关于动量扩散 采用无网格方法处理多相表面上的动量扩散 s

Johannes C. Joubert[a],*, Daniel N. Wilke[a], Patrick Pizette[b]

[a]比勒陀利亚大学机械与航空工程系，南非[b]*IMT Lille Douai*，里尔大学，*EA 4515 - LGCgE* 土木工程与地理环境实验室，*CERI* 材料与工艺，*F-59000* 里尔，法 *ce*

arXiv:2303.09978v1 [physics.flu-dyn] 17 Mar 2023

摘要

本研究探讨了动量扩散算子的选择对采用无网格拉格朗日方法（MLM）求解的多相流体系统演化的影响。具体而言，研究了多相界面处非零黏度梯度的影响。研究表明，常用的光滑粒子流体动力学（SPH）和广义有限差分（GFD）扩散算子都会低估多相界面处的剪切散度。此外，研究还表明，黏度比越大，这一现象的影响越显著。本文提出了一种多相广义有限差分格式，该格式采用计算效率较高的扩散算子，能够考虑黏度跳跃间断所产生的影响。利用该格式模拟了浸没在较重流体中的三维气泡，其密度比为 2：1，动力黏度比为 100：1。比较不同动量扩散算子的影响时，发现气泡上升速度相差 57.2%。

关键词：广义有限差分（GFD）、无网格拉格朗日方法（MLM）、光滑粒子流体动力学（SPH）、动量扩散、多相、

1. 引言

多相流现象的预测是各种物理和工程环境中普遍存在的问题，应用领域包括油气生产、发电和化学加工。近年来，网格无关拉格朗日方法（MLM）已成为模拟多相流时基于网格的方法的一种热门替代方案，因为它们避免了从欧拉视角考察流体时所带来的许多挑战，尤其是在进行界面追踪时。MLM 使用可自由演化的点云对区域进行离散化。这些点通常称为流体“粒子”，携带着流体信息。这使得流体可以从拉格朗日视角进行评估，因此只需适当更新流体粒子的位置，就能隐式地处理对流。在多相流情境下，这为界面对流提供了一种自然的处理框架，其方式完全取决于追踪粒子所分配的初始相。

*通讯作者电子邮箱：jcjoubert.online@gmail.com（Johannes C. Joubert）

粒子所分配的初始相。

多相移动最小二乘法方案通常会采用最初为基于网格的方案提出的多相模型。MLM 中最流行的多相模型之一，仍是 Brackbill 等人最先提出的基于颜色函数的方法[1]。该研究提出了一种标量场，可用于区分不同的相，并解析界面、表面法向量和表面张力。表面法向和表面张力通过颜色函数的梯度来解析。在欧拉视角下，该场随流体平流而演化；然而，从拉格朗日视角来看，颜色函数是恒定的粒子级属性。这使得在拉格朗日框架中引入颜色函数十分简单，因此该方法已广泛应用于各种 MLM 方案，包括弱可压缩光滑粒子流体动力学（SPH） [2, 3]、不可压缩光滑粒子流体动力学（SPH） [4, 5, 6] ，以及弱可压缩 [7] 和不可压缩 [8] 移动粒子半隐式法（MPS）。由于 MLM 主要依据微分算子离散化方式进行分类，所选方案会影响颜色梯度的分辨效果。为提高界面分辨的准确性，通常采用高阶梯度格式来解析梯度 [3, 9, 10, 11], ，尽管这些微分算子的计算成本更高。

在求解动量扩散算子时，SPH 格式通常采用 Morris 等人提出的基于 SPH 与有限差分（FD）混合拉普拉斯算子的扩散算子 [12] ，或采用 Monaghan 和 Gingold 最初提出、用作稳定方法的基于人工黏性的扩散算子 [13] 。Hu 等人 [2] 针对多相流提出了一种改进的 Morris 型扩散算子，其混合 SPH-FD 近似以 SPH 压力梯度的形式为基础，而非速度梯度。尽管 Monaghan 型和 Morris 型扩散算子都已成为多相流应用中的常用选择，但正如 [14], 所指出的，Morris 型扩散算子更受青睐，因为它们能更好地处理多相界面的变形与分裂。

尽管这两种模型都允许黏度变化，但它们都无法解析黏度敏感度，也未能考虑相关的动量扩散 [15]。对于流体属性恒定的流体，黏度敏感度为零；但在材料属性不同的界面两侧，黏度会出现不连续。因此，尽管远离界面的动量能够得到适当扩散，这些动量扩散模型却只能部分恢复界面处的表面剪切。即便如此，这些动量扩散算子仍是多相 SPH 方案中最常见的选择，即使在现代研究中也是如此 [9, 15, 16, 17, 11]。

作为 SPH 的替代方法，广义有限差分法通过直接利用加权泰勒级数展开构造所需的微分算子， [18, 19, 20] 提供了构建 MLM 格式的另一种途径。其微分算子近似的阶数高于经典 SPH，且计算效率高于等效的梯度修正 SPH 算子, [21], 不过，与梯度修正 SPH 一样，这也意味着放宽了经典 SPH 严格保持的物理对称性。尽管如此，广义有限差分法已用于模拟 IC [22]和 WC [21]流体

并且也已证明其非常适用于多物理应用 [23]。

本研究系统地探讨并比较了不同的 MLM扩散模型，以量化黏度敏感性对恢复解的影响。首先，比较扩散算子作用于静态场时的响应。接下来，为研究尖锐黏度跃变对 MLM算子的影响，将扩散算子应用于稳态多相流解。最后，直接比较气泡在流体中上升的全三维模拟。对静态场上的广义有限差分和光滑粒子流体动力学动量扩散算子进行了比较；但为限制本研究的计算需求，全三维模拟仅考虑广义有限差分扩散算子。作为本文的一项成果，本文提出了一种计算成本低廉的黏度梯度。

2. 数值方法

本研究聚焦于不可压缩多相流，因此其控制运动方程由不可压缩纳维–斯托克斯方程（NSE）给出：

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} + \mathbf{S}, \tag{2}$$

其中 $\mathbf{u}$ 为速度， ρ 为密度， p 为压力， $\rho\mathbf{g}$ 为外部体力， $\mathbf{S}$ 为第 2.2 节所述的界面张力， $\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{T}$ 为牛顿剪切应力张量， μ 为动力黏度，且：

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}\left[\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T\right], \tag{3}$$

不可压缩流动的对称应变率张量。

需要注意的是，式（2）采用了全时间导数，这是因为 MLM 具有拉格朗日特性，会通过更新粒子位置自动处理对流。此外，无需额外工作来追踪自由表面界面，因为界面更新可直接由更新后的流体粒子位置得出。

尽管本文将所有材料属性保持为常数，但允许不同流体的密度（尤其是动力黏度）有所不同，从而导致流体界面处的密度场和黏度场出现不连续。因此，本文重点关注流体界面处的扩散算子，此处黏度梯度不为零。

2.1. 无网格算子

尽管 MLM微分算子近似源自各种不同的背景，但这些无网格格式中点与点之间的连接通常遵循核加权方法，使点上的信息能够在其邻域内局部扩散。

本研究采用五次核函数 [12]:

$$W(\mathbf{r},h)=w_0\begin{cases}(3-q)^5-6(2-q)^5+15(1-q)^5 & \text{for } 0\le q\le 1\\ (3-q)^5-6(2-q)^5 & \text{for } 1<q\le 2\\ (3-q)^5 & \text{for } 2<q\le 3\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\quad \text{with}\quad q=\|\mathbf{r}\|/h, \tag{4}$$

其中， $\mathbf{r}$ 为位置向量， $3h$ 为支撑半径， w_0 为归一化常数， $\|\cdot\|$表示欧几里得范数。对于二维情况下的 SPH 算子, $w_0 = 7/478\pi$。作为一种重归一化格式，GFD 算子不需要归一化核函数，因此设 $w_0 = 1$。使用有限的支撑半径，将粒子相互作用限制在其局部邻域内。使用记号$W_{ij} = W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h)$ 表示粒子 i 和 j之间的核加权。此外，这一概念也扩展到一般场，使用 $f_i = f(\mathbf{r}_i)$ 表示场 f 在 i^{th} 粒子位置处的函数值。最后，$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ 用于表示 i^{th} 粒子相对于 j^{th} 粒子的位置。

