arXiv:2303.09866v2 [hep-ph] 23 Aug 2023

CERN-TH-2023-040

希格斯-斯塔罗宾斯基暴胀中的紫外敏感性

Sung Mook Lee,[a,b] **Tanmoy Modak,**[c] **Kin-ya Oda,**[d] **和 Tomo Takahashi**[e]

[a]物理系与 *IPAP* 及暗宇宙实验室，延世大学，首尔 *03722*，韩国[b]理论物理系，*CERN*，瑞士日内瓦 *1211*，*23* 号[c]海德堡大学理论物理研究所，德国海德堡 *69120*[d]数学系，东京女子基督教大学，日本东京 *167-8585*[e]物理系，佐贺大学，日本佐贺 *840-8502*电子邮件：
sungmook.lee@yonsei.ac.kr，tanmoyy@thphys.uni-heidelberg.de，
odakin@lab.twcu.ac.jp，tomot@cc.saga-u.ac.jp

摘要：包含所有四维项的一般标量-张量理论存在能够产生与宇宙学观测相符的成功暴胀的参数区域。事实上，当标量场被认定为标准模型希格斯玻色子时，该理论便与希格斯-斯塔罗宾斯基暴胀相同。我们将由标量场和里奇标量的非导数项构成的可能的六维算符视为微扰，并研究这些算符需要受到多大程度的抑制，才能避免破坏成功的暴胀预测。为确保宇宙学预测具有可行性，标量场六次幂项的抑制尺度应达到普朗克尺度。对于其他项，低得多的尺度便已足够。

目录

1 引言 1

2 $f(R,\ \chi)$ 理论与希格斯-R^2 暴胀 32.1 $f(R,\ \chi)$ 理论中的一般势 3 2.2 希格斯-R^2暴胀 5

3 高维算符 9

3.1 χ顿 10 3.2 R^3项 12 3.3 χ^2R^2 与 χ^4R 项 14

4 结论与讨论 16 A 共形模 16 B 质量项的作用 17 C 希格斯-R^3暴胀 19

1 引言

暴胀如今已成为标准宇宙学不可或缺的一部分，但我们仍不知道是什么导致了早期宇宙的准德西特阶段。要实现这一暴胀阶段，我们至少需要在标准模型之外（BSM）部门中引入一个标量自由度，即“暴胀子”。希格斯暴胀 [1–4], 是一个例外，在这种模型中，标准模型（SM）的希格斯玻色子扮演暴胀子的角色。然而，这种“原始”希格斯暴胀模型存在幺正性问题，因此仍需引入新的自由度，才能将微扰性维持至普朗克尺度 [5]。更准确地说，暴胀本身并未受到影响 [6],，但其再加热过程涉及的动量高于截断尺度 [7]。

另一方面，斯塔罗宾斯基暴胀 [8], 或 R^2-暴胀，是最早提出的暴胀模型之一，也是最简约的模型之一。在暴胀结束前约 $60\ e$ 个 e 折时，它仍处于当前对谱指数 n_s 和张量标量比 r 的测量所允许的理想范围内。从修正广义相对论（GR）的角度来看，R^2 暴胀可视为 $f(R)$ 理论的一种特例（综述可参见例如 [9, 10]）；这类理论通常会在度规形式中引入一种新的标量自由度，称为标量子。[1]

[1]本文采用度规形式，而非帕拉蒂尼形式。在后者中，R^2 项不会引入任何新的动力学自由度，因此我们仍需增加另一个标量自由度来实现暴胀 [9, 11, 12]。

考虑高能粒子物理学中的一般超越标准模型理论，粒子谱中除了标量子自由度外，还可能存在其他标量场；例如参见文献 [13]。由于标准模型中至少已有一个标量场——希格斯，我们必须纳入至少一个（可能是非最小耦合的）标量场 χ ，才能写出一种 R^2型暴胀的一般作用量。本文中， χ 表示任意标量场，不过为便于说明，我们称其为希格斯。

这种标量扩展的一个具体例子是 R^2 希格斯暴胀R^2模型 [14–21], 该模型经过扩展，将一般 $f(R,\chi)$ 类型理论中所有可能的四维项 [22]都纳入考量。（事实上，文献中通常忽略标量场质量项的作用。我们在附录B中简要讨论了这些方面。）也可以将希格斯暴胀模型视为标准希格斯暴胀的一种扩展，用以解决上述再加热期间的幺正性问题。

一般而言，大场暴胀模型存在自然性问题。一个众所周知的例子是 η 问题：它质疑暴胀期间暴胀子如何在没有任何对称性保护的情况下保持无质量；例如参见文献 [23]。换言之，我们需要解释是什么确保了近似的平移对称性，从而禁止暴胀子势中的质量项。[2] R^2、希格斯暴胀和希格斯-R^2 暴胀模型都隐含地假设，在超普朗克尺度区域 $\chi \gtrsim M_{\rm P}$ ，这种近似的平移对称性仍然成立，且能量密度远小于普朗克尺度： $V(\chi) \ll M_{\rm P}^4$。有时，人们会用能量密度足够小这一点，来论证暴胀有效理论中的场值可以大于截断尺度 [25]。[3] 要在超普朗克尺度的场值下实现这种近似的平移对称性，仔细考量势中的高维项至关重要。

从理论上说，暴胀模型最好具有紫外（UV）不敏感性。例如，研究表明，在度规形式中，具有较大非最小耦合的单场暴胀，其宇宙学可观测量对加入六维算符并不敏感 [27], 但再加热期间存在幺正性问题。本研究探讨暴胀动力学和观测预测在多大程度上取决于是否存在六维算符，以及为了不损害与观测的一致性，此类算符应受到多大程度的抑制。

在这一方向上，先前的文献主要关注对希格斯暴胀中 R^2-暴胀 [28–30], 或 χ^6 项的 R^n （尤其是 $n=3$）型修正，或希格斯暴胀 [27]中的 $\chi^4 R$ 项。本文通过考虑由 χ 和 R 构造的所有可能的无额外导数的六维算符，对这些论证加以推广，例如 $\chi^2 R^2$、 $\chi^4 R$ 和 χ^6 ，并将其应用于希格斯-R^2暴胀。[4] [5]

[2]重整化质量项的缺失有时称为经典尺度不变性或经典共形性。近期研究表明，这种缺失可以理解为多临界点原理的一种体现 [24]。[3]不过请注意，例如，所谓的距离猜想指出：“如果标量模空间中的距离远大于普朗克长度，我们就不能在仍使用同一有效场论的同时实现慢滚暴胀。” [26]。[4]为简单起见，我们假设具有 Z_2 对称性 $\chi \to -\chi$，并考虑希格斯的规范不变性。[5]还可能存在其他类型的六维算符，其中包含导数，例如 $R(\partial\chi)^2$。一般认为，在慢滚

本文结构如下。第2节回顾一般的 $f(R,\ \chi)$ 理论并介绍本文所用的符号。我们还概述了分析方法，以研究 $f(R,\ \chi)$ 理论框架下暴胀模型的预言。第3节将讨论高维算符对标量势和宇宙学可观测量的影响。最后，我们将在第4节作总结。

2 $f(R,\chi)$ 理论与希格斯-R^2 暴胀

本节回顾一般 $f(R,\chi)$ 理论中的暴胀模型。首先，我们将简要讨论一般 $f(R,\chi)$ 理论及其对偶的标量-张量理论图景；该图景包含希格斯场之外的另一个标量场——标量子，并具有正则归一化的爱因斯坦引力。其次，考虑所有四维以内的可能算符，会自动得到希格斯-R^2 暴胀理论。尽管本文考虑的是实单态标量 χ，但将其推广到标准模型希格斯或其他带电标量应该很直接。

2.1 $f(R,\chi)$ 理论中的一般势

我们简要回顾 $f(R,\chi)$ 理论在度规形式下的变换，其中仿射联络先验地假定为列维-奇维塔联络；更全面的综述请参见参考文献 [9] 。

我们首先考虑具有如下作用量的一般 $f(R,\chi)$ 引力

$$S=\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_{\mathrm{P}}^2}{2}f(R,\chi)+\mathcal{L}_{\mathrm{mat}}(\chi)\right], \tag{2.1}$$

其中，$M_{\mathrm{P}}=1/\sqrt{8\pi G}\simeq 2.4\times 10^{18}$ GeV 是约化普朗克质量。我们假设存在一个参考系，在该系中物质扇区是正则归一化的，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{mat}}=-\frac{1}{2}\left(\partial\chi\right)^2-U(\chi)\,, \tag{2.2}$$

w这里 $U(\chi)$ 是 χ 场的任意势（不包含其导数 ）.

在纯广义相对论中，对于一个“规范耦合”的标量场，$f(R,\ \chi)\ =\ R$众所周知，度规的共形模具有符号错误的动能项；更多详情见附录A 。在这类模型中，即使对时间坐标进行 Wick 旋转，共形模或物质场仍会沿两个虚时间方向指数增长，因此无法进行欧几里得化；例如参见文献 [31, 32]。无论如何，没有任何对称性禁止 R 与 χ之间存在非最小耦合，因此，即使我们在树级手动将其舍弃，它们也会通过圈修正生成。因此，我们不假设标量场与纯广义相对论规范耦合。在实际处理中，这意味着我们不会在四维截断中手动舍弃 R^2 和χ^2R 项。尤其是，以下假设与接下来的讨论相关：

$$\frac{\partial^2 f(R,\chi)}{\partial R^2}\neq 0. \tag{2.3}$$

滚降暴胀。详细讨论需要采用超出本文范围的其他方法，因此我们只考虑 $f(R,\chi)$ 框架内 χ 和 R 的多项式项。

引入一个辅助场 Ψ，我们可以将其写为

$$S=\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_{\mathrm{P}}^2}{2}\left(f(\Psi,\chi)+\frac{\partial f(\Psi,\chi)}{\partial\Psi}\left(R-\Psi\right)\right)+\mathcal{L}_{\mathrm{mat}}(\chi)\right]. \tag{2.4}$$

对 Ψ 进行变分可得到约束 $\Psi=R$，只要式（2.3）成立。我们用一个物理自由度替代 Ψ：

$$\Phi=\frac{\partial f(\Psi,\chi)}{\partial\Psi}. \tag{2.5}$$

现在，约旦框架中的作用量为

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_{\mathrm{P}}^2}{2}\Phi R-V(\Phi,\chi)+\mathcal{L}_{\mathrm{mat}}(\chi)\right], \tag{2.6}$$

其中

$$V(\Phi,\chi):=\frac{M_{\mathrm{P}}^2}{2}\big[\Psi(\Phi)\Phi-f\big(\Psi(\Phi),\chi\big)\big]. \tag{2.7}$$

