arXiv:2303.09943v1 [math.GR] 17 Mar 2023

群的随机发散

ANTOINE GOLDSBOROUGH 和 ALESSANDRO SISTO

摘要。群的发散是一种拟等距不变量，其定义基于点对，以及避开单位元周围适当球的路径长度。本文研究“随机发散”，即根据相互独立的随机游走或马尔可夫链选取两个点时的发散；马尔可夫链版本可以转化为拟等距不变量。我们证明，在许多情况下，例如相对双曲群、映射类群和直角阿廷群中，两个随机选取的点之间的发散以高概率等价于群的发散。也就是说，典型点实现了可能达到的最大发散。

1. 引言

群的发散这一概念由 [GNR93] 和 [Ger94b], 引入并加以研究；粗略而言，它衡量连接两点 x， y 且避开单位元周围适当半径的球的路径长度，并将其视为$\{x$， $y\}$ 到单位元距离的函数。该概念源于对非正曲率流形和度量空间的研究。事实证明，在函数等价的意义下，群的发散是一个拟等距不变量。

群的发散已在许多例子中得到计算，这里回顾其中一些。在 [Ger94a], 中，Gersten 证明图流形群的发散是二次的；事实上，这一性质刻画了闭三维流形中的图流形。除少数例外曲面外，映射类群也具有二次发散 [Beh06, DR09]。 [Mac11, BD14a] 证明，对于任意次数 d，都存在一个发散为 d 次多项式的 CAT(0) 群；对于右角考克斯特群，也得到了类似结果 [DT15]。 [Sis12] 证明，有限呈示的单端相对双曲群具有指数发散。最后， [OOS09] 和 [GS18] 构造了发散函数具有奇异行为的群。

发散衡量的是点对的“最坏情形” x， y 也就是说，在给定其到单位元距离上界的条件下，这些点是在单位元周围的球外最难连接的点。很自然会想知道，两个“典型”点是否比最坏情形更容易连接。可以通过使用相互独立的随机游走来选取这些点，从而将这一问题精确化。事实上，借鉴 [GS21] 将马尔可夫链视为随机游走的“拟等距不变量”版本这一观点，在此情境下考虑马尔可夫链也很自然。确实，考察由相互独立的马尔可夫链选取的点对的发散，可以通过若干方式得到拟等距不变量（例如，取期望）。本文不再探讨这一点，因为实际上我们将证明，在许多情况下，典型点会实现发散的最坏情形，下面陈述这一结果。我们用 $\mathrm{div}(x,\ y,\ p;\ \delta)$ 表示点 x， y 关于基点 p 和辅助常数 δ 的发散；精确定义见定义 2.12。此外，群的发散仅在函数的一种特定等价关系下定义，我们将其记为 $\asymp$。

定理 1.1。 设$(w_n)_n$,$(z_n)_n$ 是由一个测度驱动的随机游走的独立副本，该测度的有限支集生成了半群 G，其中 G 是以下之一：

- 一个有限呈示的单端相对双曲群，其外围子群具有无限指数。
- 一个非几何图流形的基本群。
- 一个亏格至少为 2 的闭连通定向曲面的映射类群。
- 一个直角阿廷群，其定义图连通且不是连接。

那么，对于所有充分小的 $\delta>0$，存在一个函数 g，满足 $g(n)\asymp$除$_G(n)$，使得

$$\mathbb{P}[\mathrm{div}(w_n,z_n,1;\delta)\geq g(n)]\to 1.$$

此外，在前两种情形中，将随机游走替换为 [GS21]意义下的温和马尔可夫链，结论同样成立。

我们注意到，作者与 Mark Hagen 和 Harry Petyt 正在进行的研究也将为其余两种情形给出该结论的马尔可夫链版本。

该定理由我们的主要结果定理 3.3 推出。粗略地说，定理 3.3 在许多更多情形下给出了随机发散的下界；而上文我们选取了一些重要例子，在这些例子中，该下界与群的发散相吻合。定理 3.3 涵盖的一个例子是双曲可柱状群（由引理 2.5 可知），由此得到以下结论。

定理 1.2. 设 G 是一个轴稳定双曲群，且 $(w_n)_n$、$(z_n)_n$ 是由某个测度驱动的随机游走的独立副本，该测度的有限支撑生成 G 作为半群。那么，对所有充分小的 $\delta > 0$，都存在一个超线性函数 g，使得

$$\mathbb{P}[\mathrm{div}(w_n, z_n, 1; \delta) \geq g(n)] \to 1.$$

尽管我们认为，在许多情形下，一般点具有尽可能大的发散这一现象很有趣，但从某种意义上说，这却是一个负面结果：也就是说，在这些情形下，这种观点无法产生新的拟等距不变量。自然会引出这样一个问题：

问题 1. 是否存在这样一个群：它的随机发散（按任何一种可能的含义）严格低于其发散？

我们认为，无论答案是肯定还是否定，都很有意义。如果答案是肯定的，那么随机发散就是一种新的拟等距不变量。如果答案是否定的，那么每个群中的泛型点都会实现最大的发散，这将非常令人惊讶。

概要。 在第 2 节中，我们引入群的 f-发散元这一概念，其中 f 是一个函数。这一概念与 [GS21] 中引入的概念类似，并且已被隐式地用于某些发散计算中，例如映射类群的发散计算。粗略地说，f-发散给出了群外部路径长度的下界，这些路径位于由该元素生成的循环群的邻域之外；下界由在邻域半径处取值的函数给出。引理 2.13 指出，若一个群含有一个 f-发散元，则该群的发散为 $\succeq nf(n)$；在定理 1.1 提及的情形中，这一界是最优的。我们注意到，任何轴稳定双曲群都含有一个关于某个发散函数 f 的 f-发散元。

在第 3 节中，我们陈述了用于控制随机发散的各种假设。事实上，针对随机游走和马尔可夫链，我们分别采用两组不同的假设，即假设 A 和 B。本节还陈述了我们的主要定理——定理 3.3。事实上，我们决定将该定理证明中的两个关键命题视为黑箱，这样今后若要将该定理推广到其他情形，只需证明这两个命题即可。证明思路如下：

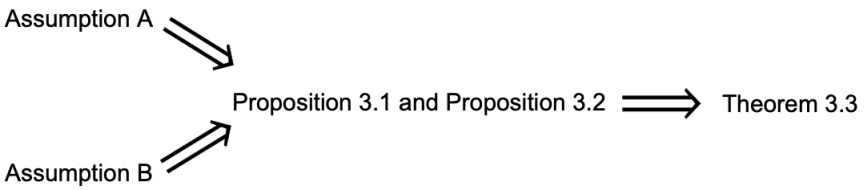

图 1. 本文中蕴含关系的回顾

在第4节中，我们在这两组假设下证明这些命题，并在第5节中证明定理 3.3。结合这一结果和文献中关于发散的计算，我们进而证明定理 1.1。

致谢。本研究始于由 Joseph Maher、Yulan Qing 和 Giulio Tiozzo 组织的 AIM研讨会“超越双曲群的随机游走”。我们感谢组织者和 AIM，也感谢所有在研讨会期间及之后与我们探讨随机发散各个方面的参与者。我们特别感谢 Michael Hull 和 Jing Tao，自研讨会以来，他们一直与我们共同研究随机发散。

2. f-发散

本节中，我们定义 f-发散元，并给出一些包含此类元素的群的例子。开展这项研究的动机在于，群的发散往往源于此类元素的存在。

2.1. 定义与例子。 我们首先定义一个 X-投影；大致来说，这个想法是：给定一个作用在双曲空间 X 上的群 G，我们可以利用 X 中的最近点投影，定义到 G 子集上的粗缩回。

定义 2.1。 *([GS21，定义 3。2])* 设 G 作用在双曲空间 X 上，固定基点 x_0，并设 $A \subseteq G$。X-投影 $\pi\colon G \to A$ 是一个映射，使得对所有 $h \in G$，$\pi(h)x_0$ 是 Ax_0 中距离 hx_0 最近的点。

现在我们可以给出 f-发散元的定义。

定义 *2.2*。设 G 是一个带有固定词度量的群。设 $f\colon R^+ \to R^+$ 是一个递增发散函数。若存在 G 在某个双曲空间 X 上的非初等作用，使得 g 是双曲型的，并且存在常数 θ 满足以下性质，则称 $g \in G$ 是 f-发散的。设 $\pi\colon G \to \langle g \rangle$ 是一个固定的 X-投影。如果 $x, y \in G$ 满足 $d_G(\pi(x), \pi(y)) \geq \theta$，且 α 是 G 中一条从 x 到 y、避开 $\langle g \rangle$ 的 d- 邻域的路径，那么 α 的长度至少为 $f(d)$。参见图 *2*。

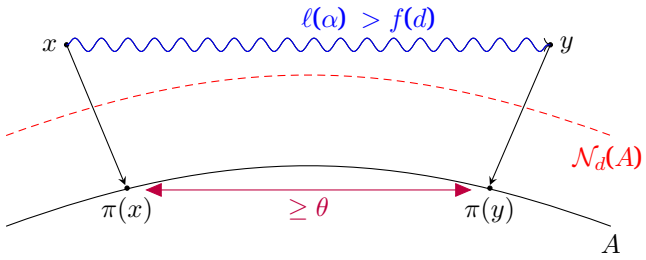

图2。取自 [GS21] 的 f-发散示意图（其中假设 f 是超线性的，但此处并非如此）。

定义了这些特殊元素后，我们给出几个例子。

例 2.3。 • 设 G 是一个无限双曲群，它相对于某个有限生成集作用在其凯莱图上。那么存在一个指数函数 f，使得 G 包含一个f-发散元（见 [GS21，引理 3。4]）。

- 设 (G, P) 是一个相对双曲群，其中所有 $P \in \mathcal{P}$ 在 G 中的指数均为无限。那么存在一个指数函数 f，使得 G 在锥化凯莱图 $\mathrm{Cay}(G, S \cup P)$上的作用包含一个 f-发散元，其中 S 是 G 的有限生成集（见 /[GS21，引理 3。5]）。
- 设 G 是一个轴稳定双曲群，它以小圆柱地且非初等的方式作用于双曲空间 X。那么，对于此作用的任意双曲元 g，存在某个发散函数 f，使其为 f-发散的（该函数取决于 g）。这基本上可由 [MS20，命题 10。4] 推出，正如我们将在下文引理 *2.5* 中所展示的（我们认为，这也可由 [Sis16]中的论证推出）。
- 设 G 是有限型曲面 S（只有有限多个例外情形）的映射类群，它作用于该曲面的曲线图 $\mathcal{CS}$。那么，伪阿诺索夫元是关于某个线性函数 f 的 f-发散元；简而言之，我们称之为线性发散。事实上，分层双曲群也有类似结果，见下文引理 *2.6*。
- 设 G 是一个适当 *CAT(0)* 空间的等距变换群，且其中包含一个秩一元 g_0。那么，g_0 是一个线性发散元素，见下文引理 *2.7*。

2.2. 关于 f-发散的证明。 在本小节中，我们证明例 2.3 最后两个例子中描述的元素确实是 f-发散的，且具有所断言的 f。我们先介绍双曲几何中的以下著名结果，本文将始终用到它。

引理 2.4。 设 X 是一个 δ-双曲空间。设 Q 是一个拟凸真子空间，且 $\pi_Q : X \to Q$ 是一个最近点投影。那么存在一个常数 $R > 0$，它仅取决于 δ 和 Q 的拟凸常数，使得以下结论成立：

- π_Q 是 R粗利普希茨的。
- 对于所有 $x, y \in X$，如果 $d_X(\pi_Q(x), \pi_Q(y)) \geq R$，那么存在点 $m_1, m_2 \in [x, y]$，使得$d_X(m_1, \pi_Q(x)) \leq R$且 $d_X(m_2, \pi_Q(y)) \leq R$，其中 $[x, y]$是连接 x和 y的测地线。此外，$[x, y]$ 在 m_1 与 m_2 之间的子测地线位于 R邻域内的 Q中。

如上所述，下面的引理将由 [MS20，命题 10.4]推出。

引理 2.5。 设 G 在双曲空间 X上双曲圆柱地且非初等地作用。那么，对于此作用，任意双曲型元素 g 都是 f- 发散的，其中发散函数 f 依赖于 g。

证明。 我们注意到，[MS20，命题 10.4] 的陈述涉及一个关于 (G, X) 的“小圆柱地中间”空间 Y；根据 [MS20，第 10] 节，我们可以取 $Y = G$ （配备词度量），这也是我们在本证明中将采用的做法。

设 g 是引理陈述中的一个双曲型元，其中拟等距嵌入$\langle g \rangle \to X$ 的常数为 (a, b)。沿着 $\langle g \rangle$ 的路径是某个 L-Lipschitz 离散路径，其中 L 仅取决于 a 和 b。令 F 为 MS20，命题 10.4] 中与 L 相关的常数，并令 $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 为相应的发散函数。取 d'，使得对所有 $d \geq d'$，都有 $\rho(d) \geq 2(a+1)$。令 $\theta \geq a(8R + 2F + b)$，其中 R 来自引理 2.4，并令：

$$f(d) = \begin{cases} 0 & \text{if } d < d' \\ \frac{\rho(d)\theta}{2} & \text{if } d \geq d'. \end{cases}$$

设 α 是一条 L-Lipschitz（离散）路径，例如从 α^- 到 α^+），满足 $d_G(\pi(\alpha^-), \pi(\alpha^+)) \geq \theta$，并且始终处于$\langle g \rangle$的 d-邻域之外。我们要证明 $\ell(\alpha) > f(d)$。

设 β 是沿着$\langle g \rangle$ 从 $\pi(\alpha^-)$ 到 $\pi(\alpha^+$ 的离散路径。于是，根据 [MS20，命题 10.4], ，由于 β 是 L-Lipschitz 的，我们有：

$$\max\{\ell_G(\alpha), \ell_G(\beta)\} \geq \left(d_X(\alpha^-, \alpha^+) - d_X(\alpha^-, \pi(\alpha^-)) - d_X(\alpha^+, \pi(\alpha^+)) - F\right) \rho(d).$$