按照 Zainali等人 [6], 提出的方法，通过应用 Shepard 滤波器，对材料属性中的跳跃间断进行平滑处理 [24]:

$$\widetilde{f_i} = \frac{\sum_{j\in I} f_j W_{ij}}{\sum_{j\in I} W_{ij}}, \tag{5}$$

其中 f为密度或黏度， $I = \left\{j \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} : W_{ij} > 0\right\}$ 为粒子邻居的索引集合， $\widetilde{(\cdot)}$ 表示一个滤波属性。

根据多相模型的要求，引入所谓的颜色函数 C^n：

$$C_i^n = \frac{\sum_{j\in I^n} W_{ij}}{\sum_{j\in I} W_{ij}}, \tag{6}$$

其中 I^n 为粒子支撑半径内且属于 n^{th} 相的所有节点的索引集合。由于每个相的材料属性均为常数，且本文仅考虑两相，因此所有滤波场均可根据其中一个颜色函数求得:

$$\widetilde{f_i} = f^0 C_i^0 + f^1 C_i^1 = f^1 + (f^0 - f^1) C_i^0, \tag{7}$$

其中 f^0 和 f^1 分别为第一相和第二相的相关材料属性。

本节其余部分将介绍广义有限差分和SPH微分算子。需要说明的是，本文不考虑完整的SPH格式，因此只讨论动量扩散算子。尽管广义有限差分

梯度和拉普拉斯算子均有详细讨论，但本节也主要聚焦于动量扩散算子的构建。

2.1.1. GFD 微分算子

总体而言，GFD 方法通过对由泰勒级数近似构造的有限差分项进行核加权，来构造无网格微分算子。本文所用的 GFD 微分算子基于 Lanson 和 Vila 的梯度近似 [18, 19] 以及 Basic 等人的拉普拉斯近似 [20]。对于 i^{th} 粒子处定义在d维欧几里得空间上的一般场 f，这些近似表示为:

$$\langle \nabla f \rangle_i = \mathbf{B}_i \cdot \sum_{j \in I} (f_i - f_j) W_{ij} \mathbf{r}_{ij}, \tag{8}$$

$$\left\langle \nabla^2 f \right\rangle_i = 2d \frac{\sum_{j \in I} (f_j - f_i) W_{ij} \left(1 - \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{o}_i\right)}{\sum_{j \in I} \|\mathbf{r}_{ij}\|^2 W_{ij} \left(1 - \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{o}_i\right)}, \tag{9}$$

其中:

$$\mathbf{B}_i = \left(\sum_{j \in I} W_{ij} \mathbf{r}_{ij} \otimes \mathbf{r}_{ij} \right)^{-1}, \tag{10}$$

$$\mathbf{o}_i = \mathbf{B}_i \cdot \sum_{j \in I} W_{ij} \mathbf{r}_{ij}, \tag{11}$$

分别表示截断张量和偏移向量。虽然这些微分算子并未涵盖纳维–斯托克斯方程的所有微分算子，但可以使用它们构造强迫条件 (2)。具体而言，动量扩散算子 $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$可分解为 $\nabla \mu \cdot (2\mathbf{T}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$。显然，这种形式只需要梯度近似和拉普拉斯近似。

SPH 扩散算子通常会将黏度平滑纳入其微分算子中。为便于直接比较，本文引入一种采用类似方法的 GFD 扩散算子:

$$\left\langle \mu \nabla^2 \mathbf{u} \right\rangle_i = 2d \frac{\sum_{j \in I} \left(\frac{2\widetilde{\mu}_i \widetilde{\mu}_j}{\widetilde{\mu}_i + \widetilde{\mu}_j} \right) (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) W_{ij} \left(1 - \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{o}_i\right)}{\sum_{j \in I} \|\mathbf{r}_{ij}\|^2 W_{ij} \left(1 - \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{o}_i\right)}. \tag{12}$$

GFD 近似 $\left\langle \mu \nabla^2 \mathbf{u} \right\rangle$ 与 $\mu \left\langle \nabla^2 \mathbf{u} \right\rangle$在计算成本上没有显著差异。因此，采用完整剪切应力散度 $\left\langle \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}}{\rho} \right\rangle$ 所增加的计算成本，主要源于其对 $\left\langle \frac{\nabla \mu}{\rho} \right\rangle$和 $\langle \nabla \otimes \mathbf{u} \rangle$的依赖。

*2.1.2. SPH*扩散算子

与 GFD 算子不同，SPH 微分算子基于通过核加权过程构建的连续场的解析导数。因此，SPH 微分算子并非由加权有限差分项构建，而是基于核梯度 $\nabla_i W_{ij} = \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i}$。

——

尽管这种方法通常适用于梯度近似，但基于解析二阶核导数构造的二阶微分近似通常效果不佳，因为它对粒子无序非常敏感，在某些粒子排布下甚至会导致非物理扩散。因此，SPH扩散算子通常采用SPH-FD混合方法。

在多相流中，动量扩散算子在多相界面的演化过程中发挥着重要作用。如 [14], 所示，与Monaghan型算子相比，[2] 的Morris 型扩散算子更为适用，因为它能够更准确地描述界面变形，使界面更清晰。因此，本研究将采用 [2] 中提出的扩散算子 [14]：

$$\left\langle \mu \nabla^2 \mathbf{u} \right\rangle_i = \frac{1}{V_i} \sum_{j \in I} \left(\frac{2\widetilde{\mu}_i \widetilde{\mu}_j}{\widetilde{\mu}_i + \widetilde{\mu}_j} \right) \left(V_i^2 + V_j^2 \right) \left(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j \right) \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}}{\|\mathbf{r}_{ij}\|^2}, \tag{13}$$

其中， V_i 和 V_j 分别为 i^{th} 和 j^{th} 流体粒子的体积。需要注意的是，分母中奇异值的传统修正项被省略，因为 I 的定义不考虑粒子间距等于0的情况。

需要注意的是，与 GFD 算子不同，SPH 算子不进行任何核修正。因此，其近似阶数不仅较低，而且在表面处还会因核支撑减少而受到显著影响。为此，在所有 GFD 与 SPH 的对比中，均会在计算域外生成额外的边界粒子。

2.2. 多相流

正如（2）中所强调的，多相物理需要在流体界面处解析表面张力作用力 $\mathbf{S}$。Brackbill 等人 [1] 最初在有限体积法（FVM）框架下提出的表面张力模型，现已适配用于 MLM。具体而言，利用 C^0 的梯度识别自由表面界面并解析表面法向。

法向方向 $\mathbf{N}_i$ 确定如下：

$$\mathbf{N}_i = \left\langle \frac{\nabla C^0}{\rho} \right\rangle_i = \mathbf{B}_i \cdot \sum_{j \in I} \frac{C_i^0 - C_j^0}{\bar{\rho}_{ij}} W_{ij} \mathbf{r}_{ij} \tag{14}$$

与 $\bar{\rho}_{ij} = \frac{1}{2}(\widetilde{\rho}_i + \widetilde{\rho}_j)$ 平均密度。

采用对 Yang 等人提出方案的修正实现后，通过滤波颜色梯度模来识别界面粒子。因此，法向量可表示为：

$$\hat{\mathbf{n}}_i = \begin{cases} \frac{\mathbf{N}_i}{\|\mathbf{N}_i\|} & \text{if} \quad \widetilde{\rho}_i \|\mathbf{N}_i\| > \epsilon / h \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{15}$$

其中，ϵ 是用于控制滤波器强度的用户指定参数。研究发现，$\epsilon = 0.01$ 适用于本文中的所有模拟。

表面曲率 κ 由表面法向的散度求得：

$$\kappa_i = -\langle \nabla \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle_i = \sum_{j \in I \cap I^m} W_{ij} \left(\hat{\mathbf{n}}_j - \hat{\mathbf{n}}_i \right) \cdot \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{r}_{ij} \tag{16}$$

其中，$I^m = \left\{ j \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} : \|\mathbf{n}_j\| > 0 \right\}$ 为所有未经过滤波器的粒子所构成的索引集合。这确保只有界面上的粒子会对该近似作出贡献。

