arXiv:2303.09940v1 [math.RT] 17 Mar 2023

有限 p群的群代数的底

DAVID J. BENSON

Abstract. 设 G 是一个有限 p群， α 是群代数 $\mathbb{F}_pG$的一个自同构。那么， α 逐点固定 $\mathbb{F}_pG$ 的底。更一般地，若 k 是特征为 p的域，且 α 是 kG的一个 k代数自同构，那么 α 在该群的维数子商上诱导出一个线性作用，而其在底上的作用是标量乘法，标量为该作用的各个行列式的乘积的（$p-1$）次方。因此，该标量是（$k^\times$）$^{p-1}$的一个元素。

1. Introduction

本文中，我们始终设 G 是一个有限 p群， k 是一个特征为 p的域。众所周知， kG 的底是一维的，由所有群元素之和张成。因此，对于 kG的任意代数自同构 α ，存在一个元素 $\lambda \in k^\times$，使得 α 在底上的作用是乘以 λ。我们利用 Jennings– Quillen 理论（该理论描述根基滤过的伴随分次）来证明以下定理。

定理 1.1. 对于任意代数自同构 α of kG，有 $\lambda \in (k^\times)^{p-1}$。特别地，若 $k = \mathbb{F}_p$ ，则 $\lambda = 1$。

G 的维数子商上诱导的作用所对应的矩阵行列式的 $(p-1)$ 次幂，可以算出 λ 的确切值。

致谢。本文源于 Henrik R¨uping 在在线论坛 MathOverflow 上提出的一个问题。

2. The Jennings–Quillen theory

本节中，我们证明定理 1.1。回顾一下， G 是一个有限 p-群，而 k 是特征为 p 的域。Jennings [3] 根据 G 的某个下降中心列，描述了 kG 的根基层；Quillen [4] 则用限制包络代数重新阐释了 Jennings 定理。背景知识另见 [1] 第 3.14 节和 [2] 第 V.7 节。

令 $J(kG)$ 为 kG 的 Jacobson 根基，由满足 $g \in G$ 的元素 $g-1$ 张成。伴随分次代数定义为

$$\mathsf{gr}_*(kG) = \bigoplus_{n\geqslant 0} J^n(kG)/J^{n+1}(kG).$$

对于 $r \geqslant 1$，维数群 $F_r(G)$ 定义为

$$F_r(G) = \{g \in G \mid g-1 \in J^r(kG)\}.$$

2020 年数学主题分类。主要分类：20C20。次要分类：20C05，16S34。关键词与短语。
有限 p-群、群代数、底。

因此， $F_1(G) = G$, $F_2(G) = \Phi(G)$, $[F_r(G)\ F_s(G)] \subseteq F_{r+s}(G)$, 并且若 $g \in F_r(G)$, 则$g^p \in F_{pr}(G)$。此外， $F_r(G)$ 是具有这些性质的下降最快的中心列。我们定义

$$\mathsf{Jen}_*(G) = \bigoplus_{r\geqslant 1} k \otimes_{\mathbb{F}_p} F_r(G)/F_{r+1}(G).$$

于是，$\mathsf{Jen}_*(G)$ 是定义在 k 上的 p-受限李代数，其李括号由 G 中的交换子诱导，而 p-受限映射 $x \mapsto x^{[p]}$ 则由 G 中的 p 次幂诱导。作为一个 p-受限李代数，$\mathsf{Jen}_*(G)$ 由其一度元素生成。令 $\mathcal{U}\mathsf{Jen}_*(G)$ 为 $\mathsf{Jen}_*(G)$ 在 k 上的受限泛包络代数。作为结合代数， $\mathcal{U}\mathsf{Jen}_*(G)$ 由 $\mathsf{Jen}_*(G)$ 生成，并满足由交换子和 p 次幂给出的关系。注意， G 中的乘法交换子在 $\mathcal{U}\mathsf{Jen}_*(G)$ 中变为加法交换子。