现在，根据引理 2.4，存在一个仅依赖于$\langle g \rangle$ 的 $R > 0$，使得：

$$d_X(\alpha^-, \alpha^+) - d_X(\alpha^-, \pi(\alpha^-)) - d_X(\alpha^+, \pi(\alpha^+) \geq d_X(\pi(\alpha^-), \pi(\alpha^+)) - 4R.$$

如果 $d < d'$，那么 $f(d) = 0$，无需再证明。因此，我们只需考虑 $d > d'$。根据 θ 的选取，我们有 $d_X(\pi(\alpha^-), \pi(\alpha^+)) \geq 4R + F$，因此对所有 $d > d'$：

$$\begin{aligned} \ell_G(\beta) &\leq a d_X(\pi(\alpha^-), \pi(\alpha^+)) + b < (a+1) d_X(\pi(\alpha^-), \pi(\alpha^+)) \\ &\leq \frac{\rho(d)}{2} d_X(\pi(\alpha^-), \pi(\alpha^+)) < \rho(d) \left(d_X(\pi(\alpha^-), \pi(\alpha^+)) - 4R - F\right). \end{aligned}$$

因此，$\ell_G(\alpha) \geq \rho(d) \left(d_X(\pi(\alpha^-), \pi(\alpha^+)) - 4R - F\right) > \rho(d)\theta/2 = f(d)$，证毕。 □

以下引理与映射类群的证明中所做的工作类似，参见 [Sis17, Proposition 5.9]；该证明只依赖于 G 的 HHS 结构。为完整起见，我们在此给出该引理。关于层级双曲空间的一般背景，请参阅 [BHS17, BHS19, Sis19]；本文不再详细回顾，因为本文只在以下引理中用到层级双曲性。简而言之，我们将用到：层级双曲结构 $(X, \mathfrak{S})$ 给出一族双曲空间 $\mathcal{C}Y$，其中 $Y \in \mathfrak{S}$；并且存在一个“主”双曲空间（形式上称为 $\sqsubseteq$-极大）$\mathcal{C}S$。此外，还存在粗利普希茨（投影）映射 $\pi_Y : X \to \mathcal{C}Y$，我们主要会用到两点。第一，距离公式给出了 X 中两点之间距离的估计，该估计以它们在各个双曲空间中的投影为依据；我们将在下文的证明中具体说明所需的估计部分。第二，我们需要有界测地像公理：如果 x, y 在某个 $\mathcal{C}Y$ 中的投影相距很远，其中 $Y \neq S$，那么从 $\pi_S(x)$ 到 $\pi_S(y)$ 的任意测地线都会经过某个指定点的一个一致邻域ρ^Y_S。

引理 2.6. 设 G 是一个分层双曲群（其结构为 $(G, \mathfrak{S})$），且有一个元素 g_0 在主双曲空间 $\mathcal{C}S$ 上双曲型作用。那么 g_0 是此作用下的线性发散元素。

证明。令 $\pi : G \to \mathsf{h}g_0\mathsf{i}$ 为一个 $\mathsf{C}S$-投影，如定义 2.1 所定义，其中 S 是 $\mathfrak{S}$ 的 v-极大元。取 L_0，使得 $L_0/2 \geq \max\{12E, 2R, s_0\}$，其中 E 是有界测地像公理中的常数，R 来自引理 2.4，适用于双曲空间 $\mathsf{C}S$ 和拟凸子集 $\mathsf{h}g_0\mathsf{i}x_0$，而 s_0 来自距离公式。定义 $f(d) := (\lambda_2^{-1}\lambda_1^{-1}(d - \nu_1) - \nu_2)/2$，其中 (λ_1, ν_1) 是与 $2L_0$ 相关的常数，(λ_2, ν_2) 是距离公式中与 L_0 相关的常数。取 θ 使得 $\theta/a - b \geq 20E$，其中 (a, b) 是 $\mathsf{h}g_0\mathsf{i}x_0 \subseteq \mathsf{C}S$ 的拟测地常数。注意，f 和 θ 都只取决于 G 的 HHS 结构以及 g_0。

设 α 是一个 h，如定义 2.11 中所述，从 α^- 到 α^+，避开$\langle g_0\rangle$ 的 d邻域，并且使得 $D := d_G(\pi(\alpha^-), \pi(\alpha^+)) \geq \theta$。

这个证明的主要环节是证明：如果域 $U \in \mathfrak{S}$ 满足 $d_U(\alpha^-, \pi_\gamma(\alpha^-))$ 很大，那么 $d_U(\alpha^-, \alpha^+)$ 也很大。对于两点 $x, y \in G$和 $L \geq 0$，若 $d_U(x, y) \geq L$，则称 $U \in REL(x, y, L)$。

命题 1. 对于所有 $L \geq L_0$，若 $d_U(\alpha^-, \pi(\alpha^-)) \geq L$，则 $d_U(\alpha^-, \alpha^+) \geq d_U(\alpha^-, \pi(\alpha^-))/2$。特别地，若$U \in REL(\alpha^-, \pi(\alpha^-), L)$，则 $U \in REL(\alpha^-, \alpha^+, L/2)$。

断言的证明。首先注意，存在一个常数 K_1，使得对于所有 $U \in \mathfrak{S}$，投影映射π_U：$G \to \mathcal{C}U$都是 (K_1, K_1)-粗利普希茨的。因此 $d_U(\pi(\alpha^-), \pi(\alpha^+)) \leq K_1 D + K_1$. 令 $L \geq L_0$，并令$U \in REL(\alpha^-, \pi(\alpha^-), L)$）。

第一种情况是，若 $U \neq S$，则根据有界测地像公理，存在一个常数 E，使得 $\rho_S^U \cap \mathsf{N}_E([\pi_S(\alpha^-), \pi_S(\pi(\alpha^-))]) \neq \emptyset$。由 $\mathsf{C}S$ 的双曲性以及 θ的选取可知，$\rho_S^U \cap \mathsf{N}_E([\pi_S(\alpha^+), \pi_S(\pi(\alpha^+))]) = \emptyset$。因此，利用有界测地像公理，我们可以界定$d_U(\alpha^+, \pi(\alpha^+)) \leq E$。现在，令 $\beta \subseteq [\pi_S(\pi(\alpha^-)), \pi_S(\pi(\alpha^+))]$ 为满足 $d_S(x, \pi(\alpha^-)) \geq 10E$的点 x。于是我们有 $\rho_S^U \cap \mathsf{N}_E(\beta) = \emptyset$，因此根据有界测地像公理，得到$d_U(\beta^-, \beta^+) \leq E$。注意到 $d_U(\pi(\alpha^-), \pi(\alpha^+)) = d_U(\beta^-, \beta^+) + 10E \leq 11E$，可得：

$$d_U(\alpha^-, \alpha^+) \geq d_U(\alpha^-, \pi(\alpha^-)) - d_U(\pi(\alpha^-), \pi(\alpha^+)) - d_U(\pi(\alpha^+), \alpha^+) \geq d_U(\alpha^-, \pi(\alpha^-)) - 12E \geq d_U(\alpha^-, \pi(\alpha^-))/2.$$

若 $U = S$，则根据$\mathcal{C}S$ 的双曲性以及引理 2.4，我们有：

$$d_S(\alpha^-, \alpha^+) \geq d_S(\alpha^-, \pi(\alpha^-)) - 2R \geq d_S(\alpha^-, \pi(\alpha^-))/2.$$

这就完成了该断言的证明。 □

令 $L = 2L_0$，那么根据上文断言中 (λ_1, ν_1) 的选取以及距离公式，我们有：

$$d \leq d_G(\alpha^-, \pi(\alpha^-)) \leq \lambda_1 \sum_{U \in \mathfrak{S}} \left\{\!\left\{ d_U(\alpha^-, \pi(\alpha^-)) \right\}\!\right\}_L + \nu_1.$$

这里回顾一下，若 $A \geq L$，则 $\{\!\{A\}\!\}_L = A$；否则为 $\{\!\{A\}\!\}_L = 0$。

根据为 L_0 选取的常数 (λ_2, ν_2)，我们有：

$$\begin{aligned} d_G(\alpha^-, \alpha^+) &\geq \lambda_2^{-1} \sum_{U \in \mathfrak{S}} \left\{\!\left\{ d_U(\alpha^-, \alpha^+) \right\}\!\right\}_{L/2} - \nu_2 \\ &\geq \lambda_2^{-1} \sum_{U \in REL(\alpha^-, \pi(\alpha^-), L)} \left\{\!\left\{ d_U(\alpha^-, \pi(\alpha^-)) \right\}\!\right\}_L - \nu_2 \\ &\geq \lambda_2^{-1}\lambda_1^{-1}(d - \nu_1) - \nu_2 > f(d) \end{aligned}$$

从第一行到第二行用到了命题 1。因此 $\ell(\alpha) \geq d_G(\alpha^-, \alpha^+) > f(d)$。 □

下面的引理证明了具有秩一等距变换的 CAT(0) 群中存在线性发散元素。我们通过考察该群在 BBF 准树上的相关作用，并利用此元素的收缩性质来证明这一点。也可以尝试采用类似论证：不使用 BBF 准树，而改用 [PSZ22] 中为 CAT(0) 空间定义的双曲空间。

引理 2.7. 设 G 是一个作用在完备 *CAT(0)* 空间上的等距变换群，且含有一个秩一元 g_0。那么 g_0 是一个线性发散元素。

证明。注意，根据 [BBF15、例 2.1-(3) 和定理 H],，存在一个准树 X，使得 G 在 X 上有非初等作用，并且 g_0 对于此作用是双曲型的。

此外，X-投影 $\pi : G \to \langle g_0\rangle$ 实际上与最近点投影的误差有界，参见 [BBF15，引理 4.9]（以及上述引理前的注释）。现在，g_0 对于在

Y 上的作用是双曲型，因此根据 [BF09，定理 5.4], 对于最近点投影 $\pi\colon G \to \langle g_0\rangle$是 B_1-收缩的。我们证明这意味着 g_0 是一个线性发散元素。

事实上，令 α 为一条从 α^- 到 α^+ 的路径，且始终位于 $\langle g_0\rangle$ 的 d-邻域之外，并满足其 Y-投影（因此最近点投影 $\pi\colon G \to \langle g_0\rangle$）满足 $d\left(\pi(\alpha^-)\ \pi(\alpha^+)\right) \geq \theta := 10B_1$，其中 B_1 来自 g_0 的轴，且该轴是 B_1-收缩的。

我们首先注意到 $B(\alpha^-, d/2) \cap \langle g_0\rangle = \emptyset$，因此 diam $\left(\pi(B(\alpha^-, d/2))\right) \leq B_1$，所以特别地，$\alpha$ 不被 $B(\alpha^-, d/2)$ 真包含，从而 $\ell(\alpha) \geq d/2$，如所需。□

2.3. **发散与 WPD 元素**。在本小节中，我们回顾 WPD 元素的概念，并论证对于发散函数 f，f-发散元是 WPD 元素。在回顾 WPD 元素时，我们还按照 [GS21], 的做法确立一些记号，这些记号将在主要结果的陈述中以及全文中使用。最后，我们建立 f-发散与群的发散之间的联系。

2.3.1. *WPD* 元素。我们回顾 [BF02] 中 WPD 元素的定义。

定义 2.8 (WPD 元素)。设 G 是一个作用在双曲空间 X 上的群，g 是 G 的一个元素。若对于任意 $\kappa > 0$ 和 $x_0 \in X$，都存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得……，则称 g 满足弱适当不连续条件（或称 g 是一个 *WPD* 元素）。

$$\#\{h \in G |\quad d_X(x_0, hx_0) < \kappa,\quad d_X(g^N x_0, hg^N x_0) < \kappa\} < \infty.$$

下面的引理表明，只要 G 含有一个 f-发散元 g_0，那么 g_0 就是一个双曲型 WPD 元素。

引理 2.9。若对于某个在双曲空间 X 上的作用，g_0 是一个 f-发散元（对应于某个递增发散函数 f），那么 g_0 对于此作用于 X 上的作用是一个双曲型 *WPD* 元素。

证明。证明与 [GS21，引理 3.8] 完全相同。在该论文的设定中，f 被假设为超线性的，但证明该引理只需它是发散的。□

回顾一下，任意双曲型 WPD 元素 g 都包含在 G 的唯一一个极大初等子群中，记作 $E(g)$，并称为 g 的 初等闭包，参见 [Osi16, Theorem 1.4]。

我们将以下引理称为强 Behrstock 不等式，并且会频繁使用它。该引理由 [BBFS19, Theorem 4.1], 推出，参见 [GS21, Section 3.3]。

我们简要解释一下该引理的含义。给定一个点 x 和双曲元 g 的两个不同陪集 $E(g)$，Behrstock 不等式的一个版本表明，在其中一个陪集上，X-投影与另一个陪集的 X-投影相距很近。强版本则表明，只要对 X-投影作适当扰动，我们实际上可以确保这些投影不是彼此接近，而是完全重合。

引理 2.10. 设 g 是一个双曲型 *WPD* 元素。那么，对 $\gamma = E(g)$，存在一个 g-等变映射$\pi_\gamma\colon G \to P(\gamma)$，其中 $P(\gamma)$ 是 γ 的所有子集构成的集合，并且存在一个常数 B，满足以下性质。对所有 $x \in G$ 和 $h\gamma \neq h'\gamma$，均有

$$d_X(\pi_{h\gamma}(x), \pi_{h\gamma}(h'\gamma)) > B \implies \pi_{h'\gamma}(x) = \pi_{h'\gamma}(h\gamma),$$

其中 $\pi_{k\gamma}(z) = k\pi_\gamma(k^{-1}z)$。此外，对所有 $x \in G$，$\pi_\gamma(x)$ 与将 x 投影到 hgi 上所得的一个 X-投影之间的豪斯多夫距离不超过 B。