由表面张力产生的加速度 $\mathbf{s} = \mathbf{S}/\rho$ 随后可求得：

$$\langle \mathbf{s} \rangle_i = -\sigma \langle \nabla \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle_i \left\langle \frac{\nabla C^0}{\rho} \right\rangle_i , \tag{17}$$

其中，σ 为表面张力系数。需要注意的是，只有由 I^m 索引的粒子才具有非零的 $\langle \mathbf{s} \rangle_i$。

此外，在确定黏度梯度时会重复使用颜色梯度，因此几乎无需增加额外的计算成本。对黏度应用式 (5) 并求其梯度，即可得到黏度梯度：

$$\left\langle \frac{\nabla \mu}{\rho} \right\rangle_i = (\mu^0 - \mu^1) \left\langle \frac{\nabla C^0}{\rho} \right\rangle_i \tag{18}$$

其中，μ^0 和 μ^1 分别表示第一相和第二相的动力黏度。需要注意的是，由于速度是直接更新的，因此式（18）的形式是针对速度扩散而非动量扩散构建的。因此，速度扩散算子可表示为：

$$\left\langle \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}}{\rho} \right\rangle_i = \left\langle \frac{\nabla \mu}{\rho} \right\rangle_i \cdot \langle 2\mathbf{T} \rangle_i + \widetilde{\nu}_i \left\langle \nabla^2 \mathbf{u} \right\rangle_i , \tag{19}$$

其中 $\widetilde{\nu}_i = \widetilde{\mu}_i / \widetilde{\rho}_i$ 为滤波后的运动黏度。

2.3. 积分方案

采用类似于不可压缩光滑粒子流体动力学和移动粒子半隐式法的投影法来满足不可压缩条件 (1)。首先执行一个更新步，以引入黏性动量扩散、表面张力和其他体力。由此得到不受约束的中间速度场 $\mathbf{u}^*$。通过求解压力，使压力梯度抑制 $\nabla \cdot \mathbf{u}^*$，从而得到无散速度场。

对于 k^{th} 更新步，粒子中间速度求解如下：

$$\mathbf{u}_i^* = \mathbf{u}_i^k + \Delta t \left(\langle \mathbf{L} \rangle_i + \mathbf{g}_i + \langle \mathbf{s} \rangle_i \right), \tag{20}$$

其中，Δt 为时间步长，$\langle \mathbf{L} \rangle_i$ 为适当的速度扩散算子。随后，通过投影步求解速度场：

$$\mathbf{u}_i^{k+1} = \mathbf{u}_i^* - \Delta t \left\langle \frac{\nabla p^{k+1}}{\rho} \right\rangle_i . \tag{21}$$

其中，p^{k+1} 为使速度场无散度的压力场，且：

$$\left\langle \frac{\nabla p}{\rho} \right\rangle_i = \mathbf{B}_i \cdot \sum_{j \in I} \frac{p_i - p_j}{\bar{\rho}_{ij}} W_{ij} \mathbf{r}_{ij}. \tag{22}$$

对式 (21) 取散度并令 $\nabla \cdot \mathbf{u}_i^{k+1} = 0$，即可闭合该系统，并得到压力泊松方程（PPE）：

$$\left\langle \frac{\nabla^2 p^{k+1}}{\rho} \right\rangle_i = \frac{1}{\Delta t} \langle \nabla \cdot \mathbf{u}^* \rangle_i . \tag{23}$$

对压力泊松方程离散化后，可得到一个大型稀疏线性系统，并采用带雅可比预条件器的双共轭梯度稳定法（BiCGSTAB）进行迭代求解。发生剧烈混合时，某一相的粒子可能被另一相包围，从而导致密度场出现噪声。为引入平滑处理，使用平均密度对每个有限差分项进行缩放。因此，压力拉普拉斯算子可求解为：

$$\left\langle \frac{\nabla^2 p^{k+1}}{\rho} \right\rangle_i = 2d \frac{\sum_{j \in I} \left(\frac{p_j - p_i}{\bar{\rho}_{ij}} \right) W_{ij} \left(1 - \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{o}_i \right)}{\sum_{j \in I} \| \mathbf{r}_{ij} \|^2 W_{ij} \left(1 - \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{o}_i \right)}. \tag{24}$$

同样，由于各相的材料属性为常数，对于远离多相界面的任何流体粒子，该近似可简化为 $\left\langle \nabla^2 p \right\rangle_i / \rho_i$，从而得到典型的单相不可压缩广义有限差分模型。

粒子位置按以下方式更新：

$$\mathbf{r}_i^{k+1} = \mathbf{r}_i^k + \frac{\Delta t}{2}\left(\mathbf{u}_i^k + \mathbf{u}_i^{k+1}\right) \tag{25}$$

最后，为了解决聚集问题，采用 Xu等人 [26] 提出的反聚类算法移动粒子，从而生成分布更均匀的粒子集合。

3. 结果

3.1. 验证研究

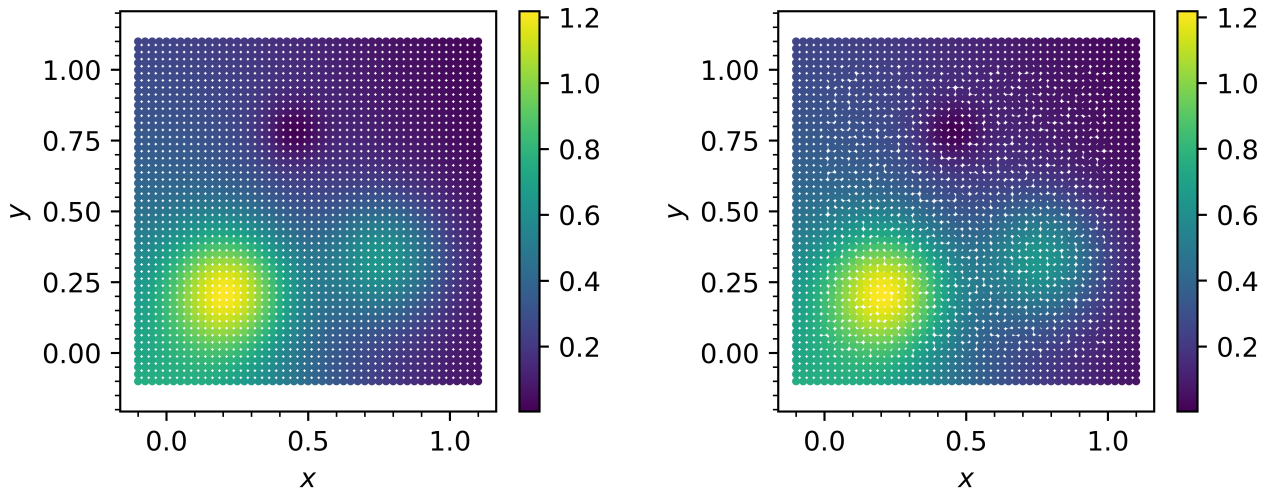
本节对第 2.1 节中的动量扩散算子进行验证。将这些方案应用于 Franke双变量函数 [27]:

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & 0.75\exp\left(-\frac{1}{4}(9x-2)^2 - \frac{1}{4}(9y-2)^2\right) \\ & + 0.75\exp\left(-\frac{1}{49}(9x+1)^2 - \frac{1}{10}(9y+1)\right) \\ & + 0.5\exp\left(-\frac{1}{4}(9x-7)^2 - \frac{1}{4}(9y-3)^2\right) \\ & - 0.2\exp\left(-(9x-4)^2 - (9y-7)^2\right) \end{aligned} \tag{26}$$

由于动量扩散算子将应用于该场，因此还需要一个表示动力黏度的标量场 η。据此，将近似结果与 $\eta\nabla^2 f$进行比较。首先，选取一个常数场 $\eta = 1$，以直接比较解析拉普拉斯算子及其无网格近似。

