arXiv:2303.09996v1 [math.GT] 17 Mar 2023

交替结的交叉帽数自动计算

KAITO YAMADA 和 NOBORU ITO

Abstract. 我们通过引入一种自动计算方法，明确交替结交叉帽数的计算复杂度。对于一个交替结 K，设 $\mathcal{E}$ 为其图中的边数。那么存在一种代码，使得计算 K 的交叉帽数所需的复杂度可估计为 $O(\mathcal{E}^3)$。

1. Introduction

约九十年来，人们一直在研究以结 K 为边界的曲面的亏格；定向情形（结亏格）已取得显著进展。然而，对于非定向情形（交叉帽数），尚无通用方法来计算结 K的交叉帽数 $C(K)$，尽管一些先驱者——Hatcher-Thurston [1], 、Teragaito [10], 、Hirasawa-Teragaito [2], 以及 Ichihara-Mizushima [3], ——已经计算了某些结族的交叉帽数。

在 [7], 中，作者 KY 引入了一种新工具：将给定交替结图 D 表示为欧拉图 G，以便通过计算机辅助自动计算交叉帽数。计划如下：

(1) 若 G 由 D得到，则 G 唯一确定。(2) 给定 G，即可定义约化图。(3) 对于 n，输入拼接解结数为 1 的初始数据后，该数据会生成拼接解结数为 n的交替结图列表。

论文 [7] 给出了(1)和(2)。本文完成了任务(3)。

2. Crosscap number and splice-unknotting number

定义 1（非定向亏格／交叉帽数）。设 K 是一个结。那么， C（K）是具有 ∂（Σ）$= K$的非定向曲面 Σ （$\subset \mathbb{R}^3$）的第一贝蒂数中的最小值。

定义 2 (S^-). 给定链环图上的一个交叉，有两种可能的方式将其拼接。其中一种保持定向，另一种则不保持；符号 S^- 表示后一种方式。

定义 3. 令 RI$^-$ 表示消去单个交叉的第一 Reidemeister 变换。设 D 为结 K的结投影。非负数 $u^-($$D$)是由类型 S^- 的拼接构成的最少次数，其中所考虑的序列可以由类型 S^- 的拼接和 RI$^-$组成。

事实 1 (Ito-Takimura [5], Kindred [9])**.** 设 D 为结K的任意素交替结图。

$$u^-(D) = C(K).$$

事实 2 ([4], 参见 [6, 扭转 S^+ 变换/桥接操作])**.** 每个素交替结图都可以通过反复应用桥接操作若干次得到。

更准确地说，每个有 $u^-(D) = n$ 的素交替结图 D，都可以从无交叉的结投影出发，连续进行 n 次桥接操作得到。

Date: 2023年3月17日。*Key words and phrases.* 自动计算；交叉帽数；交替结。

3. Main Result

定理 1. 对于交替结 K，令 $C(K)$ 为其交叉帽数。根据定义 *5*，由结图给出一个结欧拉图。令 E 为由结图给出的结欧拉图的边数。计算 $C(K)$ 的计算复杂度有上界 $O(E^3)$。

结欧拉图的顶点数小于或等于结图的交叉数，即 $V(\mathcal{V})$ $O(V)$。令 $\leq O$为边数。$\mathcal{V}(\mathcal{E})$ $O(E) = OV(\leq) O(\mathcal{V})$。

推论 1. 对于交替结 K，令 $C(K)$ 为交叉帽数。令 $\mathcal{E}$ 为其结图的边数。那么存在一种代码，使得计算 $C(K)$ 的计算复杂度有上界 $O(\mathcal{E}^3)$。