为得到爱因斯坦框架中的作用量，我们将度规场重新定义为

$$g_{\mathrm{E}\mu\nu}=\Phi g_{\mu\nu} \tag{2.8}$$

于是

$$S=\int d^4x\sqrt{-g_{\mathrm{E}}}\left[\frac{M_{\mathrm{P}}^2}{2}R_{\mathrm{E}}-\frac{3M_{\mathrm{P}}^2}{4\Phi^2}\left(\partial\Phi\right)_{\mathrm{E}}^2-\frac{1}{2\Phi}\left(\partial\chi\right)_{\mathrm{E}}^2-\frac{1}{\Phi^2}\big(V(\Phi,\chi)+U(\chi)\big)\right], \tag{2.9}$$

其中 $(\partial\varphi)^{\,2}{}_{\mathrm{E}}:=g^{\mu\nu}{}_{\mathrm{E}}\ \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi$ 等；参见附录A。注意，标准希格斯暴胀$f(R,\ \chi)=\left(1+\frac{\chi^2}{M_{\mathrm{P}}^2}\right)R$不满足条件（2.3），因此 $\Phi=1+\frac{\chi^2}{M_{\mathrm{P}}^2}$除 χ之外，不包含额外的标量子自由度。

将暴胀子场 Φ 规范化后

$$\phi=M_{\mathrm{P}}\sqrt{\frac{3}{2}}\ln\Phi, \tag{2.10}$$

我们得到爱因斯坦框架中的作用量

$$S=\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g_{\mathrm{E}}}\left[\frac{M_{\mathrm{P}}^2}{2}R_{\mathrm{E}}-\frac{1}{2}\left(\partial\phi\right)_{\mathrm{E}}^2-\frac{1}{2}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\mathrm{P}}}}\left(\partial\chi\right)_{\mathrm{E}}^2-W(\phi,\chi)\right], \tag{2.11}$$

其中

$$W(\phi,\chi):=e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\mathrm{P}}}}\left[V\left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\mathrm{P}}}},\chi\right)+U(\chi)\right]. \tag{2.12}$$

给定 $f_{,\ \Psi\Psi}(\Psi,\ \chi)\neq 0$，理论（2.1）被证明与爱因斯坦-希尔伯特引力加上两个标量场——希格斯场和标量子——在经典上等价。值得注意的是，不存在任何参考系（或场重定义），能使它们在所有场值下都正则归一化。

我们简要考察标量子自由度如何通过自由度计数而出现。纯爱因斯坦引力有 2 个物理自由度，对应于线性化广义相对论中的引力波：对称度规张量$g_{\mu\nu}$ 有 10 个自由度，而我们有 4 个微分同胚不变性（这意味着比安基恒等式 $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$），因此还剩下 6 个。在纯爱因斯坦引力的$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}/M^2{}_{\rm P}$的 10 个爱因斯坦方程中，00 分量和 $0i$分量实际上是约束，因为运动方程中没有时间导数项。这 4 个约束使纯爱因斯坦引力中剩下 $6-4=2$个引力子自由度。然而，由于存在 R^n $(n \neq 1)$项，这些方程的一个线性组合获得了时间导数项，使一个标量自由度成为动力学自由度，这对应于标量子。

2.2 希格斯-R^2暴胀

考虑到所有四维项（即 $f(R,\chi)$ 中的二维算符），我们有

$$f(R,\chi) = \left(1 + \frac{\xi}{M_{\rm P}^2}\chi^2 + \cdots\right) R + \left(\frac{\alpha}{M_{\rm P}^2} + \cdots\right) R^2 + \cdots ,$$
$$U(\chi) = \frac{m^2}{2}\chi^2 + \frac{\lambda}{4}\chi^4 + \cdots , \tag{2.13}$$

其中，省略号表示本小节中忽略的六维算符及更高阶项，ξ 是非最小耦合，α 与暴胀子质量有关，后文将对此进行说明；m 是 χ的质量，λ 是其四次耦合。[6]

这正是希格斯-R^2 暴胀模型，可视为希格斯暴胀模型或 R^2 暴胀模型的一种推广。如上所述，在标准模型希格斯暴胀的基础上加入 R^2项，可以解决其在（预）热化期间的幺正性问题；该模型的唯象学已得到广泛研究 [16–21, 33–40]。

在标准模型希格斯暴胀中，希格斯玻色子的质量处于电弱尺度，与暴胀期间的场值相比可以忽略不计。如果将 χ 视为一般标量场，其质量可能较大，因此存在某些参数区间，使得质量项变得重要；更多讨论见附录B 。

本节余下部分将首先回顾希格斯-R^2 模型及相关步骤，例如利用谷方程积分掉一个自由度，并推导有效单场势。我们也将采用相同的方法分析该模型含有高维算符的推广形式。

将式（2.13）通过式（2.12）代入式（2.7），可得

$$W(\phi,\chi) = e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\rm P}}}\left[\frac{3M_\phi^2 M_{\rm P}^2}{4}\left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\rm P}}} - 1 - \frac{\chi^2}{M_\xi^2}\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\chi^2 + \frac{\lambda}{4}\chi^4\right], \tag{2.14}$$

其中我们引入了尺度

$$M_\xi := \frac{M_{\rm P}}{\sqrt{\xi}} \tag{2.15}$$

[6]原则上，也可以加入 $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ 或 $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ （除拓扑高斯-博内项外），这将是对我们分析的一个有趣推广。另请参见脚注8。

并将其解释为

$$M_\phi^2 := \left.\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2}\right|_{\phi=\chi=0} = \frac{M_{\rm P}^2}{6\alpha} \tag{2.16}$$

作为场空间原点处 ϕ 自由度的质量平方。此处及下文中，我们将 α 替换为 M_ϕ，并将 ξ 与 M_ξ 互换使用。总之，截断（2.13）给出的 Jordan 框架作用量为

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_{\rm P}^2}{2}\left\{\left(1+\frac{\chi^2}{M_\xi^2}\right)R + \frac{1}{6M_\phi^2}R^2\right\} - \frac{1}{2}(\partial\chi)^2 - \frac{m^2}{2}\chi^2 - \frac{\lambda}{4}\chi^4\right], \tag{2.17}$$

由此得到的 Einstein 框架作用量为

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g_{\rm E}}\left[\frac{M_{\rm P}^2}{2}R_{\rm E} - \frac{1}{2}(\partial\phi)_{\rm E}^2 - \frac{e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\rm P}}}}{2}(\partial\chi)_{\rm E}^2 - W(\phi,\chi)\right], \tag{2.18}$$

其中 $W(\phi,\chi)$ 由方程（2.14）给出。

Now

$$\Phi = 1 + \frac{\chi^2}{M_\xi^2} + \frac{R}{3M_\phi^2}, \qquad \phi = M_{\rm P}\sqrt{\frac{3}{2}}\ln\left(1+\frac{\chi^2}{M_\xi^2}+\frac{R}{3M_\phi^2}\right). \tag{2.19}$$

在极限 $\xi \to 0$ ($M_\xi \to \infty$) 下， ϕ 成为一个纯粹的标量子，它源自 R^2 项，此时模型退化为 R^2 暴胀；而在极限 $\alpha \to 0$ ($M_\phi \to \infty$) 下，一个自由度变得非常重， ϕ 场则近似为希格斯 χ，模型退化为希格斯暴胀。[7] 因此，对于较小的非最小耦合，即 $\xi^2 \ll \lambda\frac{M_{\rm P}^2}{M_\phi^2}$($M_\xi^4 \gg M_\phi^2 M^2{}_{\rm P}/\lambda$)，模型退化为斯塔罗宾斯基暴胀，我们称这些参数对应的区域为“R^2类”区域。另一方面，在 $\xi^2 \gg \lambda M_{\rm P}^2/M_\phi^2$($M_\xi^4 \ll M_\phi^2 M^2{}_{\rm P}/\lambda$) 极限下，结果与具有非最小耦合的单场暴胀相同，例如希格斯暴胀。该区域称为“希格斯类”区域 [16, 18]。

文献中通常忽略的一个特征，是Higgs标量场质量项的影响 χ 。当 m 不可忽略且大于临界质量 m_c（该临界质量比普朗克质量小几个数量级）时，有效势会开始形成一个隆起。慢滚近似被破坏时，这可能改变模型的预测。不过，结果表明，当m 足够小时，预测很少发生变化。更多细节和定量判据请参见附录B 。在下文的大多数分析中，我们将假设 $m \ll m_c$，并实际设定 $m = 0$。随后，为了使标量功率谱 $A_s \simeq 2.1\times10^{-9}$的振幅正确，我们需要$\widetilde{M}_\phi \simeq 1.3\times10^{-5}M_{\rm P}$；其定义见下文式（2.23）。（ A_s 的定义也见下文式（ 2.25）。

该模型的一个优点是，对于模型的大多数参数，场轨迹在暴胀期间会很快变得不受初始场值的影响

[7]在文献中， Φ （或 ϕ）场本身有时被称为标量子。这里我们区分 Φ （或 ϕ）与源自 R^2的标量子，以便同时考虑希格斯暴胀极限。

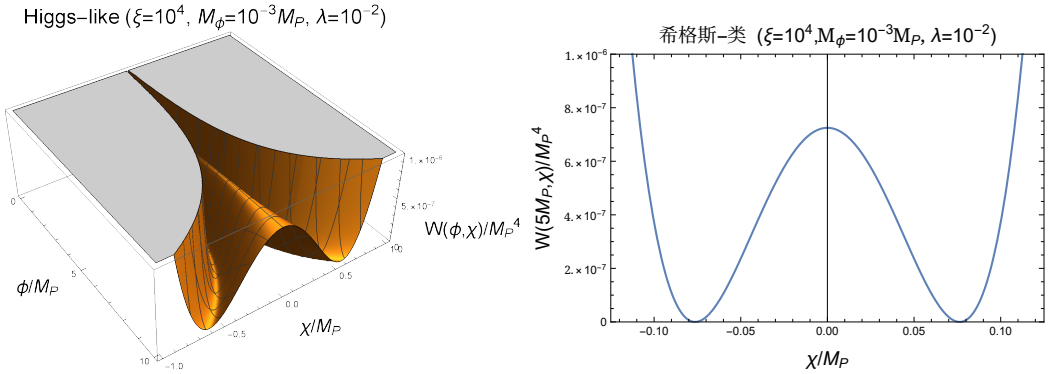

图1。（左）类希格斯参数下的势的形状（$\xi = 10^4$， $M_\phi = 10^{-3} M_{\rm P}$， $\lambda = 10^{-2}$）。（右）取 $\phi = 5M_{\rm P}$ 时势的截面形状。

