arXiv:2303.09961v1 [math.CV] 17 Mar 2023

全纯函数半群花瓣的收敛速度

Maria Kourou[§] 和 Konstantinos Zarvalis

摘要。我们研究单位圆盘上全纯自映射单参数半群的反向动力学。具体而言，我们为半群的花瓣引入收敛速度，即总速度、正交速度和切向速度。这些速度类似于 Bracci 引入的收敛速度，但由于反向动力学的性质，两者存在显著差异。我们根据花瓣的类型，得出了有关花瓣速度渐近行为的结果。我们还讨论了沿非正则反向轨道的双曲距离的渐近行为。

1 引言

近年来，单位圆盘上的全纯函数单参数连续半群（下文简称单位圆盘上的半群 $\mathbb{D}$）引起了科学界的关注。Berkson 和 Porta 在 [4], 中首次以复合算子半群的一个直接方面介绍了这一形式。随后，Contreras 和 D´ıaz-Madrigal [11] 确立了它们的主要特征，并由此带来了大量新成果。关于单位圆盘上的半群 $\mathbb{D}$ 的全面分析及最新进展，可参见近期专著[8]及其中的参考文献。

$\mathbb{D}$ 中的半群是一族由单位圆盘到自身的全纯映射 $(\phi_t)_{t\geq 0}$，并满足以下条件：

(i) $\phi_0(z) = z$，对所有$z \in \mathbb{D}$均成立；(ii) 对每个 $t,s \geq 0$和$z \in \mathbb{D}$， $\phi_{t+s}(z) = \phi_t(\phi_s(z))$；(iii) $\phi_t(z) \xrightarrow{t\to 0^+} z$，且在 $\mathbb{D}$的紧子集上一致成立。

此外，如果对某个（等价地，对所有）$t_0 > 0$， ϕ_{t_0} 是 $\mathbb{D}$的自同构，则称 (ϕ_t) 为群。对于所有非群半群，Denjoy–Wolff 定理的连续版本断言，存在唯一的点$\tau \in \mathbb{D}$，使得当$t \to +\infty$时，对所有$z \in \mathbb{D}.$， $\phi_t(z) \to \tau$。此点 τ称为该半群的*Denjoy–Wolff* 点；参见 [1, 定理 1.4.17]。若 $\tau \in \mathbb{D}$，则该半群称为椭圆型；若 Denjoy–Wolff 点位于单位圆上，则称 (ϕ_t) 为非椭圆型。

对于椭圆半群和非椭圆半群（ϕ_t），均存在某个复数 μ，满足 Re $\mu > 0$，使得（角）导数 $\phi'_t(\tau) = e^{-\mu t}$，对所有$t \geq 0$均成立。注意，在非椭圆半群的情形下，$\mu \geq 0$。数 μ 称为该半群的谱值。

固定$z \in \mathbb{D}$。曲线 $\gamma_z\colon [0,+\infty) \to \mathbb{D}$with $\gamma_z(t) = \phi_t(z)$ 称为z的轨迹。显然，对所有点$z \in \mathbb{D}$，当$t \to +\infty$时，轨迹收敛到 τ。Bracci [6] 引入了三个关于全纯函数非椭圆半群轨迹的新量。这些量，即所谓的速度，为轨迹收敛到半群的 Denjoy–Wolff 点的收敛率带来了有趣的结果。设 (ϕ_t) 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中 Denjoy–Wolff 点为τ的一个非椭圆半群。考虑 $\gamma\colon (-1,1) \to \mathbb{D}$，其中 $\gamma(r) = r\tau$，它是端点为 τ 和 $-\tau$的单位圆盘直径。显然， γ是单位圆盘双曲距离$d_{\mathbb{D}}$ 的一条测地线。我们用 $\pi_\gamma(z)$ 表示点z在曲线上的投影

2020年数学主题分类。 主要分类 31A15、30D05、47D06；次要分类 30C20、30C85、37C10。关键词和短语。全纯函数的一参数半群，谱值，反向轨道，排斥不动点，花瓣。[§]部分研究经费由亚历山大·冯·洪堡基金会提供。

点$z \in \mathbb{D}$ 到曲线 γ上的投影，它满足

$$d_{\mathbb{D}}(z, \pi_\gamma(z)) = d_{\mathbb{D}}(z, \gamma) := \inf_{r\in(-1,1)} d_{\mathbb{D}}(z, \gamma(r)).$$

函数

$$v(t) = d_{\mathbb{D}}(0, \phi_t(0)), \quad t \geq 0,$$

称为 (ϕ_t) 的总速度 。它可以分解为另外两个函数，即 (ϕ_t) 的正交速度

$$v^o(t) = d_{\mathbb{D}}(0, \pi_\gamma(\phi_t(0))), \quad t \geq 0,$$

以及 切向速度（ϕ_t）

$$v^T(t) = d_{\mathbb{D}}(\phi_t(0), \pi_\gamma(\phi_t(0))) = d_{\mathbb{D}}(\phi_t(0), \gamma), \quad t \geq 0.$$

乍一看，这三种速度似乎完全是相对于起点为 0 的轨迹定义的。然而，Bracci 证明了从渐近意义上说，这些函数与起点无关，因此可以选择任意点$z \in \mathbb{D}$ 代替 0。此外，考察这些速度的渐近行为，我们便可确定半群的类型。根据 [6, 命题 6.1],

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{v(t)}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{v^o(t)}{t} = \frac{\mu}{2}, \tag{1.1}$$

其中 μ 表示 (ϕ_t) 的谱值；这一结果与 [3] 和 [8, 引理 9.1.2、定理 9.1.9]中的结果一致。

收敛速度的定义以及在 [6] 中提出的各种问题激发了研究兴趣，并成为多项研究的起点。第二位署名作者在 [19]中推翻了关于抛物型半群切向速度上界的一个猜想。Cordella 在 [12] 中研究了切向速度的渐近上界。关于正交速度，Bracci、Cordella 和第一位署名作者 [9] 针对多种情形考察了其相对于半群的渐近单调性。最近，Betsakos 和 Karamanlis [5] 推广了上述结果，并借助调和测度证明了正交速度在所有非椭圆半群情形下的单调性。

本文的主要目标是在 $\mathbb{D}$上的全纯自映射半群的反向动力学框架下建立收敛速度。Elin、Shoikhet 和 Zalcman [13] ，以及 Bracci、Contreras、D´ıaz-Madrigal 和 Gaussier [7], 在反向动力学方面取得了进展，并具体确立了半群后向流的理论。全纯自映射半群（ϕ_t）的反向不变集定义为

$$\mathscr{W} := \bigcap_{t\geq 0} \phi_t(\mathbb{D})$$

并且，半群在该集合上的限制恰好是一个自同构群。 $\mathscr{W}$ 内部的每个非空连通分支都称为（ϕ_t的）花瓣 。本文研究的半群不是群，且其反向不变集非空。因此，从反向动力学的角度来看，我们排除了 $\mathscr{W}$为空或等于整个单位圆盘 $\mathbb{D}$这两种平凡情形。

如前所述，前向 速度是半群的属性，其渐近行为几乎不受所选初始点$z \in \mathbb{D}$的影响，这归因于 Denjoy–Wolff 点的吸引性。然而，正如反向动力学理论所强调的（参见 [8, 第 13] 章或第 2.5 节），在逆向动力学情形下并非如此。由于不存在类似的 Denjoy-Wolff 定理，收敛速度只能针对半群反向不变集中的点来定义。正如命题 3.1 和 3.2 所示，为了考察所谓的后向速度的行为，需要将研究范围限制在半群花瓣的几何结构上。定义 3.1 给出了花瓣总速度的表达式，并进一步说明了适当的测地线选取，由此可定义花瓣的正交速度和切向速度。

第4节和第5节概述了花瓣速度的渐近行为。我们证明，花瓣总速度的渐近行为仅取决于花瓣的类型及其几何结构，详见定理4.1和定理4.2。对于切向速度，我们考察其上极限在何种条件下有限。正如定理 5.1 所述，该极限是否有限取决于花瓣的类型。Bracci毕达哥拉斯定理的推广揭示了某个花瓣的各种速度之间的联系。综合这些结果，我们可以了解该花瓣正交速度的渐近行为；参见推论 5.1。

第6节专门讨论单位圆盘上全纯自映射半群反向动力学的一个特殊情形。我们将总速度的定义扩展到位于反向不变集边界上的点，因此这些点不位于任何花瓣内。本研究旨在更好地理解沿所谓的非正则反向轨道的 $\mathbb{D}$ 的双曲距离的性质；精确定义见第2.5节。正如命题 6.1所示，此情形下总速度的渐近行为取决于半群相关 Koenigs 域的几何性质以及半群本身的内在特征。

本文中的证明依赖于调和测度、极值长度和双曲几何等共形不变量工具。同时，我们还进一步利用了半群的一些基本特征，例如相关 Koenigs 域的几何性质以及相关的无穷小生成元。第2节将介绍上述主题的背景信息。

2 证明的准备

2.1 双曲度量 我们简要介绍若干在证明过程中会用到的共形不变量。首先介绍一些关于双曲几何的知识（见 [8,第 5]章）。 $\mathbb{D}$ 中双曲度量的密度 为 $\lambda_{\mathbb{D}}(z) = (1-|z|^2)^{-1}$。

单位圆盘中两点z,w 之间的双曲距离 为

$$d_{\mathbb{D}}(z,w) = \operatorname{arctanh}\rho_{\mathbb{D}}(z,w), \quad \text{where} \quad \rho_{\mathbb{D}}(z,w) = \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| \tag{2.1}$$

表示单位圆盘中的伪双曲距离 $\mathbb{D}$。

借助共形映射，我们可以将双曲度量和距离的概念推广到复平面以外的任意单连通域。事实上，设 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ 为一个单连通域，且$f\colon \Omega \to \mathbb{D}$ 是一个黎曼映射。那么， Ω 中两点z,w 之间的双曲距离定义为$d_\Omega(z,w) := d_{\mathbb{D}}(f(z),f(w))$。因此，双曲距离不依赖于黎曼映射$f$的选取，是一个共形不变量。

利用已知的共形映射，我们可以计算某些域中的双曲距离。例如，若$S := \{z \in \mathbb{C}\colon |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}\}$ with $z,w \in S$， 且 $\mathbb{H} := \{w \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} w > 0\}$ with $x,y \in \mathbb{H}$，则相应区域中的双曲距离由下式给出

$$d_S(z,w) = \operatorname{arctanh}\left|\frac{e^z - e^w}{e^z + e^{\overline{w}}}\right| \quad \text{and} \quad d_{\mathbb{H}}(x,y) = \operatorname{arctanh}\left|\frac{x-y}{x+\overline{y}}\right|. \tag{2.2}$$