注 1. 即使 K 是非交替结，上述估计在某些情况下仍然成立（参见 [5,定理 2，图 1]）。不过，其适用范围仍有待解决。

4. A short review of knot Eulerian graphs and update

定义 4（扭结区域 [8]）。 图中的扭结区域 由端对端排列的极大二边形区域集合构成；我们假设每个扭结区域中的交叉以交替方式出现。

请注意，与任何二边形区域都不相邻的单个交叉也属于一个扭结区域。

定义 5（结欧拉图）。 交替结图 D 的每个扭结区域都通过桥操作增加奇数个或偶数个交叉，并在必要时进行 RI^+ 。具有奇数个或偶数个交叉的扭结区域如图 1 所示。我们称其为奇顶点或偶顶点，也简称顶点。每个顶点有四个端点，即两个输入和两个输出。每个顶点具有如下信息:

- 根据结图的定义，自然可以假设每个输入都对应唯一的输出。
- 每个顶点的价恰为四。

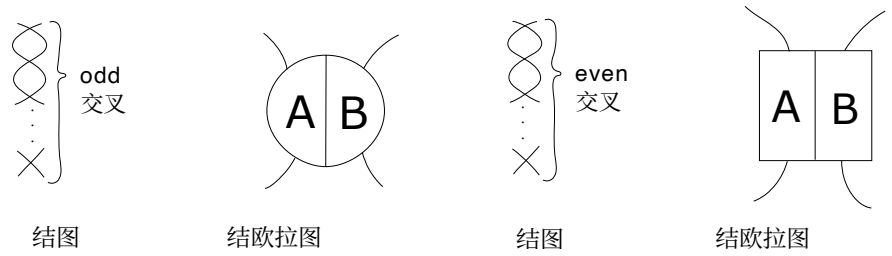


Figure 1. 结图的扭结区域与结欧拉图的顶点。

此外，我们为构建实际代码设定了以下规则。

- 我们通常将每个含有偶数交叉的扭结区域分解为一个 RI^+ 和一个由奇数交叉组成的扭结区域。
- 对于每个顶点，输入或输出的定向由结图诱导，如图 1 所示。每个含有至少两个交叉的扭结区域都会自然地确定该顶点的一条对称轴，其左右两侧称为极点，并以任意方式分别记为 A 和B 。这条对称轴称为轴。根据定向的不同，轴也有不同形式（图2）。如果一个扭结区域恰好只有一个交叉，则任意定义其轴。

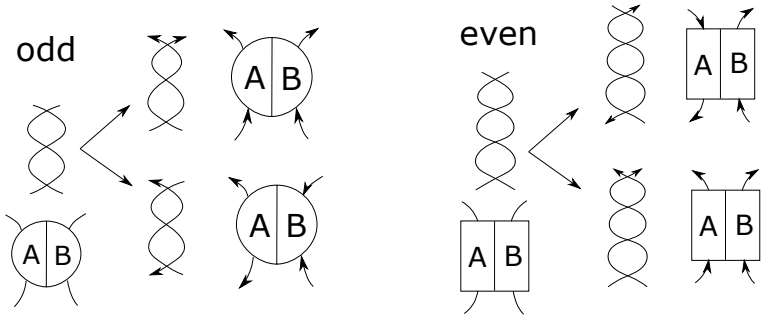


FIGURE 2. 顶点的变化

根据上述定义，交替结图确定了各个顶点；此外，结图还包含顶点之间连接关系的信息，这些连接关系可由边来规范地表示。要对边进行编码，只需使用其端点位于极点上的信息。于是，元组（u，v，P_u，P_v）表示一条边，它满足以下条件。

- （元组的第一个元素） u 表示该边的起点顶点。
- （元组的第二个元素） v 表示该边的终点顶点。
- （元组的第三个元素） P_u 是 u 所在的极点。
- （元组的第四个元素） P_v 是 v 所在的极点。