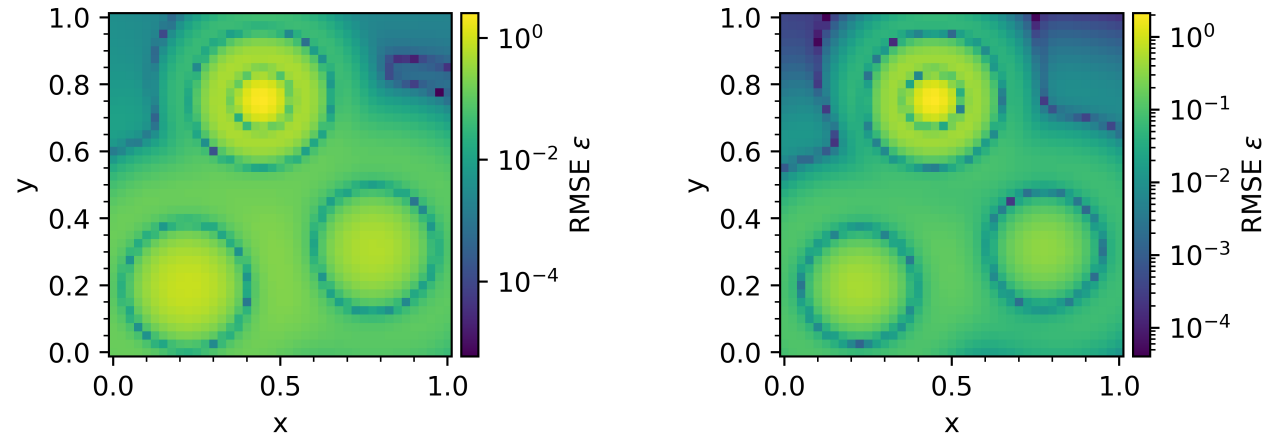
在 $\left\{ x, y \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \right\}$上分布的规则间距点和不规则间距点均用于测试这些方案。不规则配置通过对每个点在 x 和 y 两个方向上进行随机扰动生成，扰动距离从范围为 $[-c\delta_0, c\delta_0]$ 的均匀随机分布中采样，其中 c 为缩放因子， δ_0 为初始粒子间距。支撑半径设为 $3h = (2.5 + 2c)\delta_0$。这考虑了移动导致粒子间距增大的情况。本研究中的所有不规则网格均采用 $c = 0.1$。为避免边界效应，粒子生成范围延伸至计算域外 $3h$ 处。具有 $\delta_0 = 0.025$ 的规则网格和不规则网格中的内部节点与边界节点分别见图 1a 和图 1b。

图2展示了将 GFD 和光滑粒子流体动力学（SPH）的拉普拉斯算子近似应用于图1a所示规则构型时的绝对误差。SPH 和 GFD 算子呈现出相似的定性行为，最大误差均出现在函数峰值附近。尽管 GFD 算子的误差低于 SPH 算子，但两者的误差处于同一数量级。同样，图3展示了非规则构型下的结果。在此可以看到，GFD 误差仍然



(a) (b)

图 1： 41×41 (a) 规则网格和 (b) 非规则网格情况下的粒子配置。

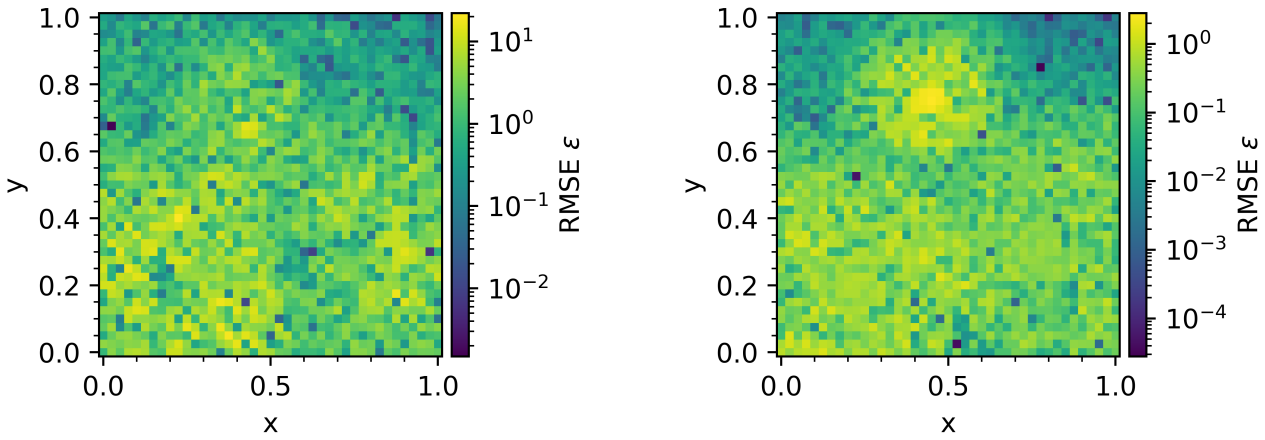


(a) (b)

图 2： 41×41 规则网格情况下 (a) 光滑粒子流体动力学和 (b) 广义有限差分扩散算子的粒子级绝对误差 ors.

与函数峰值吻合良好。相反，SPH 误差对函数形状的依赖较小，主要受粒子分布的不规则性影响。与规则网格上的结果相比，尽管 GFD 在非规则网格上的结果精度较低，但该算子产生的误差仍处于同一数量级。SPH 算子应用于非规则网格时，误差会显著增大。

图 4 展示了在规则网格和非规则网格上，SPH 和 GFD 算子的收敛性研究结果。



(a) (b)

Fig图 3： 41×41 非规则网格情况下的粒子级绝对误差：(a) 光滑粒子流体动力学和 (b) 广义有限差分扩散算子。

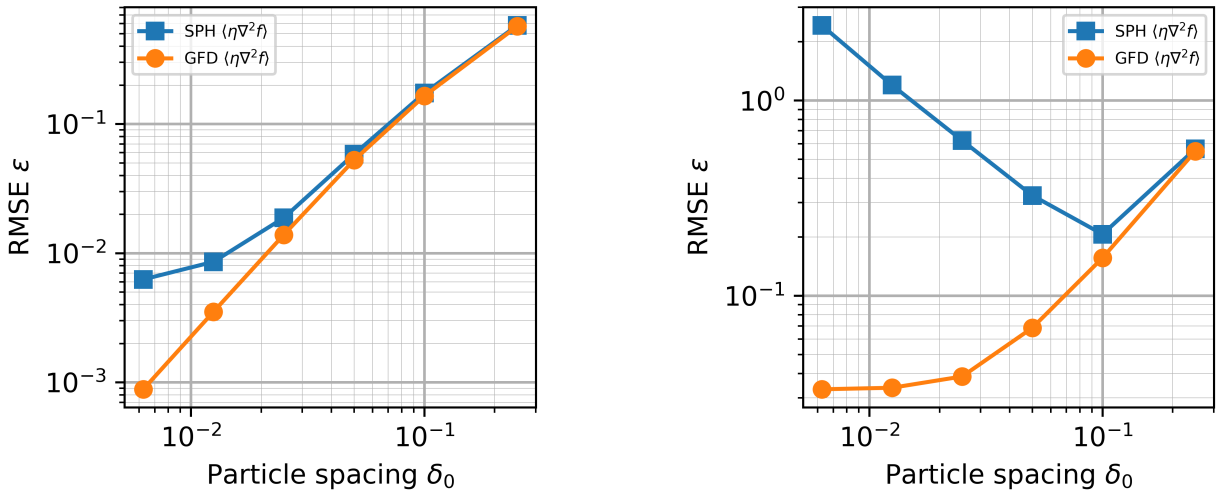
归一化均方根误差（RMSE）定义如下：

$$\epsilon = \frac{\sqrt{\sum_i \left[\langle L(f,\eta)\rangle_i - \eta\nabla^2 f(\mathbf{r}_i)\right]^2}}{\sqrt{\sum_i \left[\eta\nabla^2 f(\mathbf{r}_i)\right]^2}} \tag{27}$$

采用了 $\langle L(f,\eta)\rangle_i$ 动量扩散算子。图中绘出了均方根误差随粒子尺寸的变化。对于规则间距，两种算子在初始阶段的精度相近；但随着粒子数增加，光滑粒子流体动力学算子的收敛速率逐渐降低，而广义有限差分算子在整个测试范围内的收敛速率保持稳定。可以看出，不规则性会对光滑粒子流体动力学和广义有限差分算子的误差及收敛速率产生不利影响。粒子不规则性会使广义有限差分算子的均方根误差受到限制。要获得相同的表现， [20], 光滑粒子流体动力学算子的表现尤其差，因为粒子数增加时，其均方根误差也随之增大。这是由于光滑粒子流体动力学以平均意义求解拉普拉斯算子。在不规则性较强的区域，拉普拉斯算子的求解会出现较大的高估和低估，导致粒子级误差较大。