除了共形不变性之外，双曲距离的一个非常重要的性质是其对区域的单调性。准确地说，设 $\Omega_1, \Omega_2 \subsetneq \mathbb{C}$ 为两个满足 $\Omega_1 \subset \Omega_2$ 的单连通域。则$d_{\Omega_1}(z,w) \geq d_{\Omega_2}(z,w)$，对所有 $z,w \in \Omega_1$均成立。

设 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ 为一个单连通域，且 $\delta_\Omega(z) := \operatorname{dist}(z\ \partial\Omega)$ 表示z到 Ω 边界的欧几里得距离。双曲密度 λ_Ω 与 δ_Ω有着深刻的联系，正如下述距离引理所指出的。

引理 2.1。 [8, 定理 5.3。1] 设 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ 是一个单连通域。那么，对于所有的 z、$w \in \Omega$,

$$\frac{1}{4}\log\left(1 + \frac{|z-w|}{\min\{\delta_\Omega(z), \delta_\Omega(w)\}}\right) \leq d_\Omega(z,w) \leq \int_\Gamma \frac{|d\zeta|}{\delta_\Omega(\zeta)},$$

其中 Γ 可以是 Ω 内连接 z 和 w 的任意分段 C^1 光滑曲线。

2.2 调和测度 设 Ω 是 $\mathbb{C}$ 的真子域，且具有非极性边界； $\mathscr{B}(\partial\Omega)$ 是 $\partial\Omega$ 的所有博雷尔集构成的 σ-代数。假设 $E \in \mathscr{B}(\partial\Omega)$。相对于 Ω，在点 $z \in \Omega$ 处，集合 E 的调和测度是 Ω 中拉普拉斯算子的广义狄利克雷问题的解，其边界值在 E 上为 1，在 $\partial\Omega \setminus E$ 上为 0。

对于固定的 $E \in \mathscr{B}(\partial\Omega)$， $\omega(\cdot, E\ \Omega)$ 是 Ω 上的调和有界函数。此外，对于固定的点 $z \in \Omega$，映射 $\omega(z\ \cdot, \Omega) : \mathscr{B}(\partial\Omega) \to [0,1]$，其中 $E \mapsto \omega(z, E\ \Omega)$，是 $\partial\Omega$ 上的博雷尔概率测度。

调和测度的一项重要性质是共形不变性；参见 [18, § 4.3]。此外，调和测度还具有一项有用的单调性。设 $\Omega_1, \Omega_2 \subsetneq \mathbb{C}$ 是两个具有非极性边界的单连通域，满足 $\Omega_1 \subset \Omega_2$，并设 $E \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ 为一个博雷尔集。那么对于所有 $z \in \Omega_1$，有 $\omega(z, E\ \Omega_1) \leq \omega(z, E\ \Omega_2)$。

上述单调性可以通过以下命题作进一步精确表述。

命题 2.1 （调和测度的强马尔可夫性质）。 [17, p.88] 设 Ω_1, Ω_2，并设 E 与上文所述相同。那么对于所有 $z \in \Omega_1$，有

$$\omega(z, E, \Omega_2) = \omega(z, E, \Omega_1) + \int_{\partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega_2} \omega(\zeta, E, \Omega_2) \cdot \omega(z, d\zeta, \Omega_1).$$

注 2.1. 设 $E \subset \partial\mathbb{D}$ 为一条端点为 a 和 b 的圆弧。那么，等值集

$$L_k = \{z \in \mathbb{D} : \omega(z, E, \mathbb{D}) = k\}, \quad 0 < k < 1,$$

是一段圆弧（若 E 是半圆且 $k = \frac{1}{2}$，则为一条直径），其端点为 a 和 b，并以角度 $k\pi$ 与单位圆相交（见 [10, 第 155]页）。因此，满足 $\lim_{n\to+\infty} z_n = a$ （或 b）的序列 $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ 按角度 $\theta \in [0, \pi]$ 收敛，当且仅当 $\lim_{n\to+\infty} \omega(z_n, E\ \mathbb{D}) = \frac{\theta}{\pi}$。特别地，该序列切向地收敛，当且仅当上述极限等于 0 或 1。自然，这一结果对连续曲线也成立。

更多信息 关于调和测度的更多信息和详细理论可见于 [2, 14] 和 [18, 第 4]章。

2.3 极值长度 设 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ 为一个区域，并设 Γ 是 Ω内部局部可求长曲线的一个族。对于 Ω 中的非负 Borel 可测函数 ρ，我们定义 Ω的 ρ-面积

$$A(\rho, \Omega) := \iint_{\Omega} \rho(z)^2 dxdy, \quad z = x + iy.$$

我们还将 ρ-长度定义为 Γ 的

$$L(\rho, \Gamma) := \inf_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma} \rho(z)|dz|.$$

那么， Γ 相对于 Ω 的极值长度为

$$\lambda_{\Omega}(\Gamma) = \sup_{\rho} \frac{L(\rho, \Gamma)^2}{A(\rho, \Omega)},$$

其中，上确界取遍所有非负博雷尔可测函数 ρ，且其 ρ-面积为一个正实数。

现在假设 Γ_1， Γ_2 是分别定义在两个区域 Ω_1， $\Omega_2 \subsetneq \mathbb{C}$上的两个不同的局部可求长曲线族。极值长度的定义本身给出了一种单调性：若 Γ_1 是 Γ_2的子族，则$\lambda_{\Omega_1}(\Gamma_1) \geq \lambda_{\Omega_2}(\Gamma_2)$。第二种单调性则源自以下内容：

引理 2.2。 [14, 扩张法则，§IV。3] 如果曲线族 Γ_1 中的每条曲线都包含一条属于曲线族 Γ_2的子曲线，那么 $\lambda_{\Omega_1}(\Gamma_1) \geq \lambda_{\Omega_2}(\Gamma_2)$。

除了前面提到的两个单调性性质外，我们还用到极值长度的一个重要应用。再次设 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ 为一个区域，且 $E,F \subset \Omega$。 Ω 内 E 与 F 之间的极值距离 定义为以下量:

$$\lambda(E,F,\Omega) := \lambda_\Omega(\Gamma),$$

其中， Γ 是 Ω 内连接 E 与 F 的所有局部可求长曲线组成的族。显然，由于极值长度具有共形不变性，极值距离也自然具有共形不变性。

连接极值长度与调和测度的一个有用工具，就是所谓的*Beurling* 估计。

引理 2.3. [14, 定理 IV.5.3] 设 Ω 是一个单连通 *Jordan* 域， E 是位于 $\partial\Omega$ 上的有限个弧的并。设 $z \in \Omega$。那么，

$$\omega(z,E,\Omega) \leq C \cdot e^{-\pi\cdot\lambda(\gamma,E,\Omega)}$$

对于单位圆盘内连接 z 与 E 的任意 *Jordan* 弧 $\gamma\ \partial\Omega\setminus$，其中 $C > 0$是一个绝对常数。

有关极值长度理论的详尽介绍，感兴趣的读者可参阅 [2, 第4]章和 [14,第四章]。

2.4 单参数半群——Koenigs 函数 如引言所述，由于单参数群在逆向动力学情形下的行为平凡，我们将其排除在研究范围之外。因此，从这里起，我们将非群的单参数半群简称为单参数半群。

非椭圆半群根据其谱值 μ进一步分为两类。对于 $\mu > 0$，半群称为双曲型；而对于 $\mu = 0$，则称为抛物型。对于每个单参数非椭圆半群，都存在唯一一个固定原点的黎曼映射h，使得

$$h(\phi_t(z)) = h(z) + t, \quad \text{for all } z \in \mathbb{D} \text{ and } t \geq 0.$$

单连通域 $\Omega := h(\mathbb{D})$ 被称为该半群的 *Koenigs* 域 （也称为相关平面域）。非椭圆半群的 Koenigs 域 Ω 是正向凸的，这意味着对于每个$w \in \Omega$，都有 $\{w + t : t \geq 0\} \subset \Omega$。根据定义可知，Koenigs 函数的一大优点是能够将半群作用下 $\mathbb{D}$ 中各点的轨迹线性化。具体而言，某个$z \in \mathbb{D}$ 的轨迹在h 下的像，是一条从$h(z)$ 出发、沿正向朝 ∞ 延伸的水平半直线（即虚部恒定、实部递增）。

单参数椭圆半群的 Koenigs 函数也可以唯一地定义。在这种情况下，$h(\tau) = 0$，其中 $\tau \in \mathbb{D}$ 是该半群（ϕ_t）的 Denjoy–Wolff 点，并且

$$h(\phi_t(z)) = e^{-\mu t} h(z), \quad \text{for all } z \in \mathbb{D} \text{ and } t \geq 0, \tag{2.3}$$

其中 μ 是 (ϕ_t) 的谱值。这一次，Koenigs 域 Ω 相对于 0 是-螺旋型的，因为 $0 \in \Omega$ 且 $e^{-\mu t}\Omega \subseteq \Omega$，对所有$t \geq 0$均成立。与椭圆半群相关联的 Koenigs 函数将$z \in \mathbb{D}$ 的轨迹映射到半螺旋上；该半螺旋围绕$h(\tau) = 0$无穷多次，随着$t \to +\infty$。

关于单参数半群的 Koenigs 函数，以及其几何特性和整体行为的进一步信息，可参见 [8, 第 9]章及其中的参考文献。

2.5 反向轨道 正如引言中进一步指出的，半群的每条轨迹都收敛到该半群的 Denjoy–Wolff 点。然而，反向轨道的渐近行为并非如此简单。在详细讨论反向轨道的收敛之前，我们需要先介绍一些重要概念。

定义 2.1. [8, 章 12] 设 (ϕ_t) 是 $\mathbb{D}$ 中的一个半群。若点 $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ 满足 $\angle\lim_{z\to\sigma} \phi_t(z) = \sigma$，对所有 $t \geq 0$ 均成立，则称其为 (ϕ_t) 的边界不动点 。若 (ϕ_t) 的一个边界不动点在 σ 处的 ϕ_t 角导数对所有 $t \geq 0$ 均有限，则称该点为正则。否则，称其为非正则。