Jennings–Quillen 定理指出，存在一个 k-代数同构

$$\mathcal{U}\mathsf{Jen}_*(G) \to \mathsf{gr}_*(kG) \tag{2.1}$$

对于任意 r 和任意 $g \in F_r(G)$，该同构将 $F_r(G)/F_{r+1}(G)$ 中 g 的像映至 $\mathsf{gr}_*(kG)$ 中 $g-1$ 的像。

现在令 $|G| = p^m$。那么 $\dim_k \mathsf{Jen}_*(G) = m$，且 $\dim_k \mathcal{U}\mathsf{Jen}_*(G) = p^m$。令 $x_1, \ldots, x_m$为 $\mathsf{Jen}_*(G)$ 中齐次元素的一组基，其中 x_j 是 G的相应维数子群中某个元素 g_j 的像，$1 \leqslant j \leqslant m$。我们用 $\bar{x}_j$ 表示 $\mathsf{Jen}_*(G)$ 的相应生成元 $\mathcal{U}$。

接下来，我们仿照李代数的 Poincar´e– Birkhoff–Witt 定理证明，在 $\mathcal{U}\mathsf{Jen}_*(G)$ 上引入一个递增滤过。令 $\mathcal{U}^{(0)}\mathsf{Jen}_*(G) = k\cdot 1$ 位于零次度， $\mathcal{U}^{(1)}\mathsf{Jen}_*(G) = k\cdot 1 \oplus \mathsf{Jen}_*(G)$，并且对 $i \geqslant 2$， $\mathcal{U}^{(i)}\mathsf{Jen}_*(G) = \mathsf{Jen}_*(G)\mathcal{U}^{(i-1)}\mathsf{Jen}_*(G)$。因此， $\mathcal{U}^{(i)}\mathsf{Jen}_*(G)$ 是 $\mathcal{U}\mathsf{Jen}_*(G)$ 的子空间，由 $\mathcal{U}\mathsf{Jen}_*(G)$ 的生成元 $\bar{x}_j$ 构成的长度至多为 i 的字张成。于是

$$\mathcal{U}^{(i)}\mathsf{Jen}_*(G).\mathcal{U}^{(j)}\mathsf{Jen}_*(G) \subseteq \mathcal{U}^{i+j}\mathsf{Jen}_*(G),$$
$$[\mathcal{U}^{(i)}\mathsf{Jen}_*(G), \mathcal{U}^{(j)}\mathsf{Jen}_*(G)] \subseteq \mathcal{U}^{i+j-1}\mathsf{Jen}_*(G),$$

并且，如果 x 属于 $\mathcal{U}^{(1)}\mathsf{Jen}_*(G)$，那么 x^p 也属于 $\mathcal{U}^{(1)}\mathsf{Jen}_*(G)$。那么，伴随分次

$$\mathcal{S}\mathsf{Jen}_*(G) = \bigoplus_{i\geqslant 0} \mathcal{U}^{(i)}\mathsf{Jen}_*(G)/\mathcal{U}^{(i-1)}\mathsf{Jen}_*(G) \tag{2.2}$$

带有双重分次。第一个次数记录维数子群，第二个次数来自滤过。它由 $\mathcal{U}^{(1)}\mathsf{Jen}_*(G)$ 生成，具有交换性，并且正次数元素的 p 次幂为零。将 $\bar{x}_j$ 在 $\mathcal{S}\mathsf{Jen}_*(G)$ 中的像记为 $\bar{\bar{x}}_j$，针对 p-受限李代数的 Poincar´e–Birkhoff–Witt 定理的类似结果表明

$$\mathcal{S}\mathsf{Jen}_*(G) \cong k[\bar{\bar{x}}_1, \ldots, \bar{\bar{x}}_m]/(\bar{\bar{x}}_1^p, \ldots, \bar{\bar{x}}_m^p),$$