与 GS21 第 3 节中一样，我们经常考虑投影距离：

记号 1. 对于双曲型 *WPD* 元素 g，考虑 $\gamma = E(g)$ 以及引理 *2.10* 中的映射 $\pi_{h\gamma}$。对于 h、x、$y \in G$，记

$$d_{h\gamma}(x, y) = \operatorname{diam}(\pi_{h\gamma}(x) \cup \pi_{h\gamma}(y)),$$

投影子集而非点时，也类似定义。

与引理 2.10 的表述一样，在固定了一个双曲型 WPD 元素g_0 后，我们常将 $\gamma = E$记作g_0。我们经常考察这样一组陪集：给定的两个元素在这些陪集上的投影相距甚远，具体定义如下。

定义 2.11. 给定一个双曲型 *WPD* 元素 g，对于 x、$y \in G$ 和 $T \geq 0$，我们定义集合

$$\mathcal{H}_T(x,y) := \{h\gamma \ : \ d_{h\gamma}(x,y) \geq T\},$$

集合上的投影与点上的投影类似。

2.3.2. 发散。 度量空间的发散有许多种定义。在温和条件下，这些不同的定义是等价的，更多内容请参见 [BD14b], [DMS10] 。更准确地说，各种定义会给出一些函数；相对于由偏序生成的等价关系，这些函数彼此等价，其中 $f \preceq g$ 当且仅当存在一个常数 C，使得 $f(x) \leq Cg(Cx + C) + C$。我们将采用 [BD14b 中定义 3.1] 给出的定义。

定义 2.12。 设常数为 $0 < \delta < 1$。对于满足 $dist(c, \{a, b\}) = r > 0$ 的三点组 $a, b, c \in X$，我们将 $\mathrm{div}(a, b, c, \delta)$ 定义为连接 a 与 b 且避开球 $B(c, \delta r)$的所有路径长度的下确界。若不存在这样的路径，则定义 $\mathrm{div}(a, b, c, \delta) = \infty$。

度量空间的发散函数（给定一个固定参数）定义为：对所有彼此距离不超过给定距离的点对 a，b 取上确界；我们不需要精确的定义。

正如引言中所述，文献中隐式地使用 f-发散的概念来给出发散的下界。我们不会用到下面这个引理，但指出它是为了明确 f-发散与发散之间的联系。下文的引理 5.4 在精神上与此类似。

引理 2.13. 如果群 G 含有一个 f-发散元，那么它的发散为 $\succeq nf(n)$.

证明。 证明与 [GS21, 引理 3.6], 相同，其中 f 被假设为超线性，结论是发散为超二次。不过，证明中最后显示的公式给出了此处所需的界。 □

3. 主要结果陈述

3.1. 关于马尔可夫链的假设。 本文中，我们假设所研究的马尔可夫链具有以下性质。需要指出的是，此处不需要满足 [GS21，定义2.5] 中的非 amenable 条件。

我们采用 [GS21，第 2], 节中的记号；特别地， w_n^o 表示一个以o为起点的 n步马尔可夫链，转移概率记为 $p(\cdot,\cdot)$。

假设1。 **</style}设 上的马尔可夫链 (w_n^o)** 满足以下条件。

(1) **(有界跳跃)** 存在有限集合 $S \subseteq G$，使得 $p(g, h) = \mathbb{P}[w_1^g = h] = 0$，若 $h \notin gS$。(2) **(不可约性)** 对于所有 $s \in G$，存在常数 $\epsilon_s, K_s > 0$，使得对所有 $g \in G$，有

$$\mathbb{P}[w_k^g = gs] \geq \epsilon_s$$

对于某个 $k \leq K_s$。

注 1. 一旦我们在 G 上固定了词度量 d_G，那么有界跳跃 *1*-(1)这一假设等价于以下条件：存在一个常数 $K > 0$，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和起点$o \in G$，都有 $d_G(w_n^o, w_{n+1}^o) \leq K$。

现在我们陈述一些关于所考虑的群的假设。我们注意到，这些关于 G的假设会因我们考虑的是随机游走还是更一般的马尔可夫链而有所不同。为简化记号，对于在 G上的随机游走或马尔可夫链，我们记作（w_n^o）。对于随机游走，起点（将视为单位元）不像在马尔可夫链的情形中那么重要。对于马尔可夫链，我们还要求（w_n^o）$_n$ 满足 [GS21，命题 5.1] 的结论。我们注意到，该命题足以说明马尔可夫链在 X 中具有线性进展，参见 [GS21，第 6] 节。以下是我们将采用的假设：

假设 A。 G 是一个包含 f-发散元 g_0 的有限生成群，并且$(w_n^o)_n$ 是由一个生成 G 作为半群的有限支撑测度驱动的随机游走。

假设 B。 G 是一个有限生成群，包含一个 f-发散元 g_0，并且$(w_n^o)_n$ 是定义在 G 上的马尔可夫链，满足假设*1*以及 [GS21，第5号命题。1],的结论，我们稍后会回顾这一结论。

文献 [GS21] 展示了多个群满足假设 B，适用于温和的 马尔可夫链（[GS21，定义2.5]）。其中包括：

- 非初等双曲群与相对双曲群。
- 轴稳定双曲三维流形群。

在 Mark Hagen、Harry Petyt 和作者们正在进行的研究中，我们证明，适当的分层双曲群上的马尔可夫链也满足假设 B。

3.2. **主要结果**。我们一劳永逸地固定 f-发散元 g_0，它对于 G 在双曲空间 X上的作用是双曲型且满足 WPD。我们还固定 $\gamma = E(g_0)$ 为 g_0的初等闭包。以下结果稍后将作为下文关于"随机发散"的定理 3.3 的假设，也可视作一个"黑箱"：也就是说，如果能够为其他群证明这些结果的结论，那么该定理在此情形下也成立。

以下命题指出，p 与 w_n^p 的投影之间距离较大的陪集数量呈线性增长。这一结果或许正是作者们本应在[GS21] 中证明的内容，以取代他们的命题 5.1。这些命题的区别在于，我们在此希望陪集数量呈线性增长，而在 [GS21], 中，我们希望陪集上的投影距离之和呈线性增长。

命题 3.1。设 G 和 $(w_n^o)_n$ 满足假设 *A* 或假设 *B*。则存在常数 T_0，使得以下结论成立。对于所有 $T \geq T_0$，存在常数 $C_0, \epsilon_0 > 0$，使得对于所有 $p \in G$ 和 $n \in \mathbb{N}$，我们有：

$$\mathbb{P}\Big[|\mathcal{H}_T(p, w_n^p)| \geq \epsilon_0 n\Big] \geq 1 - C_0 e^{-n/C_0}.$$

第二个结果将是 [GS21, 命题 5.1] 结论的一个简单推论，大致表明：给定一组 $\mathcal{H}_T(o, p)$ 陪集，始于 p的马尔可夫链撤销这些陪集上投影的数量超过 t 的概率，会随 t呈指数衰减。

命题 3.2。设 G 和 $(w_n^o)_n$ 满足假设 *A* 或假设 *B*。则存在$T_0' \geq 0$，使其具有以下性质。对于所有 $T \geq T_0'$，存在常数 $C_1 > 0$，使得对于所有 $o, p \in G$ 以及所有 m，以下结论成立：

$$\mathbb{P}\Big[|\mathcal{H}_T(o, p) \cap \mathcal{H}_T(p, w_m^p)| > t\Big] \leq C_1 e^{-t/C_1}.$$

最后，下面的定理指出，在我们的假设下，引理 2.13 给出的发散下界通常成立：

定理 3.3. 设 G 是一个在双曲空间 X上非初等作用的群，且 g_0 是该作用的一个f-发散元。设 $(w_n^p)_n$、$(z_n^p)_n$ 是满足命题 *3.1* 和命题 *3.2* 两者结论的马尔可夫链（或随机游走）的两个独立副本。那么存在一个常数 $\delta_0 \in (0, 1)$，使得对所有 $\delta \leq \delta_0$，都存在一个常数 $C > 0$，满足：

$$\mathbb{P}\Big[\mathrm{div}(w_n^p, z_n^p, p, \delta) > nf(n/C)/C\Big] \geq 1 - Ce^{-n/C}$$

本文余下部分将用于证明这些命题和定理。

记号 2. 从现在起，G 始终表示一个在双曲空间X上非初等作用的群，而 g_0 表示该作用的一个 f-发散元。我们将使用第 *2* 节中设定的所有记号，例如 $E(g_0)$，等等。

3.3. **一些额外的准备工作**。在转向命题和定理的证明之前，我们回顾一些关于双曲空间和 WPD 元素的其他结果，这些结果将在下文中贯穿使用。

设 $x, y \in G$。鉴于 $h\gamma$ 上的投影满足由 [BBF15], 给出的[BBF15], 投影公理，我们可以在$\mathcal{H}_T(x, y)$上定义一个全序，如下所述。关于各种条件的等价性，这可由引理 2.10（Behrstock 不等式）推出。

引理 3.4.（[BBF15，定理 3.3（G）]的推论）固定一个双曲型 *WPD* 元素 g。对于任意充分大的 T以及任意 x、$y \in G$，集合 $H_T(x, y) \cup \{x, y\}$ 是全序集，且具有最小元 x和最大元 y。若下列等价条件之一（因而全部）对于引理 *2.10* 中的 B 成立，则序关系由 $h\gamma \prec h'\gamma$ 给出：

- $d_{h\gamma}(x,\ h'\gamma)\ > B$。
- $\pi_{h'\gamma}(x) = \pi_{h'\gamma}(h\gamma)$.
- $d_{h'\gamma}\ (y,\ h\gamma)\ > B$。
- $\pi_{h\gamma}(y) = \pi_{h\gamma}(h'\gamma)$。

现在我们研究不同的大投影集合如何有所差异，首先从以下引理开始。

引理 3.5. *(*[GS21，引理 3.15]*)* 固定一个双曲型 *WPD* 元素 g。对于任意满足引理 *3.4* 的 $T \geq 10B$，并令 B 如引理 *2.10* 所述，以下结论成立。设 $x, y, z \in G$。那么至多有 2 个陪集 $h\gamma \in H_T(x, y)$ 满足：$\pi_{h\gamma}(z)$ 与 $\pi_{h\gamma}(x)$ 及 $\pi_{h\gamma}(y)$ 均不同。

下面给出该引理的一个推论。我们将多次使用这个引理，并采用其陈述中给出的两种略有不同的形式。为完整起见，我们给出证明，但需要指出，这些结论也可由 [BBFS19 的引理 3.6] 推得。

引理 3.6。 对于所有 $x, y, z \in G$，满足以下条件的陪集 $t_1\gamma, t_2\gamma \in H_T(x, z)$ 至多有 2 个：

$$\mathcal{H}_T(x,z)\backslash\mathcal{H}_T(z,y) \subseteq \mathcal{H}_T(x,y) \cup \{t_1\gamma, t_2\gamma\}.$$

特别地：

$$|\mathcal{H}_T(x,y)| \geq |\mathcal{H}_T(x,z)\backslash\mathcal{H}_T(z,y)| - 2 \geq |\mathcal{H}_T(x,y)\backslash\mathcal{H}_T(z,y)| - 4.$$

证明。由引理 3.5，$\mathrm{H}_T(x,z)\backslash\mathrm{H}_T(z,y)$ 中至多有 2 个陪集（记为 $t_1\gamma$ 和 $t_2\gamma$）满足 $\pi_{t_i\gamma}(y) \neq \pi_{t_i\gamma}(x)$ 且 $\pi_{t_i\gamma}(y) \neq \pi_{t_i\gamma}(z)$。现在，对于 $\mathrm{H}_T(x,z)\backslash\mathrm{H}_T(z,y)$ 中除这两个 $t_i\gamma$ 以外的所有项，我们必有 $\pi_{h\gamma}(y) = \pi_{h\gamma}(z)$（否则 $h\gamma \in \mathrm{H}_T(z,y)$）。因此，除这两个 $t_i\gamma$ 陪集外，我们有 $d_{h\gamma}(x,y) = d_{h\gamma}(x,z) \geq T$，因为 $h\gamma \in \mathrm{H}_T(x,z)$，所以 $\mathrm{H}_T(x,z)\backslash\mathrm{H}_T(z,y)$ 中除至多 2 个陪集外，其余都属于 $\mathrm{H}_T(x,y)$。这就证明了引理的第一部分，从而得到第一个不等式。交换 z 和 y，可知 $\mathrm{H}_T(x,y)\backslash\mathrm{H}_T(z,y)$ 包含于 $\mathrm{H}_T(x,z)$，至多相差两个陪集。但将 $\mathrm{H}_T(x,z)\backslash\mathrm{H}_T(z,y)$ 替换 $\mathrm{H}_T(x,z)$，同样的结论仍成立，由此得到第二个不等式。□

下述　　内容表明，对于$\mathcal{H}_T$中的陪集数量，我们有一个“粗三角不等式”　　.