除 Denjoy–Wolff 点外，半群的任何正则边界不动点都被称为排斥。若 σ是 (ϕ_t) 的排斥不动点，则存在一个 $\lambda \in (-\infty, 0)$，使得对所有$t \geq 0$, $\phi'_t(\sigma) = e^{-\lambda t}$。这个负实数 λ称为 (ϕ_t) 在 σ 处的排斥谱值 。任何非正则边界不动点都被称为超排斥。

沿用 [8, 第 13], 章的记号，半群 (ϕ_t) 的反向轨道 是连续曲线γ: $[0, +\infty) \to \mathbb{D}$，满足 $\phi_s(\gamma(t)) = \gamma(t-s)$，对所有$t \geq s \geq 0$均成立。点 $\gamma(0)$ 称为 γ 的起点。若反向轨道正则 ，则称其为

$$\limsup_{t\to+\infty} d_{\mathbb{D}}(\gamma(t), \gamma(t+1)) < +\infty.$$

如果上述极限为无穷大，则称 γ为非正则。关于正则反向轨道的渐近行为，我们区分以下几种情况；详细理论请参阅 [8, 第 13] 章关于反向轨道的讨论。

如果 (ϕ_t) 是一个椭圆半群，那么反向轨道要么恒等于 Denjoy–Wolff 点 $\tau \in \mathbb{D}$，要么收敛到该半群的一个边界不动点。后一种情况下，如果反向轨道也是正则的，那么它会非切向地收敛到一个排斥不动点。如果 (ϕ_t) 是一个非椭圆半群，那么反向轨道必然收敛到一个边界不动点。此外，如果反向轨道是正则的，那么它要么切向地收敛到 Denjoy–Wolff 点，要么非切向地收敛到一个排斥不动点。

所有反向轨道以及其起点的正向轨迹构成所谓的反向不变集 $\mathscr{W}$，它属于 (ϕ_t)。

定义 2.2。 [8, 定义 13.4。1] 设 (ϕ_t) 是 $\mathbb{D}$ 中的一个单参数半群。其内部的 $\mathscr{W}$的非空连通分支 Δ 称为一个花瓣。

在花瓣 Δ 上，每个 ϕ_t，$t \geq 0$, 的限制都是一个自同构（即 $\phi_t(\Delta) = \Delta$）。此外， $\tau \in \partial\Delta$对于每个$z \in \Delta$，曲线 $[0, +\infty) \ni t \mapsto \phi^{-1}{}_t(z)$ 都是 (ϕ_t) 的正则反向轨道。无妨设 $\phi_{-t}(z) := \phi^{-1}{}_t(z)$，对所有$z \in \Delta$, 我们可以扩展该半群，使得$t \in \mathbb{R}$。因此，在本文余下部分，反向轨道将定义在$t \leq 0$上。

这一扩展还进一步应用于经 Koenigs 函数 h 映射后的像。容易看出，给定 $z \in \mathbb{D}$，对于非椭圆半群，经 h 映射后，起点为 z 的反向轨道实际上是一条水平半直线，从 $h(z)$ 朝 ∞ 的负方向延伸（即虚部保持不变而实部递减）。对于椭圆半群，这样的反向轨道经 h 映射后则成为一条朝 ∞ 延伸的半螺旋。

对于具有花瓣 Δ 的半群 (ϕ_t)， Δ 中的每个点实际上都是某条正则反向轨道的起点。反过来，花瓣之外的点都不可能成为正则反向轨道的起点。因此，正则反向轨道的研究与花瓣的研究密切相关。为了使这项研究更加简单高效，我们再次转向半群 (ϕ_t) 的 Koenigs 函数 h 。

花瓣 Δ 在h 下的像始终是 Ω中的一个极大域。更具体地说，对于非椭圆半群，$h(\Delta)$ 是

(i) 要么是极大水平条带，此时该花瓣被称为双曲型；(ii) 要么是极大水平半平面，此时该花瓣被称为抛物型。

考虑到通过h 在 $\partial\mathbb{D}$ 的点与 Ω的素端之间建立的一一对应关系，可以推得，包含在双曲花瓣中的所有反向轨道都收敛于同一个排斥不动点，而包含在抛物花瓣中的所有反向轨道则收敛于 Denjoy–Wolff 点。此外，在前一种情形下，该极大水平条带的宽度取决于该排斥不动点的排斥谱值 λ 。特别地，其宽度等于 $-\frac{\pi}{\lambda}$。

若(ϕ_t)是一个椭圆半群，其 Denjoy–Wolff 点为 $\tau\in\mathbb{D}$，谱值为 μ，则花瓣 Δ 在h下的像$h(\Delta)$是 Ω 中一个以$e^{i\theta_0}$为中心的极大 μ-螺旋形区域，适用于某个 $\theta_0\in[-\pi,\pi)$，其张角为 $2a:=-\frac{|\mu|^2\pi}{\lambda}\mathrm{Re}\,\mu$；其中 λ是每条包含在Δ 中的反向轨道所收敛到的排斥不动点的排斥谱值。更具体地说，

$$h(\Delta)=\mathrm{Spir}[\mu,2a,\theta_0]:=\{e^{t\mu+i\theta}:t\in\mathbb{R},\theta\in(-\alpha+\theta_0,\alpha+\theta_0)\}.$$

椭圆半群的每个花瓣都被刻画为双曲型。我们所描述的两类双曲花瓣之间的相似之处，在于它们的边界上都包含一个排斥不动点。

引理 *2.4*。设 (ϕ_t) 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上全纯自映射的一个椭圆半群，其谱值为 $\mu\in\mathbb{C}$，$Re\ \mu>0$。记 h 为 (ϕ_t) 的相应 *Koenigs* 函数。设 Δ 是 (ϕ_t) 的一个花瓣，对应于排斥不动点 σ，其排斥谱值为 λ。考虑函数 $g(z):=e^{-i\mathrm{Arg}\,\mu}cos(Arg\,\mu)\ Log\ z+i(\alpha-\theta_0)$，其中 $a:=-\frac{|\mu|^2\pi}{2\lambda}Re\ \mu$，$\theta_0\in[-\pi,\pi)$，且 $e^{i\theta_0}$ 是 $\overline{h(\Delta)}$ 的中心。那么 g 将 $h(\Delta)$ 映射到$\overline{\text{水平}}$条带 $\{z\in\mathbb{C}:0<Imz<2\alpha\}$。

证明。首先注意到 $\cos(\mathrm{Arg}\ \mu)>0$，因为 $\mathrm{Re}\ \mu>0$。通过初等计算可得 $\mathrm{Log}\,e^{t\mu+i\theta}=t\mu+i\theta$，因此，$\Delta$的螺旋线经映射后成为平行于连接 0 与 μ 的直线的直线。因此

$$g(h(\Delta))=\bigcup_{\theta\in(-\alpha+\theta_0,\alpha+\theta_0)}\left\{t\frac{|\mu|}{\cos(\mathrm{Arg}\,\mu)}+\tan(\mathrm{Arg}\,\mu)\theta+i(\theta+\alpha-\theta_0):t\in\mathbb{R}\right\}$$

并且由于 $\theta+\alpha-\theta_0\in(0,2\alpha)$，所以 g 将 $h(\Delta)$ 映射到水平条带 $\{z\in\mathbb{C}:\ 0<\mathrm{Im}\,z<2\alpha\}$。 □

最后但同样重要的是，无论单参数半群的类型如何，双曲花瓣与排斥不动点之间都存在一一对应关系。若所有位于 Δ 中的反向轨道都收敛到 σ，则称排斥不动点σ与双曲花瓣 Δ（ϕ_t）相对应（或者分别称 Δ与 σ相对应）。

牢记反向轨道的渐近行为和花瓣的形状后，我们现在可以讨论非正则反向轨道。单参数半群的非正则反向轨道可分为以下三种情况：

(i) 它是双曲花瓣边界的一部分，此时它切向地收敛到该半群的一个排斥不动点；(ii) 它是抛物花瓣边界的一部分，此时它切向地收敛到该半群的 Denjoy–Wolff 点，这种情况只会出现在抛物型半群中；(iii) 或者它收敛到该半群的一个超排斥不动点，此时收敛可以是切向的，也可以是非切向的（若考虑子序列，也可能是两者的组合）。

2.6 无穷小生成元 单参数半群与动力系统密切相关。事实上，对于每个 (ϕ_t)，都存在唯一的全纯函数 $G:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$，使得

$$\frac{\partial\phi_t(z)}{\partial t}=G(\phi_t(z)),\quad z\in\mathbb{D},\quad t\geq0.$$

函数 G 称为该半群的无穷小生成元 。在证明过程中，我们只需要以下关于无穷小生成元的引理。它结合了 [8] 中的定理 12.2.5 和推论 12.2.6 的结果。

引理 2.5. 设 (ϕ_t) 是 $\mathbb{D}$ 中的一个半群，其对应的无穷小生成元为 G。假设 $\sigma\in\partial\mathbb{D}$ 是(ϕ_t) 的一个排斥不动点，排斥谱值为 $\lambda\in(-\infty,0)$。则：

(i)

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\sigma G(z)}{(\sigma-z)^2}\right)\geq\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{1-|z|^2}{|\sigma-z|^2},\quad for\ all\ z\in\mathbb{D};$$

(ii)

$$-\lambda = \angle \lim_{z\to\sigma} \frac{G(z)}{z-\sigma};$$

(iii) 存在唯一的全纯映射 $p\colon \mathbb{D}\to\mathbb{H}$，满足

$$\angle \lim_{z\to\sigma}(z-\sigma)p(z) = 0,$$

使得

$$G(z) = (\overline{\sigma}z-1)(z-\sigma)\left[p(z)+\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{\sigma+z}{\sigma-z}\right], \quad \textit{for all } z\in\mathbb{D}.$$

关于单参数半群的无穷小生成元及其与相关 Koenigs 函数之间联系的更多信息，可参见 [8,第 10] 章以及其中的参考文献。

3 花瓣的收敛速度

在给出沿反向轨道的收敛速度定义之前，我们需要一些预备命题。回顾一下，对于每个$z\in\Delta$，其中 Δ 是半群（ϕ_t）的一个花瓣，曲线（$-\infty,0]\ni t\mapsto \phi_t(z) = \phi_{-}^{-1}{}_t(z)$ 是一条反向轨道。

Pr命题 3.1。 设(ϕ_t)是 $\mathbb{D}$ 中的一个半群， Δ是(ϕ_t)的一个花瓣。设 $z, w\in\Delta$。则

$$|d_{\mathbb{D}}(z,\phi_t(z)) - d_{\mathbb{D}}(w,\phi_t(w))| \le 2d_{\Delta}(z,w), \quad t\le 0.$$