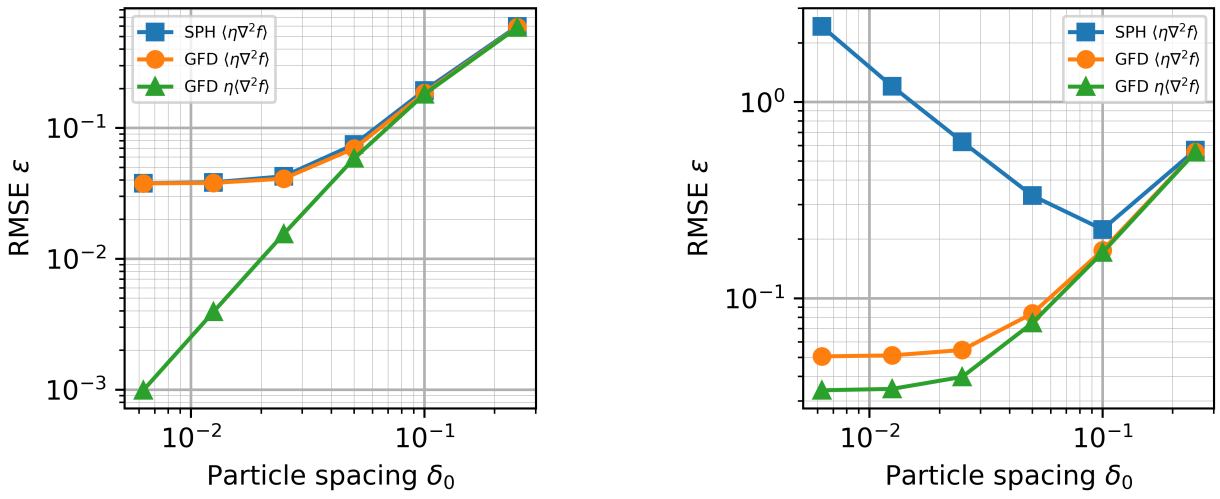
接下来，针对给定为 $\eta(x,y) = 1 + x/2 + y/2$ 的线性变化尺度场进行收敛性研究。结果如图5所示。此处，除 SPH 算子外， $\langle \eta\nabla^2 f \rangle$ 和 $\eta \langle \nabla^2 f \rangle$ 也通过 GFD 算子进行求解。

当然， $\eta \langle \nabla^2 f \rangle$ 的均方根误差与前一种情况相比保持不变。在规则间距网格上，广义有限差分和光滑粒子流体动力学 $\langle \eta\nabla^2 f \rangle$ 表现出相似的行为。比较非规则网格上的结果时，可以发现光滑粒子流体动力学的表现与前一种情况相似，对引入线性变化的标量场没有显著响应。两种广义有限差分格式的趋势与前一种情况相似，不过，研究发现，将 $\eta\nabla^2 f$ 解析为 $\eta \langle \nabla^2 f \rangle$ 比$\langle \eta\nabla^2 f \rangle$更准确。



(a) (b)

图4：规则网格（a）和非规则网格（b）上 SPH 和 GFD 扩散算子的均方根误差。



(a) (b)

图5：规则网格（a）和非规则网格（b）上不同黏度下 SPH 和 GFD 扩散算子的均方根误差 .

3.2. 多相泊肃叶流

下一组结果考察了多相流环境中作用于速度场的动量扩散算子。具体而言，对各种格式在界面处对动量扩散的贡献进行了量化，并相互比较。

数值实验针对平行板间多相泊肃叶流的速度场解进行。速度场根据 [28] 的解析结果设定。本研究考察了 1:1 至 100:1 的黏度比 $\mathcal{X}$，所有算例中的较低黏度均设为 $\mu_L = 1\text{Pa}\cdot\text{s}$。本节中的所有结果均基于不规则

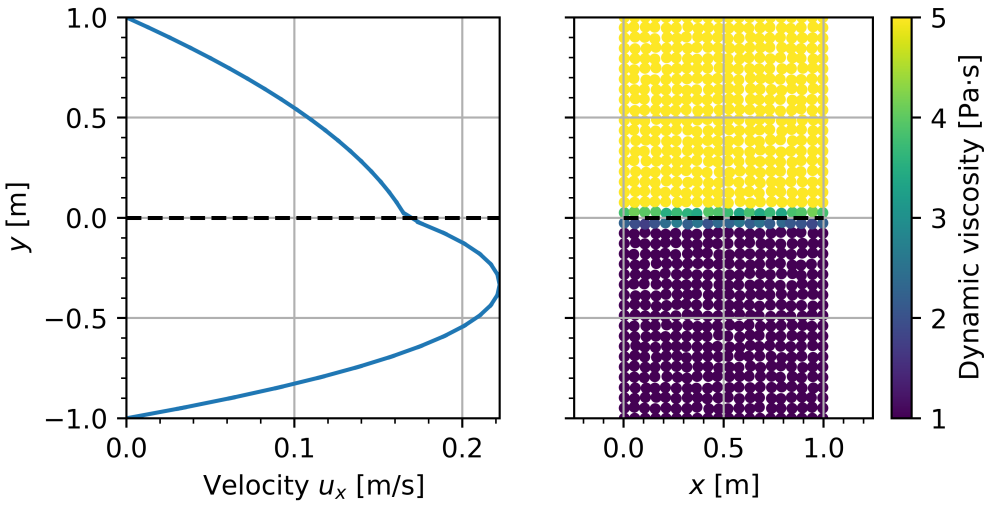


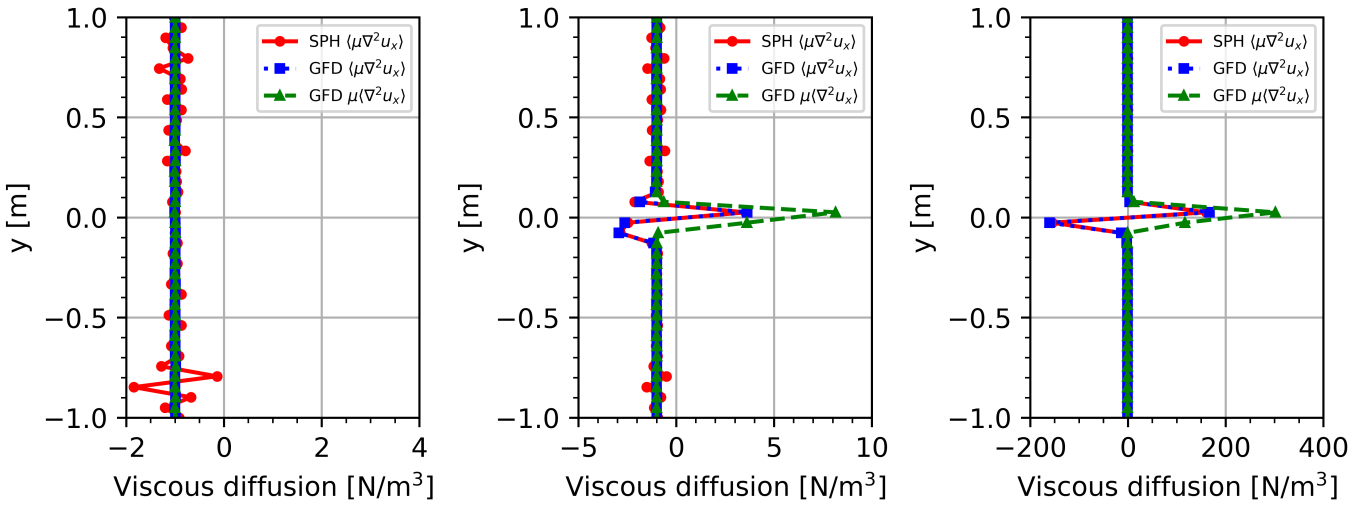
图6：系统配置，显示了 $\mathcal{X} = 5:1$ 情况下的 (a) 速度剖面和 (b) 按动力黏度着色的粒子分布。虚线表示多相界面。

