几何等价。由命题 7.27可知， g 在每个原子上都诱导一个态射。因此结论成立。 □

剩下要做的就是证明几何 λ等价类的数量有限。但同样，这几乎可以直接由 [BBM21] 得到。

引理 7.32。 关于几何λ等价的等价类数量有限。

证明。 可以按照定理 2.12 的证明进行论证，并注意到，由于 $\mathcal{A}_\lambda(a$满足 HookingLemma，其中所有原子的近端集的并集具有有限直径。 □

现在我们可以证明以下命题

命题 7.33. 集合 $\Delta_{/\sim}$ 是有限的。

证明。 核心思路是，存在一种方法，可以用 $\mathcal{A}_\lambda(a)$ 覆盖 Δ ，其中 a 在 $\mathcal{A}$ 中变化；更明确地说，对于每个 $(a,b) \in \Delta$，都有 $b \in \mathcal{A}_\lambda(a)$。
结合引理 7.31 和引理 7.32，可知只有有限多个λ-类型。令 C_λ 为 λ-类型的有限数量。我们还知道 $|\mathcal{A}_\lambda(a)|$ 是有限的，特别是，当 $b \in \mathcal{A}_\lambda(a)$ 时，只有有限多个对 (a,b)。

最后，如果 $(a,b) \sim (c,d)$，那么存在 $g \in G$，它诱导出一个映射 $g\colon \mathcal{A}_\lambda(a) \to \mathcal{A}_\lambda(c)$，并且满足 $(a,b)g = (c,d)$。因此， $\Delta_{/\sim}$ 中至多有 $C_\lambda(|\mathcal{A}_\lambda(a)| - 1)$ 个元素。□

总结本节的成果，我们明确给出以下

定理 7.34. 商映射 $\pi_h : \partial_h\Gamma \twoheadrightarrow \partial\Gamma$ 定义了一个有理等价关系。

最后，我们指出，由于一个 λ-邻域中的两个原子可能具有相同的刚性类型，因此我们无法像对格罗莫夫边界上的其他树结构那样，断定粘合关系是半马尔可夫的。不过，关于 λ-类型，我们还能得出更多结论。

命题 7.35. λ-类型是原子树的一种自相似结构。

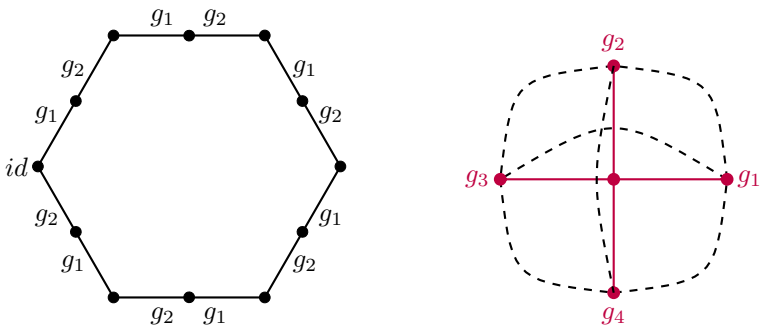
证明。 这个结论很容易由以下事实和论证得出： λ-类型是有限的；将一个 λ-邻域映射到另一个邻域的元素 $g \in G$ 是一个等距变换，并且它在该邻域的每个原子上都是一个态射。因此，它保持子代的 λ-邻域以及其中所含原子的类型。□

8. Example

在本节中，我们将讨论群

$$\langle g_1, g_2, g_3, g_4 \mid g_i^2, \ (g_ig_j)^6, \ i \in \{1,2,3,4\}, \ j > i \rangle.$$

从几何上看，我们可以用边为 g_ig_j 的六边形表示每个关系（见图 6.(a)）。由于我们有四个生成元，并且它们全都是对合，



(A) 关系 $(g_1g_2)^6$。 (B) 红色的是四个生成元，the 虚线是六个六边形的一部分。

FIGURE 6. 群的生成元和关系。

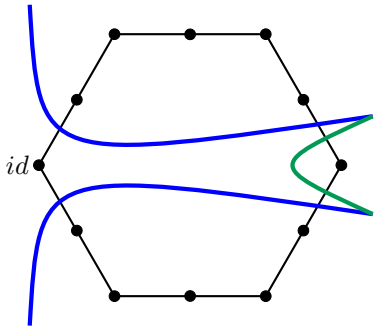


FIGURE 7. 在单个关系 $(g_ig_j)^6$ 上看到的第一层的两种原子类型。



(A) (B)