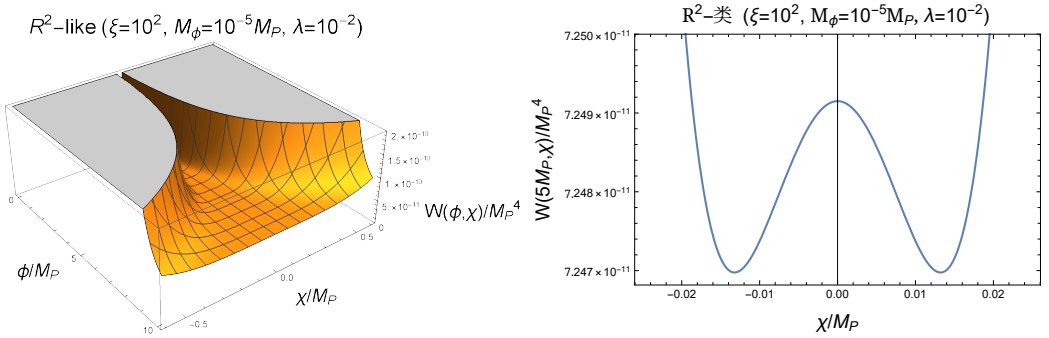

图2。（左） R^2-类参数下的势的形状（$\xi = 10^2$， $M_\phi = 10^{-5} M_{\rm P}$， $\lambda = 10^{-2}$）。（右）取 $\phi = 5M_{\rm P}$ 时势的截面形状。我们放大了纵轴，以清楚地观察到谷的存在。

随后沿着势谷中的一条特定轨迹演化；见图 1 和图 2。我们可以通过求解以下方程，找到 χ 在谷底处的值

$$\frac{\partial W}{\partial \chi} = 0 \tag{2.20}$$

关于 ϕ 的 χ。当 $\left|\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2}\right| \ll H_{\rm inf}^2 = \frac{W}{3M_{\rm P}^2} \ll e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\rm P}}} \frac{\partial^2 W}{\partial \chi^2}$ 且 $\frac{\partial^2 W}{\partial \chi^2} > 0$ 沿着谷时，这一做法是合理的，其中指数因子来自 χ 的非正则归一化动能项。我们已确认，对于所研究的参数空间$\xi \gtrsim 10$，这一条件均能稳妥满足。

在希格斯-R^2 暴胀中，沿着这条谷，$\chi_{\rm v,\ 0}$ 可以表示为$\phi(>0)$的函数：

$$\chi_{\rm v,0} = \pm M_\xi \sqrt{\frac{3M_\phi^2 M_{\rm P}^2 \left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\rm P}}} - 1\right)}{\lambda M_\xi^4 + 3M_\phi^2 M_{\rm P}^2}} \tag{2.21}$$

将$\chi = \chi_{\rm v,\ 0}(\phi)$代入即可得到有效单场势：

$$W_{\rm eff}(\phi) = \frac{3\lambda M_\phi^2 M_{\rm P}^2}{4\left(\lambda + 3\frac{M_\phi^2 M_{\rm P}^2}{M_\xi^4}\right)}\left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\rm P}}}\right)^2 . \tag{2.22}$$

事实上，这是众所周知的 Starobinsky 型势；当质量参数改写为 $\phi \to \infty$时，该势呈指数平坦。

$$\widetilde{M}_\phi^2 := \frac{M_\phi^2}{1 + 3\frac{M_\phi^2 M_{\rm P}^2}{\lambda M_\xi^4}}, \tag{2.23}$$

因此，有效单场势可改写为

$$W_{\rm eff}(\phi) = \frac{3M_{\rm P}^2 \widetilde{M}_\phi^2}{4}\left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\rm P}}}\right)^2 . \tag{2.24}$$

我们注意到，将谷值（2.21）代入 χ 的动能项后，会在大 $\phi \gg M_{\rm P}$时产生额外的动能项 $-\frac{M_\phi^2}{4\lambda M_\xi^2}(\partial\phi)^2$。在接下来的数值分析中，这一项可以忽略，因为对于我们所选取的、能拟合观测到的标量功率谱振幅值的参数，其系数非常小。

暴胀期间产生的标量功率谱通常参数化如下：

$$\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(k) = A_s\left(\frac{k}{k_*}\right)^{n_s - 1} \tag{2.25}$$

其中，A_s 为标量振幅，n_s 为谱指数，k_* 为枢轴尺度。类似地，张量功率谱以振幅 A_t 参数化，张量标量比定义为 $r \equiv A_t/A_s$。根据普朗克+BICEP/Keck 2018年的结果，我们有$A_s \simeq 2.1 \times 10^{-9}$ 和 $r < 0.035$，其中 $k_* = 0.05\ \mathrm{Mpc}^{-1}$ [41, 42]。尽管 n_s 的允许范围取决于 r，但为了后续绘图，我们采用参考文献 [42] 给出的 1σ 界限中的 $0.958 < n_s < 0.975$。

根据这个有效势，慢滚参数定义为

$$\epsilon = \frac{M_{\rm P}^2}{2}\left(\frac{W'_{\rm eff}(\phi)}{W_{\rm eff}(\phi)}\right)^2, \qquad \eta = M_{\rm P}^2\frac{W''_{\rm eff}(\phi)}{W_{\rm eff}(\phi)}, \tag{2.26}$$

并且，宇宙学可观测量，例如标量谱指数 n_s、张量标量比 r 以及前文定义的标量功率谱振幅 A_s，可计算为

$$n_s = 1 - 6\epsilon + 2\eta|_{\phi=\phi_*}, \qquad r = 16\epsilon|_{\phi=\phi_*}, \qquad A_s = \left.\frac{W_{\rm eff}}{24\pi^2\epsilon M_{\rm P}^4}\right|_{\phi=\phi_*}, \tag{2.27}$$

取对应枢轴尺度的特定场值 ϕ_*。在本文中，为便于说明，e折叠数固定为 60。

这也体现了希格斯R^2 暴胀的独特特征。当我们设定 $m = 0$，使有效单场势如式（2.24）所示时，对 n_s 和 r

不依赖于势的整体系数 $\widetilde{M}_\phi^2 M_{\rm P}^2$，因为它们在慢滚参数的定义中相互抵消，因此 M_ϕ、 ξ 和 λ 的整个参数空间都预测相同的 n_s 和 r 值。

预测结果确实会受到高维算符的影响。我们将考察预测结果对 n_s 和 r 的敏感程度，以及这种敏感性如何取决于高维算符是否存在；这是下一节的主要议题。

3 高维算符

在有效场论框架中，高维算符必然受到截断尺度 Λ的抑制，因此在低能和场值较小时无关紧要。然而，在暴胀期间，许多暴胀模型都具有高能量和较大的场值，因此我们必须关注模型对这类无关算符的敏感性。为初步考察这些修正的影响，我们将研究希格斯-R^2 模型中特定形式的六维项。在我们的模型中， R 和 χ对应四种可能的六维算符：[8]

$$\chi^6, \qquad \chi^4 R, \qquad \chi^2 R^2, \qquad R^3. \tag{3.1}$$

然而，在有效场论展开中， Λ 应取何值并不明确。有三种看似合理的选择：取 $\Lambda = M_{\rm P}$，即普朗克质量；取 $\Lambda = M_\phi$，即暴胀子质量；或取 $\Lambda = M_\xi$，即非最小尺度。

将 $\Lambda = M_{\rm P}$ 设定为截断尺度的第一种可能性，可以从该尺度由理论的幺正性所确定这一角度来论证。在这种情况下，正如我们将看到的，只有 χ^6 算符会在系数为 $\mathcal{O}(1)$ 时给出不同的暴胀预测，而加入其他 3 项几乎不会改变暴胀动力学和预测。事实上，已有研究表明，具有两个层级尺度 $M_\phi \lesssim M_\xi \ll M_{\rm P}$ 的系统在达到 $M_{\rm P}$ [16, 35]之前都可以保持微扰。另一方面，由于 $M_\phi \to 0$ 不会增强作用量中的任何对称性，从有效场论的角度出发，采用最低质量尺度 M_ϕ 或 M_ξ 作为截断尺度更为合理，如下文第二种和第三种可能性所示。

在纯 R^2 暴胀情形下，许多研究高维算符的工作都采用了设定 $\Lambda = M_\phi$ 的第二种可能性。在这种情况下，只要 $c_3 > \mathcal{O}(10^{-3})$， R^2 暴胀对在 $f(R)$ 中加入 $\frac{c_3}{(3M_\phi^2)_2} R^3$ 就很敏感；有时也会用这一点来说明，在存在任意高阶修正[28–30]时， R^2 暴胀的敏感性。上述事实（即微扰性可维持至 $M_{\rm P}$）从这个角度可以改述如下：如果我们将耦合 α 设为远大于 1 的数值 $\alpha \gg 1$ （即 $M_\phi \ll M_{\rm P}$），并将 $f(R)$ 中项 $\frac{c_n}{M_\phi^{2n-2}} R^n$ 的所有耦合 c_n 设为零（或设为远小于 1 的数值 $c_n \ll 1$）

[8] 在 4维下，可能存在 $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ 和 $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ 项。特别是，Gauss-Bonnet 项 $R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ 的组合是一个全导数，不会引发动 力学；也就是说，在微扰层次上不会影响运动方程。在 6维下， χ 标量场可以与 Gauss-Bonnet 项发生非最小耦合。虽然这些项不会增加新的标量自由度，但会影响弗里德曼方程，并可能改变可观测量 [43–53]。

人为地设定，那么 R^2 暴胀的截断尺度也会变为 $M_{\rm P}$ [54, 55] ，因为具有小质量的标量子 M_ϕ 会成为该理论中的一个动力学自由度，从而将幺正性问题的出现推迟至 $M_{\rm P}$。

正如我们将看到的，设置 $\Lambda = M_\xi$ 的第三种可能性会改变暴胀预测：当非最小耦合项（如 $\chi^4 R$ 和 $\chi^2 R^2$ ）的耦合常数变为数量级为 1 时，便会如此。再次强调，如果我们将耦合 α 设为远大于 1 的数（即 $M_\phi \ll M_{\rm P}$），并手动将所有高维耦合设为零（或远小于 1），幺正性便会恢复至 $M_{\rm P}$ 。

为清楚地观察这些现象，我们将六维算符及其无量纲系数 β_1、 β_2和 β_3 参数化如下：

$$f(R,\chi) = \left(1 + \frac{\chi^2}{M_\xi^2} + \beta_3 \frac{\chi^4}{M_\xi^4} + \cdots\right) R + \left(\frac{1}{6} + \beta_2 \frac{\chi^2}{M_\xi^2} + \cdots\right) \frac{R^2}{M_\phi^2} + \left(\beta_1 + \cdots\right) \frac{R^3}{M_\phi^4} + \cdots , \tag{3.2}$$