20×40 网格，$c = 0.10$ 覆盖区域 $\left\{ x, y \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 1 \right\}$。与上一节一样，使用边界粒子扩展计算域，以避免核截断。所有算例均使用相同的网格。采用 $\frac{dp}{dx} = -1\mathrm{N/m}^3$ 的压力梯度，以唯一确定速度场。图 6 展示了 $\mathcal{X} = 5:1$ 算例的速度剖面，以及按动力黏度着色的粒子分布。需要强调的是，粒子黏度由式（7）中所述的颜色加权平均方案计算得到。

图7展示了不同黏度比下，沿 x 方向取平均后的扩散算子响应。图7a以单相情况为基准，应用了广义有限差分和光滑粒子流体动力学算子。与上一节的结果类似，可以看出，由于网格不规则性，光滑粒子流体动力学的结果比广义有限差分的结果噪声更大。图7b和图7c分别展示了 $\mathcal{X} = 5:1$ 和 $\mathcal{X} = 100:1$ 的结果。文中给出了广义有限差分近似 $\mu \left\langle \nabla^2 u_x \right\rangle$，以及广义有限差分和光滑粒子流体动力学近似 $\left\langle \mu \nabla^2 u_x \right\rangle$ 的结果。这些结果表明，在多相区域内，光滑粒子流体动力学和广义有限差分 $\left\langle \mu \nabla^2 u_x \right\rangle$ 扩散算子的表现相似。可以看出，$\left\langle \mu \nabla^2 u_x \right\rangle$ 显著低估了后乘扩散算子 $\mu \left\langle \nabla^2 u_x \right\rangle$ 得到的数值。

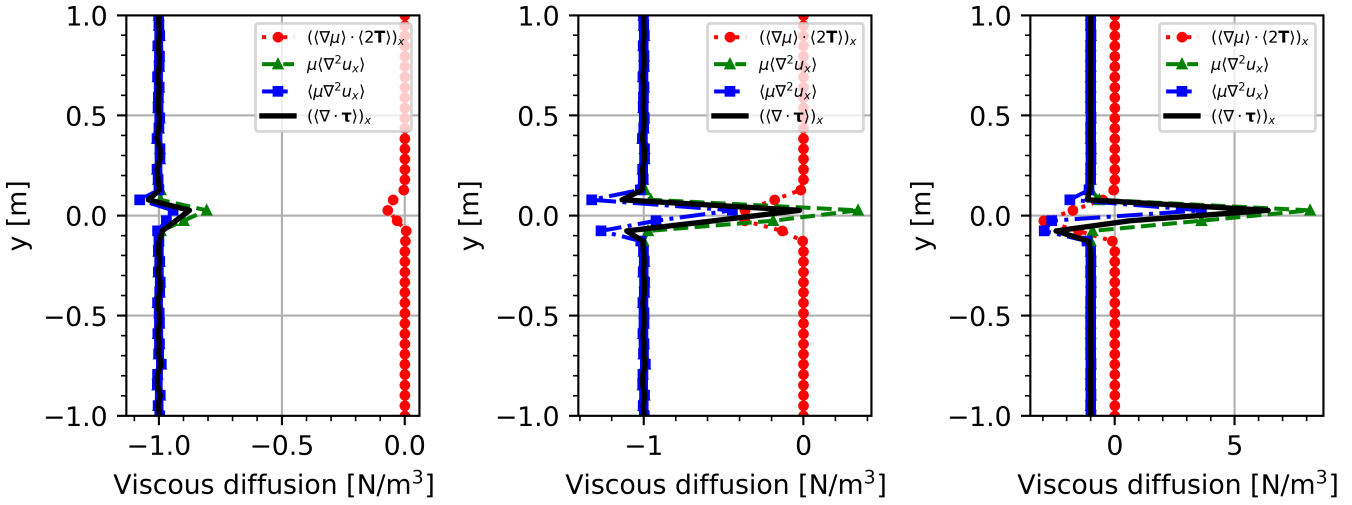
通过分别求解 $\mu \left\langle \nabla^2 \mathbf{u} \right\rangle$ 和 $\langle \nabla \mu \rangle \cdot \langle 2\mathbf{T} \rangle$，利用 GFD算子求解剪切散度 $\langle \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle$。为在此比较中保持算子的精度和阶数一致，仅将该算子与 GFD $\left\langle \mu \nabla^2 \mathbf{u} \right\rangle$ 算子进行比较。此外，由于 SPH 算子在界面区域的定性表现与之相似，因此这些发现也有助于理解 SPH算子。需要注意的是，$(\cdot)_x$ 用于表示扩散算子的 x 分量。

图8展示了对 $\mathcal{X} = 1.3:1$、$\mathcal{X} = 2:1$ 和 $\mathcal{X} = 5:1$ 的比较。可以看出，$\langle \nabla \mu \rangle \cdot \langle 2\mathbf{T} \rangle$ 与



(a) (b) (c)

图7： $\mathcal{X} = 1:1$、 $\mathcal{X} = 5:1$ 和 $\mathcal{X} = 100:1$的平均扩散算子响应。



(a) (b) (c)

Fig图8： $\mathcal{X} = 1.3:1$、 $\mathcal{X} = 2:1$ 和 $\mathcal{X} = 5:1$的GFD动量扩散算子对比。

速度拉普拉斯算子方向相反。因此，在较低的黏度比下，这会抵消对 $\mu\left\langle\nabla^2\mathbf{u}\right\rangle$ 的高估，使 $\langle\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}\rangle$的响应与 $\left\langle\mu\nabla^2\mathbf{u}\right\rangle$ 更加相似。然而，随着黏度比增大，$\langle\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}\rangle$ 的增长速度快于 $\left\langle\mu\nabla^2\mathbf{u}\right\rangle$，导致 $\langle\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}\rangle$ 预测的界面表面剪切力更大。

为量化各算子之间的差异，图9展示了广义有限差分和光滑粒子流体动力学 $\left\langle\mu\nabla^2\mathbf{u}\right\rangle$ 算子相对于广义有限差分 $\langle\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}\rangle$ 算子的均方根误差。由于光滑粒子流体动力学算子的噪声较大，均方根误差仅在区域 $-3h \leq y \leq 3h$内计算。如前述结果所示，光滑粒子流体动力学和广义有限差分得到的结果相近。这里可以看到，在较低的黏度

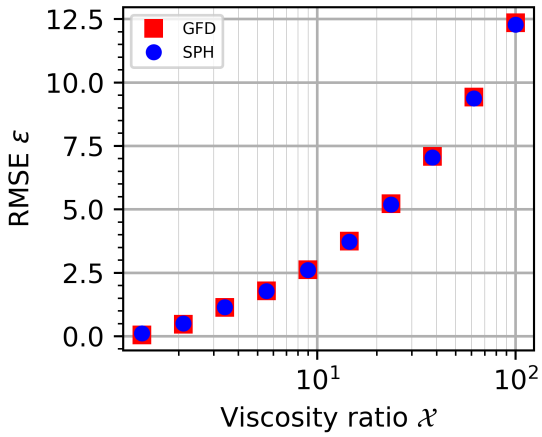


图9：黏度比范围为 $\mathcal{X} = 1.3:1$和 $\mathcal{X} = 100:1$时，GFD 和 SPH $\langle \mu \nabla^2 \mathbf{u} \rangle$ 扩散算子的均方根误差。

比下，所有算子预测的行为都相似。然而，随着 $\mathcal{X}$ 增大，黏度不连续性开始主导表面剪切的预测。在测试的最大黏度比 $\mathcal{X} = 100:1$下，差异最大，此时广义有限差分和光滑粒子流体动力学算子的均方根误差分别为12.35和12.28。

3.3. 上升气泡

最后一节展示了扩散模型的选择对宏观系统行为的影响。在此模拟中，初始为球形的流体浸没在较重流体中。浮力效应驱动系统演化，并与气泡表面所受的阻力相平衡。该系统对表面剪切尤为敏感，因为表面剪切也在一定程度上驱动气泡变形，进而影响阻力特性。本节仅比较通过 GFD 算子求解的 $\langle \mu \nabla^2 \mathbf{u} \rangle$ 和 $\langle \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle$ 扩散模型。