FIGURE 8. 第一个水平图及其一部分。

我们可以想象图 6.(b) 所示的情形，即顶点 g_i 与其逆相重合，因此我们有六个“六边形”关系。

现在，我们可以考虑第一层的两种原子：一种是宽型（图 7中有两个，以蓝线勾勒），另一种是窄型（图 7 中有一个，即绿色的那个）。与宽型不同，窄型在接下来的四层中不会分裂，这是因为我们必须等到 $B_6(id)$才能与该原子相交。因此，唯一的子对象在每一步都有不同的类型，但它们全都同胚。

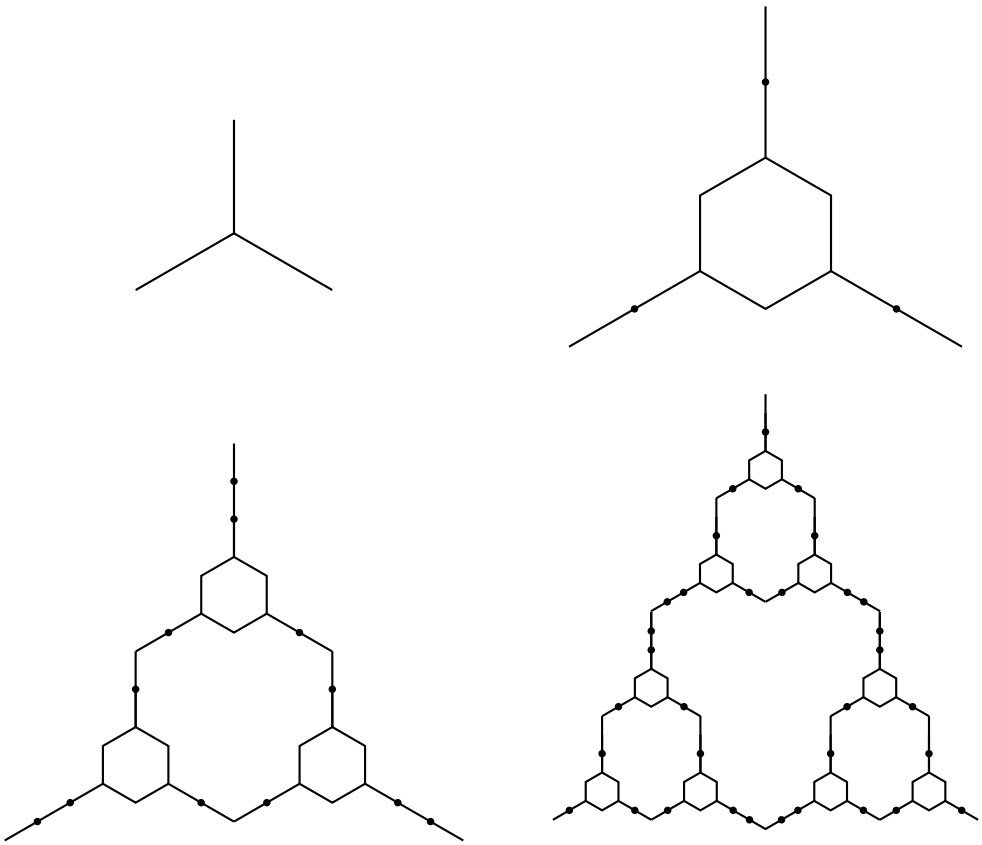


FIGURE 9. 水平图的前四个部分。

要构造水平图（这里同样为简单起见，像前一个例子一样，我们假设 $\lambda_e = 1$ ），我们要把四个宽型原子想象成四面体的顶点，而六个窄型原子则是各条边的中点（见图 8.(a)）。

由于原子的自相似性，我们只需关注四面体的一个部分：考虑一个宽型原子及其三个相邻的窄型原子（见图8.(b)）。然后，我们只需关注这一部分，可以看到水平图的序列如图9所示。特别地，在这四个步骤中，窄型原子始终是一个顶点，而扩展由宽型原子完成。这一过程会形成一个阿波罗尼奥斯垫片。

8.1. 粘合自动机。我们要讨论这个例子的粘合自动机的构造。我们不展示完整的自动机，但会概述如何构造它。

类型自动机如图10所示，其中 λ 设为 1，与其他例子相同；我们用蓝色和绿色标出第一层中分别对应宽型和窄型的状态（初始状态仍为 A ）。其他状态的名称依据几何直觉给出；我们倾向于省略这些名称，因为它们对本段说明没有用处。