推论 3.7。对于所有 $x,\ y,\ z \in G$，有

$$|\mathcal{H}_T(x,z)| \leq |\mathcal{H}_T(x,y)| + |\mathcal{H}_T(y,z)| + 2.$$

证明。这直接由引理 3.6 以及以下事实得出：

$$|\mathcal{H}_T(x,z)\backslash\mathcal{H}_T(z,y)| = |\mathcal{H}_T(x,z)| - |\mathcal{H}_T(x,z) \cap \mathcal{H}_T(z,y)| \geq |\mathcal{H}_T(x,z)| - |\mathcal{H}_T(z,y)|.$$

□

记号 3。 在为 G 固定一个有限生成集之后，我们在 G 上固定一个词度量 d_G，并注意到对于一个作用 $G \curvearrowright X$，对所有 g、$h \in G$，都有 $d_X(gx_0, hx_0) \leq d_G(g,h)$，至多相差一个缩放因子 X；为方便起见，今后我们均采用此缩放。

下述引理大致说明，X-投影是最近点投影，至多存在乘法和加法误差。

引理 3.8。 存在一个常数 D（仅取决于 γ），使得对于所有 $h\gamma$ 和 $p \in G$，我们都有

$$d_G(p, \pi_{h\gamma}(p)) \leq D d_G(p, h\gamma) + D$$

证明。令 $p' \in h\gamma$ 使得 $d_G(p,p') = d_G(p, h\gamma)$。由于 $\pi_{h\gamma}$ 与某个最近点投影的距离有界（引理 2.10），引理 2.4 的结论对 $\pi_{h\gamma}$ 成立；我们将相应的常数记为 R。此外，令 a, b 使得 $h\gamma$ 通过 x_0 的轨道映射拟等距嵌入到 X 中，常数为 (a,b)（也就是说，赋予 $h\gamma$ 度量 d_G 的限制后，它拟等距嵌入到 X 中，常数为 (a,b)）。令 $D =$ 为 $\max\{1+a, a(b+R+2B)\}$。若 $d_X(p'x_0, \pi_{h\gamma}(p)x_0) \leq R$，则有 $d_G(p', \pi_{h\gamma}(p)) \leq aR + ab$，因此 $d_G(p, \pi_{h\gamma}(p)) \leq d_G(p,p') + aR + ab \leq D d_G(p, h\gamma) + D$。若 $d_X(p'x_0, \pi_{h\gamma}(p)x_0) > R$，则由引理 2.4，存在一点 $t \in [px_0, p'x_0]$，使得$d_X(t, \pi_{h\gamma}(p)x_0) \leq R$，因此

$$d_G(p,p') \geq d_X(px_0, p'x_0) \geq d_X(px_0, t) + d_X(p'x_0, \pi_{h\gamma}(p)x_0) - R - 2B \geq \frac{1}{a} d_G(p', \pi_{h\gamma}(p)) - b - R - 2B,$$

其中“$2B$”是由于$\pi_{h\gamma}(p)$的直径所致。这就得到

$$d_G(p,\ \pi_{h}(p)) \leq d_G(p,p') + d_G(p',\pi_{h\gamma}(p)) \leq (1+a)d_G(p,p') + a(b+R+2B) \leq Dd_G(p,h\gamma) + D$$

□

3.4. 固定常数。 对于基点 $x_0 \in X$，由于 $h\gamma x_0$ 是双曲空间 X 的拟凸子集，由引理 2.4 可知，到 $h\gamma x_0$ 的最近点投影是粗利普希茨的。现在，$h\gamma$ 拟等距嵌入于 X，因此 X-投影 $\pi_{h\gamma}$ 是 L-粗利普希茨的，其中某个常数 $L \geq 0$ 从现在起固定不变（见下文）。我们还固定以下常数。回顾一下，我们已经固定了一个 f-发散元 g_0 及其初等闭包 $\gamma = E(g_0)$。

记号 4。
- 令 L 使得投影 π_h $_\gamma$ 是 L-粗利普希茨的，并令 R 取自与拟凸子集 $h\gamma x_0 \subseteq X$对应的引理 *2.4*。
- 令 θ 和 f 来自 g_0 为 f-发散元的定义。
- B 来自强 *Behrstock* 不等式（引理 *2.10*）。
- 令 K 来自注 *1* 中的有界跳跃条件。注意，我们的马尔可夫链的样本路径将是一条具有 K-有界跳跃的离散路径，也就是说，它是由一系列点组成的，其中相邻两点之间的距离至多为 K 。

4. 概率论证

我们将证明，满足假设 A 或 B 的群满足命题 3.1 和命题 3.2 的结论。这将使我们之后能够证明定理 3.3。对于假设 A 中的群和随机游走，它们或许满足 [GS21，命题 5.1], 的结论；这将为处理这些情形提供另一种方法。

4.1. 满足假设 A 的群的命题 3.1 和命题 3.2 的证明。

在本小节中，我们固定假设 A 的设定。

我们回顾一下 [BBF15], 引入的投影复形的一些性质，随后将利用这些性质证明命题 3.1。

4.1.1. 投影复形。 我们不会正式定义投影复形，而是回顾与此处相关的性质。粗略地说，双曲型 WPD g_0 的投影复形由 $E(g_0)$ 的陪集构成，这些陪集被视为拟直线；若两个陪集在不存在第三个陪集使它们在其上投影距离很远时，就将它们粘合在一起。特别地，环境群 G 是此投影复形的一个子集，我们将在下文中用到这一点；我们还回顾一下， G 在此投影复形上作用。有关详情，请参阅 [BBF15] 或 [BBFS19] 。

令 $\mathrm{Y} := \{h\gamma : h \in G\}$。根据 [DGO17, Example 4.38], , Y 满足 [BBF15, Section 3.1] 中的公理。于是，对每个 $U > 0$，我们都可以按照 [BBF15, Definition 3.6] 构造一个投影复形 Y_U 。

首先：

引理 4.1. *(*[BBF15, Theorem 3.16]*)* 对所有充分大的 $U > 0$，$\mathbb{Y}_U$ 都是准树。

投影复形对我们有用的原因在于，两点之间的距离与具有较大投影的陪集数量有关：

命题 4.2. *(*[BBF15, Proposition 3.7]*)* 对所有充分大的 $U > 0$，且对 $x, y \in G$，我们有$d_{\mathbb{Y}_U}(x\gamma, y\gamma) \leq |H_U(x,y)|+1$。

注意，我们在准树 Y_U上有一个作用 $G \curvearrowright \mathrm{Y}_U$ 。下面的结论保证这个作用是双曲圆柱的。

定理 4.3. （ [BBFS19, 定理 1.1] 的特例）对所有充分大的 $U > 0$ ，以下结论成立。若 G 作用于 $\mathbb{Y}_U$ ，且存在 N ，使得 $\mathbb{Y}_U$ 中任意两个不同元素的公共稳定子的基数至多为 N，则该作用是双曲圆柱的。

$E(g_0)$ 的两个陪集的公共稳定子是相应共轭的交集，其大小一致有界，因此 G 在 Y_U 上的作用确实是双曲圆柱的。

我们还需要关于准树 Y_U 的以下引理，它使我们能够用投影来控制格罗莫夫积。

引理 4.4. 对于所有充分大的 $U > 0$，存在 $\Delta > 0$ 使得以下结论成立。固定互不相同的 $h_i\gamma$，其中 $i = 1$、2、3，并令 $H = H_U(h_1\gamma, h_3\gamma) \cap H_U(h_2\gamma, h_3\gamma)$。则

$$(h_1\gamma, h_2\gamma)_{h_3\gamma} > |\mathcal{H}|/2 - \Delta.$$

证明。 在整个证明中，我们假设 U 足够大，使得我们可以应用上述结果以及 [BBFS19] 中的其他结果。由于 Y_U 是双曲的，陈述中的格罗莫夫积与从 $h_1\gamma$ 到 $h_2\gamma$ 的一条测地线上距 $h_3\gamma$ 的距离相差至多一个仅依赖于双曲性常数的误差。根据 [BBFS19，推论 3.8], ，该测地线与 $\mathcal{H}_U(h_1\gamma, h_2\gamma)$ 的豪斯多夫距离有界。因此，我们需要给出 Y_U 中 $h_3\gamma$ 与 $\mathcal{H}_U(h_1\gamma, h_2\gamma)$ 中任意元素 $h\gamma$ 之间距离的下界，并以 $|\mathcal{H}|$ 表示。

根据 [BBFS19，引理 3.6], ，将 $h\gamma$ 替换为 Y_U 中与之相邻的顶点，并交换 $h_1\gamma$ 和 $h_2\gamma$ 后，我们不妨假设 $h\gamma \in \mathrm{H}_U(h_3\gamma, h_1\gamma)$。此外，根据 [BBFS19，定理 3.3（G）], 该集合按引理 3.4 中所述构成全序。根据 [BBFS19，引理 3.6] ， $h\gamma$ 在序中排在 H 之后。因此，对所有 $h'\gamma \in \mathrm{H}$，都有 $d_{h'\gamma}(h\gamma, h_3\gamma) \geq U$，也就是说，$\mathrm{H} \subseteq \mathrm{H}_U(h_3\gamma, h\gamma)$。于是，鉴于 [BBFS19，推论 3.7], ，我们可以得出 $d_{\mathbb{Y}_U}(h\gamma, h_3\gamma) \geq |\mathrm{H}|/2$，证明至此完成。□

记号 5. 回想一下，在记号 *4* 中已经固定了 θ、B 和 L。固定足够大的 $T_0 \geq$ 最大值$\{100(\theta + B + L)\ U\}$，使得引理 *3.4*（线性序）成立；并且 U 足够大，使得上述关于$\mathbb{Y}_U$ 的所有结果都适用。

与假设 A 中一样，我们考虑由一个有限支撑测度驱动的 G 上的随机游走 (w_n)，该测度将 G 生成作半群。

以下是 [MT18] 的主要定理（另见 [MS20，定理 9.1]）：

定理 4.5. *(*[MT18]*)* 设 G 是一个有限生成群，它双曲圆柱地作用于一个测地度量空间 X。设$(w_n)_n$ 是由一个非初等有限支撑测度 μ 驱动的随机游走。那么存在一个常数 $C > 0$，使得对所有 n，都有

$$\mathbb{P}\Big[d_X(x_0, w_n x_0) \geq n/C\Big] \geq 1 - Ce^{-n/C}.$$

由定理 4.3， G 在 Y_U 上的作用是双曲圆柱的。因此，应用定理 4.5 和命题 4.2，可得：

推论 4.6. 对于所有 $T \geq T_0$，存在常数 $\epsilon_0, C_0 > 0$ 使得：

$$\mathbb{P}\Big[|\mathcal{H}_T(1, z_n)| \geq \epsilon_0 n\Big] \geq 1 - C_0 e^{-n/C_0}.$$

这恰好就是命题 3.1。

4.1.2. 满足假设 *A* 的群的命题 *3.2* 的证明。 我们首先证明，相对于一条固定测地线，随机游走 w_n 在第 n 步的位置的格罗莫夫积大于 t 的概率随 t 指数衰减：

引理 4.7. 设 G 是一个有限生成群，它在双曲空间 X 上双曲圆柱地作用，基点为 x_0。那么存在常数 $D_1 > 0$，使得以下结论成立。对于所有 $o \in G$ 和 $t > 0$:

$$\mathbb{P}\Big[(ox_0, w_n x_0)_{x_0} > t\Big] \leq D_1 e^{-t/D_1}.$$

证明。 回顾一下，阴影 $S_{x_0}(x, R)$ 的定义（例如见 [MT18，第 2] 节）如下：

$$S_{x_0}(x, R) = \{y \in X : (x, y)_{x_0} \geq d_X(x_0, x) - R\}.$$

下述结论在 [Mah12, 引理 2.10] 中证明对映射类群成立，并在 [MT18, 公式 (16)] 中证明对所有双曲可柱状群成立。我们将采用 [MS19, 命题 9.3] 的表述。存在一个仅取决于 G 在 X 上的作用的常数 $R_0 > 0$，以及常数 $K > 0$ 和 $D_1' > 0$，使得对于所有 $g \in G$ 和 $R \geq R_0$：

$$\mathbb{P}\Big[w_n \in S_{x_0}(gx_0, R)\Big] \leq Ke^{-D_1'(d_X(x_0, gx_0) - R)}. \tag{1}$$

令 $D_1 := \max\{Ke^{D_1' R_0}, 1/D_1'\}$，并令 $o \in G$ 和 $t > 0$。根据 o，需要考虑三种情况。

情况 1： 若 $d_X(x_0, ox_0) - t < 0$，则 $(ox_0, w_n x_0)_{x_0} < t$，即

$$\mathbb{P}[(ox_0, w_n x_0)_{x_0} > t] = 0.$$

情形 2： 若 $d_X(x_0,\ ox_0) - t \geq R_0$，则根据阴影的定义，若 $(ox_0,\ w_n x_0)_{x_0} > t$，则 $w_n \in S_{x_0}(ox_0,\ d_X(x_0,\ ox_0) - t) = \{y : (ox_0,\ y)_{x_0} \geq t\}$。因此，由公式（1）（因为 $d_X(x_0,\ ox_0) - t \geq R_0$）：

$$\mathbb{P}\Big[(ox_0, w_n x_0)_{x_0} > t\Big] \leq \mathbb{P}\Big[w_n \in S_{x_0}(ox_0, d_X(x_0, ox_0) - t)\Big] \leq K e^{-D_1' t} \leq D_1 e^{-t/D_1}.$$

情形 3： 若 $0 \leq d_X(x_0,\ ox_0) - t < R_0$，则 $(ox_0,\ w_n x_0)_{x_0} > t$ 意味着 $(ox_0,\ w_n x_0)_{x_0} > d_X(x_0,\ ox_0) - R_0$，因此 $w_n \in S_{x_0}(ox_0,\ R_0)$。因此，再次由公式（1）可得：

$$\mathbb{P}\Big[(ox_0, w_n x_0)_{x_0} > t\Big] \leq \mathbb{P}\Big[w_n \in S_{x_0}(ox_0, R_0)\Big] \leq K e^{-D_1'(d_X(x_0, ox_0) - R_0)} \leq K e^{D_1' R_0} e^{-D_1' t} \leq D_1 e^{-t/D_1}$$

as $d_X(x_0,\ ox_0) > t$，并根据 $D_1 > 0$ 的选取。至此，引理得证。 □

现在我们可以证明，命题 3.2 对满足假设 A 的随机游走成立。

满足假设 *A* 的群的命题 *3.2* 的证明。令 $C_1 :=$ 最大值$\{D_1 e^{\Delta/D_1}, 2D_1\}$ 其中 Δ 来自引理 4.4，而 D_1 来自引理 4.7。