证明。 首先，假设 (ϕ_t) 是非椭圆型的，并令 h 为其 Koenigs 函数。设 $\Omega = h(\mathbb{D})$。依次利用双曲距离的共形不变性和三角不等式，对于$t\le 0$，有

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{D}}(z,\phi_t(z)) - d_{\mathbb{D}}(w,\phi_t(w)) &= d_{\Omega}(h(z),h(z)+t) - d_{\Omega}(h(w),h(w)+t) \\ &\le d_{\Omega}(h(z),h(w)) + d_{\Omega}(h(z)+t,h(w)+t). \end{aligned}$$

然而，对于所有$t\le 0$，$h(\Delta)\subset\Omega-t\subset\Omega$。因此，接着使用前面的不等式，可得

$$\begin{aligned} d_{\Omega}(h(z),h(w)) + d_{\Omega}(h(z)+t,h(w)+t) &\le d_{h(\Delta)}(h(z),h(w)) + d_{\Omega-t}(h(z),h(w)) \\ &\le 2d_{h(\Delta)}(h(z),h(w)) \\ &= 2d_{\Delta}(z,w). \end{aligned}$$

交换z 和w 的角色，可得一个类似的不等式，进而得到所需结果。椭圆半群的证明几乎完全相同，不过由于 Koenigs 函数的形式不同，需要做一些小的调整。□

注 3.1。 容易验证，若z 和w 位于不同的花瓣中，或者两者中任意一个不属于任何花瓣，则本命题的结论不再成立。在这些情形下，上述最终将成为总速度之差的量不再有界。

在研究正向动力学中的速度时，测地线的作用由一条直径取代，该直径的一端位于非椭圆半群的 Denjoy–Wolff 点 τ，因为每条轨迹都会收敛到这个点。选择这条直径而非任何其他终止于 τ 的测地线，是因为 0 是用于研究“正向”速度的轨迹的起点，而直径是唯一经过 0 的此类测地线。因此，$v(0) = v^{o}(0) = v^{T}(0) = 0$。然而，对于反向动力学，情况并非如此，因为测地线的选择会随花瓣而变化。再次设 (ϕ_t) 为一个具有花瓣 Δ 的半群，并设 $z\in\Delta$。我们用 $\eta\colon(-1,1)\to\mathbb{D}$ 表示关于双曲距离$d_{\mathbb{D}}$ 的测地线，使得：

(i) 若 Δ 是双曲型，则 $\eta(0) = z$ 且 $\lim_{r\to 1^{-}}\eta(r) = \sigma$，其中 $\sigma\in\partial\mathbb{D}$ 是 (ϕ_t) 的排斥不动点，所有包含于 Δ 中的反向轨道都收敛于此点；

(ii) 若 Δ 是抛物型，则 $\eta(0)=z$ 且 $\lim_{r\to 1^-}\eta(r)=\tau$，其中 $\tau\in\partial\mathbb{D}$ 是 (ϕ_t) 的 Denjoy–Wolff 点。

命题 3.2. 设(ϕ_t)是 $\mathbb{D}$ 中的一个半群，且 Δ是(ϕ_t)的一个花瓣。设 z、$w\in\Delta$，并假设$\eta:(-1,1)\to\mathbb{D}$ 是上文所述的测地线，且 $\eta(0)=z$。那么

$$|d_{\mathbb{D}}(z,\pi_\eta(\phi_t(z)))-d_{\mathbb{D}}(w,\pi_\eta(\phi_t(w)))|\le 2d_\Delta(z,w),\quad t\le 0$$

and

$$|d_{\mathbb{D}}(\phi_t(z),\eta)-d_{\mathbb{D}}(\phi_t(w),\eta)|\le 2d_\Delta(z,w),\quad t\le 0.$$

证明. 为简洁起见，对于$t\le 0$，我们记

$$z_t=\pi_\eta(\phi_t(z))\quad\text{and}\quad w_t=\pi_\eta(\phi_t(w)).$$

证明与命题 3.1 的证明几乎完全相同，但其中有一个关键论证，使得有必要专门给出此证明。我们有

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{D}}(z,z_t)-d_{\mathbb{D}}(w,w_t) &= d_\Omega(h(z),h(z_t))-d_\Omega(h(w),h(w_t))\\ &\le d_\Omega(h(z),h(w))+d_\Omega(h(z_t),h(w_t))\\ &\le d_{h(\Delta)}(h(z),h(w))+d_{\mathbb{D}}(z_t,w_t).\end{aligned}$$

利用 [6, 命题 3.3],，我们得到

$$d_{\mathbb{D}}(z_t,w_t)\le d_{\mathbb{D}}(\phi_t(z),\phi_t(w)),\quad\text{for all } t\le 0.$$

结合以上所有不等式，并完全按照命题 3.1 证明中的步骤继续推导，我们得到第一个所需结果。第二个所需不等式的证明步骤相同，因此为避免重复，这里略去。□

再次，这些界限表明，只要我们始终处于某个花瓣内，所有上述量的渐近行为都不取决于起点的选择。我们证明的所有命题都说明，两类速度之间的关键区别如下：正向轨迹的速度可以全局定义为半群的速度，而反向轨道上的速度则不能如此定义。相反，正则反向轨道上的速度可以局部定义为相应花瓣的速度。

定义 3.1. 设 (ϕ_t) 是 $\mathbb{D}$ 中的一个半群，且 Δ 是 (ϕ_t) 的一个花瓣。设 $z\in\Delta$，并假设 $\eta:(-1,1)\to\mathbb{D}$ 是前文所述的测地线，它取决于 z 和花瓣的类型。我们称 Δ 的函数为总速度

$$v_\Delta(t)=d_{\mathbb{D}}(z,\phi_t(z)),\quad t\le 0.$$

我们称 Δ 的函数为正交速度

$$v_\Delta^o(t)=d_{\mathbb{D}}(z,\pi_\eta(\phi_t(z))),\quad t\le 0.$$

我们将 Δ 的切向速度 称为函数

$$v_\Delta^T(t)=d_{\mathbb{D}}(\phi_t(z),\eta)=d_{\mathbb{D}}(\phi_t(z),\pi_\eta(\phi_t(z))),\quad t\le 0.$$

关联三种速度的一个首要有用结果，直接源自 Bracci 的勾股定理 [8,命题 3.4]。

推论 3.1. 设(ϕ_t)是 $\mathbb{D}$ 中的一个半群，且 Δ是(ϕ_t)的一个花瓣。那么

$$v_\Delta^o(t)+v_\Delta^T(t)-\frac{1}{2}\log 2\le v_\Delta(t)\le v_\Delta^o(t)+v_\Delta^T(t),$$

对所有 $t\le 0$。

4 花瓣的总速度

本节考察花瓣 Δ的总速度收敛。花瓣速度的渐近行为在很大程度上取决于花瓣的类型。

我们首先讨论双曲花瓣，它们可能存在于椭圆半群和非椭圆半群中。设 (ϕ_t) 是一个单参数半群。令 σ 为 (ϕ_t) 的一个排斥不动点，其谱值为 $\lambda < 0$。记 Δ 为相应的双曲花瓣。我们的目标是证明与关系式 (1.1) 类似的结果。事实上，我们得到以下结果。

定理 4.1. 设 (ϕ_t) 是 $\mathbb{D}$ 中的一个半群。假设 Δ 是 (ϕ_t) 的一个双曲花瓣，对应于排斥不动点 σ。那么

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{v_\Delta(t)}{t} = \frac{\lambda}{2}, \tag{4.1}$$

其中 λ 是 σ 的排斥谱值。

为了证明定理 4.1，我们需要了解双曲花瓣 Δ 内双曲距离的渐近行为。将 [8, 引理 13.5.1] 稍作重新参数化后，可得到以下引理。

引理 4.1。 设(ϕ_t)是 $\mathbb{D}$ 中的一个半群。假设 Δ 是(ϕ_t)的一个双曲花瓣，对应于排斥不动点 σ。那么

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{d_\Delta(z,\phi_t(z))}{t} = \frac{\lambda}{2}, \quad \textit{for all } z\in\Delta, \tag{4.2}$$

其中， λ 是(ϕ_t)在 σ 处的排斥谱值。

定理 4.1 表明，当我们改用单位圆盘中的双曲距离，而不局限于花瓣的双曲几何时，同样的极限仍然成立。证明的主要思路是：反向轨道趋于排斥不动点时，单位圆盘的双曲几何会变得与花瓣的双曲几何相似。

定理 4.1 的证明。 设$z \in \Delta$。由区域单调性可轻易看出

$$\liminf_{t\to-\infty} \frac{d_{\mathbb{D}}(z,\phi_t(z))}{t} \geq \lim_{t\to-\infty} \frac{d_\Delta(z,\phi_t(z))}{t} = \frac{\lambda}{2}. \tag{4.3}$$

为证明另一方向的不等式，我们使用洛必达法则来估计极限。根据广义洛必达法则，我们得到

$$\limsup_{t\to-\infty} \frac{d_{\mathbb{D}}(z,\phi_t(z))}{t} \leq \limsup_{t\to-\infty} \frac{\partial}{\partial t} d_{\mathbb{D}}(z,\phi_t(z)). \tag{4.4}$$

记$d_z(t)$ 为双曲距离$d_{\mathbb{D}}(z\ \phi_t(z))$，记 $\rho_z(t)$ 为伪双曲距离$\rho_{\mathbb{D}}(z\ \phi_t(z))$。利用双曲距离关于伪双曲距离的表示形式，我们可以计算其关于t的导数；$2d_z(t) = \log(1+\rho_z(t)) - \log(1-\rho_z(t))$。经过初等计算，我们得到

$$2\frac{\partial}{\partial t} d_z(t) = \frac{1}{\rho_z(t)(1-\rho_z(t)^2)} \frac{\partial}{\partial t} \rho_z(t)^2. \tag{4.5}$$

伪双曲距离可以显式表示如下

$$\rho_z(t)^2 = \left|\frac{z-\phi_t(z)}{1-\bar{z}\phi_t(z)}\right|^2 = \frac{|z|^2+|\phi_t(z)|^2-2\mathrm{Re}(\bar{z}\phi_t(z))}{1+|z|^2\cdot|\phi_t(z)|^2-2\mathrm{Re}(\bar{z}\phi_t(z))}.$$