其中省略号表示八维项及更高维项。对于乔丹框架希格斯势，我们设定 $\Lambda = M_{\rm P}$:

$$U(\chi) = \frac{\lambda}{4}\chi^4 + \gamma \frac{\chi^6}{M_{\rm P}^2}. \tag{3.3}$$

为简单起见，我们将逐一开启耦合 β_1、 β_2、 β_3和 γ，考察为得到 $A_s \simeq 2.1 \times 10^{-9}$ 所需的 M_ϕ和 ξ $(= M_{\rm P}^2/M_\xi^2)$ 取值如何变化，以及 n_s 和 r 的预测会如何相应改变。对于每种情况，我们都会展示势形在 R^2-类参数和类希格斯参数下如何变化，以及 n_s 和 r 的预测如何改变。

3.1 χ^6项

首先，我们考虑有效势中非零 χ^6 项，并令所有其他高维算符均为零（即 γ，$\beta_{i=1,\ 2,\ 3} = 0$）。加入 χ^6 项后，有效势的谷轨迹将偏离式（2.21）所示的轨迹，变为

$$\chi_{{\rm v},\gamma} \simeq \chi_{{\rm v},0} - \frac{9\sqrt{3}\gamma M_\phi^3 M_{\rm P}^3 \xi^{3/2}}{(M_{\rm P}^2\lambda + 3M_\phi^2\xi^2)^{5/2}} \left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\rm P}}} - 1\right)^{3/2} + \mathcal{O}(\gamma^2) \tag{3.4}$$

此处我们取较小的 γ 极限。此外，有效单场势也发生了改变。由于其完整表达式较为冗长，这里不予列出，而是在图3中展示类希格斯区域（$M_\phi = 10^{-3} M_{\rm P}$，$\xi = 10^4$）和 R^2类区域（$M_\phi = 10^{-5} M_{\rm P}$，$\xi = 10^2$）下有效势的形状，并改变 λ 和 γ 以作示例。有趣的是，在 $\phi \to \infty$ 极限下，势会向较大值过渡，因为

$$V(\phi) \xrightarrow{\phi\to\infty} \frac{3}{4} M_\phi^2 M_{\rm P}^2 > \frac{3}{4} M_\phi^2 M_{\rm P}^2 \left(1 + 3\frac{\xi^2}{\lambda}\left(\frac{M_\phi}{M_{\rm P}}\right)^2\right)^{-1} . \tag{3.5}$$

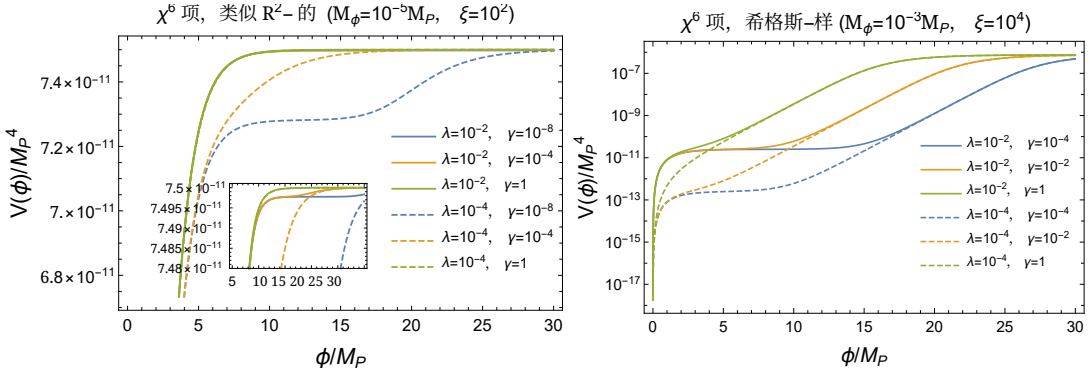

图3。在存在 χ^6 项时，对于不同的 γ 和 $\lambda = \left(10^{-2},\ 10^{-4}\right)$，$R^2$型（$M_\phi = 10^{-5} M_{\rm P}$，$\xi = 10^2$）和希格斯型（$M_\phi = 10^{-3} M_{\rm P}$，$\xi = 10^4$）的势形变化。

因此，在 $\phi \to \infty$ 极限下，势仍具有平移对称性，且不会超过普朗克尺度。然而，这无法成功解释当前的观测，因为对于我们扫描的参数，暴胀期间对应于 60 e个 e-fold 的场值低于 $\phi \to \infty$处的平台。

在图4中，我们展示了拟合 $A_s \simeq 2.1 \times 10^{-9}$ 的参数集在（M_ϕ，ξ）平面上的分布，不同颜色表示 n_s 和 r 的取值，并假设枢轴尺度处有 60 e个 e 折。由图可见，所谓的希格斯型区域（$\xi^2 \gg \lambda \frac{M_P^2}{M_\phi^2}$）对加入普朗克尺度抑制的高维算符更为敏感 χ^6。在四种可能的六维算符中，我们发现，只有这个 χ^6 项即使在将普朗克尺度设为截断尺度时也高度敏感。还可以发现，纯希格斯R^2 模型的原始预言在 $\gamma \simeq 10^{-3}$ 时开始偏离 $\lambda = 10^{-2}$，而在 $\gamma \simeq 10^{-6}$ 时则偏离$\lambda = 10^{-4}$。尽管我们没有考虑高维算符的任何组合，但 λ 越小，预言对高维算符是否存在的依赖就越敏感。

人们可能会预期，相较于标准希格斯暴胀模型，在存在 χ^6 项时，希格斯-R^2 暴胀的表现会更好，因为爱因斯坦框架中的希格斯场值较小$\sim M_{\rm P}/\sqrt{\xi}$，而非超普朗克值。然而，重要的是能量密度，而不是场值本身。事实上，有效势中来自 $\lambda\chi^4$ 项的贡献为 $\sim (\lambda/\xi^2)$ $M_{\rm P}^4$，这与类希格斯情形下暴胀期间的能量密度相当。因此，即使在没有 R^2 项时，希格斯场值小于希格斯-R^2 暴胀中的场值，$\gamma\chi^6/M_{\rm P}^2$ 只要有 $\gamma \sim 1$ 就足以改变宇宙学可观测量。

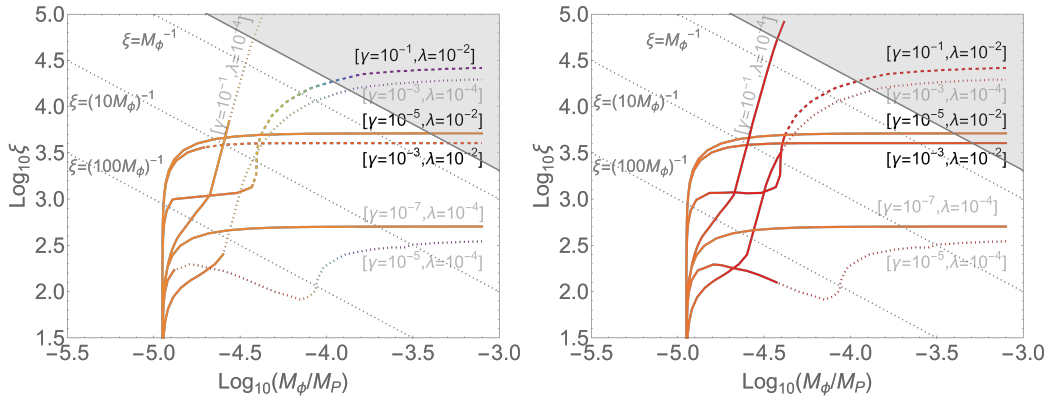

图4。存在 χ^6 项时，宇宙学可观测量 n_s （左）和 r （右）的变化。 $\lambda = 10^{-2}$ （10^{-4}）的情形以彩色实线表示允许区域，以彩色虚线（点线）表示排除区域。灰色点线表示 ξ 的取值。灰色区域被幺正性截断所禁止。

3.2 R^3项

接下来，我们将把 R^3 项与 β_1 作为微扰加入。在这种情况下，沿谷的轨迹， χ 的值为

$$\chi_{\mathrm{v},\beta_1} \simeq \chi_{\mathrm{v},0} - \frac{27\sqrt{3}}{2}\beta_1 M_\phi M_{\mathrm{P}}^5 \lambda^2 \sqrt{\frac{\left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\mathrm{P}}}}-1\right)^3 \xi}{(M_{\mathrm{P}}^2\lambda + 3M_\phi^2\xi^2)^5}} + \mathcal{O}(\beta_1^2) \tag{3.6}$$

在小 β_1 极限下。当 $\beta_1 \to 0$ 和 $\xi \to 0$ 时，实现纯斯塔罗宾斯基暴胀。

正如我们所讨论的，众所周知，当该高维算符的截断尺度取为 $\Lambda \sim M_\phi$ 时，纯 R^2 暴胀对加入 R^3 项十分敏感；而普朗克抑制算符对其影响则不大。

这是因为，由于存在 R^3 项（更一般地说，任意 $n > 2$ 次幂），势在大场极限下会降低并失去渐近平坦性，如图 5 所示。对于较大的 β_1，若要支持 60 e 个 e 折，暴胀子就应从局部极大值附近起始，且场值必须经过精细调节（关于这种情况的积极用途，另见第 4 节末尾的评论）。这基本上就是一般小场暴胀模型中的情形：初始场值必须非常接近原点，才能在暴胀期间支持足够多的 e 个 e 折 [56, 57]。更定量地说，如图 6 所示，当 (n_s, r) 时，暴胀预测开始发生变化；这一点在许多文献中早已为人所知 $\beta_1 \geq \mathcal{O}(10^{-5})$。此外，我们注意到，在这种情形以及接下来的另外两种情形中， [28, 29]的预测始终会降低。因此，目前与观测的一致性主要来自 r 的预测。 n_s

另一方面，在非最小耦合较大的情况下，对于满足当前测得的标量功率谱振幅值 $A_s \simeq 2.1 \times 10^{-9}$ 的参数，我们发现，加入 R^3 项后，势形仍然稳定。然而，正如我们将要