注意，根据引理 4.4，若 $|\mathcal{H}_T(o,p) \cap \mathcal{H}_T(p, w_n^p)| > t$，则对于某个基点 x_0，有 $(ox_0, w_n^p x_0)_{px_0} > t/2 - \Delta$ 属于 Y_T。现在，根据定理 4.3，G 在 Y_T 上的作用（基点为 x_0）是双曲圆柱的，因此我们可以使用引理 4.7：

$$\mathbb{P}\Big[|\mathcal{H}_T(o,p) \cap \mathcal{H}_T(p, w_n^p)| > t\Big] \leq \mathbb{P}\Big[(ox_0, w_n^p x_0)_{px_0} > t/2 - \Delta\Big] \leq D_1 e^{\Delta/D_1} e^{-t/(2D_1)} \leq C_1 e^{-t/C_1}$$

根据 C_1 的选择。 □

4.2. 满足假设 B 的群的命题 3.1 和命题 3.2 的证明。在本小节中，我们假设 G 和马尔可夫链 $(w_n^o)_n$ 满足假设 B。特别是，它们满足 GS21 命题 5.1] 的结论。粗略地说，该命题指出，在任意给定的点 p，从 p 出发的马尔可夫链在这些陪集上的投影回退超过“t”的概率，会随 t 指数衰减。为方便读者，我们回顾该命题的结论：

- 对于每个 $T \geq T_0'$，都存在一个常数 C_1'，使得对所有 $o,\ p \in G$、$n \in \mathbb{N}$ 以及 $t > 0$，都有：

$$\mathbb{P}\left[\exists r \leq n : \sum_{\mathcal{H}_T(o,p)} [p, w_r^p] \geq t\right] \leq C_1' e^{-t/C_1'}.$$

取 $T_0 \geq \max\{100(B + \theta + L,\ T_0'\}$，其中 $\theta,\ B,\ L$ 来自记号 4。我们先证明命题 3.2，因为它很容易由 [GS21 的结论（命题 5.1]）推出。

满足假设 *B* 的群的命题 *3.2* 的证明。注意，如果 $|H_T(x、\ g) \cap H_T(g、\ w_k^g)| > t$ 那么：

$$\sum_{\mathcal{H}_T(x,g)} [g, w_k^g] \geq \sum_{\mathcal{H}_T(x,g) \cap \mathcal{H}_T(g, w_k^g)} [g, w_k^g] \geq T \cdot |\mathcal{H}_T(x,g) \cap \mathcal{H}_T(g, w_k^g)| > Tt.$$

因此，根据命题 [GS21 命题 5.1] 的结论，可得：

$$\mathbb{P}\Big[\exists k \leq m : |\mathcal{H}_T(x,g) \cap \mathcal{H}_T(g, w_k^g)| > t\Big] \leq \mathbb{P}\Big[\exists k \leq m : \sum_{\mathcal{H}_T(x,g)} [g, w_k^g] \geq tT\Big] \leq C_1' e^{-tT/C_1'} \leq C_1 e^{-t/C_1}$$

对于某个常数 $C_1 > 0$。这就证明了命题 3.2。 □

为了证明命题 3.1，我们实际上将证明一个稍强的结论，即存在常数 ϵ_0 和 $C_0 > 0$，使得对所有 $o \in G$，都有：

$$\mathbb{P}\Big[|\mathcal{H}_T(o, w_n^p)| - |\mathcal{H}_T(o,p)| \geq \epsilon_0 n\Big] \geq 1 - C_0 e^{-n/C_0}.$$

根据粗三角不等式（推论 3.7），只需证明命题 3.1。我们先证明以下结果，以便进行与 [GS21 第 6] 节类似的计算。

命题 4.8。 对于所有 $T \geq T_0$，存在 $\lambda, \kappa > 0$ 和 m，使得对于所有 $o, p \in G$：

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda\left(|\mathcal{H}_T(o,p)| - |\mathcal{H}_T(o,w_m^p)|\right)\right)\right] \leq 1-\kappa.$$

现在我们固定一些 $T \geq T_0$。下面的引理告诉我们，马尔可夫链正在生成对数数量个“新”陪集。

引理 4.9. 存在 $\eta > 0$ 和一个函数 $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，满足 $h(m) \to 0$，使得对所有 m：

$$\mathbb{P}\left[\exists k \leq m : |\mathcal{H}_T(p, w_k^p) \backslash \mathcal{H}_T(o,p)| \geq \eta \log(m)\right] \geq 1 - h(m).$$

证明。 下面的断言与 [GS21, 引理 3.17] 类似。

断言 2。 存在常数 U、$\eta > 0$，使得对所有 p：

$$\mathbb{P}\left[\exists k \leq m : |\mathcal{H}_T(p, w_k^p)| \geq \eta \log(m)\right] \geq 1 - Ue^{-\sqrt{m}/U}.$$

断言的证明。 设 $\eta, U > 0$ 如 GS21 引理 2.10], 中所述。值得注意的是，其中的证明并未使用温和性中的“非均值性”判据，因此对这里考虑的马尔可夫链同样成立。另请注意，断言中最后的“η”实际上会与此处不同。取 h 为G 中不属于 $\gamma = E(g)$的一个元素，并令 $\eta' = \eta/(T + \ell_G(h))$。令 $y := g^T h g^T \cdots g^T h$，其中 g^T的数量为$\lceil \eta' \log(m) \rceil$。于是，对于所有 $m \geq m_0$，存在某个m_0，使得 $\ell_G(y) \leq (\eta' \log(m) + 1)(\ell_G(h) + T) \leq \eta \log(m)$。因此，根据 GS21 引理 2.10] ，对于所有 $m \geq m_0$，有：

$$\mathbb{P}\left[\exists i, j \leq m : (w_i^p)^{-1} w_j^p = g^T h g^T \cdots g^T h\right] \geq 1 - e^{-\sqrt{m}/U}.$$

因此 $\mathbb{P}\left[|\mathcal{H}_T(w_i^p, w_j^p)| \geq \eta' \log(m)\right] \geq 1 - e^{-\sqrt{m}/U}$，所以根据 $\mathcal{H}_T$的粗三角不等式，可得 $\mathbb{P}\left[|\mathcal{H}_T(p, w_k^p)| \geq \eta' \log(m)/2\right] \geq 1 - e^{-\sqrt{m}/U}$，其中 $k = i$ 或 $k = j$成立。

通过增大 U，我们可以涵盖 $m < m_0$ 的情形，从而得到对所有 m：

$$\mathbb{P}\left[\exists k \leq m : |\mathcal{H}_T(p, w_k^p)| \geq \eta \log(m)\right] \geq 1 - Ue^{-\sqrt{m}/U}$$

从而证明该断言。 □

设 $\eta > 0$ 如断言中所述，注意到引理 4.9 陈述中的最后一个“η”实际上是这里的二分之一。由命题 3.2 可知，对所有 $q \in \mathbb{N}$，我们有：

$$\mathbb{P}[|\mathcal{H}_T(o,p) \cap \mathcal{H}_T(p, w_q^p)| > \eta \log(m)/2] \leq C_1 m^{-\eta/2C_1}.$$

令 $\mathcal{D}_{q,\ g,\ m}$ 表示事件“$w_q^p = g$ 且 $|\mathcal{H}_T(p,\ g)| \geq \eta \log(m)$，并且 $\forall i < q$： $|\mathcal{H}_T(p,\ w_i^p)| < \eta \log(m)$”（即 $w_q^p = g$，且 q 是满足 $|\mathcal{H}_T(p,\ w_q^p)| \geq \eta \log(m)$ 的最早时刻）。以此事件为条件，对固定的 m，我们得到：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\exists k \leq m : |\mathcal{H}_T(p, w_k^p) \backslash \mathcal{H}_T(o,p)| \geq \frac{\eta}{2} \log(m)\right] &= \sum_{\substack{q \leq m \\ g \in G}} \mathbb{P}\left[\exists k \leq m : |\mathcal{H}_T(p, w_k^p) \backslash \mathcal{H}_T(o,p)| \geq \frac{\eta}{2} \log(m) \middle| \mathcal{D}_{q,g,m}\right] \mathbb{P}[\mathcal{D}_{q,g,m}] \\
&\geq \sum_{\substack{q \leq m \\ g \in G}} \mathbb{P}\left[|\mathcal{H}_T(p, w_q^p) \cap \mathcal{H}_T(o,p)| \leq \frac{\eta}{2} \log(m)\right] \mathbb{P}[\mathcal{D}_{q,g,m}] \\
&\geq (1 - C_1 m^{-\eta/2C_1}) \sum_{\substack{q \leq m \\ g \in G}} \mathbb{P}[\mathcal{D}_{q,g,m}] \\
&= (1 - C_1 m^{-\eta/2C_1}) \mathbb{P}\left[\exists k \leq m : |\mathcal{H}_T(p, w_k^p)| \geq \eta \log(m)\right] \\
&\geq (1 - C_1 m^{-\eta/2C_1})(1 - e^{-\sqrt{m}/U})
\end{aligned}$$

其中，从第二行到第三行用到了命题 3.2，从第四行到第五行用到了上文的断言。

因此：

$$\mathbb{P}\left[\exists k \leq m : |\mathcal{H}_T(p, w_k^p) \backslash \mathcal{H}_T(o,p)| \geq \frac{\eta}{2} \log(m)\right] \geq 1 - h(m)$$

对于某个函数 $h(m) \to 0$。 □

引理 4.10. 设 η 如引理 *4.9* 中所述。则存在一个函数 $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，满足 $u(m) \to 0$，使得：

$$\mathbb{P}\Big[|\mathcal{H}_T(o, w_m^p) \backslash \mathcal{H}_T(o,p)| \geq \eta \log(m)\Big] \geq 1 - u(m).$$

在证明引理 4.10 之前，我们需要一些预备结果。对于所有 m、$k \leq m$ 和 $g \in G$，我们令$\mathcal{E}_{k,g,m}$ 表示事件"$w_k^p = g$ 且 k 是满足 $|\mathcal{H}_T(p, w_k^p) \backslash \mathcal{H}_T(o,p)| \geq \eta \log(m)$的首次时刻"，注意，对于固定的 m 以及不同的 k 和 g，事件 $\mathcal{E}_{k,g,m}$ 互不相交。

引理 4.11. 存在常数 M_0、$C_2 > 0$，使得对于所有 $m \geq M_0$，以下结论成立。对于所有$k \leq m$ 和 $g \in G$，有：

$$\mathbb{P}\Big[|\mathcal{H}_T(o, w_m^p) \backslash \mathcal{H}_T(o,p)| \geq \eta \log(m)/2 \Big| \mathcal{E}_{k,g,m}\Big] \geq 1 - C_2 m^{-\eta/C_2}.$$

证明。令 $\mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2 \subseteq \mathrm{H}_T(p, w_k^p)$ 定义为 $\mathsf{S}_1 := \{h\gamma \colon \pi_{h\gamma}(w_m^p) = \pi_{h\gamma}(p)\} \cap \mathrm{H}_T(p, w_k^p)$，并令 $\mathsf{S}_2 := \{h\gamma : \pi_{h\gamma}(w_m^p) = \pi_{h\gamma}(w_k^p)\} \cap \mathrm{H}_T(p, w_k^p)$。注意 $\mathsf{S}_2 \subseteq \mathrm{H}_T(p, w_m^p)$。

注意到，根据引理 3.5，我们有 $|\mathcal{H}_T(p, w_k^p)| \leq |\mathcal{S}_1| + |\mathcal{S}_2| + 2$。因此：

$$|\mathcal{H}_T(p, w_m^p) \backslash \mathcal{H}_T(o,p)| \geq |\mathcal{S}_2 \backslash \mathcal{H}_T(o,p)| \geq |\mathcal{H}_T(p, w_k^p) \backslash \mathcal{H}_T(o,p)| - |\mathcal{S}_1| - 2.$$

因此，根据引理 3.6，我们有：

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}_T(o, w_m^p) \backslash \mathcal{H}_T(o,p)| &\geq |\mathcal{H}_T(p, w_m^p) \backslash \mathcal{H}_T(o,p)| - 2 \\ &\geq |\mathcal{H}_T(p, w_k^p) \backslash \mathcal{H}_T(o,p)| - |\mathcal{S}_1| - 4 \end{aligned}$$

因此：

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\Big[|\mathcal{H}_T(o, w_m^p) \backslash \mathcal{H}_T(o,p)| \geq \eta \log(m)/2 \Big| \mathcal{E}_{k,g,m}\Big] &\geq \mathbb{P}\Big[|\mathcal{H}_T(p, w_k^p) \backslash \mathcal{H}_T(o,p)| - |\mathcal{S}_1| - 4 \geq \eta \log(m)/2 | \mathcal{E}_{k,g,m}\Big] \\ &\geq \mathbb{P}\Big[|\mathcal{S}_1| \leq \eta \log(m)/2 - 4 | \mathcal{E}_{k,g,m}\Big]. \end{aligned}$$

现在注意到，一旦我们对$\mathcal{E}_{k,\ g,\ m}$ 进行了条件化，那么 $w_k^p = g$ 就是固定的。因此，根据 GS21 中命题 5.1] 的结论：

$$\mathbb{P}\Big[|\mathcal{S}_1| > \eta \log(m)/2 - 4 | \mathcal{E}_{kg}\Big] \leq \mathbb{P}\Big[\sum_{\mathcal{H}_T(p,g)} [g, w_{m-k}^g] > T(\eta \log(m)/2 - 4)\Big] \leq C_1' m^{-T(\eta \log(m)/2 - 4)} \leq C_2 m^{-\eta/C_2}$$