根据上述构造，每个交替结图都对应一个四价图。由此得到的图是欧拉图；我们将其称为结欧拉图。

备注2. 在前一篇论文中， [7] T_u 表示顶点，而我们使用 P_u 来表示顶点；A 和 B 称为类型，而我们称它们为极点。另请注意，本文不需要任何空顶点。

事实3 ([7])**.** 定向结投影会生成一个结欧拉图。

本文其余部分中，结欧拉图的顶点和边分别称为顶点和边。不过，为避免混淆，结图的顶点和边分别称为交叉和结边。

5. AN ESTIMATION OF COMPUTATION COMPLEXITY OF BRIDGE OPERATIONS

由于可以对每条结边应用桥操作，我们为结欧拉图定义了两种操作。

- 顶点分解（等价于对结图中一个扭结区域的分解）。
- RI^+ （等价于增加一个交叉的第一 Reidemeister 变换）。

5.1. **顶点分解**。 我们按照图3定义顶点分解。共有两种情况。令 Odd（分别为 Even）表示对应于奇数（分别为偶数）个交叉的扭结区域的顶点类型。

- 奇 $\rightarrow$ 偶和奇 / 奇和偶。
- 偶 $\rightarrow$ 奇和奇 / 偶和偶。

5.2. RI^+。

- $(u, v, P_u, P_v) \rightarrow (u, O, P_u, A)$, (O, O, B, A), and (O, v, B, P_v)

5.3. **顶点分解与 RI 的应用相结合**$^+$。 图 4 展示了一个例子。为了编写计算机程序，我们优先进行顶点分解，以确定应用桥操作的位置，也就是说，我们总是在应用 RI^+ 之前分解一个顶点。

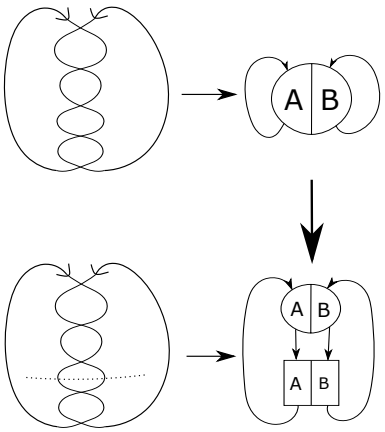


FIGURE 3. 顶点分解的一个示例

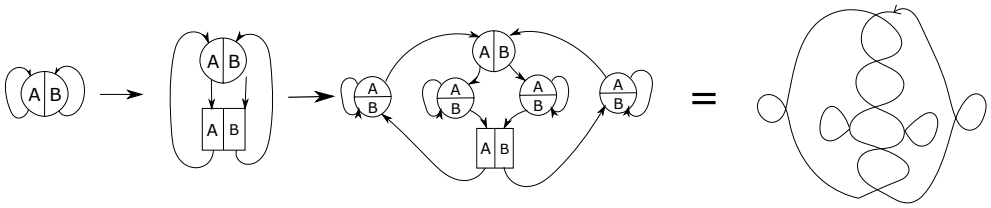


FIGURE 4. 顶点分解与 RI 应用相结合的一个示例$^{+}$

5.4. **选择将应用桥操作的两条边**。 我们估算选择这两个位置的计算复杂度如下：

- 我们有一列有序边 e_1， e_2，…， e_E 它们组成一个表示该结欧拉图的欧拉回路。 $\rightarrow O(E)$。
- 选取两条边 $\rightarrow O(E^2)$。

在上述过程中，这些列举和选择的总数由 $O(E^2)$ 估算得出。对于两条边，令 $e_s = (a, b, P_a, P_b)$ 和 $e_g = (c, d, P_c, P_d)$ $(s < g)$。

5.5. **桥操作的应用**。

5.5.1. 算法。

步骤 0：对与所选的上述两条边相连的顶点，按照第 5.1 节中的方法进行分解。步骤 1：对每条边应用一次 RI^{+} 。步骤 2：按照图 1 添加一个顶点 P，其输入为 a、b，输出为 c、d。定义顶点 P 的四条边，即 $\alpha = (a、P、P_a、A)$、$\beta = (b、P、P_b、B)$、$\gamma = (P、c、B、P_c)$、$\delta = (P、d、A、P_d)$。步骤 3：添加与 $\{e_{s+1}, e_{s+2}, \ldots, e_{g-1}\}$ 对应的新边 $\{e'_{s+1}, e'_{s+2}, \ldots, e'_{g-1}\}$，其中通过反转 e_i 的定向来给出 e'_i 。步骤 4：移除 $\{e_s, e_{s+1}, \ldots, e_g\}$ 中的边。