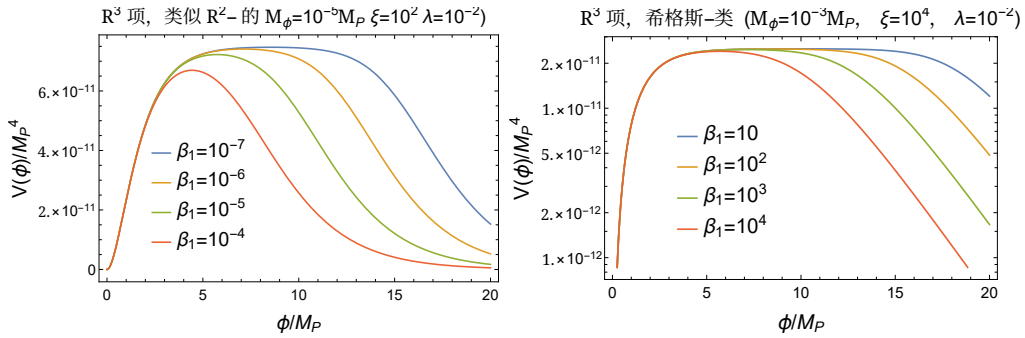

图 5。在存在 R^3 项时，各种 β_1下， R^2-like（$M_\phi = 10^{-5}M_{\rm P}$、 $\xi = 10^2$、 $\lambda = 10^{-2}$）和类希格斯（$M_\phi = 10^{-3}M_{\rm P}$、 $\xi = 10^4$、 $\lambda = 10^{-2}$）的势形变化。

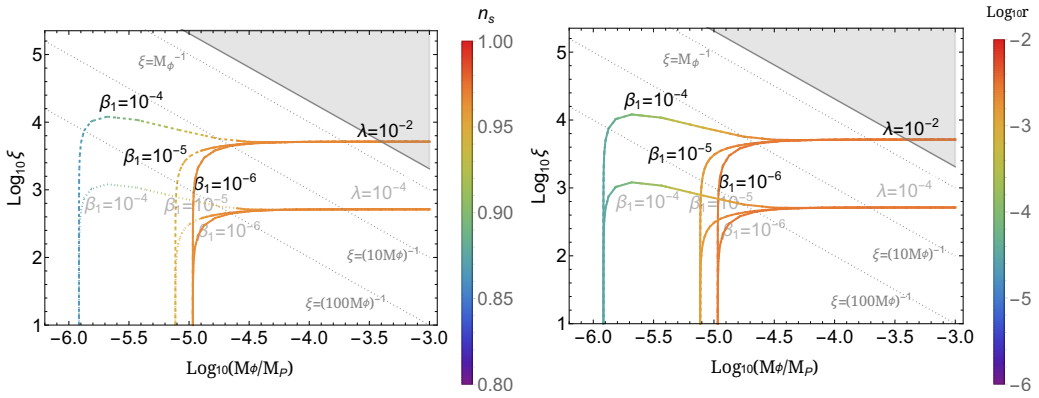

图6。存在 R^3 项时，宇宙学可观测量 n_s （左）和 r （右）的取值发生的形变。 $\lambda = 10^{-2}$ （10^{-4}）的情况以彩色实线表示允许区域，以彩色虚线（点线）表示排除区域。对于右侧面板中的 r 图，所有线条均表示允许区域。灰色点线表示 ξ的取值。灰色区域因幺正性截断而被排除。

看到的，一旦考虑其他形式的高维算符，类希格斯区域也会开始发生剧烈变化。[9]

请注意，采用我们的参数化后，对于相同的 β_1取值，可观测量 n_s 和r 仅取决于比值 ξ^2/λ。因此，假设 λ小两个数量级（对应图6中的点线），意味着ξ 小一个数量级即可得到合适的 n_s 和 r ，以及标量振幅；后者由图6中同色线条的垂直位移表示。对于下文讨论的另外两种 β_2 和 β_3 的情况，这种依赖关系同样成立。

我们也可以考虑在不含 R^2 的情况下，将 R^3 项纳入 $f(R,\ \chi)$，但这里不讨论这种情况，因为这偏离了我们在此论证的主旨。

[9]人们或许会疑惑，较大的 β_1 是否会导致较大的圈修正。事实证明，在爱因斯坦框架中，所有自耦合以及 ϕ 与 χ 之间的耦合都受到抑制，因此我们预计，涉及较大 β_1的 R^3 项不会产生较大的圈修正。对于下文讨论的另外两项 χ^2R^2 和 χ^4R，分别涉及 β_2 和 β_3，也可以得出相同的结论。

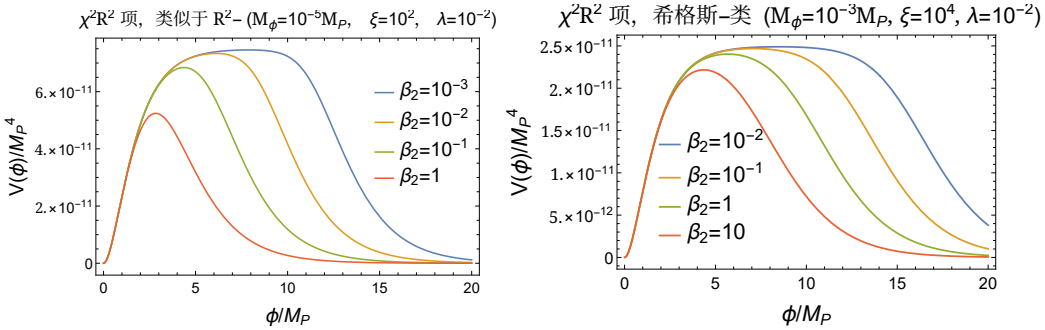

图 7。在存在 χ^2R^2 项时，不同 β_2下， R^2类（$M_\phi = 10^{-5}M_{\rm P}$, $\xi = 10^2$, $\lambda = 10^{-2}$）和类希格斯（$M_\phi = 10^{-3}M_{\rm P}$, $\xi = 10^4$, $\lambda = 10^{-2}$）的势形变化。

尽管如此，我们仍在附录 C中讨论这种情况。

3.3 χ^2R^2 和 χ^4R 项

势的形变及宇宙学可观测量如图所示 7 和图8 分别对应 χ^2R^2 项，而图 9 和图10 分别对应 χ^4R 项。

对于 χ^2R^2 情形， R^2类和类希格斯区域均在 $\beta_2 \gtrsim \mathcal{O}(10^{-4})$ 时开始偏离。另一方面，对于 χ^4R 情形，类希格斯区域首先在 $\beta_3 \gtrsim\mathcal{O}(10^{-4})$ 时开始发生改变，而 R^2类区域则相对稳定。如上所述，开始改变预测的 β_2和 β_3 值不依赖于 λ。

对于这些情形，在较小的 β_2和 β_3 极限下，沿谷底轨迹的 χ 值可写为:

$$\chi_{{\rm v},\beta_2} \simeq \chi_{{\rm v},0} + \beta_2 \frac{3\sqrt{3}M_\phi M_{\rm P}^3\lambda\sqrt{\xi}(M_{\rm P}^2\lambda - 6M_\phi^2\xi^2)}{2(M_{\rm P}^2\lambda + 3M_\phi^2\xi^2)^{5/2}}\left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\rm P}}} - 1\right)^{3/2} + \mathcal{O}(\beta_2^2), \tag{3.7}$$

$$\chi_{{\rm v},\beta_3} \simeq \chi_{{\rm v},0} + \beta_3 \frac{3\sqrt{3}M_\phi^3 M_{\rm P}\xi^{5/2}(2M_{\rm P}^2\lambda - 3M_\phi^2\xi^2)}{2(M_{\rm P}^2\lambda + 3M_\phi^2\xi^2)^{5/2}}\left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\rm P}}} - 1\right)^{3/2} + \mathcal{O}(\beta_3^2), \tag{3.8}$$

分别如下。

请注意，根据我们的参数化，可以比较选择截断尺度的不同约定。例如，若纯粹选择 M_ϕ 作为截断尺度，则参数化变为 $\frac{\beta_2}{M_\phi^4} := \frac{\beta_2}{M_\xi^2 M_\phi^2}$ 和 $\frac{\beta_3}{M_\phi^4} := \frac{\beta_3}{M_\xi^4}$。因此，对于较小的 $\xi \sim \mathcal{O}(1)$ 情形，$\widetilde{\beta}_2$系数应进一步受到抑制，程度为 $\widetilde{\beta}_2 = \frac{M_\phi^2}{M_\xi^2}\beta_2 \sim \frac{M_\phi^2}{M_{\rm P}^2}\beta_2 \sim 10^{-10}\beta_2$（对于 R^2 类情形），这意味着仅含 M_ϕ 的有效场论展开并不自然（否则我们就必须有 $\xi = \frac{M_{\rm P}^2}{M_\xi^2} \sim \frac{M_{\rm P}}{M_\phi}$，这与希格斯-$R^2$ 暴胀中的重整化群方程预期一致 [21]）。另一方面，若选择 $M_{\rm P}$ 作为该理论的截断尺度， $\frac{\beta_2}{M_{\rm P}^4} := \frac{\beta_2}{M_\xi^2 M_\phi^2}$，因此 $\widetilde{\widetilde{\beta}}_2 = \frac{M_{\rm P}^4}{M_\xi^2 M_\phi^2}\beta_2$，则需要一个乘有巨大因子 $\frac{M_{\rm P}^4}{M_\xi^2 M_\phi^2}$ 的耦合才能影响物理结果，这再次说明参数化（3.2）是合适的。

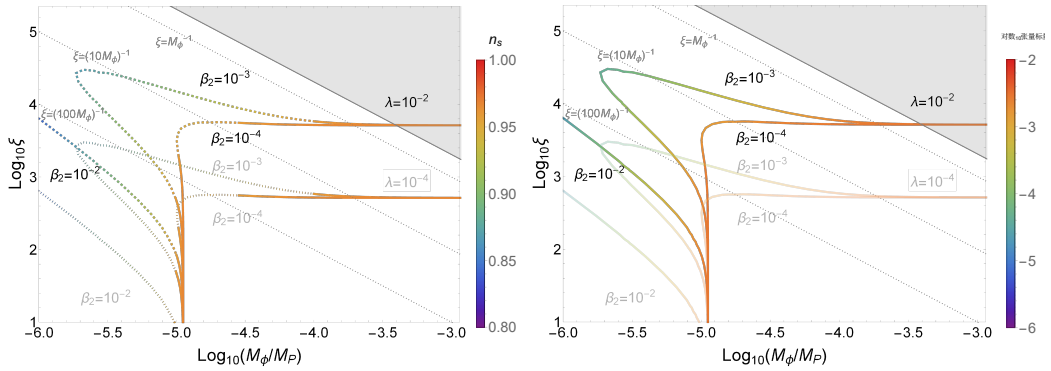

图 8。存在 $R^2\chi^2$ 项时，宇宙学可观测量 n_s （左）和 r （右）的变化。 $\lambda = 10^{-2}$ （10^{-4}）情形中，彩色实线表示允许区域，彩色虚线（点线）表示排除区域。对于右侧面板中的 r 图，所有线条均表示允许区域。灰色直点线表示 ξ 的取值。灰色区域因幺正性截断而被禁止。