为了计算式 (4.5) 中的导数，我们使用 (ϕ_t) 的无穷小生成元G ，因为对于所有$w \in \Delta$ 和$t \leq 0$，$\frac{\partial \phi_t}{\partial t}(w) = G(\phi_t(w))$。因此我们得到

$$\rho_z(t)\frac{\partial}{\partial t}d_z(t) = \frac{(1+|z|^2-2\mathrm{Re}(\bar{z}\phi_t(z)))\,\mathrm{Re}(G(\phi_t(z))\overline{\phi_t(z)})}{(1-|\phi_t(z)|^2)|1-\bar{z}\phi_t(z)|^2} - \frac{\mathrm{Re}(G(\phi_t(z))\bar{z})}{|1-\bar{z}\phi_t(z)|^2}. \tag{4.6}$$

通过初等计算，我们注意到

$$\liminf_{t\to-\infty}\frac{\mathrm{Re}(G(\phi_t(z))\bar{z})}{|1-\bar{z}\phi_t(z)|^2} = 0,$$

因为$G(\sigma) = 0$。我们记

$$\mathrm{Re}(G(\phi_t(z))\overline{\phi_t(z)}) = \mathrm{Re}\left(\frac{G(\phi_t(z))\sigma}{(\sigma-\phi_t(z))^2}\overline{\sigma}\overline{\phi_t(z)}(\sigma-\phi_t(z))^2\right)$$

并进一步观察到

$$\overline{\sigma}\overline{\phi_t(z)}\frac{(\sigma-\phi_t(z))^2}{1-|\phi_t(z)|^2} = 1-\overline{\sigma}\phi_t(z) - \frac{|\sigma-\phi_t(z)|^2}{1-|\phi_t(z)|^2}.$$

因此,

$$\frac{\mathrm{Re}(G(\phi_t(z))\overline{\phi_t(z)})}{1-|\phi_t(z)|^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{G(\phi_t(z))}{\sigma-\phi_t(z)}\right) - \frac{|\sigma-\phi_t(z)|^2}{1-|\phi_t(z)|^2}\,\mathrm{Re}\left(\frac{G(\phi_t(z))\sigma}{(\sigma-\phi_t(z))^2}\right)$$

由引理 2.5 可得

$$\mathrm{Re}\left(\frac{G(\phi_t(z))}{\sigma-\phi_t(z)}\right) = -\,\mathrm{Re}\,((\overline{\sigma}\phi_t(z)-1)p(\phi_t(z))) + \frac{\lambda}{2}\,\mathrm{Re}(\overline{\sigma}(\sigma+\phi_t(z))), \tag{4.7}$$

其中p 是一个具有正实部的全纯映射。此外，再由引理 2.5

$$-\frac{|\sigma-\phi_t(z)|^2}{1-|\phi_t(z)|^2}\,\mathrm{Re}\left(\frac{G(\phi_t(z))\sigma}{(\sigma-\phi_t(z))^2}\right) \leq -\frac{\lambda}{2}\frac{|\sigma-\phi_t(z)|^2}{1-|\phi_t(z)|^2}\frac{1-|\phi_t(z)|^2}{|\sigma-\phi_t(z)|^2} = -\frac{\lambda}{2} \tag{4.8}$$

因此，回到 (4.4)，并结合 (4.7) 和 (4.8)，可得

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to-\infty}\frac{d_z(t)}{t} &\leq \limsup_{t\to-\infty}\frac{1+|z|^2-2\mathrm{Re}(\bar{z}\phi_t(z))}{|1-\bar{z}\phi_t(z)|^2}\Big[-\mathrm{Re}\,((\overline{\sigma}\phi_t(z)-1)p(\phi_t(z)))\\ &\qquad +\frac{\lambda}{2}\mathrm{Re}(\overline{\sigma}(\sigma+\phi_t(z))) - \frac{\lambda}{2}\Big]\\ &= \lambda - \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}.\end{aligned}$$

同时考虑 (4.3)，即可得到所需的极限。 □

回顾一下，抛物型花瓣仅存在于抛物型单参数半群的情形。设 (ϕ_t) 是 $\mathbb{D}$ 上以 $\tau \in \partial\mathbb{D}$ 为 Denjoy–Wolff 点的全纯自映射抛物型半群。进一步设h是该半群所对应的 Koenigs 函数。该半群中包含于抛物花瓣 Δ 内的每条反向轨道都收敛于 τ。我们得到关于抛物花瓣总速度渐近行为的如下结果。

定理 4.2. 设(ϕ_t) 是 $\mathbb{D}$ 中具有抛物花瓣 Δ 的一个半群。那么，存在一个绝对常数 $c \geq 1$ 使得

$$\frac{1}{c}\cdot\log|t| \leq v_\Delta(t) \leq c\cdot\log|t|,$$

对所有 $t < -1$。

证明。 由于 Δ 是抛物型的，(ϕ_t) 也是抛物型的，因此 $\Omega = h(\mathbb{D})$ 是正向凸的，而 $h(\Delta)$ 是 Ω 内的极大水平半平面。令 $z \in \Delta$。由共形不变性和双曲距离的单调性，对于 $t \leq 0$，我们有

$$v_\Delta(t) = d_{\mathbb{D}}(z, \phi_t(z)) = d_\Omega(h(z), h(z)+t) \leq d_{h(\Delta)}(h(z), h(z)+t).$$

不失一般性，假设$h(\Delta)$是上半平面，且$h(z) = i$（在另一种情况下，可以通过与一个平移复合来实现这一点）。经过旋转，我们转到右半平面 $\mathbb{H}$，并利用 (2.2)，得到

$$d_{\mathbb{D}}(z, \phi_t(z)) \leq d_{h(\Delta)}(i, i+t) = d_{\mathbb{H}}(1, 1-it) = \operatorname{arctanh} \frac{-t}{\sqrt{4+t^2}}.$$

因此，对于$t < -1$，我们得到

$$\limsup_{t\to-\infty} \frac{d_{\mathbb{D}}(z, \phi_t(z))}{\log|t|} \leq \lim_{t\to-\infty} \frac{\operatorname{arctanh} \frac{-t}{\sqrt{4+t^2}}}{\log(-t)}. \tag{4.9}$$

利用洛必达法则，我们可以计算最后一个极限，得到

$$\limsup_{t\to-\infty} \frac{v_\Delta(t)}{\log|t|} \leq 1, \tag{4.10}$$

这里我们省略了一些冗余计算的具体过程。现在我们来寻找一个反向不等式。由引理 2.1 可知

$$d_{\mathbb{D}}(z, \phi_t(z)) = d_\Omega(h(z), h(z)+t) \geq \frac{1}{4} \log\left(1 + \frac{|h(z) - (h(z)+t)|}{\min\{\delta_\Omega(h(z)), \delta_\Omega(h(z)+t)\}}\right),$$

对于所有$t \leq 0$均成立。由于相关平面域 Ω 在正向凸，边界距离$\delta_\Omega(h(z)+t)$是$t \leq 0$的非递减函数。因此，

$$d_{\mathbb{D}}(z, \phi_t(z)) \geq \frac{1}{4} \log\left(1 + \frac{|t|}{\delta_\Omega(h(z)+t)}\right),$$

对所有 $t \leq 0$。然而，集合 $\{h(z)+t : t \leq 0\}$ 是经过 Koenigs 函数 h 的一条反向轨道的迹，因此包含在某个极大水平半平面内。这意味着，当 $t \to -\infty$ 时，$\delta_\Omega(h(z)+t)$ 的值始终有界且严格为正。我们可以写成 $\lim_{t\to-\infty} \delta_\Omega(h(z)+t) =: d \in (0, +\infty)$。令$\varepsilon > 0$。那么，存在 $t_0 \leq -1$，使得对所有 $t \leq t_0$，都有 $\delta_\Omega(h(z)+t) \leq d + \varepsilon$。因此，利用洛必达法则，我们得到

$$\begin{aligned}
\liminf_{t\to-\infty} \frac{d_{\mathbb{D}}(z, \phi_t(z))}{\log|t|} &\geq \frac{1}{4} \liminf_{t\to-\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{-t}{\delta_\Omega(h(z)+t)}\right)}{\log(-t)} \\
&\geq \frac{1}{4} \liminf_{t\to-\infty} \frac{\log\left(1 - \frac{t}{d+\varepsilon}\right)}{\log(-t)} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

总而言之，我们得到

$$\frac{1}{4} \leq \liminf_{t\to-\infty} \frac{v_\Delta(t)}{\log|t|} \leq \limsup_{t\to-\infty} \frac{v_\Delta(t)}{\log|t|} \leq 1.$$

This 最后一个关系证实了所需 $c \geq 1$ 的存在，从而得到所需结果 . □

换言之，定理 4.2 的陈述保证，抛物花瓣的总速度实际上与 $\log|t|$ 可比。

推论 4.1. 设(ϕ_t)是 $\mathbb{D}$ 中的一个半群，且 Δ是(ϕ_t)的一个抛物花瓣。那么，

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{v_\Delta(t)}{t} = 0.$$

注4.1. 请记住，若 Δ 是一个非椭圆半群的双曲花瓣，且其对应的排斥不动点为 σ，那么像$h(\Delta)$是宽度为 $-\frac{\pi}{\lambda}$的极大水平条带，其中 $\lambda<0$是 σ的排斥谱值。当 Δ 为抛物型时，其像是一个极大水平半平面。从某种意义上说，我们可以认为$h(\Delta)$是一个宽度无限的水平条带。因此，可以说“排斥”谱值为 0，这与半群在 Denjoy–Wolff点处的实际谱值一致。综上所述，我们可以说，推论 4.1 是定理 4.1 的自然推广。

5 花瓣的切向速度与正交速度

本节主要讨论花瓣的切向速度与正交速度的渐近行为。正如总速度的情形所述，根据花瓣类型的不同，分为两种情况。我们得到以下关于花瓣切向速度渐近行为的结果。

定理 5.1。 设(ϕ_t) 是单位圆盘中的一个半群。假设 Δ 是(ϕ_t)的一个花瓣。以下结论成立 .