5.6. **示例：对交叉帽数为一的结进行桥操作，情形 I–III**。我们给出示例：如图 6–8 所示的情形 I–III。在图 6–8 中请注意，在步骤 1 中，若 RI^{+} 操作属于无效操作，通常可以省略；但在我们的实际代码中，我们不会省略它们。

5.7. **桥操作计算复杂度的估算**。在应用第 5.4 节中的步骤后，我们在第 5.5 节中估算计算的复杂度。

- 我们对连接到两条选定边 $\rightarrow O(1)$的四个顶点进行分解。
- 我们对每条边 $\rightarrow O(E)$ 应用 RI^{+} 。

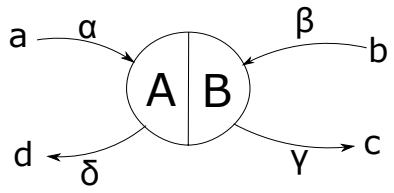


FIGURE 5. 一般情形下的顶点 P

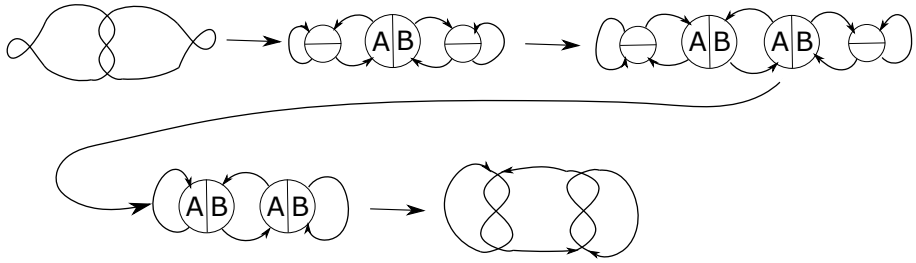


FIGURE 6. 情形 I

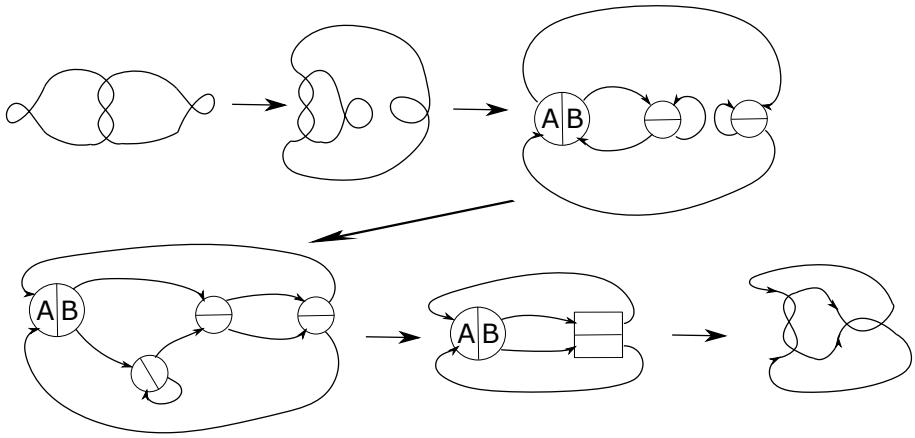


FIGURE 7. 情形 II

- 通过上述两个步骤（分解和 RI^+）$\to O(1)$，我们从包含旧边和新生边的分解边中选取两条边。

- 我们添加一个新顶点 P 以及新边 α、β、γ 和 $\delta \to O(1)$。
- 我们添加新边 e'_{s+1}，..... $e'_{g-1} \to O(E)$。
- 我们移除从 e_s 到 $e_g \to O$的边（E）。