对于某个常数 $C_2 > 0$. □

现在我们可以使用上述引理，对事件$\mathcal{E}_{k,\ g,\ m}$ 进行条件化，如下所示：

引理 4.10 的证明。 使用上文定义的事件 $\mathcal{E}_{k,\ g,\ m}$：

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\Big[|\mathcal{H}_T(o, w_m^p) \backslash \mathcal{H}_T(o,p)| \geq \eta \log(m)/2\Big] &= \sum_{\substack{k \leq m \\ g \in G}} \mathbb{P}\Big[|\mathcal{H}_T(o, w_m^p) \backslash \mathcal{H}_T(o,p)| \geq \eta \log(m)/2 \Big| \mathcal{E}_{k,g,m}\Big] \mathbb{P}\Big[\mathcal{E}_{k,g,m}\Big] \\ &\geq (1 - C_2 m^{-\eta/C_2}) \mathbb{P}\Big[\exists k \leq m : |\mathcal{H}_T(p, w_k^p) \backslash \mathcal{H}_T(o,p)| \geq \eta \log(m)\Big] \\ &\geq (1 - C_2 m^{-\eta/C_2})(1 - h(m)) = 1 - u(m) \end{aligned}$$

其中，从第二行到第三行用到了引理 4.9 和引理 4.11，对于某个函数u，满足 $u(m) \to 0$。□

命题 *4.8* 的证明。 根据柯西-施瓦茨不等式，我们得到：

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda\left(|\mathcal{H}_T(o,p)| - |\mathcal{H}(o, w_m^p)|\right)\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[\exp\left(2\lambda\left(|\mathcal{H}_T(o,p) \backslash \mathcal{H}_T(o, w_m^p)|\right)\right)\right]^{1/2} \mathbb{E}\left[\exp\left(-2\lambda\left(|\mathcal{H}_T(o, w_m^p) \backslash \mathcal{H}_T(o,p)|\right)\right)\right]^{1/2}.$$

我们分别计算这些项。第一个期望值可用以下断言计算。

断言 3。 存在一个常数 $C_3 > 0$，使得对于所有 o、$p \in G$、$m \in \mathbb{N}$ 和 $s \geq 0$，我们有：

$$\mathbb{P}\Big[|\mathcal{H}_T(o,p) \backslash \mathcal{H}_T(o, w_m^p)| \geq s\Big] \leq C_3 e^{-s/C_3}.$$

证明。由引理 3.5 可知，从 $\mathrm{H}_T(o,p)\backslash\mathrm{H}_T(o,w_m^p)$ 中至多有 2 个陪集（记作 $t_1\gamma$、$t_2\gamma$）满足$\pi_{t_i\gamma}(w_m^p) \neq \pi_{h\gamma}(p)$ 且 $\pi_{t_i\gamma} \neq \pi_{h\gamma}(o)$。对于除这 2 个陪集 $t_i\gamma$ 之外的所有陪集，必有 $\pi_{h\gamma}(w_m^p)= \pi_{h\gamma}(o)$（否则 $h\gamma \in \mathrm{H}_T(o,w_m^p)$）。因此，对于所有陪集 $h\gamma \in \mathrm{H}_T(o,p)\backslash\mathrm{H}_T(o,w_m^p)$（除 $t_i\gamma$ 外），我们有$d_{h\gamma}(p,w_m^p) = d_{h\gamma}(p,o) \geq T$。因此，若 $|\mathrm{H}_T(o,p)\backslash\mathrm{H}_T(o,w_m^p)|\geq s$，则

$$\sum_{\mathcal{H}_T(o,p)} [p,w_m^p] \geq \sum_{\mathcal{H}_T(o,p)\backslash\mathcal{H}_T(o,w_m^p)} d_{h\gamma}(p,w_m^p) \geq \big(|\mathcal{H}_T(o,p)\backslash\mathcal{H}_T(o,w_m^p)|-2\big)\,T \geq (s-2)T$$

因此，根据 [GS21 命题 5.1] 的结论：

$$\mathbb{P}\Big[|\mathcal{H}_T(o,p)\backslash\mathcal{H}_T(o,w_m^p)|\geq s\Big] \leq \mathbb{P}\Big[\sum_{\mathcal{H}_T(o,p)} [p,w_m^p] \geq (s-2)T\Big] \leq C_1' e^{-(s-2)T/C_1'}.$$

将常数增大为满足 $C_1' e^{-(s-2)T/C_1'} \leq C_3 e^{-s/C_3}$ 的常数 C_3，即可证明该断言。 □

因此，利用断言 3 并选取 $\lambda < 1/(2C)$，我们可以如下界定上文期望值中的第一项：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\Big(2\lambda(|\mathcal{H}_T(o,p)\backslash\mathcal{H}_T(o,w_m^p)|)\Big)\right] &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\Big[\exp(2\lambda\left(|\mathcal{H}_T(o,p)\backslash\mathcal{H}_T(o,w_m^p)|\right) \geq s\Big] ds \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\Big[|\mathcal{H}_T(o,p)\backslash\mathcal{H}_T(o,w_m^p)|\geq \ln(s)/2\lambda\Big] \\
&= \int_0^{1} \mathbb{P}\Big[|\mathcal{H}_T(o,p)\backslash\mathcal{H}_T(o,w_m^p)|\geq \ln(s)/2\lambda\Big] + \int_1^{+\infty} \mathbb{P}\Big[|\mathcal{H}_T(o,p)\backslash\mathcal{H}_T(o,w_m^p)|\geq \ln(s)/2\lambda\Big] \\
&\leq 1 + C\int_1^{+\infty} s^{-1/(2\lambda C)} ds \\
&= 1 + \frac{2C^2\lambda}{1-2\lambda C}.
\end{aligned}$$

这给出了期望值表达式中第一项的上界。我们可以如下求出第二项的上界。令 A 为事件：“$|\mathcal{H}(o,w_m^p)\backslash\mathcal{H}(o,p)|\geq \eta\log(m)/2$”，那么根据引理 4.10，我们得到

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-2\lambda\left(|\mathcal{H}_T(o,w_m^p)\backslash\mathcal{H}_T(o,p)|\right)\Big)\Big] =$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\Big(-2\lambda\left(|\mathcal{H}_T(o,w_m^p)\backslash\mathcal{H}_T(o,p)|\right)\mathbb{1}_A\right] + \mathbb{E}\left[\exp\Big(-2\lambda\left(|\mathcal{H}_T(o,w_m^p p)\backslash\mathcal{H}_T(o,p)|\right)\mathbb{1}_{A^C}\right] &\leq m^{-\lambda\eta} + \mathbb{P}[A^C] \\
&\leq m^{-\lambda\eta} + u(m)。
\end{aligned}$$

因此：

$$\mathbb{E}\left[\exp\Big(\lambda\left(|\mathcal{H}_T(o,p)|-|\mathcal{H}_T(o,w_m^p)|\right)\Big)\right] \leq \left(1+\frac{2C^2\lambda}{1-2\lambda C}\right)^{1/2}\Big(u(m)+m^{-\lambda\eta}\Big)^{1/2}$$

回顾一下，λ 已固定，存在 m 和 $\kappa>0$，使得：

$$\mathbb{E}\left[\exp\Big(\lambda\left(|\mathcal{H}_T(o,p)|-|\mathcal{H}_T(o,w_m^p)|\right)\Big)\right] \leq 1-\kappa.$$

□

现在，我们已经具备了证明命题 3.1 所需的全部结果，适用于满足假设 B 的群和马尔可夫链。

满足假设 *B* 的群的命题 *3.1* 的证明。对于所有整数，我们有 $j>0$：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\exp\Big(\lambda(|\mathcal{H}_T(o,p)|-|\mathcal{H}_T(o,w^p_{(j+1)m})|)\Big)\Big]\\
&\quad=\mathbb{E}\Big[\exp\Big(\lambda(|\mathcal{H}_T(o,p)|-|\mathcal{H}_T(o,w^p_{(j+1)m})|-|\mathcal{H}_T(o,w^p_{jm})|+|\mathcal{H}_T(o,w^p_{jm})|)\Big)\Big]\\
&\quad=\sum_{g\in G}\mathbb{E}\Big[e^{(\lambda(|\mathcal{H}_T(o,p)|-|\mathcal{H}_T(o,w^p_{(j+1)m})|-|\mathcal{H}_T(o,w^p_{jm})|+|\mathcal{H}_T(o,w^p_{jm})|)}\Big|w_{jm}=g\Big]\mathbb{P}\Big[w_{jm}=g\Big]\\
&\quad\leq(1-\kappa)\mathbb{E}\Big[e^{-\lambda(|\mathcal{H}_T(o,w^p_{jm})|-|\mathcal{H}_T(o,p)|)}\Big]
\end{aligned}$$

因此，通过归纳法，我们得到

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda\left(|\mathcal{H}_T(o,p)|-|\mathcal{H}_T(o,w^p_{jm})|\right)\right)\right]\leq(1-\kappa)^j.$$

因此，由马尔可夫不等式可得：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big[|\mathcal{H}_T(o,w^p_{jm})|-|\mathcal{H}_T(o,p)|\leq\epsilon_0 jm\Big]&=\mathbb{P}\Big[\exp\Big(-\lambda(|\mathcal{H}_T(o,w^p_{jm})|-|\mathcal{H}_T(o,p)|\Big))>\exp(-\lambda\epsilon_0 jm)\Big]\\
&\leq\frac{\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda\left(|\mathcal{H}_T(o,p)|-|\mathcal{H}_T(o,w^p_{jm})|\right)\right)\right]}{\exp(-\lambda\epsilon jm)}\\
&\leq(1-\kappa)^j e^{\lambda\epsilon_0 jm}.
\end{aligned}$$

将 ϵ_0 选得足够小，我们便可找到一个常数 C_0，使得

$$\mathbb{P}\Big[|\mathcal{H}_T(o,w^p_{jm})|-|\mathcal{H}_T(o,p)|\leq\epsilon_0 jm\Big]\leq C_0e^{-jm/C_0}.$$

按照与 [GS21 第 6]，节开头类似的论证，这足以证明对所有n，我们都有：

$$\mathbb{P}\Big[|\mathcal{H}_T(o,w^p_n)|-|\mathcal{H}_T(o,p)|\geq\epsilon_0 n\Big]\geq 1-C_0e^{-n/C_0}.$$

正如前面提到的，由粗三角不等式（推论 3.7）可知，这就证明了命题 3.1。

因此，我们已经证明，只要群 G 和马尔可夫链 $(w^o_n)_n$ 满足假设 B，命题 3.1 和 3.2 就都成立。□

5. 定理 3.3 的证明

现在我们证明，若命题 3.1 和命题 3.2 成立，则定理 3.3 也成立。取 T，使其大于命题 3.1 和命题 3.2 中的 T_0 和 T_0'。令 $\epsilon_0, C_0>0$ 如命题 3.1 中针对该 T 所述。对于所有 $x,y\in G$ 和 $S>0$，我们令

$$\mathcal{A}^S_{x,y}:=\mathcal{H}_T(x,y)\cap\{h\gamma:\pi_{h\gamma}(x)\subseteq B(x,S)\}.$$

备注 2. 注意，$H_T(x,y)=H_T(y,x)$，但一般而言 $\mathcal{A}_{y,x}\neq\mathcal{A}^S_{y,x}$。

下述命题在证明定理 3.3 时至关重要，它指出，不仅 $\mathcal{H}_T(p,w^p_n)$ 中陪集的数量线性增长，而且其中满足 $\pi_{h\gamma}(p)$ 接近 p 的陪集数量也线性增长。

命题 5.1. 对于所有 $\epsilon\leq\epsilon_0$，存在常数 $\nu,C_4>0$，使得对于所有 $n\in\mathbb{N}$ ：

$$\mathbb{P}\Big[|\mathcal{A}^{\epsilon n/2}_{p,w^p_n}|\geq\nu n\Big]\geq 1-C_4e^{-n/C_4}.$$

为了证明命题 5.1，我们需要若干引理。我们令 $\epsilon\leq\epsilon_0$，并在整个证明过程中固定它。于是由命题 3.1 得：

$$\mathbb{P}\Big[|\mathcal{H}_T(p,w^p_n)|\geq\epsilon n\Big]\geq\mathbb{P}\Big[|\mathcal{H}_T(p,w^p_n)|\geq\epsilon_0 n\Big]\geq 1-C_0e^{-n/C_0}. \tag{2}$$

现在固定 $n \in \mathbb{N}$。为简化记号，由于 ϵ 已固定，对于所有 $x\,y \in G$，我们记 $\mathcal{A}_{x,\ y} := \mathcal{A}_x^{\epsilon n/2,\ y}$。对于任意 $U \geq 0$，我们令 $\mathcal{B}_U \subseteq G$ 为满足以下条件的元素集合：

$$\mathcal{B}_U := \{g \in G : |\mathcal{A}_{p,g}| \geq U\}.$$

对于所有 $k \leq n$ 和 $g \in G$，我们考虑事件 $B_{k,\ U,\ g}$：“$w_k^p = g$ 和 $g \in \mathcal{B}_U$，且对于所有 $i < k$：$w_i^p \notin \mathcal{B}_U$”（即 $w_k^p = g$是满足 $w_k^p \in B_U$的 k首次出现的时刻）。注意，对于任意 $U \geq 0$以及互不相同的k_1, $k_2 \in \mathbb{N}$，事件 $B_{k_1,\ U,\ g}$ 与 $B_{k_2,\ U,\ g}$ 互不相交。我们需要以下两个引理。

引理 5.2。存在常数 ϵ_3、$C_5 > 0$，使得

$$\mathbb{P}\left[\exists k \leq n : |\mathcal{A}_{p,w_k^p}| \geq \epsilon_3 n\right] \geq 1 - C_5 e^{-n/C_5}.$$

下面的引理稍后将使我们能够对上述定义的事件进行条件化。

引理 5.3。对于所有 $\tau > 0$，存在一个常数 C_6，使得下述结论成立。对于所有 $k \leq n$，我们有：

$$\mathbb{P}\left[|\mathcal{A}_{1,z_n}| \geq \frac{9\tau n}{10} \quad \middle| B_{k,\tau n,g}\right] \geq 1 - C_6 e^{-n/C_6}.$$

现在只剩下证明这两个引理。为了证明另外两个引理，我们将两次使用以下引理，因此先在此陈述。

回顾一下，θ，B，K，L和 f已在记号 4 中固定。注意，下面的引理讨论的是离散路径 α，且下文引理中的邻域$\mathcal{N}_s^G$是相对于距离 d_G而言的。

引理 5.4. 设 $x, y \in G$，设 α是从 x到 y的一条离散路径，设 $r > 0$，并设 $F \subseteq H_T(x, y)$ 满足：对所有 $h\gamma \in F$，以下条件成立：

- *if* $p \in \alpha$ *and* $d_{h\gamma}(x, p) \leq \theta + B + 2L$ *then* $p \notin \mathcal{N}_s^G(h\gamma)$.