进行全三维模拟，初始条件示意图如图 10 所示。气泡初始位于圆柱形计算域的中心线上。圆柱内的其余空间由较重流体填充。圆柱壁采用全滑移条件，而圆柱端面采用无滑移条件。在顶端面上的 $(0, H - h_0, 0)$ 处施加点式零压条件，以确保压力场能够唯一确定。两种流体的密度比和动力黏度比分别设为 $2:1$ 和 $100:1$。选择较低的密度比，以确保浮力不会压过黏性效应。几何形状由 $H = 20D$、$W = 2D$、$h_0 = 2D$ 和 $D = 1\mathrm{m}$ 定义。气泡的密度和黏度分别为 $1\mathrm{kg/m^3}$ 和 $2/875\mathrm{Pa}\cdot s$。系统配置由雷诺数 $Re = \rho_2 D U_g / \mu_2$ 和韦伯数 $We = \rho_2 D U_g^2 / \sigma$ 确定，其中 $U_g = \sqrt{gD}$ 为特征速度。重力加速度和表面张力系数的取值使得 $Re = 8.75$ 和 $We = 116$。由此得到 $g = 1\mathrm{m/s^2}$ 和 $\sigma = 1/58\mathrm{N/m}$。需要指出的是，重力以浮力的形式纳入，因此，$\mathbf{g}_i = (1 - \rho_i/\rho_2)\mathbf{g}_0$。初始粒子间距设为 $\delta_0 = 31.25\mathrm{mm}$，模拟共包含 4M 个粒子。

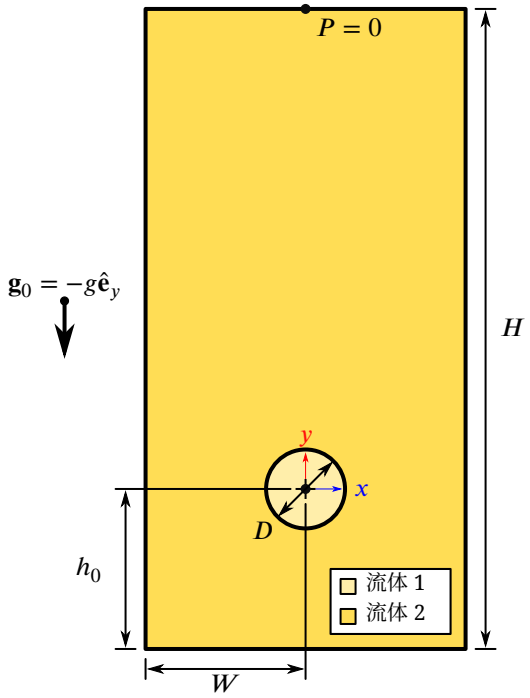


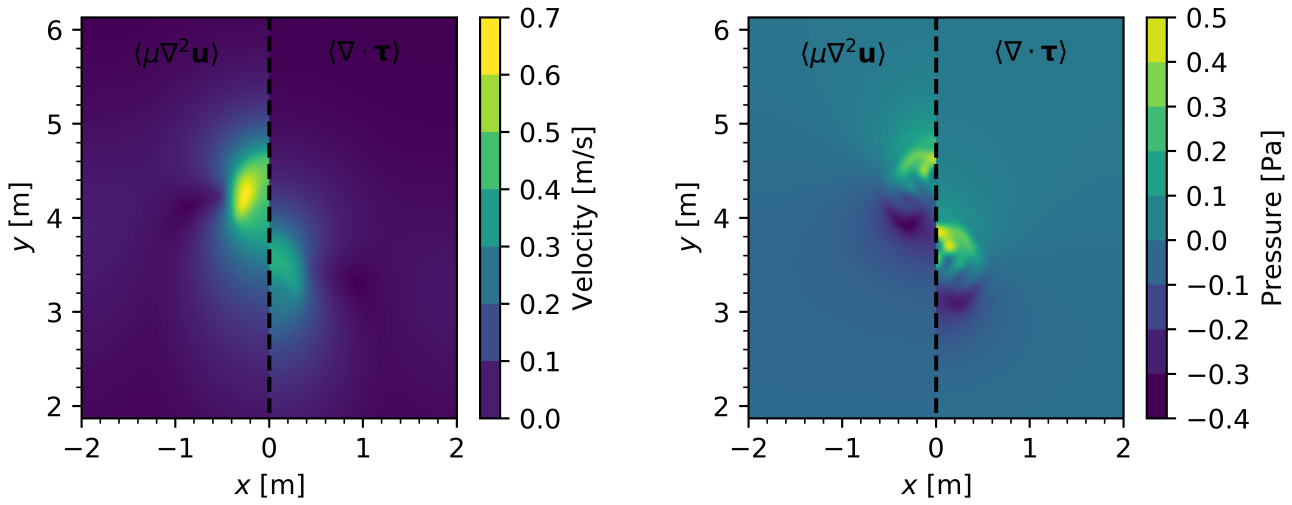
图 10：上升气泡案例示意图。

本节进行了两次模拟，其中一次采用 $\langle \mu \nabla^2 \mathbf{u} \rangle$ 扩散模型，另一次采用 $\langle \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle$ 扩散模型。除扩散算子外，两次模拟完全相同。

图 11 展示了 $t = 7$s 时气泡的压力场和速度场。可以立即看出，对于 $\langle \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle$ 算子，气泡速度显著较低。相反，两种情况下的压力场在大小和形状上相似，$\langle \mu \nabla^2 \mathbf{u} \rangle$ 和 $\langle \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle$ 案例的压力分别为$\Delta p = 0.759$Pa 和 $\Delta p = 0.782$Pa。这是因为浮力是压力响应的主要驱动因素。这表明，气泡整体运动学的差异主要可归因于黏性扩散速率。

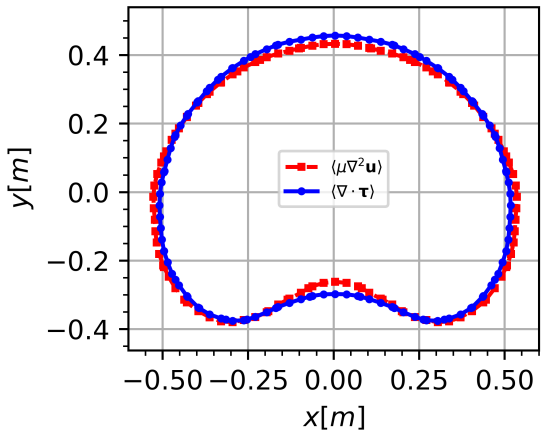
接下来一组结果比较了图 12 所示的稳态气泡形状。该形状通过对颜色场 C^0 应用 Shepard 滤波器，并在 $C^0 = 0.5$ 处解析等值线而得到。可以看出，气泡形状在定性上相似，但仍存在细微差异。具体而言，$\langle \mu \nabla^2 \mathbf{u} \rangle$ 案例预测的气泡略宽、略扁。此外，底部表面的轮廓更加夸张。这些气泡形状差异与 [29] 中观察到的趋势相似：在固定 $Re = 8.75$、$We = 116$ 和$\mathcal{X} = 100$：1的情况下，增大密度比会提高上升速率。由于两相密度相近，这些效应不如 [29],中明显。

图 13 展示了气泡的平均垂直速度。如前述结果所示，$\langle \mu \nabla^2 \mathbf{u} \rangle$ 扩散算子低估了表面剪切。这导致 $\langle \mu \nabla^2 \mathbf{u} \rangle$ 工况预测的终端速度更高，与 $\langle \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle$ 工况相比差异为 57.2%。与 [29] 中使用有限体积法得到的终端速度相比，$\langle \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle$ 扩散



(a) (b)

图 11：采用 $\langle \mu \nabla^2 \mathbf{u} \rangle$ 和 $\langle \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle$ 动量扩散模型获得的 $t = 7$s 时气泡附近的 (a) 速度场和 (b) 压力场对比。



$\langle \mu \nabla^2 \mathbf{u} \rangle$ 和 $\langle \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle$ 扩散模型的稳态气泡形状。