上述过程的总估算为 $O(E)$。

6. Proof of Theorem 1

证明。 根据第 5.4 节和第 5.7 节，对于每个将要执行桥操作的配对，我们都会在一个代码中完成一次桥操作。

- 对于每个将要执行桥操作的配对，其计算复杂度上界为 $O(E^2)$。

- 在代码中执行一次桥操作的计算复杂度上界为$O(E)$。

因此 $O(E^2) \times O(E) = O(E^3)$。 □

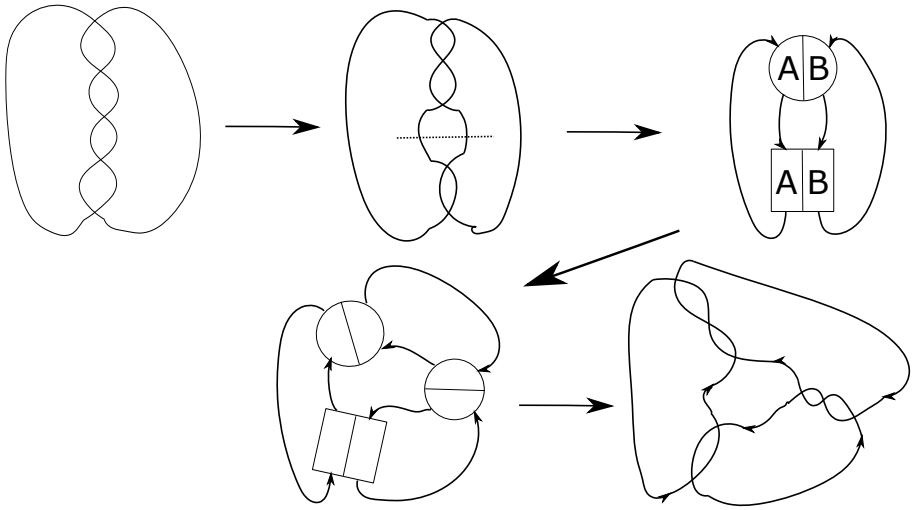


FIGURE 8. 情形III

7. ACTUAL CODE

详情请参阅实际代码：
https://github.com/nanigasi-san/splus/blob/main/algorithms/main.py

8. ACKNOWLEDGEMENTS

本研究部分获得日本学术振兴会科学研究费助成事业（JSPS KAKENHI）资助，课题编号为 20K03604 和 22K03603；同时获得丰桥技术科学大学与高等专门学校合作项目资助，项目编号为 2309。

REFERENCES

[1] A. Hatcher 和 W. Thurston。二桥结补空间中的不可压缩曲面。 *Invent. Math.*，79(2)：225–246，1985。[2] 平泽美上和寺垣内正和。二桥结的交叉帽数。 *Topology*，45(3)：513–530，2006。[3] 市原一裕和水岛茂。椒盐结的交叉帽数。 *Topology Appl.*，157 201，2010 1 193( )：–。[4] Noboru Ito 和瀧村祐介。交叉帽数与结投影。 *Internat. J. Math.*，29 1850084，21，2018 12( )：。[5] Noboru Ito 和瀧村祐介。结的交叉帽数与体积界。 *Internat. J. Math.*，31 13( )：2050111，33，2020。[6] Noboru Ito 和瀧村祐介。交叉帽数为三的交替结。 *J. Knot Theory Ramifications*，31 4( )：论文编号 2250026，11，2022。[7] Noboru Ito 和 KAITO YAMADA。管道化与交叉帽数的计算。 *JP J. Geom. Topol.*，26(2)：103–115，2021。[8] Efstratia Kalfagianni 和 Christine Ruey Shan Lee。交叉帽数与琼斯多项式。 *Adv. Math.*，286 308：–337，2016。[9] Thomas Kindred。通过解纽拼接计算交替结的交叉帽数。 *Internat. J. Math.*，31 7 2050057，30，2020 ( )：。[10] 寺垣内正和。环面结的交叉帽数。 *Topology Appl.*，138(1-3)：219–238，2004。

866 NAKANE, HITACHINAKA, IBARAKI, 312-8508, JAPAN
Email address: nanigasi.py@gmail.com866 NAKANE, HITACHINAKA, IBARAKI, 312-8508, JAPAN*Email address*: nito@gm.ibaraki-ct.ac.jp