那么 $\ell(\alpha) > |F| f(s)$。

证明。设 α, s和 F 如引理所述。稍作滥用，我们将 α 视为一条离散路径，即一个点序列，其中相邻点之间的距离为 1；通过用适当的离散化替换 α 即可做到这一点。我们按照 $H_T(x, y)$ 给出的线性次序排列 F 中的陪集。从最小的陪集开始，对所有 $h_i\gamma \in F$，我们定义 α_i^- 为沿着 α 满足 $d_{h_i\gamma}(x, \alpha_i^-) \leq B + L$ 的最后一个点，并将 α_i^+ 定义为 $d_{h_i\gamma}(\alpha_i^-, \alpha_i^+) \geq \theta$首次成立的时刻。根据 $T \gg \theta, B, L$的选取，这是可行的。令 $\alpha_i = \alpha|_{[\alpha_i^-, \alpha_i^+]}$。注意，$\alpha_i$上的任意 p都满足 $d_{h_i\gamma}(p, x) > B$（否则，沿着 α 位于 p 之后的点 p' 将满足 $d_{h_i\gamma}(x, p') \leq B + L$，这与 α_i^- 是最后一个满足该条件的点矛盾），且 $d_{h_i\gamma}(p, y) > B$（否则，前一个点 p'将满足 $d_{h_i\gamma}(\alpha_i^-, p') \geq \theta$）。特别地，根据引理 3.4，对于所有 $i \neq j$，我们有 $d_{h_j\gamma}(p, x) \leq B$ 或 $d_{h_j\gamma}(p, y) \leq B$ 对所有 $p \in \alpha_i$成立。这说明 α_i 两两不相交。对于所有 $p \in \alpha_i$，我们有 $d_{h_i\gamma}(x, p) \leq \theta + B + 2L$，因此根据假设，$\alpha_i \cap \mathbf{N}_s(h_i\gamma) = \emptyset$。于是，由 f-发散性可得：

$$\ell(\alpha) \geq \sum_{h_i\gamma \in \mathcal{F}} \ell(\alpha_i) > |\mathcal{F}| f(s).$$

□

在证明引理 5.2 之前，我们先陈述几个引理。第一个引理与 [GS21, 引理 3.6] 类似，并确保我们之后可以应用引理 5.4。球 B^G 是相对于度量d_G而言的。

引理 5.5. 存在常数 $D_2 > 0$ 和 $N \in \mathbb{N}$，使得以下结论成立。对于所有 $n \geq N$以及所有满足 $z \in B^G(x, \epsilon n/3)$ 的 $x, z \in G$，我们有：

$$d_G(x, z) > |\mathcal{H}_T(x, z) \cap \{h\gamma : \pi_{h\gamma}(x) \not\subseteq B^G(x, \epsilon n/2)\}| \cdot f(n/D_2).$$

证明。令 $D_1 \geq \max\{D, a, b\}$，其中 D来自引理 3.8，而 a, b是 $h\gamma \hookrightarrow G$的拟等距嵌入常数。取足够大的 D_2，使得 $\epsilon/6 - D_1/D_2 > 0$，其中 D 来自引理 3.8；再取 N，使得对所有 $n \geq N$，都有 $D_1(\theta + B + 2L) + 2D_1 \leq n(\epsilon/6 - D_1/D_2) - 2B$。

固定 $n \geq N$ 和 $z \in B(x, \epsilon n/3)$。令 $\mathcal{F} := \mathcal{H}_T(x, z) \cap \{h\gamma : \pi_{h\gamma}(x) \not\subseteq B(x, \epsilon n/2)\}$。根据引理 5.4，只需证明对所有 $h\gamma \in \mathcal{F}$ 以及所有满足 $d_{h\gamma}(x, p) \leq \theta + B + 2L$ 的 $p \in [x, z]$，都有 $p \notin \mathcal{N}^{n/D_2}(h\gamma)$。

因此，设 $h\gamma \in \mathcal{F}$ 和满足 $d_{h\gamma}(x,\ p) \leq \theta + B + 2L$ 的 $p \in [x,z]$。为导出矛盾，假设$p \in \mathcal{N}^{n/D_2}(h\gamma)$。那么，根据 D_2 和 n 的选取以及引理 3.8，我们有：

$$\begin{aligned} d_G(x, \pi_{h\gamma}(x)) &\leq d_G(x,p) + d_G(p, \pi_{h\gamma}(p)) + d_G(\pi_{h\gamma}(p), \pi_{h\gamma}(x)) \\ &\leq \epsilon n/3 + nD_1/D_2 + D_1 + D_1(\theta + B + 2L) + D_1 + 2B \\ &< n\Big(\epsilon/3 + \epsilon/6 + D_1/D_2 - D_1/D_2\Big) = \epsilon n/2 \end{aligned}$$

与 $\pi_{h\gamma}(x) \not\subseteq B(x,\ \epsilon n/2)$ 矛盾（其中“$2B$”补偿了 $\pi_{h\gamma}(p)$ 的直径）。 □

记号 6。令 $\epsilon_1 < \epsilon/3K$，其中 K 来自马尔可夫链 (w_k^p, w_{k+1}^p) 的界（见记号 *4* 和假设 *B*），固定 $\epsilon_2 = \epsilon \cdot \epsilon_1$ 和 $\epsilon_3 = \epsilon \cdot \epsilon_1/3$。

引理 5.6。存在 $N_0 \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq N_0$，以下结论均成立。若 $d_G(x,y) \leq \epsilon n/3$ 且 $|H_T(x,y)| > \epsilon_2 n$，则 $|\mathcal{A}_{x,\ y}| \geq \epsilon_3 n$，其中 ϵ_1、ϵ_2、ϵ_3 如记号 *6* 所述。

证明。设 $D_2 > 0$ 和 $N \in \mathbb{N}$ 如引理 5.5 所述。取 n_0，使得对所有 $n \geq n_0$，都有$f(n/D_2) > 1/(2\epsilon_1)$（因为 f 是发散的）。令 $N_0 = \max\{n_0, N\}$ 以及 $n \geq N_0$。由于 $d_G(x,y) \leq \epsilon n/3$ 且 $n \geq N$，我们可以应用引理 5.5 得到：

$$\epsilon n/3 \geq d_G(x,y) > |\mathcal{H}_T(x,y) \cap \{h\gamma : \pi_{h\gamma}(x) \not\subseteq B(x, \epsilon n/2)\}| \cdot f(n/D_2)$$

因此

$$|\mathcal{H}_T(x,y) \cap \{h\gamma : \pi_{h\gamma}(x) \not\subseteq B(x, \epsilon n/2)\}| < \frac{\epsilon n}{3f(n/D_2)}.$$

于是得到：

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_{x,y}| &= |\mathcal{H}_T(x,y)| - |\mathcal{H}_T(x,y) \cap \{h\gamma : \pi_{h\gamma}(x) \not\subseteq B(x, \epsilon n/2)\}| \\ &\geq \epsilon_2 n - \frac{\epsilon n}{3f(n/D_2)} \\ &= \epsilon n\Big(\epsilon_1 - \frac{1}{3f(n/D_2)}\Big) \\ &\geq \epsilon \cdot \epsilon_1 n/3 = \epsilon_3 n. \end{aligned}$$

□

现在我们可以证明引理 5.2 了。

引理 *5.2* 的证明。设 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 如记号 6 所述。注意，若 $k \leq \epsilon_1 n$，则由马尔可夫链的 K-有界跳跃可得 $d_G(p, w_k^p) \leq K\epsilon_1 n \leq \epsilon n/3$。取 N_0'大于引理 5.6 中的 N_0，并使得 $\epsilon_1 N_0' + 1 \leq N_0'$。那么对于 $n \geq N_0'$，有：

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\Big[\exists k \leq n : |\mathcal{A}_{p,w_k^p}| \geq \epsilon_3 n\Big] &\geq \mathbb{P}\Big[\exists k \leq \epsilon_1 n + 1 : |\mathcal{H}_T(p, w_k^p)| > \epsilon_2 n\Big] \\ &\geq \mathbb{P}\Big[|\mathcal{H}_T(p, w^p_{\lceil \epsilon_1 n \rceil})| > \epsilon_2 n\Big] \\ &\geq 1 - C_0' e^{-\lceil \epsilon_1 n \rceil / C_0'} \end{aligned}$$

由公式 (2) 得出。将常数增大至某个 C_5，以涵盖 $n \leq N_0'$ 的情形后，便完成了引理 5.2 的证明。□

现在我们来证明另一个关键引理。

引理 *5.3* 的证明。注意，对于所有 g，我们有 $\mathcal{A}_{p,\ w^g_{n-k}} := \mathcal{H}_T(p,\ w^q_{n-k}) \cap \{h\gamma : \pi_{h\gamma}(p) \subseteq B(p,\ \epsilon n/2)\}$，因此，若 $h\gamma \in \mathcal{A}_{p,\ w_k^p}$ 且 $h\gamma \in \mathcal{H}_T(p,\ w^g_{n-k})$，则 $h\gamma \in \mathcal{A}_{p,\ w^g_{n-k}}$。

因此，对于所有 $g \in G$、$k \leq n$ 和 $\tau > 0$：

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\Big[|\mathcal{A}_{p,w_n^p}| \geq 9\tau n/10 \ \Big|\ (|\mathcal{A}_{p,w_k^p}| \geq \tau n) \cap (w_k^p = g)\Big] &\geq \mathbb{P}\Big[|\mathcal{H}_T(g, w^g_{n-k}) \cap \mathcal{H}_T(g,p)| \leq \tau n/10\Big] \\ &\geq 1 - C_1 e^{-\tau n/(10C_1)} = 1 - C_6 e^{-n/C_6} \end{aligned}$$

这里我们使用强马尔可夫性质（参见 [GS21，引理 2.2]），且 C_1 来自命题 3.2，因此可得某个常数 $C_6 > 0$。

□

回顾一下，我们已在上文定义了集合 $\mathcal{B}_U$ 和事件 $B_{k,\ U,\ g}$。

命题 5.1 的证明。 回顾一下，我们已固定了 $\epsilon \le \epsilon_0$。令 $\epsilon_3, C_5 > 0$ 取自引理 5.2，令 C_6 为与引理 5.3 中的 $\nu = \frac{9\epsilon_3}{10}$ 相关联的常数。于是有：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big[|\mathcal{A}_{p,w_n^p}| \ge \frac{9\epsilon_3}{10}n\Big] &\ge \sum_{\substack{k\le n\\ g\in G}} \mathbb{P}\Big[|\mathcal{A}_{p,w_n^p}| \ge \frac{9\epsilon_3}{10}n \Big| B_{k,\epsilon_3 n,g}\Big]\mathbb{P}\Big[B_{k,\epsilon_3 n,g}\Big] \\
&\ge \Big(1 - C_6 e^{-n/C_6}\Big) \sum_{k\le n} \mathbb{P}\Big[B_{k,\epsilon_3 n,g}\Big] \\
&= \Big(1 - C_6 e^{-n/C_6}\Big)\mathbb{P}\Big[\exists k \le n : |\mathcal{A}_{p,w_k^p}| \ge \epsilon_3 n\Big] \\
&\ge \Big(1 - C_6 e^{-n/C_6}\Big)(1 - C_5 e^{-n/C_5}) \\
&\ge 1 - C_4 e^{-n/C_4}
\end{aligned}$$

从第一行到第二行用到了引理 5.3，从第三行到第四行用到了引理 5.2；其中 C_4 足够大，具体取值依赖于 C_5, C_6。□

令 $D > 0$ 取自引理 3.8。以下确定性引理将使我们能够求出避开一个球的路径长度，从而得到定理 3.3 中的发散。

引理 5.7。 对于所有 $\delta > 0$，都存在 $N_\delta \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $r \ge N_\delta$ 以及所有 $x, w, z \in G$，以下结论成立。任何一条从 w) 到 z 、避开球 $B(x, \delta r)$ 的离散路径 β，其长度

$$\ell(\beta) > \Big(|\mathcal{A}_{x,z}^{\delta r/2} \backslash \mathcal{A}_{x,w}^{\delta r/2}| - 2\Big) \cdot f(\frac{\delta r}{4D}).$$

证明。 令 N'_δ 满足对所有 $r \ge N'_\delta$，都有 $\delta r/2 \ge \delta r/3 + \theta + 3B + 2L$，并令 $N_\delta := \max\{N'_\delta, 12D/\delta\}$。固定 $n \ge N_\delta$。由引理 3.6，至多存在两个陪集 $t_1\gamma$ 和 $t_2\gamma$，它们位于 $\mathcal{H}_T(x, z)$ 中，使得

$$\mathcal{H}_T(x, z) \backslash \mathcal{H}_T(x, w) \subseteq \mathcal{H}_T(z, w) \cup \{t_1\gamma, t_2\gamma\}.$$