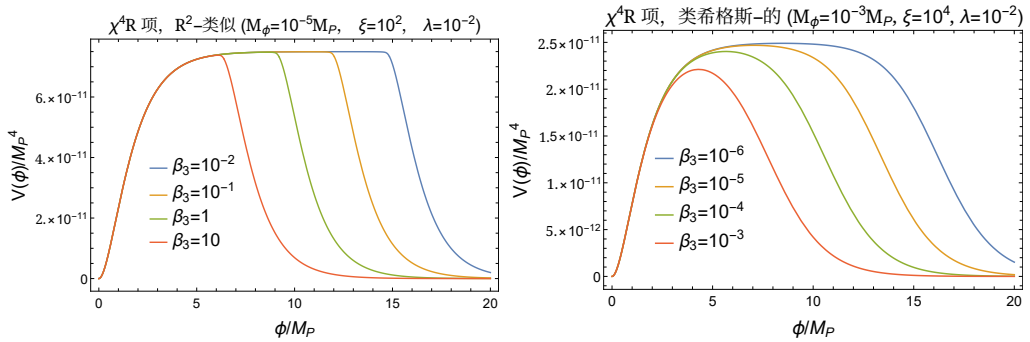

图 9。存在 $\chi^4 R$ 项时，对于不同的 β_3，类 R^2（$M_\phi = 10^{-5} M_{\rm P}$、 $\xi = 10^2$、 $\lambda = 10^{-2}$）和类希格斯（$M_\phi = 10^{-3} M_{\rm P}$、 $\xi = 10^4$、 $\lambda = 10^{-2}$）的势形变化。

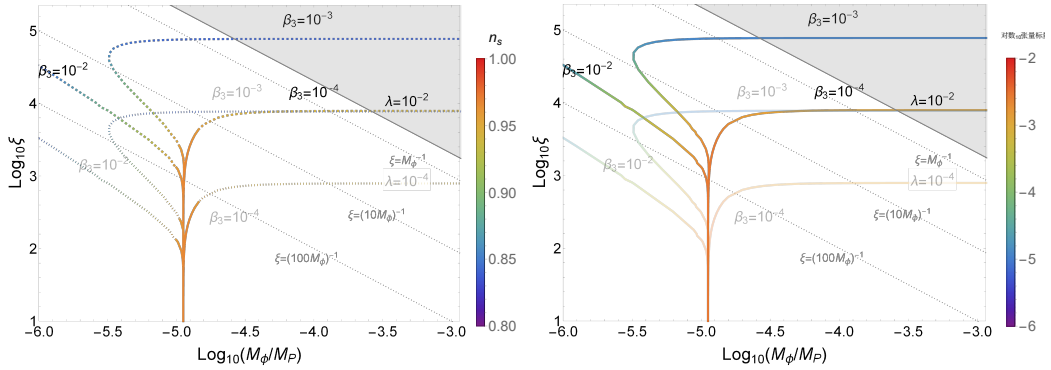

图 10。存在 $R\chi^4$ 项时，宇宙学可观测量 n_s （左）和 r （右）的变化。 $\lambda = 10^{-2}$ （10^{-4}）情形中，彩色实线表示允许区域，彩色虚线（点线）表示排除区域。对于右侧面板中的 r 图，所有线条均表示允许区域。灰色直点线表示 ξ 的取值。灰色区域因幺正性截断而被禁止。

4 结论与讨论

在本文中，我们研究了 $f(\chi, R)$ 暴胀理论的紫外敏感性。首先考虑所有可能的四维算符后，该理论与希格斯-R^2 暴胀模型相同（除质量项外），这使标准希格斯暴胀的幺正性截断 $\Lambda \sim M_{\rm P}/\xi$ 在原点处提升至普朗克尺度 [16–21]。因此，人们或许会认为该模型对普朗克抑制算符不敏感。不过，在考虑高维算符时，有时会将标量子质量 M_ϕ 视为有效场论展开参数。

作为第一步，我们逐项加入所有可能的六维算符，以考察宇宙学可观测量对这些修正的敏感程度。为了考虑较大的非最小耦合降低有效截断尺度所起的作用，我们适当地乘上因子 ξ 和 M_ϕ，其无量纲系数分别为 γ 和$\beta_{1,\ 2,\ 3}$。

我们发现，若将 $M_{\rm P}$ 作为展开参数，则高维算符需要具有异常巨大的耦合，才能改变原始希格斯-斯塔罗宾斯基模型的宇宙学可观测量；但$\chi^6/M_{\rm P}^2$ 会影响物理过程。另一方面，若像式（ M_ϕ 和 M_ξ 中那样恰当地考虑这些因素（3.2），耦合 $\gtrsim 10^{-3}$便开始影响预测结果。[10]

我们已经看到，略微加入 β_1、 β_2 和 β_3，会使势在大场区域的渐近行为变为径向逃逸。这种行为或可用于支持永恒暴胀，即拓扑暴胀 [58]，，弦理论中也提出了这种暴胀 [59]。

致谢

我们感谢 Yohei Ema、Koichi Hamaguchi、Kunio Kaneta、Taichiro Kugo、Shinya Matsuzaki、Seong Chan Park 和 Masatoshi Yamada 富有启发性的讨论。在本研究开展期间，SML 感谢 KIAS 和 CERN 的盛情接待。SML 的工作部分得到了现代汽车郑梦九基金会奖学金的支持，并由韩国-CERN理论物理合作项目和青年高能理论学家培养计划（NRF-2012K1A3A2A0105178151）资助。K.O. 的工作部分得到了日本学术振兴会科研费（项目编号 19H01899 和 21H01107）的支持。T.T. 的工作部分得到了日本学术振兴会科研费（项目编号 19K03874）的支持。TM 的工作由德国研究联合会（DFG）通过项目 396021762——TRR 257：希格斯粒子发现后的粒子物理唯象学，以及德国卓越战略 EXC 2181/1 - 390900948（海德堡 STRUCTURES 卓越集群）资助。

附录

A 共形模

在本附录中，我们在 $n = d+1$ 时空维数下进行讨论。我们回顾共形模在度规形式的纯爱因斯坦引力中如何获得符号错误的动能项。

[10]更准确地说，对于 χ^6 项， $\gamma/\lambda \gtrsim 10^{-3}$ 开始影响结果。

我们从一个 Jordan框架作用量开始

$$S=\int \mathrm{d}^n x\sqrt{-g}\frac{M_{\mathrm{P}}^2}{2}\Phi R, \tag{A.1}$$

其中， $\Phi=1$ 对应纯爱因斯坦引力。通过重新定义度规

$$g_{\mu\nu}=e^{2\omega}\mathring{g}_{\mu\nu}, \tag{A.2}$$

我们得到

$$R=e^{-2\omega}\left(\mathring{R}-2(n-1)\,\mathring{\Box}\omega-(n-2)\,(n-1)\,\mathring{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega\right),\qquad \sqrt{-g}=e^{4\omega}\sqrt{-\mathring{g}}, \tag{A.3}$$

其中 $\mathring{\Box}:=\mathring{g}^{\mu\nu}\mathring{\nabla}_\mu\mathring{\nabla}_\nu$。作用量（A.1）变为

$$S=\int \mathrm{d}^n x\sqrt{-\mathring{g}}\frac{M_{\mathrm{P}}^2}{2}e^{2\omega}\Phi\left(\mathring{R}-2\,(n-1)\,\mathring{\Box}\omega-(n-2)\,(n-1)\,\mathring{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega\right). \tag{A.4}$$

在希格斯-斯塔罗宾斯基暴胀中，我们取 $e^{2\omega}\Phi=1$ 以切换到爱因斯坦框架，并且 $\mathring{}\Box\omega$ 项变成了一个无关紧要的表面项。因此， ω 的动能项符号正确。

另一方面，在纯爱因斯坦引力 $\Phi=1$中，我们没有任何东西可以抵消 $\mathring{}$共形因子，而 $\Box\omega$ 项在分部积分后会对动能项产生额外贡献：

$$S=\int \mathrm{d}^n x\sqrt{-\mathring{g}}\frac{M_{\mathrm{P}}^2}{2}e^{2\omega}\left(\mathring{R}-(n-6)\,(n-1)\,\mathring{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega\right). \tag{A.5}$$

显然，当时空维数为 $1<n<6$时， ω 的动能项符号错误。

更准确地说，从具有 $\Phi=1$的纯爱因斯坦引力出发（它已写成爱因斯坦框架形式），我们可以将度规$g_{\mu\nu}$ 分解为共形模 ω 和同一爱因斯坦框架 [32]中的幺模部分 $\widehat{g}_{\mu\nu}$：

$$g_{\mu\nu}=e^{2\omega}\widehat{g}_{\mu\nu}, \tag{A.6}$$

其中 行列式$_{\mu,\ \nu}\,\widehat{g}_{\mu\nu}=-1$。由式（A.5）可知，共形模的动能项符号确实错误：

$$S=\int \mathrm{d}^n x\frac{M_{\mathrm{P}}^2}{2}e^{2\omega}\left(\widehat{R}-(n-6)\,(n-1)\,\mathring{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega\right). \tag{A.7}$$

B 质量项的作用

存在质量项时，即使不考虑高维算符，势的形状也会发生变形。

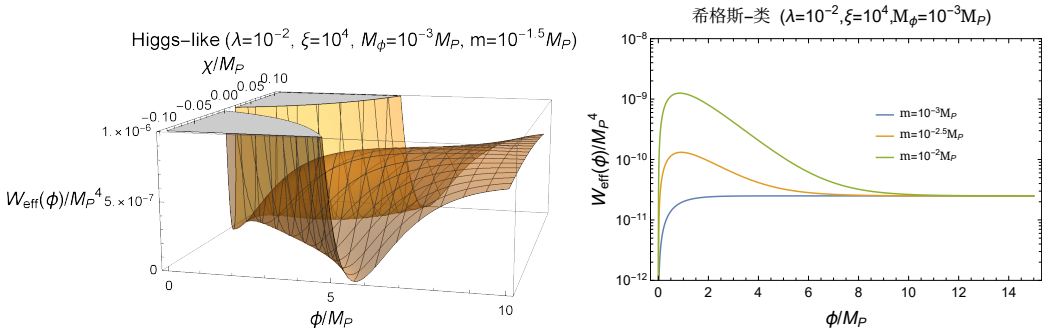

图 11。存在较大的质量项和类希格斯参数时，完整势（左）和有效势（右）的形状图。

按照相同步骤，利用该势求得谷方程

$$U(\chi) = \frac{1}{2}m^2\chi^2 + \frac{\lambda}{4}\chi^4, \tag{B.1}$$

我们有

$$\chi_{\rm v}(\phi) = \begin{cases} \pm M_\xi \sqrt{\dfrac{3M_\phi^2 M_{\rm P}^2\left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\rm P}}}-1\right) - \frac{m^2}{M_\xi^2}}{\lambda M_\xi^4 + 3M_\phi^2 M_{\rm P}^2}} & (\phi \geq \phi_{\rm crit}) \\ 0 & (\phi < \phi_{\rm crit}) \end{cases} \tag{B.2}$$

with

$$\phi_{\rm crit} \equiv \sqrt{\frac{3}{2}} M_P \log\left(1 + \frac{m^2 M_\xi^4}{3M_\phi^2 M_{\rm P}^4}\right). \tag{B.3}$$