算子预测的气泡运动学相近。这是预期的，因为 [29] 适当地解析了流体动量扩散$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$。

4. 结论

本文对多相流的 MLM 动量扩散模型进行了比较。将 SPH 和 GFD 常用的动量扩散算子与一种考虑多相界面处黏度敏感性的 GFD 算子进行了比较。本文还提出了一种基于颜色梯度、计算效率较高的黏度梯度模型。

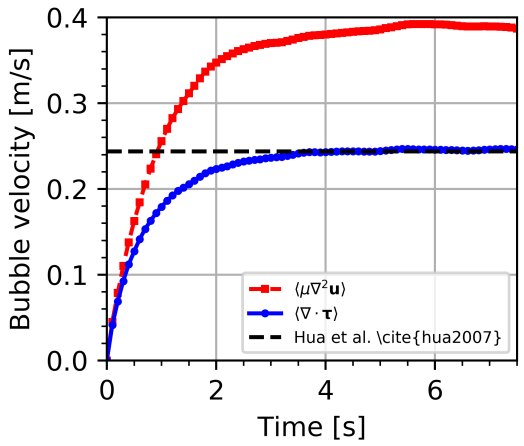


图 13: $\langle \mu \nabla^2 \mathbf{u} \rangle$ 和 $\langle \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle$ 两种动量扩散模型下，气泡整体垂直速度随时间的变化。

研究表明，尽管 GFD 算子具有一阶精度，因此较不易受不规则间距的影响，但 SPH 和 GFD $\langle \mu \nabla^2 \mathbf{u} \rangle$ 动量扩散算子在多相界面处的表现相似。具体而言，两者都会低估表面剪切，且误差会随着黏度比的增大而增大。

通过模拟气泡浸没在重流体中的演变过程，展示了这一效应的重要性。尽管解析得到的压力条件相近，但表面剪切减弱导致气泡终端速度被显著高估。具体而言，在密度比为 2：1 、黏度比为 100：1时，与采用 $\langle \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle$ 相比，将动量扩散建模为 $\langle \mu \nabla^2 \mathbf{u} \rangle$ 会使上升速度高估57.2%。

这表明，构建多相流动量扩散算子时不能忽略黏度梯度，尤其是在黏性效应相对较强的情况下。因此，本研究建议多相广义有限差分求解器采用所提出的 $\langle \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle$ 扩散模型。此外，鉴于本研究指出光滑粒子流体动力学与广义有限差分动量扩散算子之间存在相似性，还应在光滑粒子流体动力学框架下进一步研究所提出的扩散算子。

5. 参考文献

参考文献

[1] J. Brackbill、D. Kothe、C. Zemach，《一种用于模拟表面张力的连续介质方法》，《计算物理学杂志》100 (2) (1992) 335–354。

[2] X. Hu、N. Adams，《一种用于宏观与介观流动的多相 SPH 方法》，计算物理学杂志 213 (2) (2006) 844–861。

[3] S. Adami、X. Y. Hu、N. A. Adams，《一种基于再生散度近似的多相 SPH 表面张力公式》，计算物理学杂志 229 (13) (2010) 5011–5021。

[4] X. Y. Hu, N. A. Adams，不可压缩多相SPH方法，计算物理学杂志 227 (1) (2007) 264–278。[5] X. Y. Hu, N. A. Adams，不可压缩多相SPH的恒密度方法，计算物理学杂志 228 (6)(2009年) 2082–2091。

[6] A. Zainali, N. Tofighi, M. S. Shadloo, M. Yildiz，使用ISPH方法对牛顿和非牛顿多相流进行数值研究，《计算方法应用力学与工程》254 (2013) 99–113。

[7] A. Shakibaeinia, Y.-C. Jin，适用于多相流的MPS无网格粒子法，《计算方法应用力学与工程》229-232 (2012) 13–26。

[8] A. Khayyer, H. Gotoh，通过改进 MPS 无网格粒子法的性能与稳定性，模拟具有高密度比特征的多相流，计算物理学杂志 242 (2013) 211–233。

[9] T. Douillet-Grellier, S. Leclaire, D. Vidal, F. Bertrand, F. De Vuyst，多相光滑粒子流体动力学与格子玻尔兹曼方法在间歇流模拟中的比较，计算粒子力学 6 (4) (2019年) 695–720。

[10] S. Geara, S. Martin, S. Adami, W. Petry, J. Allenou, B. Stepnik, O. Bonnefoy，一种用于三维自由表面流的新型 SPH 密度公式，Computers & Fluids 232 (2022) 105193。

[11] L. Yang, M. Rakhsha, W. Hu, D. Negrut，一种通过不可压缩光滑粒子流体动力学求解的广义粒子移位方案一致多相流模型，计算物理学杂志 458。

[12] J. P. Morris, P. J. Fox, Y. Zhu，采用光滑粒子流体动力学方法对低雷诺数不可压缩流动进行建模，《计算物理学杂志》136 (1) (1997) 214–226。

[13] J. Monaghan, R. Gingold，采用粒子法光滑粒子流体动力学进行激波模拟，《计算物理学杂志》52 (2) (1983) 374–389。

[14] F. R. Ming, P. N. Sun, A. M. Zhang，通过多相 SPH 模型对自由表面处上升气泡破裂进行数值研究，《力学》52(11-12) (2017) 2665–2684。

[15] M.-K. Li、A.-M. Zhang、F.-R. Ming、P.-N. Sun、Y.-X. Peng，《用于模拟上升气泡的轴对称多相SPH模型》，《计算机方法应用力学与工程》366（2020），113039。

[16] H. Cheng、Y. Liu、F. Ming、P. Sun，《基于改进的 APR-SPH 方法研究气泡对的弹跳与聚并行为》，《海洋工程》255。

[17] F. He、H. Zhang、C. Huang、M. Liu，适用于高密度比多相流的具有大 CFL 数的稳定 SPH 模型，《计算物理杂志》453。

[18] N. Lanson、J. P. Vila，重整化无网格格式 I：守恒律的一致性、稳定性和混合方法，《SIAM 数值分析杂志》46 (4) (2008年) 1912–1934。

[19] N. Lanson、J. P. Vila，重整化无网格格式 II：标量守恒律的收敛性，《SIAM 数值分析杂志》46 (4) (2008年) 1935–1964。

[20] J. Basic、N. Degiuli、D. Ban，适用于边值问题的一类重整化无网格拉普拉斯算子，《计算物理杂志》354 (2018年) 269–287。

[21] J. C. Joubert, D. N. Wilke, N. Govender, P. Pizette, J. Basic，针对重整化弱可压缩无网格拉格朗日方法的边界条件施加，《Engineering Analysis with Boundary Elements》130（2021年）332–351。

[22] J. Basic, B. Blagojevic, M. Andrun, N. Degiuli，晃荡问题的拉格朗日有限差分法：模拟及与实验的比较，载于：《第二十九届国际海洋与极地工程会议论文集》，2019年，第3412–3418页。

[23] J. C. Joubert, N. Govender, D. N. Wilke, P. Pizette，适用于流化床中欠分辨广义有限差分-离散元耦合的无网格拉格朗日粒子孔隙率公式，《粉末技术》398。

[24] D. Shepard，《非规则间距数据的二维插值函数》，载于：1968年 ACM 第 23 届全国会议论文集，ACM ’68，计算机协会，美国纽约州纽约，1968年，第 517–524 页。

[25] Q. Yang、F. Xu、Y. Yang、L. Wang，基于黎曼求解器的多相SPH模型及其在射流破碎模拟中的应用，《边界元工程分析》111（2020）134–147。

[26] R. Xu、P. Stansby、D. Laurence，基于投影法和一种新方法的不可压缩光滑粒子流体动力学（ISPH）的精度与稳定性，《计算物理学杂志》228（18）（2009）6703–6725。

[27] R. Franke，《若干散乱数据插值方法的批判性比较》，技术报告 NPS-53-79-003，美国海军研究生院技术报告（1979年）。

[28] R. Bird、W. Stewart、E. Lightfoot，《传递现象》，Wiley，2002年。

[29] J. Hua, J. Lou，黏性液体中气泡上升的数值模拟，计算物理学杂志 222 (2) (2007) 769–795。