(i)若 Δ是双曲型，则上极限 $v_\Delta^T(t)<+\infty.t$

$\to-\infty$(ii)若 Δ是抛物型，则极限$t\to-\infty v_\Delta^T(t)=+\infty.$

证明。 证明过程较长，主要依赖于对调和测度的估计。我们将其分为三个不同的情形:

情形 1 Δ 是双曲型且 (ϕ_t) 是非椭圆型： 令 τ 为半群的 Denjoy–Wolff 点，h 为其 Koenigs 函数，且 $\Omega=h(\mathbb{D})$。令 $z\in\Delta$。双曲花瓣 Δ 对应于半群的一个排斥不动点 $\sigma\in\partial\mathbb{D}$，因此，从 z 出发的反向轨道收敛于 σ。假设η：$(-1,\ 1)\to\mathbb{D}$是单位圆盘中双曲距离的测地线，满足 $\eta(0)=z$，且 $\lim_{r\to1^-}\eta(r)=\sigma$。那么

$$v_\Delta^T(t)=d_{\mathbb{D}}(\phi_t(z),\eta)=d_\Omega(h(z)+t,h\circ\eta)=d_\Omega(h(z)+t,x_t),$$

对所有 $t\le0$，其中 $x_t\in h(\eta((-1,\ 1)))$ 是满足下式的点

$$d_\Omega(h(z)+t,x_t)=d_\Omega(h(z)+t,h\circ\eta)=\inf_{r\in(-1,1)}d_\Omega(h(z)+t,h(\eta(r))).$$

像 $h(\Delta)$ 是 Ω 中的极大水平条带 S，其中包含 $h(z)+t$，对所有 $t\le0$ 均成立。我们的首要目标是证明，测地线 $h\circ\eta$ 上的点 x_t 最终也会落在 S 内。

假设存在一个严格递减序列 $\{t_n\}\subset(-\infty,0]$ 满足 $t_n\xrightarrow{n\to+\infty}-\infty$，使得对于每个$n\in\mathbb{N}$，都有$x_{t_n}\in\Omega\setminus S$。不失一般性，通过必要时提取一个子序列，我们可以假设对于每个$n\in\mathbb{N}$，都有 $\mathrm{Im}\,x_{t_n}>\mathrm{Im}\,h(z)$。水平条带$S$在 Ω 中是极大的这一事实推出

$$\lim_{n\to+\infty}\delta_\Omega^+(x_{t_n})=0\quad\text{and}\quad\lim_{n\to+\infty}\delta_\Omega^-(x_{t_n})>0,$$

其中，对于 $\partial\Omega^+=\{\zeta\in\partial\Omega,\ \ \delta_\Omega^+(z):=\mathrm{dist}(z\ \partial\Omega^+)$；对于 $\partial\Omega^-=\{\zeta\in\partial\Omega,\ \ \delta_\Omega^-(z):=\mathrm{dist}(z\ \partial\Omega^-)$。$\mathrm{Im}\ \zeta>\mathrm{Im}\,h(z)\}$，且 $\mathrm{Im}\ \zeta<\mathrm{Im}h(z)\}$。显然，

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\delta_\Omega^+(x_{t_n})}{\delta_\Omega^-(x_{t_n})}=0. \tag{5.1}$$

再次抽取一个子序列后，我们可以假设对所有 $\mathrm{n}\in\mathbb{N}$，$\delta_\Omega^+(\mathrm{x}_{t_n})<\delta_\Omega^-(\mathrm{x}_{t_n})$。考虑 p_n^+，使其为 $\partial\Omega^+$ 上满足 $|\mathrm{x}_{t_n}-\mathrm{p}_n^+|=\delta_\Omega^+(\mathrm{x}_{t_n})$ 的点，并令 p_n^- 为 $\partial\Omega^-$ 上对应的点。设 $\gamma_n^+=[\mathrm{x}_{t_n},\mathrm{p}_n^+)$ 和 $\gamma_n^-=[\mathrm{x}_{t_n},\mathrm{p}_n^-)$，其中这些符号分别表示相应的线段。显然，$\gamma_n^+,\gamma_n^-\subset\Omega$。接下来，考虑 $\mathrm{D}_n:=\mathrm{D}(\mathrm{x}_{t_n},\delta_\Omega^-(\mathrm{x}_{t_n}))$，它是以 x_{t_n} 为中心、以 $\delta_\Omega^-(\mathrm{x}_{t_n})>0$ 为半径的圆盘。根据构造，$\gamma_n^+\subset\mathrm{D}_n$，而 γ_n^- 是 D_n 的半径。最后，记 Ω_n 为 $\Omega\cap\mathrm{D}_n$ 中包含 γ_n^+ 的连通分支，并设 $\mathrm{E}_n=\partial\Omega_n\setminus\partial\Omega^+$。在 Ω 内连接 γ_n^+ 与 $\partial\Omega^-$ 的每条曲线都必定包含一条在 Ω_n 内连接 γ_n^+ 与 E_n 的子曲线。根据极值距离的定义和极值长度的第一条单调性性质，我们得到

$$\lambda(\gamma_n^+,\partial\Omega^-,\Omega)\ge\lambda(\gamma_n^+,E_n,\Omega_n),$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。此外，在 Ω_n 内连接 γ_n^+ 与 E_n 的曲线族显然是圆盘 D_n 内连接 γ_n^+ 与 $\partial(D_n)$ 的曲线族的子族。因此，由引理 2.2

$$\lambda(\gamma_n^+, E_n, \Omega_n) \geq \lambda(\gamma_n^+, \partial(D_n), D_n),$$

对每个$n \in \mathbb{N}$。通过依次进行平移、伸缩和旋转，我们看到

$$\lambda(\gamma_n^+, \partial(D_n), D_n) = \lambda\left(\left[0, \frac{\delta_\Omega^+(x_{t_n})}{\delta_\Omega^-(x_{t_n})}\right), \partial\mathbb{D}, \mathbb{D}\right),$$

对每个$n \in \mathbb{N}$。考虑（5.1），我们转而研究格罗茨奇环理论（见 [16, 定理 2.80] ）以确定

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda\left(\left[0, \frac{\delta_\Omega^+(x_{t_n})}{\delta_\Omega^-(x_{t_n})}\right), \partial\mathbb{D}, \mathbb{D}\right) = +\infty.$$

回溯上述步骤，可得

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda(\gamma_n^+, \partial\Omega^-, \Omega) = +\infty.$$

最后，借助 Beurling 估计，我们能够用调和测度重新表述这一结果，并写成

$$\lim_{n\to+\infty} \omega(x_{t_n}, \partial\Omega^-, \Omega) = 0.$$

由注 2.1 可知，上述量的渐近行为意味着序列 $\{h^{-1}(x_{t_n})\}$切向地收敛到 σ。然而，$h \circ \eta$ 实际上是 Ω 中关于双曲距离的一条测地线，而共形映射保持角度不变。这表明 $\{h^{-1}(x_{t_n})\}$ 正交地收敛到 σ。因此，我们得到了矛盾！所以，存在一个 $t_0 \leq 0$，使得对于所有 $t \leq t_0$，都有 $x_t \in S$。

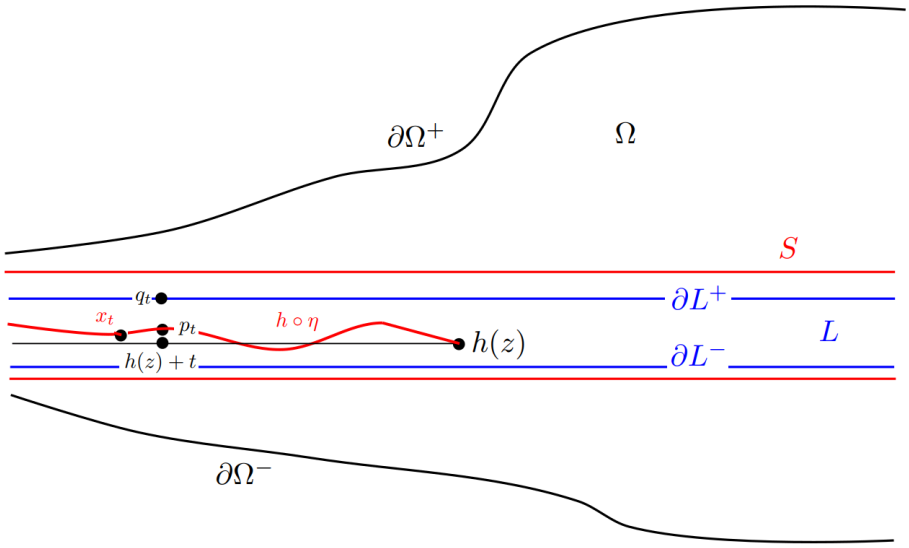

图 1. 定理 5.1 的集合：**情形 1**

根据双曲距离的单调性，我们得到 $v_\Delta^T(t) \leq d_S(h(z)+t, x_t)$，对所有 $t \leq t_0$ 都成立。坚持先前的论证，即 $\{x_t\}$ 最终包含在 S 内，我们可以看出，必定存在另一个水平条带 L，使得 $L \subsetneq S$，$\partial L \cap \partial S \neq 0$，并且 $\{x_t\}$最终包含在这个更小的条带 L 中（否则，(5.1) 中的极限将为 0 或 $+\infty$，从而再次导致切向收敛，与结论矛盾）。显然，我们可以这样选取 L，使得 $h(z) \in L$ 也成立。对于 $t \leq t_0$，取 p_t 为 $h \circ \eta((-1,1))$ 上满足 $\operatorname{Re} p_t = \operatorname{Re} h(z) + t$ 的点。我们知道，对所有 $t \leq t_0$，都存在这样的点，因为

$h(\eta(0)) = h(z)$，并且由于 $h\circ\eta$ 收敛到 Ω 所对应的素端； σ在条带 S 内定义，且朝向负方向。此外，根据 Minda 反射原理（见 [15]），点 p_t 是唯一的。根据定义

$$d_S(h(z)+t, x_t) \le d_S(h(z)+t, p_t).$$

现在设q_t为点 ∂L^+（若 $\mathrm{Im}\, p_t \ge \mathrm{Im} h(z)$），或为点 ∂L^-（若 $\mathrm{Im}\, p_t \le \mathrm{Im} h(z)$），使得 $\mathrm{Re} q_t = \mathrm{Re} h(z) + t$（见图 1）。

然而，连接$h(z)+t$与p_t，再与q_t相连的竖直弧，是水平条带S的一条测地弧。由于方向的缘故，这意味着

$$v_\Delta^T(t) \le d_S(h(z)+t, p_t) \le d_S(h(z)+t, q_t),$$

对所有$t \le t_0$均成立。尽管如此，水平平移保持条带S不变，且点$h(z)+t$与q_t具有相同的实部。因此，量$d_S(h(z)+t, q_t)$只能取两个不同的值c^+和c^-，分别取决于$q_t \in L^+$ 还是$q_t \in L^-$。这意味着

$$v_\Delta^T(t) \le \max\{c^+, c^-\},$$

对所有$t \le t_0$均成立，因此，$\limsup_{t\to-\infty} v_\Delta^T(t) < +\infty$.