请注意，对于 $m \neq 0$，当 ϕ 较小时，只存在一个谷。

由此表达式可得，有效单场势为

$$W_{\rm eff}(\phi) \tag{B.4}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{M_{\rm P}^4 e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\rm P}}}}{4\left(\lambda + 3\frac{M_\phi^2 M_{\rm P}^2}{M_\xi^4}\right)}\left[3\lambda\dfrac{M_\phi^2}{M_{\rm P}^2}\left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\rm P}}}-1\right)^2 + 6\dfrac{m^2 M_\phi^2}{M_\xi^2 M_{\rm P}^2}\left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\rm P}}}-1\right) - \dfrac{m^4}{M_{\rm P}^4}\right] & (\phi \geq \phi_{\rm crit}) \\ \dfrac{3}{4}M_{\rm P}^2 M_\phi^2\left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\phi}\right)^2 & (\phi < \phi_{\rm crit}) \end{cases} \tag{B.5}$$

因此，当 m 足够大，使得 $\phi_{\rm crit}$ 也变大，从而覆盖与暴胀相关的场值范围时，该模型便简化为纯斯塔罗宾斯基暴胀，标量场 χ 与之解耦。取 $\phi_* \sim 5M_{\rm P}$（对应于 CMB 枢轴尺度）和 $M_\phi \sim 10^{-5}M_{\rm P}$（以拟合 A_s），则要求 $m > \mathcal{O}(10^{-4})\, M_{\rm P}/M_\xi$。另一方面，当 m 非常小时，$\phi_{\rm crit} \simeq 0$ 也会如此，因此它对宇宙学可观测量无关紧要。

然而，对于 m 的某些中间取值，特别是在类希格斯区域，会出现这样一种情形：质量项带来的修正会产生一个凸起，其局部极大值位于

$$\phi_{\rm bump} \equiv \sqrt{\frac{3}{2}} M_{\rm P} \log\left(1 + \frac{m^2(3M_\phi^2 + m^2 M_\xi^2/M_{\rm P}^2)}{3M_\phi^2(m^2 - \lambda M_\xi^2)}\right). \tag{B.6}$$

如图11所示。因此，如果满足条件 $\phi_{\rm crit} < \phi_{\rm bump} < \phi_*$ ，这个隆起会彻底改变暴胀子的动力学，并可能影响宇宙学可观测量；但对整个参数空间进行详细分析超出了本文的讨论范围。对于类希格斯参数，该条件在 $m > \mathcal{O}\left(\sqrt{\lambda} M_\xi\right)$时成立。作为示例，我们在图11中展示了改变参数 m 时的完整多场势和有效单场势。

正文中，我们基本假设质量项足够小，因此不会出现这类歧义。

C 希格斯-R^3暴胀

作为一种直接推广，我们考虑每一项具有不同幂次的情形。作为一个具体示例，我们将考虑不含R^2 项的希格斯+$R + R^3$ 拉格朗日量。在本附录中，为简便起见，我们令 $M_{\rm P} \equiv 1$ 。

作为一个更一般的情形，我们首先考虑以下 $f(R,\ \chi)$ 和 $U(\chi)$:

$$f(R,\chi) = (1 + \xi\chi^m)\, R + \beta R^n, \qquad\qquad U(\chi) = \frac{\lambda}{4}\chi^\ell, \tag{C.1}$$

由此得到有效势

$$W = e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\rm P}}} \left[\frac{1}{2}\frac{\beta(n-1)}{(n\beta)^{\frac{n}{n-1}}}\left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\rm P}}} - 1 - \xi\chi^m\right)^{\frac{n}{n-1}} + \frac{\lambda}{4}\chi^\ell\right]. \tag{C.2}$$

因此，很容易看出， R^2 情形相当特殊。无论非最小耦合的形式如何， R^2 势都会给出平坦势（正如预期的那样，因为只有 R^2 项能够支持斯塔罗宾斯基暴胀）。另一方面，在大场极限下，含有 $n > 2$ 的高阶 R^n 并不会产生平坦势。这仅仅说明了一个众所周知的事实：带有 R^n $(n > 2)$ 项的 $f(R)$-引力理论不适合实现适用于成功暴胀的势。然而，当希格斯与里奇标量之间存在较大的非最小耦合时，情况便会改变。这里我们关注四维项中 $n = 3, m = 2, l = 4$ 的情形，并将分析非最小耦合需要多大，以及高维算符需要受到多大程度的抑制。

具体而言，势变为

$$W(\phi,\chi) = \frac{1}{\sqrt{3\beta}} e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\phi} \chi\left(\sqrt{3\beta}\lambda\chi^2 - \xi\left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\rm P}}} - 1 - \xi\chi^2\right)^{1/2}\right). \tag{C.3}$$

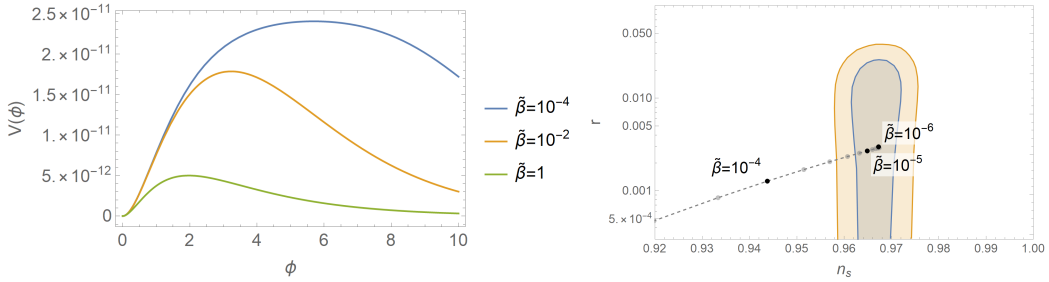

图12。（左）在不同的 $\tilde{\beta}$下，希格斯-R^3 模型的势形变化。（右）在存在 R^3 项而没有 R^2项时，宇宙学可观测量 n_s 和 r 的值发生的形变。

尽管其单场约化形式并不特别直观，但在小 β 极限下，它有一个简单的展开：

$$W_{\rm eff}(\phi) \simeq \frac{\lambda}{4\xi^2}\left(1-e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\phi}\right)+\beta\frac{\lambda^3}{2\xi^6}e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi}\left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi}-1\right)^3+\mathcal{O}(\beta^2) \tag{C.4}$$

For 要使正比于 β 的第二项在枢轴尺度处受到抑制，我们必须有 ve

$$\frac{(\text{second term})}{(\text{first term})}=2\beta\frac{\lambda^2}{\xi^4}\left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi}-1\right)\simeq\frac{8}{3}\frac{N_e\beta\lambda^2}{\xi^4}\ll 1 \tag{C.5}$$

其中，ϕ_* 是对应于枢轴尺度的场值，且 $N_e=60$；我们使用了 $N_e\simeq\frac{3}{4}e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi_*}\gg 1$。因此，我们得到 $\beta\ll\frac{1}{N_e}\left(\frac{\xi^2}{\lambda}\right)^2$。同样的步骤很容易推广到一般的 R^n 情形，并得到 $\beta\ll\frac{1}{N_e}\left(\frac{\xi^2}{\lambda}\right)^{n-1}$。我们注意到，根据标量振幅的观测，$\xi/\lambda^2$ 的值几乎是固定的。

更确切地说，我们重新参数化 $\beta=\widetilde{\beta}\left(\frac{\xi^2}{\lambda}\right)^2$，使得 n_s 和 r 仅依赖于

~ ~β。图12 展示了 n_s 和 r 图随 β变化的情况。数值计算发现，n_s 和 r 比上述粗略估算更为敏感，因此，为确保与观测相符，我们需要 $\tilde{\beta}\lesssim 4\times10^{-4}$。

参考文献

[1] D. S. Salopek, J. R. Bond, 和 J. M. Bardeen, “在暴胀中设计密度涨落谱”, Phys. Rev. D 40 (1989) 1753。[2] F. L. Bezrukov 和 M. Shaposhnikov, “作为暴胀子的标准模型希格斯玻色子”, 物理快报B 659 (2008) 703–706, arXiv:0710.3755 [hep-th]。[3] S. M. Lee、K.-y. Oda 和 S. C. Park, “希格斯暴胀中的自发轻子生成”, JHEP 03 (2021) 083, arXiv:2010.07563 [hep-ph]。[4] D. Y. Cheong、S. M.Lee 和 S. C. Park, “希格斯暴胀研究进展”, J. Korean Phys. Soc. 78 no. 10, (2021) 897–906, arXiv:2103.00177 [hep-ph]。[5] G. F. Giudice 和 H. M. Lee, “希格斯暴胀的幺正化”, 物理快报B 694 (2011) 294–300, arXiv:1010.1417 [hep-ph]。