是 $\mathsf{Jen}_*(G)$ 上的截断对称代数。因此，元素 $\bar{x}_1^{i_1}\ldots\bar{x}_m^{i_m}$构成 $\mathcal{U}\mathsf{Jen}_*(G)$ 的一组基，其中 $0 \leqslant i_j < p$ 适用于 $1 \leqslant j \leqslant m$，而元素 $\bar{\bar{x}}_1^{i_1}\ldots\bar{\bar{x}}_m^{i_m}$构成$\mathcal{S}\mathsf{Jen}_*(G)$ 的一组基。

3. Proof of the Theorem

该 kG的底是单维的，由群元素之和张成 ，

$$n = \sum_{g \in G} g = \prod_{j=1}^{m} (g_j^{p-1} + g_j^{p-2} + \cdots + g_j + 1) = \prod_{j=1}^{m} (g_j - 1)^{p-1} \in kG.$$

在受限泛包络代数 $\mathcal{U}\mathrm{Jen}_*(G)$ 中的像，利用同构 (2.1)，为 $\bar{n} = \prod_{j=1}^{m} \bar{x}_j^{p-1}$。在 $\mathcal{S}\mathrm{Jen}_*(G)$ 中的像，利用 (2.2)，为 $\bar{\bar{n}} = \prod_{j=1}^{m} \bar{\bar{x}}_j^{p-1}$。

现在令 α 为群代数 kG 的一个 k-代数自同构。那么 α 诱导出 $\mathcal{U}\mathrm{Jen}_*(G)$ 的一个自同构 $\bar{\alpha}$，以及 $\mathcal{S}\mathrm{Jen}^*(G)$ 的一个自同构 $\bar{\bar{\alpha}}$。由于 kG 的底是一维的， α 在 n 上的作用就是乘以某个标量 λ，因此 $\alpha(n) = \lambda n$，其中 $\lambda \in k^\times$。相对于根基滤过取伴随分次，并利用同构 2.1，得到 $\bar{\alpha}(\bar{n}) = \lambda \bar{n}$。然后，利用 (2.2) 相对于 Poincar´e–Birkhoff–Witt 滤过取伴随分次，可得

$$\bar{\bar{\alpha}}(\bar{\bar{n}}) = \lambda \bar{\bar{n}}. \tag{3.1}$$

为计算 λ 的值，我们考察 α 在 $\mathcal{S}\mathrm{Jen}_*(G)$ 上的作用。该作用保持双重分次，因此可由作用于生成元 $\bar{\bar{x}}_1$、……、$\bar{\bar{x}}_m$ 的一个 $m \times m$ 可逆矩阵 A 表示。将矩阵 A 的行列式记为 $\det(A)$。于是

$$\bar{\bar{\alpha}}(\bar{\bar{n}}) = \prod_{j=1}^{m} \bar{\bar{\alpha}}(\bar{\bar{x}}_j)^{p-1} = \det(A)^{p-1} \prod_{j=1}^{m} \bar{\bar{x}}_j^{p-1} = \det(A)^{p-1} \bar{\bar{n}}. \tag{3.2}$$

要验证第二个等式，只需在一般线性群的生成元上验证即可。取初等矩阵和对角矩阵作为生成元，验证起来很容易。

由 (3.1) 和 (3.2) 可得

$$\lambda = \det(A)^{p-1} \in (k^\times)^{p-1},$$

至此，定理 1.1 得证。

References

1. D. J. Benson，《表示与上同调 I：有限群与结合代数的基本表示理论》，剑桥高等数学研究丛书，第 30 卷，剑桥大学出版社，1991年；平装本于1998年再版。2. N. Jacobson，《李代数》，John Wiley & Sons Inc.，纽约，1962年。3. S. A. Jennings，《模域上 p-群群环的结构》，《美国数学会汇刊》50卷（1941年），175–185。4. D. G. Quillen，《群环的伴随分次环》，《代数杂志》10卷（1968年），411–418。

Institute of Mathematics, University of Aberdeen, Aberdeen AB24 3UE, United Kingdom电子邮件地址：d.j.benson@abdn.ac.uk