我们按层推进，这里只展示第一层。我们需要列出当前层中的所有元素 Δ（我们可以查看图中的四面体8.(a)）。因此，在本例中我们有

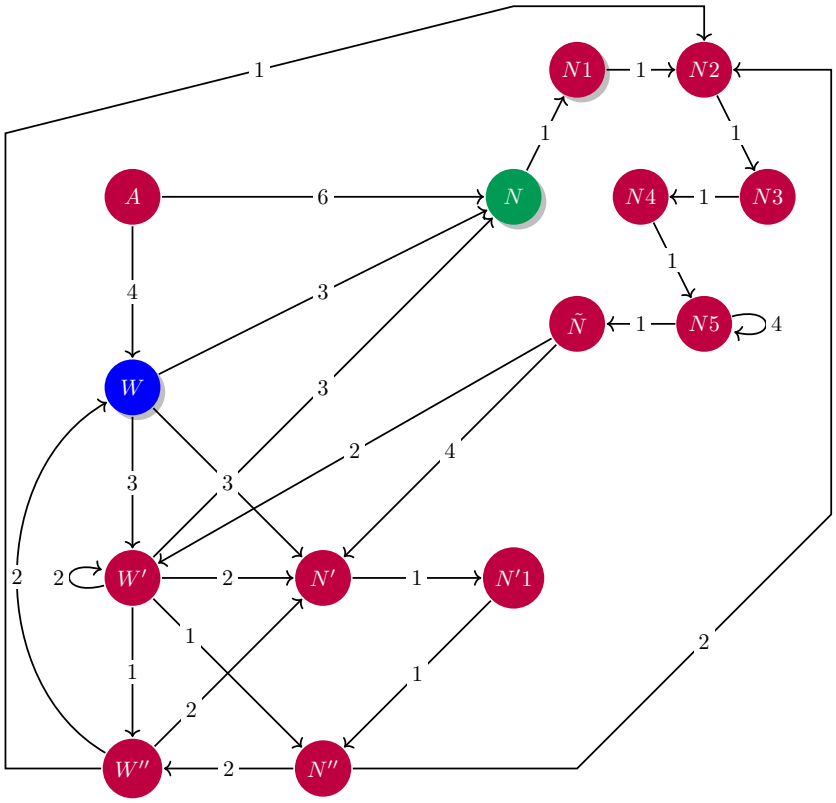


FIGURE 10. 类型自动机：标签表示相应类型箭头的数量，蓝色状态和字母 W 表示宽型，绿色状态和字母 N（窄类型）亦然。

	w_1	w_2	w_3	w_4
n_1	1	0	0	1
n_2	1	0	1	0
n_3	1	1	0	0
n_4	0	1	0	1
n_5	0	1	1	0
n_6	0	0	1	1

并注意，每一对都需要计数两次（w_i, n_j）和（n_j, w_i）。

为了计算 $\mathcal{M}$ 的状态，我们应提供能够将数对映射到数对的群元素。请注意，这并不意味着每当有一对原子 $(a,\ b)$ 和另一对原子 $(a',\ b')$，且 a' 与 a 同类型、b' 与 b 同类型时，就一定存在这样的元素。完成第一层后，我们进入第二层；此时要记住，我们已经在 $\mathcal{M}$ 中有了一些状态，因此 Δ 中的新元素可能与前一层的某个元素属于同一个等价类。此外，我们必须根据刚性结构添加所有可能的转移。当我们确定所有可能的刚性类型都已处理完毕时，这一过程便结束；我们可以通过查看类型自动机来确认这一点。

Acknowledgements

这项工作是作者在米兰-比可卡大学、帕维亚大学和 INdAM 数学联合博士项目中的博士论文的一部分。作者谨向导师 James Belk 和 Francesco Matucci 致谢，感谢他们为作者提出这一课题，并给予诸多富有见地的指导和建议。作者衷心感谢 Collin Bleak 和 Matthew C. B. Zaremsky 提供有益的修正和评论。作者也感谢 James Belk、Collin Bleak 和 Francesco Matucci 慷慨提供其作品中双曲圆盘镶嵌的原子图像（图 1。（a）和图 2），见其作品 [BBM21]。