[6] F. Bezrukov、A. Magnin、M. Shaposhnikov 和 S. Sibiryakov，“希格斯暴胀：一致性与推广”，JHEP 01 (2011) 016，arXiv:1008.5157 [hep-ph]。[7] Y. Ema、R. Jinno、K. Mukaida 和 K. Nakayama，“非最小耦合暴胀中的剧烈预热”，宇宙学与天体粒子物理杂志 02 (2017) 045，arXiv:1609.05209 [hep-ph]。[8] A. A. Starobinsky，“一种无奇点的新型各向同性宇宙学模型”，物理快报B 91 (1980) 99–102。[9] T. P. Sotiriou 和 V. Faraoni，“f(R) 引力理论”，Rev. Mod. Phys. 82 (2010) 451–497，arXiv:0805.1726 [gr-qc]。[10] A. De Felice 和 S. Tsujikawa，“f(R) 理论”，Living Rev. Rel. 13 (2010) 3，arXiv:1002.4928 [gr-qc]。[11] I. Antoniadis、A. Karam、A. Lykkas 和 K. Tamvakis，“含有R^2 项的模型中的帕拉蒂尼暴胀”，宇宙学与天体粒子物理杂志 11 (2018) 028，arXiv:1810.10418 [gr-qc]。[12] D. Y. Cheong、S. M. Lee 和 S. C. Park，“度规形式与帕拉蒂尼形式下非最小耦合模型的再加热”，宇宙学与天体粒子物理杂志 02 no. 02, (2022) 029，arXiv:2111.00825 [hep-ph]。[13] M. Cicoli 和 F. Quevedo，“弦模量暴胀：综述”，Class. Quant. Grav. 28 (2011) 204001，arXiv:1108.2659 [hep-th]。[14] A. Salvio 和 A. Mazumdar，“希格斯暴胀的经典与量子初始条件”，物理快报B 750 (2015) 194–200，arXiv:1506.07520 [hep-ph]。[15] A. Salvio，“在软化引力中解决标准模型问题”，Phys. Rev. D 94 no. 9, (2016) 096007，arXiv:1608.01194 [hep-ph]。[16] Y. Ema，“希格斯—标量子混合暴胀”，物理快报B770 (2017) 403–411，arXiv:1701.07665 [hep-ph]。[17] D. Gorbunov 和 A. Tokareva，“标量子救世主：消除希格斯暴胀和希格斯—膨胀子暴胀中的强耦合”，物理快报B788 (2019) 37–41，arXiv:1807.02392[hep-ph]。[18] M. He、A. A. Starobinsky 和 J. Yokoyama，“混合希格斯-R^2 模型中的暴胀”，宇宙学与天体粒子物理杂志 1805 (2018) 064，arXiv:1804.00409 [astro-ph.CO]。[19] M. He、R. Jinno、K. Kamada、S. C. Park、A. A. Starobinsky 和 J. Yokoyama，“关于混合希格斯-R^2 暴胀模型中的剧烈预热”，物理快报B791 (2019) 36–42，arXiv:1812.10099 [hep-ph]。[20] A. Gundhi 和 C. F. Steinwachs，“标量子—希格斯暴胀”，arXiv:1810.10546 [hep-th]。[21] Y. Ema，“希格斯暴胀中标量子的动力学涌现”，宇宙学与天体粒子物理杂志 1909 no. 09, (2019) 027，arXiv:1907.00993 [hep-ph]。[22] D. D. Canko、I. D. Gialamas 和 G. P. Kodaxis，“对斯塔罗宾斯基暴胀模型的简单 $F(\mathcal{R},\phi)$ 变形”，欧洲物理杂志C 80 no. 5, (2020) 458，arXiv:1901.06296[hep-th]。[23] D. Baumann 和 L. McAllister，《暴胀与弦理论》。剑桥数学物理专著。剑桥大学出版社，5，2015。arXiv:1404.2601 [hep-th]。[24] H. Kawai 和 K. Kawana，“作为经典共形性原点的多临界点原理及其推广”，PTEP 2022 no. 1, (2022) 013B11，arXiv:2107.10720[hep-th]。

[25] A. D. Linde, “混沌暴胀”，物理快报B 129 (1983) 177–181。[26] H. Ooguri and C. Vafa, “弦景观与沼泽地的几何”，核物理B 766 (2007) 21–33, arXiv:hep-th/0605264。[27] R. Jinno, M. Kubota, K.-y. Oda, and S. C. Park, “度规与帕拉蒂尼形式下的希格斯暴胀：高维算符所需的抑制”，宇宙学与天体粒子物理杂志 03 (2020) 063, arXiv:1904.05699 [hep-ph]。[28] Q.-G. Huang, “多项式 f(R) 暴胀模型”，宇宙学与天体粒子物理杂志 02 (2014) 035, arXiv:1309.3514[hep-th]。[29] D. Y. Cheong, H. M. Lee, and S. C. Park, “超越 Starobinsky 暴胀模型”，物理快报B 805 (2020) 135453, arXiv:2002.07981 [hep-ph]。[30] V. R. Ivanov, S. V. Ketov, E. O. Pozdeeva, and S. Y. Vernov, “Starobinsky 暴胀模型的解析延拓”，宇宙学与天体粒子物理杂志 03 no. 03, (2022) 058, arXiv:2111.09058 [gr-qc]。[31] G. W. Gibbons, S. W. Hawking, and M. J. Perry, “路径积分与引力作用量的不定性”，核物理B 138 (1978) 141–150。[32] G. ’t Hooft, “一类无需任何可调实参数的基本粒子模型”，基础物理学 41 (2011) 1829–1856, arXiv:1104.4543 [gr-qc]。[33] D. Y. Cheong, S. M. Lee, and S. C. Park, “希格斯-R^2 暴胀中的原初黑洞作为全部暗物质”，宇宙学与天体粒子物理杂志 01 (2021) 032, arXiv:1912.12032 [hep-ph]。[34] M. He, R. Jinno, K. Kamada, A. A. Starobinsky, and J. Yokoyama, “混合希格斯-R^2 模型中的快子预热现象”，宇宙学与天体粒子物理杂志 01 (2021) 066, arXiv:2007.10369[hep-ph]。[35] Y. Ema, K. Mukaida, and J. van de Vis, “希格斯-R^2暴胀的重整化群方程”，JHEP 02 (2021) 109, arXiv:2008.01096 [hep-ph]。[36] M. He, “混合希格斯-R^2 模型中的微扰再加热”，宇宙学与天体粒子物理杂志 05 (2021) 021, arXiv:2010.11717 [hep-ph]。[37] H. M. Lee and A. G. Menkara, “具有共形不变性的线性希格斯-西格玛模型的宇宙学”，JHEP 09 (2021) 018, arXiv:2104.10390 [hep-ph]。[38] S. M. Lee, T. Modak, K.-y. Oda, and T. Takahashi, “ R^2-希格斯双重态暴胀”，欧洲物理杂志C 82 no. 1, (2022) 18, arXiv:2108.02383 [hep-ph]。[39] S. Panda, A. A. Tinwala, and A. Vidyarthi, “非最小耦合标量-Starobinsky暴胀中的紫外幺正性破坏”，宇宙学与天体粒子物理杂志 01 (2023) 029, arXiv:2205.12836 [gr-qc]。[40] D. Y. Cheong, K. Kohri, and S. C. Park, “可能胜任的暴胀子：希格斯-R^2暴胀中快子不稳定性诱发的原初黑洞与二阶引力波”，arXiv:2205.14813 [hep-ph]。[41] 普朗克合作组, Y. Akrami et al., “普朗克2018年结果。X. 暴胀约束”，天文学与天体物理学 641 (2020) A10, arXiv:1807.06211 [astro-ph.CO]。[42] BICEP, 凯克合作组, P. A. R. Ade et al., “利用普朗克、威尔金森微波各向异性探测器和BICEP/Keck观测改进原初引力波约束：截至2018观测季”，物理评论快报 127 no. 15, (2021) 151301, arXiv:2110.00483[astro-ph.CO]。

[43] M. Satoh, S. Kanno, and J. Soda, “弦理论启发的暴胀宇宙学中原初引力波的圆偏振”, Phys. Rev. D 77 (2008) 023526, arXiv:0706.3585 [astro-ph]。[44] Z.-K. Guo and D. J. Schwarz, “与高斯-博内项耦合的暴胀子所产生的功率谱”, Phys. Rev. D 80 (2009) 063523, arXiv:0907.0427 [hep-th]。[45] P.-X. Jiang, J.-W. Hu, and Z.-K. Guo, “与高斯-博内项耦合的暴胀”, Phys. Rev. D 88 (2013) 123508, arXiv:1310.5579 [hep-th]。[46] S. Koh, B.-H. Lee, W. Lee, and G. Tumurtushaa, “与高斯-博内项耦合的慢滚暴胀观测约束”, Phys. Rev. D 90 no. 6, (2014) 063527, arXiv:1404.6096 [gr-qc]。[47] P. Kanti, R. Gannouji, and N. Dadhich, “高斯-博内暴胀”, Phys. Rev. D 92 no. 4, (2015) 041302, arXiv:1503.01579 [hep-th]。[48] C. van de Bruck, K. Dimopoulos, C. Longden, and C. Owen, “高斯-博内耦合的精质暴胀”, arXiv:1707.06839 [astro-ph.CO]。[49] S. Nojiri, S. D. Odintsov, and V. K. Oikonomou, “简述修正引力理论：暴胀、反弹与晚期演化”, Phys. Rept. 692 (2017) 1–104, arXiv:1705.11098 [gr-qc]。[50] S. D. Odintsov and V. K. Oikonomou, “标量-高斯-博内引力中的可行暴胀及基于观测指标的重建”, Phys. Rev. D 98 no. 4, (2018) 044039, arXiv:1808.05045 [gr-qc]。[51] S. Nojiri, S. D. Odintsov, V. K. Oikonomou, N. Chatzarakis, and T. Paul, “无鬼高斯-博内引力理论中的可行暴胀模型”, Eur. Phys. J. C 79 no. 7, (2019) 565, arXiv:1907.00403 [gr-qc]。[52] S. D. Odintsov, V. K. Oikonomou, and F. P. Fronimos, “GW170817背景下非最小耦合的爱因斯坦-高斯-博内暴胀唯象学”, Annals Phys. 420 (2020) 168250, arXiv:2007.02309 [gr-qc]。[53] S. Kawai and J. Kim, “高斯-博内修正单场暴胀产生的原初黑洞”, Phys. Rev. D 104 no. 8, (2021) 083545, arXiv:2108.01340 [astro-ph.CO]。[54] M. P. Hertzberg, “关于非最小耦合下的暴胀”, JHEP 11 (2010) 023, arXiv:1002.2995 [hep-ph]。[55] A. Kehagias, A. Moradinezhad Dizgah, and A. Riotto, “关于Starobinsky暴胀模型及其衍生模型的几点看法”, Phys. Rev. D 89 no. 4, (2014) 043527, arXiv:1312.1155[hep-th]。[56] D. S. Goldwirth and T. Piran, “暴胀的初始条件”, Physics Reports 214 no. 4, (1992) 223–292。[57] R. Brandenberger, “暴胀的初始条件——简要综述”, Int. J. Mod. Phys. D 26 no. 01, (2016) 1740002, arXiv:1601.01918 [hep-th]。[58] Y. Hamada, K.-y. Oda, and F. Takahashi, “拓扑希格斯暴胀：标准模型临界性的起源”, Phys. Rev. D 90 no. 9, (2014) 097301, arXiv:1408.5556 [hep-ph]。[59] Y. Hamada, H. Kawai, and K.-y. Oda, “永恒希格斯暴胀与宇宙学常数问题”, Phys. Rev. D 92 (2015) 045009, arXiv:1501.04455 [hep-ph]。