情形 2 Δ为双曲型且(ϕ_t) 为椭圆型：由于(ϕ_t)为椭圆型，$h(\Delta)$是半群在Ω中的一个极大 μ-螺旋型扇形，其中 μ 是该半群的谱值。借助引理 2.4，$h(\Delta)$可映射到一个条带上。按照前一种情形的方法，我们可以证明所需结果。唯一的区别是，反向轨道的像以及经过$g\circ h$ 的测地线的像，在正向上收敛到 ∞。

情形 3 Δ 为抛物型：像$h(\Delta)$是 Ω内的一个极大水平半平面。令$H = h(\Delta)$，并设$z \in \Delta$。仿照前面的证明，我们得到

$$v_\Delta^T(t) = d_{\mathbb{D}}(\phi_t(z), \eta) = d_\Omega(h(z)+t, h\circ\eta) = d_\Omega(h(z)+t, x_t),$$

对所有$t \le 0$均成立，其中x_t再次表示$h\circ\eta$上与$h(z)+t$在双曲度量下距离最近的点。利用引理 2.1，我们得到

$$v_\Delta^T(t) \ge \frac{1}{4}\log\left(1 + \frac{|h(z)+t-x_t|}{\min\{\delta_\Omega(h(z)+t), \delta_\Omega(x_t)\}}\right).$$

我们的目标是估计不等式右端的每一个因子。由于 Ω 在正方向上的凸性以及 H 在 Ω 中的极大性，我们可推出 $\lim_{t\to-\infty} \delta_\Omega(h(z)+t) = c \in (0, +\infty)$。

我们进一步证明 $\liminf_{t\to-\infty} |h(z)+t-x_t| > 0$。为导出矛盾，假设 $\liminf_{t\to-\infty} |h(z)+t-x_t| = 0$。于是，存在一个严格递减序列 $\{t_n\} \subset (-\infty, 0]$，使得 $\lim_{n\to+\infty} t_n = -\infty$ 且 $\lim_{n\to+\infty} |h(z)+t_n - x_{t_n}| = 0$。为了使最后一个极限为零，必须有 $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}\, x_{t_n} = -\infty$，而 $\mathrm{Im}\, x_{t_n}$ 必须保持有界。因此，$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Arg}\, x_{t_n} = \pi$。此外，按照情形 1 中证明的步骤，我们可以放心地假设 $\{x_{t_n}\}$ 也包含于 H 中。

在证明的其余部分，我们将使用调和测度。调和测度的共形不变性使我们可以不失一般性地假设 H 是上半平面。令 $L^+ = \{z \in \mathbb{C}: \mathrm{Arg}\, z = \pi\} \cup \{0\}$，且 $L^- = \partial H \setminus L^+$。我们先处理 $\partial H \cap \partial\Omega = /0$ 的情形。由于 $H \subset \Omega$，必有 $\mathrm{Im}\, w < 0$，对所有 $w \in \partial\Omega$均成立。特别地， $\partial\Omega$ 包含一个连通分支 E，使得 $\mathrm{dist}(E, L^+) = 0$，因为当沿负方向趋近 ∞ 时，这两个集合必会相交。令 ζ 为 E 中离 0 最近的点，并令 A 为连接 0 与 ζ的线段。根据我们的构造、H 在 Ω 中的极大性以及 Ω的正向凸性，可知 $A \setminus \{\zeta\} \subset \Omega$，且 ζ将 E 分成两个连通分支 E^+和 E^-，二者都趋向 ∞。将 E^+ 视为趋向 ∞ 且靠近 L^+ 的那个连通分支（见图 2）。于是，记 H' 为由 L^+、A 和 E^-围成的单连通正向凸区域。

根据一个已知公式（见 [18, 第 100] 页），我们有 $\omega(x_{t_n}, L^-, H) = \frac{\pi - \mathrm{Arg}\, x_{t_n}}{\pi}$，因此

$$\lim_{n\to+\infty} \omega(x_{t_n}, L^-, H) = 0.$$

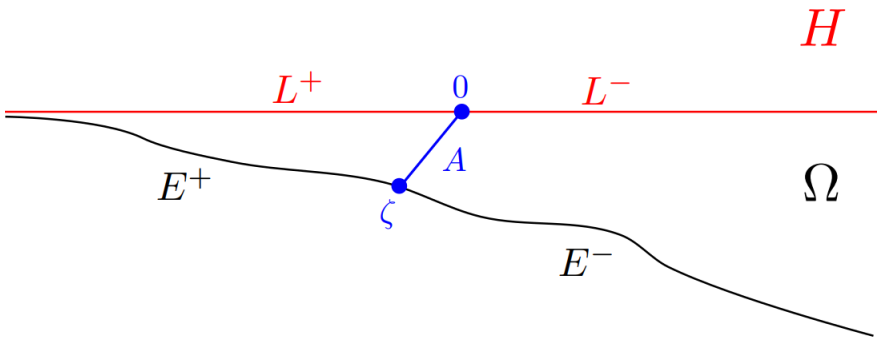

图 2. 定理 5.1 的集合：**情形 3**

此外，根据调和函数的最大值原理，我们有 $\omega(x_{t_n}, L^-, H) \geq \omega(x_{t_n}, E^-, H')$，对所有$n \in \mathbb{N}$均成立。因此 $\omega(x_{t_n}, E^-, H') \xrightarrow{n \to +\infty} 0$。根据强马尔可夫性质，可得

$$\omega(x_{t_n}, E^-, \Omega) = \omega(x_{t_n}, E^-, H') + \int_{L^+ \cup A} \omega(w, E^-, \Omega) \cdot \omega(x_{t_n}, dw, H'),$$

对所有$n \in \mathbb{N}$。我们需要计算最后一个积分，为此将其分解为两个积分。首先，

$$\int_{A} \omega(w, E^-, \Omega) \cdot \omega(x_{t_n}, dw, H') \leq \omega(x_{t_n}, A, H').$$

然而，序列 $\{x_{t_n}\}$收敛到 ∞，而A有界。直接地，$\omega(x_{t_n}, A, H') \xrightarrow{n \to +\infty} 0$. 稍微修改一下记号，我们写作

$$\int_{L+} \omega(w, E^-, \Omega) \cdot \omega(x_{t_n}, dw, H') = \int_{(-\infty, 0)} \omega(s, E^-, \Omega) \cdot \omega(x_{t_n}, ds, H') =: I(n).$$

由于E^+与L^+趋于相交，很容易看出 $\omega(s, E^-, \Omega) \xrightarrow{s \to -\infty} 0$。令 $\varepsilon > 0$。那么，存在$s_0 < 0$使得 $\omega(s, E^-, \Omega) < \varepsilon$对所有$s \leq s_0$均成立。因此，

$$\begin{aligned} I(n) &= \int_{(-\infty, s_0]} \omega(s, E^-, \Omega) \cdot \omega(x_{t_n}, ds, H') + \int_{(s_0, 0)} \omega(s, E^-, \Omega) \cdot \omega(x_{t_n}, ds, H') \\ &\leq \varepsilon + \omega(x_{t_n}, (s_0, 0), H'). \end{aligned}$$

再次，由于 $(s_0, 0)$ 是有界集，可得 $\omega(x_{t_n}, (s_0, 0), H') \xrightarrow{n \to +\infty} 0$，从而 $\limsup_{n \to +\infty} I(n) \leq \varepsilon$。

不过，这对所有 $\varepsilon > 0$ 都成立，这意味着 $I(n) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$. 综合以上结果并回到强马尔可夫性质，我们可以推得

$$\lim_{n \to +\infty} \omega(x_{t_n}, E^-, \Omega) = \lim_{n \to +\infty} \omega(x_{t_n}, E^-, H') = 0.$$

用类似的方法，我们可以证明，对于边界的任意其他连通分支 F（不同于 E），都有 $\omega(x_{t_n}, F, \Omega) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$。因此，我们的构造要求 $\omega(x_{t_n}, E^+, \Omega) \xrightarrow{n \to +\infty} 1$。容易看出，$E^+$和 $\partial\Omega \setminus E^+$经由 h^{-1}分别对应于两条圆弧 $B^+, B^- \subset \partial\mathbb{D}$，它们交于两点，其中一点是 τ。调和测度的共形不变性表明

$$\lim_{n \to +\infty} \omega(h^{-1}(x_{t_n}), B^+, \mathbb{D}) = 1$$

结合注 2.1，我们知道 $\{h^{-1}(x_{t_n})\}$ 切向地收敛到 τ。但是，点$h^{-1}(x_{t_n}),n \in \mathbb{N}$位于测地线 η 上，因此收敛应当是正交的。矛盾！回溯我们的初始假设，我们发现实际上 $\liminf_{t\to-\infty} |h(z)+t-x_t| > 0$。

若另有 $\partial H \cap \partial\Omega \neq /0$，则类似的证明（尽管简单得多）也能得到相同的结果。特别地，当 $\partial H = \partial\Omega$ 时，结论显而易见。

最后，采用非常类似的步骤可以证明，假设 $\limsup |h(z)+t-x_t| < +\infty$，会导致$t\to-\infty$同类矛盾。这主要是因为，要使上极限有限，序列 $\{x_{t_n}\}$ 的实部应收敛到 $-\infty$，而虚部应保持有界。因此，我们可以采用与之前相同的估计，得出上述结论。

综上，我们得到 $|h(z)+t-x_t| \xrightarrow{t\to-\infty} +\infty$并且

$$\limsup_{t\to-\infty} \min\{\delta_\Omega(h(z)+t), \delta_\Omega(x_t)\} \le \lim_{t\to-\infty} \delta_\Omega(h(z)+t) = c.$$

因此，由引理 2.1 可得，$v_\Delta^T(t) \xrightarrow{t\to-\infty} +\infty$。 □

注记 5.1. 结合定理 5.1 的不同情形，以及关于反向轨道和花瓣的知识，我们可以得知：当且仅当 $\limsup v_\Delta^T(t) < +\infty$ 时，$\phi_t(z)$ 在 $t\to-\infty$ 趋于$t\to-\infty$单位圆上的某一点，且收敛方式为非切向收敛；这里对某个（等价地，对所有）$z \in \Delta$ 都成立。或者说，当且仅当 $\limsup v_\Delta^T(t) < +\infty$ 时，$\phi_t(z)$ 在 $t\to-\infty$ 趋于（ϕ_t）的一个排斥不动点；这里对某个（等价地，对所有）$z \in \Delta$ 都成立。

注记 5.2. 证明**情形 1** 中将比值 $\delta_\Omega^+(x_{t_n})$ $\delta_\Omega^-(x_{t_n})$ 与序列的切向收敛联系起来的部分，并非原创。这是对证明 [20, 定理 1.2]的略微修改。我们纳入这一部分，是为了使本文更加清晰完整。

结合推论 4.1、定理 4.1、定理 5.1以及勾股定理，可得以下关于正交速度和切向速度的结果。证明显然，故略去。

Co推论 5.1。 设(ϕ_t)是 $\mathbb{D}$ 中的一个半群，且 Δ是(ϕ_t)的一个花瓣。以下结论成立 .