现在，若 $h\gamma \in \mathrm{A}_{x\ z}^{\delta r/2}, \backslash \mathrm{A}_{x\ w}^{\delta r/2}$，则 $\pi_{h\gamma}(x) \subseteq B(x, \delta r/2)$，因此若 $h\gamma \notin \mathrm{A}_{x\ w}^{\delta r/2},$，这是因为 $h\gamma \notin \mathrm{H}_T(x, w)$。显然我们还有 $\mathrm{H}_T(x, w)^C \subseteq (A_{x\ w}^{\delta r/2},)^C$，因此 $\mathrm{A}_{x\ z}^{\delta r/2}, \backslash \mathrm{A}_{x}^{\delta r/2},_w = \mathrm{A}_{x\ z}^{\delta r/2}, \backslash \mathrm{H}_T(x, w)$。于是，令 $\mathrm{F} := \mathrm{A}_{x\ z}^{\delta r/2}, \backslash \Big(\mathrm{A}_{x}^{\delta r/2},_w \cup \{t_1\gamma, t_2\gamma\}\Big)$，得到：

$$\mathcal{F} = \Big(\mathcal{A}_{x,z}^{\delta r/2} \backslash \mathcal{H}_T(x, w)\Big) \cap (\{t_1\gamma, t_2\gamma\})^C \subseteq \big(\mathcal{H}_T(x, z) \backslash \mathcal{H}_T(x, w)\big) \cap (\{t_1\gamma, t_2\gamma\})^C \subseteq \mathcal{H}_T(z, w).$$

既然我们已经知道 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}_T(z, w)$，接下来证明它满足引理 5.4 关于路径 β and for $s = \frac{\delta r}{4D}$ 的其他假设。注意，对所有 $h\gamma \in \mathcal{F}$，都有 $\pi_{h\gamma}(x) = \pi_{h\gamma}(w)$。设 $p \in \beta$ and $h\gamma \in \mathcal{F}$ 满足 $d_{h\gamma}(x, p) \le \theta + B + 2L$。那么：

$$\begin{aligned}
d_G(p, \pi_{h\gamma}(p)) &\ge d_G(x, p) - d_G(x, \pi_{h\gamma}(x)) - d_G(\pi_{h\gamma}(x), \pi_{h\gamma}(p)) \\
&\ge \delta r - \delta r/2 - (\theta + B + 2L) - 2B \\
&\ge \delta r/3
\end{aligned}$$

根据 N'_δ 的选取。由引理 3.8 以及 N_δ 的选取可得 $d_G(p, h\gamma) \ge \delta r/(3D) - 1 \ge \delta r/(4D)$。因此，我们可以应用引理 5.4 得到：

$$\ell(\beta) > \Big(|\mathcal{A}_{x,z}^{\delta r/2} \backslash \mathcal{A}_{x,w}^{\delta r/2}| - 2\Big) \cdot f(\frac{\delta r}{4D}).$$

□

既然我们可以为任何连接测地线 $[p, w_n^p]$ 到 $[p, z_n^p]$ 且避开 p 周围一个球的路径找到下界，现在只需找出 $|\mathcal{A}_{p\ z_n^p}^{\delta n/2}, \backslash \mathcal{A}_{p\ w_n^p}^{\delta n/2}|$，和 $d(p, \{w_n^p, z_n^p\})$ 同时较大的概率下界（以便应用引理 5.4）。

定理 *3.3* 的证明。 令 $\delta_0 = \epsilon_0$ 和 $\delta \leq \delta_0$，则由命题 5.1 可知，存在常数 ν, C_4（取决于 δ），使得 $\mathbf{P}\Big[|\mathcal{A}_p^{\delta\kappa n/2}{}_{,z_n^p}| \geq \nu n\Big] \geq 1 - C_4 e^{-n/C_4}$. 令 $0 < c < \min\{\nu/2, \delta_0\}$。注意：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big[|\mathcal{A}^{\delta\kappa n/2}_{p,z_n^p} \backslash \mathcal{A}^{\delta\kappa n/2}_{p,w_n^p}| - 2 \geq cn\Big] &= \sum_{h\in G} \mathbb{P}\Big[|\mathcal{A}^{\delta\kappa n/2}_{p,z_n^p} \backslash \mathcal{A}^{\delta\kappa n/2}_{p,w_n^p}| - 2 \geq cn \Big| w_n^p = h\Big] \mathbb{P}[w_n^p = h] \\
&\geq \sum_{h\in G} \mathbb{P}\Big[\Big(|\mathcal{A}^{\delta\kappa n/2}_{p,z_n^p}| \geq \nu n\Big) \cap \big(|\mathcal{H}_T(p, z_n^p) \cap \mathcal{H}_T(p,h)| \leq \nu n/2\big)\Big] \mathbb{P}[w_n^p = h] \\
&\geq \sum_{h\in G} \left(1 - \mathbb{P}\Big[|\mathcal{A}^{\delta\kappa n/2}_{p,z_n^p}| < \nu n\Big] - \mathbb{P}\Big[|\mathcal{H}_T(p, z_n^p) \cap \mathcal{H}_T(p,h)| > \nu n/2\Big]\right) \mathbb{P}[w_n^p = h] \\
&\geq 1 - C_4 e^{-n/C_4} - C_1 e^{-\nu n/(2C_1)}
\end{aligned}$$

其中我们利用了如下事实：对于两个事件 A, B，有 $\mathbf{P}[A \cap B] \geq 1 - \mathbf{P}[A^C] - \mathbf{P}[B^C]$，再结合命题 5.1 和命题 3.2 即可得出结论。

现在，我们将对 $r = \kappa n$ 使用引理 5.7。对于每个 $n \geq N_\delta/\kappa$，我们得到：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big[\mathrm{div}(w_n^p, z_n^p, p, \delta) > cnf(\frac{\delta\kappa n}{4D})\Big] &\geq \mathbb{P}\Big[|\mathcal{A}^{\delta\kappa n/2}_{p,z_n^p} \backslash \mathcal{A}^{\delta\kappa n/2}_{p,w_n^p}| - 2 \geq cn\Big] \\
&\geq 1 - C_4 e^{-n/C_4} - C_1 e^{-\nu n/(2C_1)}.
\end{aligned}$$

选取一个常数 $C > 0$，使其也涵盖情形 $n < N_\delta/\kappa$，并满足 $C \geq \max\{c^{-1}, 4D/\delta\kappa\}$，即可完成定理 3.3 的证明。□

最后，我们可以证明定理 1.1。

定理 *1.1* 的证明。 首先考虑 $(w_n)_n$ 是随机游走的情形。在这种情况下，我们需要确保所考虑的群满足假设 A，也就是说，它们包含适当 f 的 f-发散元。接着我们注意到，在每种情形下，整个群的发散都等价于 $nf(n)$，因此在这些情形下，定理 3.3 蕴含定理 1.1。

- 在例 2.3（参见 [GS21, 引理 3.5]）中，我们证明相对双曲群具有指数发散元素。 [Sis12, 定理 1.3], 证明了单端有限表示相对双曲群具有指数发散。
- 根据 [HRSS22, 推论 3]，若 M 是三维非几何图流形，则 $\pi_1(M)$ 是分层双曲群。因此，根据引理 2.6，它包含一个线性发散元素。现在，根据 [Ger94a]，图流形具有二次发散。
- 映射类群都是分层双曲群的例子 [BHS17]。因此，根据引理 2.6，这些群包含线性发散元素（当相应的曲面是闭、连通、可定向且亏格至少为 2 时）。在所有这些情形中，发散都是二次的 [DR09], [Beh06]。这一点在 [Beh06] 中也有隐含体现。
- 当定义图不是连接时，直角阿廷群是主曲线图无界的分层双曲群 [BHS17], ，因此由引理 2.6 可知，这些群包含一个线性发散元素。当定义图连通且不是连接时，其发散为二次的 [BC12]。顺带一提，线性发散元素存在还有另一个原因：根据 [BC12，定理 5.2], ，如果 A_Γ 是一个定义图 Γ 不是连接的直角阿廷群，那么 A_Γ 在其 Salvetti 复形（该复形是 CAT(0) 的）万有覆盖上的作用中包含一个秩一等距变换 X_Γ。因此由引理 2.7 可知， A_Γ 包含一个线性发散元素。

为处理定理 1.1 前两项中的群上的温和马尔可夫链情形，我们需要证明这些群满足假设 B。我们刚刚证明了这些群具有相关的 f 发散元。接下来需要证明它们满足 [GS21，命题 5.1] 的结论。

这是成立的，因为相对双曲群满足 [GS21, 假设 4.1]，这是基于它们包含一个超线性发散元（该文中称为超发散元）这一事实；而图流形群满足假设 [GS21, 假设 4.3] （参见 [GS21, 命题 4.6]的证明）。□

参考文献

[BBF15] Mladen Bestvina、Ken Bromberg 和 Koji Fujiwara。《构造准树上的群作用及其在映射类群中的应用》。Publ. Math. Inst. Hautes ´Etudes Sci., 122:1–64, 2015.[BBFS19] Mladen Bestvina、Ken Bromberg、Koji Fujiwara 和 Alessandro Sisto。《投影复形上的轴稳定作用》。Enseign. Math., 65(1-2):1–32, 2019. [BC12] Jason Behrstock 和 Ruth Charney。《直角阿廷群的发散与拟同态》。Math. Ann., 352(2):339–356, 2012. [BD14a] Jason Behrstock 和 Cornelia Drut¸u。《发散、厚群与短共轭元》。Illinois J. Math., 58(4):939–980, 2014. [BD14b] Jason Behrstock 和 Cornelia Drut¸u。《发散、厚群与短共轭元》。Illinois J. Math., 58(4):939–980, 2014. [Beh06] Jason A. Behrstock。《映射类群与 Teichm¨uller 空间的渐近几何》。Geom. Topol., 10:1523–1578, 2006.[BF02] Mladen Bestvina 和 Koji Fujiwara。《映射类群子群的有界上同调》。Geom. Topol., 6:69–89, 2002.[BF09] Mladen Bestvina 和 Koji Fujiwara。《通过有界上同调刻画高秩对称空间》。Geom. Funct. Anal., 19(1):11–40, 2009. [BHS17] Jason Behrstock、Mark F. Hagen 和 Alessandro Sisto。《层级双曲空间 I：立方群的曲线复形》。Geom. Topol., 21(3):1731–1804, 2017. [BHS19] Jason Behrstock、Mark Hagen 和 Alessandro Sisto。《层级双曲空间 II：组合定理与距离公式》。Pacific J. Math., 299(2):257–338, 2019. [DGO17] F. Dahmani、V. Guirardel 和 D. Osin。《作用于双曲空间的群中的双曲嵌入子群与旋转族》。Mem. Amer. Math. Soc., 245(1156):v+152, 2017. [DMS10] Cornelia Drut¸u、Shahar Mozes 和 Mark Sapir。《半单李群中的格与群图的发散》。Trans. Amer. Math. Soc., 362(5):2451–2505, 2010. [DR09] Moon Duchin 和 Kasra Rafi。《Teichm¨uller 空间与映射类群中测地线的发散》。Geom. Funct. Anal., 19(3):722–742, 2009. [DT15] Pallavi Dani 和 Anne Thomas。《右角考克斯特群中的发散》。Trans. Amer. Math. Soc., 367(5):3549–3577, 2015. [Ger94a] S. M. Gersten。《三维流形群中的发散》。Geom. Funct. Anal., 4(6):633–647, 1994. [Ger94b] S. M. Gersten。《CAT(0) 空间中测地线的二次发散》。Geometric & Functional Analysis GAFA, 4:37–51, 1994.[GNR93] Mikhael Gromov、Graham A. Niblo 和 Martin A. Roller。《无限群的渐近不变量》。1993. [GS18] Dominik Gruber 和 Alessandro Sisto。《无限表示的图形小消去群是柱状双曲的》。Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 68(6):2501–2552, 2018. [GS21] Antoine Goldsborough 和 Alessandro Sisto。《类双曲群上的马尔可夫链与拟等距》，2021. [HRSS22] Mark Hagen、Jacob Russell、Alessandro Sisto 和 Davide Spriano。《通过拟同态为三维流形群构造等变层级双曲结构》，2022. [Mac11] Natasa Macura。《测地线具有多项式发散的 CAT(0) 空间》。Geometriae Dedicata, 163, 01 2011. [Mah12] Joseph Maher。《映射类群中的指数衰减》。J. Lond. Math. Soc. (2), 86(2):366–386, 2012. [MS19] Joseph Maher 和 Alessandro Sisto。《柱状双曲群的随机子群与双曲嵌入》。Int. Math. Res. Not. IMRN, (13):3941–3980, 2019. [MS20] P. Mathieu 和 A. Sisto。《随机游走的偏差不等式》。Duke Math. J., 169(5):961–1036, 2020. [MT18] Joseph Maher 和 Giulio Tiozzo。《弱双曲群上的随机游走》。J. Reine Angew. Math., 742:187–239, 2018.[OOS09] Alexander Yu. Olshanskii、Denis V. Osin 和 Mark V. Sapir。《稀疏双曲群》。Geom. Topol., 13(4):2051–2140, 2009。附录作者：Michael Kapovich 和 Bruce Kleiner。[Osi16] D. Osin。《柱状双曲群》。Trans. Amer. Math. Soc., 368(2):851–888, 2016. [PSZ22] Harry Petyt、Davide Spriano 和 Abdul Zalloum。《CAT(0) 空间的双曲模型》，2022. [Sis12] Alessandro Sisto。《论度量相对双曲性》，2012. [Sis16] Alessandro Sisto。《双曲嵌入子群的拟凸性》。Math. Z., 283(3-4):649–658, 2016. [Sis17] Alessandro Sisto。《随机游走的跟踪速率》。Israel J. Math., 220(1):1–28, 2017. [Sis19] Alessandro Sisto。《什么是层级双曲空间？》载于《超越双曲性》，London Math. Soc. Lecture Note Ser. 第454卷，第117–148页。Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2019.

麦克斯韦研究所和赫瑞-瓦特大学数学系，爱丁堡，U K
电子邮箱： ag2017@hw.ac.uk

麦克斯韦研究所和赫瑞-瓦特大学数学系，爱丁堡，U K
电子邮箱： a.sisto@hw.ac.uk