References

[Bar18] B. J. Barrett. 探究双曲群边界的拓扑性质。博士论文，剑桥大学，2018。 doi:10.17863/CAM.32926。[BBI01] D. Burago、Y. Burago 和 S. Ivanov。《度量几何教程》，《数学研究生教材》第 33 卷。AMS，2001。 doi:10.1090/gsm/033。[BBM21] J. Belk、C. Bleak 和 F. Matucci. 双曲群的有理嵌入。《组合代数杂志》，5(2):123–183，2021。 doi:10.4171/JCA/52。[Bel19] J. Belk. 格罗莫夫双曲空间的视距函数的两种定义。MathOverflow，2019。网址： https://mathoverflow.net/q/328741。[BF19] J. Belk 和 B. Forrest. 分形的重排群。《美国数学会汇刊》，372(7):4509–4552，2019。 doi:10.1090/tran/7386。[BGN03] L. Bartholdi、R. Grigorchuk 和 V. Nekrashevych. 从分形群到分形集。载于《格拉茨分形 2001》，《数学趋势》，第 25–118 页，2003。 doi:10.1007/978-3-0348-8014-5_2.[BGS85] W. Ballmann、M. Gromov 和 V. Schroeder. 非正曲率流形。《数学进展》，61，1985。[BH13] M. R. Bridson 和 A. Haefliger. 非正曲率度量空间，《数学基础科学丛书》第 319 卷。Springer Berlin, Heidelberg，2013。 doi:10.1007/978-3-662-12494-9。[Can84] J. W. Cannon. 余紧离散双曲群的组合结构。《几何学献稿》，16:123–148，1984。 doi:10.1007/BF00146825。[CP93] M. Coornaert 和 A. Papadopoulos. 《符号动力学与双曲群》，《数学讲义》第 1539 卷。Springer Berlin, Heidelberg，1993。 doi:10.1007/BFb0092577。[CP01] M. Coornaert 和 A. Papadopoulos. 格罗莫夫双曲群上的视距函数与符号动力系统。《格拉斯哥数学杂志》，43 3 425 456, 2001 doi:10.1017/ ( ): – 。.[S0017089501030063 DK03] R. Diestel 和 D. K¨uhn. 图的图论端与拓扑端。《组合理论杂志 B 辑》，87 1 197 206, 2003 doi:10.1016/S0095-8956(02) ( ): – 。.[00034-5 Don16] C. R. Donoven. 康托尔空间上的分形、群论与关系结构。博士论文，圣安德鲁斯大学，2016。网址： http://hdl.handle.net/10023/11370。[GMS19] D. Groves、J.F. Manning 和 A. Sisto. 德恩填充的边界。《几何与拓扑》，23(6):2929–3002，2019。 doi:10.2140/gt.2019.23.2929。[GNS00] R. I. Grigorchuk、V. Nekrashevych 和 V. Sushchanski˘i. 自动机、动力系统与群。《斯捷克洛夫数学研究所论文集》，231(4):128–203，2000。[Gro87] M. Gromov. 双曲群。《群论论文集》，8，1987。[Kai03] V. A. Kaimanovich. 谢尔宾斯基地图上的随机游走：双曲性与随机均匀化。载于《格拉茨分形 2001》，《数学趋势》，第 145–183 页，2003。doi:10.1007/978-3-0348-8014-5_5。[KB02] I. Kapovich 和 N. Benakli. 双曲群的边界。载于《组合与几何群论》，《当代数学》第 296 卷，第 39–93 页，2002。doi:10.1090/conm/296。[Kur66] K. Kuratowski.《集合论与拓扑学导论》。L’einseignement mathematique，日内瓦，1966。[LW09] K-S. Lau 和 X-Y. Wang. 作为双曲边界的自相似集。《印第安纳大学数学杂志》，58(4):1777–1795，2009。 doi:10.2307/24903289。[L¨o17] C. L¨oh.《几何群论：导论》。《大学文本》。Springer Cham，2017。 doi:10.1007/978-3-319-72254-2。

[Nek03] V. Nekrashevych. 自相似群作用产生的双曲空间。《代数与离散数学》，2(1):77–86，2003。
[Nek07] V. Nekrashevych. 自相似群及其几何。《圣保罗数学科学杂志》，1(1):41–95，2007。[Paw15] D. Pawlik. 作为马尔可夫紧空间的格罗莫夫边界，2015 https://arxiv.org/ 。网址：，。abs/1503.04577 doi:10.48550/ARXIV.1503.04577
[Rus14] B. Rushton. 低维几何群的细分规则分类。《构形几何与动力系统》，18:171–191，2014。doi:10.1090/S1088-4173-2014-00269-0。[Rus17] B. Rushton. 所有格罗莫夫双曲群的细分规则，2017 https: 。网址：，。//arxiv.org/abs/1708.02366 doi:10.48550/arXiv.1708.02366
[V¨a05] J. V¨ais¨al¨a. 格罗莫夫双曲空间。《数学论述》，23(3):187–231，2005。doi:10.1016/j.exmath.2005.01.010。[Wil70] S. Willard.《一般拓扑学》。《艾迪生-韦斯利数学丛书》。Addison-Wesley，1970。[WW05] C. Webster 和 A. Winchester. 双曲度量空间的边界。《太平洋数学杂志》，221(1):147–158，2005。 doi:10.2140/pjm.2005.221.147。[WW06] C. Webster 和 A. Winchester. 无限图的布塞曼点。《美国数学会汇刊》，358 9 4209 4224， 2006 doi:10.1090/ ( ): – 。S0002-9947-06-03877-3

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Ed. U5 Via R.Cozzi 55 20125 Milano Italy EU , , „
Email address: d.perego25@campus.unimib.it