(i) 若 Δ 是双曲型，且排斥谱值为 $\lambda \in (-\infty,0)$，则

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{v_\Delta^o(t)}{t} = \frac{\lambda}{2} \quad and \quad \lim_{t\to-\infty} \frac{v_\Delta^T(t)}{t} = 0.$$

(ii) 若 Δ 是抛物型，则

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{v_\Delta^o(t)}{t} = \lim_{t\to-\infty} \frac{v_\Delta^T(t)}{t} = 0.$$

6 非正则反向轨道

在本节中，我们分析非正则反向轨道上的收敛速度的渐近行为。如第2.5节所述，单参数半群的非正则反向轨道要么位于某个花瓣的边界上，要么收敛到该半群的一个超排斥不动点。

假设 (ϕ_t) 是 $\mathbb{D}$ 上的全纯自映射半群，且 $\gamma\colon [0,+\infty) \to \mathbb{D}$ 是 (ϕ_t) 的一个非正规回溯轨道。通过 Koenigs 函数 h，我们转到相关平面域 Ω。那么，像 $h(\gamma[0,+\infty))$ 要么是沿负方向趋近于 ∞ 的半直线，要么是趋近于 ∞ 的半螺旋。集合 $h(\gamma[0,+\infty))$ 要么包含于某个花瓣的边界分支中，要么以一个超排斥不动点为起点。

以下结果表明，沿非正则反向轨道的“广义”总速度的渐近行为，既不取决于半群的类型，也不取决于花瓣的类型；该非正则反向轨道可能位于该花瓣的边界分支上。

命题 6.1。 存在一个由 $\varphi_t)_{t\geq 0}$ 构成的全纯自映射单参数半群，其作用于 $\mathbb{D}$，使得

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{d_{\mathbb{D}}(\zeta,\varphi_t(\zeta))}{t^2}=0,$$

其中 ζ 位于 γ 的某条非正则反向轨道上(φ_t)。此外，存在一个由全纯自映射组成的单参数半群$(\psi_t)_{t\geq 0}$，其作用于 $\mathbb{D}$，使得

$$\liminf_{t\to-\infty}\frac{d_{\mathbb{D}}(\zeta,\psi_t(\zeta))}{t^2}\geq\frac{1}{4},$$

其中 ζ 位于 $\tilde{\gamma}$ 的某条非正则反向轨道上(ψ_t)。

证明。 证明基于非椭圆全纯自映射半群在 $\mathbb{D}$上的双曲花瓣的存在性。沿用相同的论证方法，在抛物花瓣的边界上或在一条收敛于超排斥不动点的反向轨道上，也可以证明相同的结果。此外，适当调整螺旋形域情形下的证明并运用引理 2.4，该结果可推广至椭圆半群的情形。

设 Ω 是 $\mathbb{C}$ 的一个单连通子域，它同时正向凸，并包含一个极大条带S。记 ∂S^+和 ∂S{v12>分别为S的上边界分支和下边界分支。假设 $\zeta\in\partial S^+$。进一步假设存在某个$t_0<0$，使得对所有$t\leq t_0$，$\delta_\Omega(\zeta+t)=(\ln(-t))^{-1}$。注意，由于极大性，应有 $\delta_\Omega(\zeta+t)\xrightarrow{t\to-\infty}0$。根据引理 2.1，对于某个$t\leq t_0$，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{d_\Omega(\zeta,\zeta+t)}{t^2} &\leq \frac{d_\Omega(\zeta,\zeta+t_0)}{t^2}+\frac{d_\Omega(\zeta+t_0,\zeta+t)}{t^2}\\ &\leq \frac{d_\Omega(\zeta,\zeta+t_0)}{t^2}+\frac{1}{t^2}\int_{[\zeta+t,\zeta+t_0]}\frac{\mathrm{d}s}{\delta_\Omega(s)}\\ &= \frac{d_\Omega(\zeta,\zeta+t_0)}{t^2}+\frac{1}{t^2}\int_{-t_0}^{-t}\ln s\,\mathrm{d}s\\ &= \frac{d_\Omega(\zeta,\zeta+t_0)+t_0\ln(-t_0)-t_0}{t^2}+\frac{t-t\ln(-t)}{t^2}\xrightarrow{t\to-\infty}0.\end{aligned}$$

设 h是 Ω 的黎曼映射。我们定义非椭圆半群 $(\varphi_t)_{t\geq 0}$，其满足 $\varphi_t(z):=h^{-1}(h(z)+t)$，其中 $z\in\mathbb{D}$，且 $t\geq 0$。于是，极大条带 S对应于 (φ_t) 的一个双曲花瓣，而 $h^{-1}(\zeta)$ 位于一条非正则反向轨道上。因此，由于双曲距离的共形不变性，可得

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{d_{\mathbb{D}}(h^{-1}(\zeta),\varphi_t(h^{-1}(\zeta)))}{t^2}=0.$$

对于第二部分，我们再次假设 Ω' 是 $\mathbb{C}$ 的一个单连通子域，它正向凸且包含极大条带 S'。再次设 $\zeta\in\partial(S')^+$。进一步假设存在某个 $t_0<0$，使得对于所有 $t\leq t0$, $\delta_{\Omega'}(\zeta+t)=-te^{-t^2}$。根据引理 2.1，对于某个$t\leq t_0$，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{d_{\Omega'}(\zeta,\zeta+t)}{t^2} &\geq \frac{d_{\Omega'}(\zeta+t_0,\zeta+t)}{t^2}-\frac{d_{\Omega'}(\zeta,\zeta+t_0)}{t^2}\\ &\geq \frac{1}{4t^2}\log\left(1+e^{t^2}\frac{|t-t_0|}{-t}\right)-\frac{d_{\Omega'}(\zeta,\zeta+t_0)}{t^2}\xrightarrow{t\to-\infty}\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

应用与前一种情况相同的技巧，我们可以构造一个非椭圆半群 $(\psi_t)_{t\geq 0}$，其中S' 是双曲花瓣在 Koenigs 函数下的像，而 ζ 位于一条非正则反向轨道的像上，并借助 Ω'的黎曼映射g。由于

双曲距离的共形不变性，可得

$$\liminf_{t\to-\infty}\frac{d_{\mathbb{D}}(g^{-1}(\zeta),\psi_t(g^{-1}(\zeta)))}{t^2}\geq\frac{1}{4}.$$

□

推论 6.1. 沿非正则反向轨道的收敛速度的渐近行为仅取决于 *Koenigs* 域 Ω 的欧几里得几何，以及由相应 *Koenigs* 函数映射的非正则反向轨道趋近Ω边界的渐近速度。

参考文献

[1] M. Abate. Taut 流形上全纯映射的迭代理论. Mediterranean Press, 1989. [2] L. V. Ahlfors. 共形不变量：几何函数论专题. McGraw-Hill, 1973. [3] L. Arosio and F. Bracci. 全纯迭代的典范模型. 美国数学会汇刊, 368(5):3305–3339, 2016. [4] E. Berkson and H. Porta. 解析函数半群与复合算子. 密歇根数学杂志, 25 115, 1978 1 101( ): – .[5] D. Betsakos and N. Karamanlis. 关于单位圆盘全纯自映射半群速度的单调性. arXiv 预印本 arXiv:2209.09505, 2022. [6] F. Bracci. 单位圆盘全纯自映射非椭圆半群轨道的收敛速度. 玛丽亚·居里-斯克沃多夫斯卡大学学报 A 辑, 73(2):21–43, 2019.[7] F. Bracci, M. D. Contreras, S. D´ıaz-Madrigal, and H. Gaussier. 全纯自映射半群的反向轨道与花瓣. 纯粹与应用数学年刊 (4), 198(2):411–441, 2019. [8] F. Bracci, M.D. Contreras, and S. D´ıaz-Madrigal. 单位圆盘全纯自映射的连续半群. Springer Nature Switzerland AG, 2020.[9] F. Bracci, D. Cordella, and M. Kourou. 单位圆盘全纯自映射半群正交速度与收敛率的渐近单调性. Revista Matem´atica Iberoamericana, 38(2):527–546, 2022. [10] C. Carath´eodory. 复变函数论第 1 卷. Chelsea, 纽约, 1954. [11] M. D. Contreras and S. D´ıaz-Madrigal. 单位圆盘上的解析流：角导数与边界不动点. 太平洋数学杂志, 222(2):253–286, 2005.[12] D. Cordella. 单位圆盘全纯自映射抛物型半群切向速度的渐近上界. 纯粹与应用数学年刊 (1923-), 200(6):2767–2784, 2021. [13] M. Elin, D. Shoikhet, and L. Zalcman. 半群反向流不变域的花状结构. 芬兰科学院数学年刊, 33(1):3–34, 2008.[14] J. B. Garnett and D. E. Marshall. 调和测度. 剑桥大学出版社, 剑桥, 2008. [15] D. Minda. 双曲度量的反射原理及其在几何函数论中的应用. 复变函数理论与应用 8, no. 1-2, 129–144, 1987. [16] M. Ohtsuka. 狄利克雷问题、极值长度与素端. 华盛顿大学, 1963. [17] S.C. Port and C.J. Stone. 布朗运动与经典势理论. 学术出版社, 纽约, 1978. [18] T. Ransford. 复平面上的势理论. 剑桥大学出版社, 1995. [19] K. Zarvalis. 关于全纯函数抛物型半群的切向速度. 美国数学会会刊, 149(2):729–737, 2021.[20] K. Zarvalis. 全纯函数半群作用下的拟测地线与反向轨道. 伊利诺伊数学杂志, 提前出版:1–18, 2022.

维尔茨堡朱利叶斯-马克西米利安大学数学系，97074，维尔茨堡，德国电子邮箱地址: maria.kourou@mathematik.uni-wuerzburg.de

塞萨洛尼基亚里士多德大学数学系，54124，塞萨洛尼基，希腊电子邮箱地址: zarkonath@math.auth.gr