arXiv:2303.10012v1 [math.CV] 17 Mar 2023

¨具有常微分范数的单位球上的一个凯勒势

Kang-Hyurk Lee 和 Aeryeong Seo

Contents

1. 引言 1 2. $n = 1$ 4时常数的唯一性 3. $\mathbb{H}^n$ 6的几何 3.1. 伯格曼度量的典范凯勒势。6 3.2. $\mathbb{H}^n$ 在 $n \geq 2$ 7时常数的唯一性 3.3. 完备仿射全纯向量场。8 3.4. 具有常微分范数的条件 10 3.5. 双曲向量场 10 3.6. 抛物向量场 12 4. 定理 1.1 的证明 13 5. $\mathbb{H}^n$ 16的李代数结构 6. 定理 1.3 和定理 1.4 的证明 18 参考文献 22

Abstract. 设 $\mathbb{B}^n$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的单位球， $\mathbb{H}^n$ 为与 $\mathbb{B}^n$ 双全纯的第二类齐性西格尔域。我们证明，在微分范数为常数的凯勒势中， $\mathbb{H}^n$ 的凯勒势在自同构作用下唯一。

作为应用，我们考虑 $\mathbb{C}^n$ 中与 $\mathbb{B}^n$ 双全纯的域 Ω。我们证明，若 Ω 仿射齐性，则它与 $\mathbb{H}^n$ 仿射等价。接下来，假设 Ω 关于凯勒–爱因斯坦度量的典范势，其微分范数为常数。若 Ω 与 $\mathbb{B}^n$ 之间的双全纯映射是某个莫比乌斯变换的限制，则该映射与凯莱变换仿射等价。

1. Introduction

对于带有凯勒形式 ω 的凯勒流形 M，若函数 η: $M \to \mathbb{R}$ 满足 $\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\eta = \omega$，则称其为（凯勒）势。若 $\|\partial\eta\|_\omega$ 在 M 上为常数，其中 $\|\partial\eta\|_\omega$ 是按照 ω 测得的 $\partial\eta$ 的范数，则称 η 关于 ω 具有常微分范数。若用于测量范数的度量显而易见，我们就简称 η 具有常微分范数。

自 Gromov 开创性地研究 L^2 与范数相关的上同调理论 $\|d\eta\|_\omega$[Gro91]，以来，这一领域已开展了大量研究。最初，Gromov 提出了K¨ahler 双曲流形的概念；如果一个复流形 M 的普适覆盖空间具有 K¨ahler 度量¨，且存在其势函数 g，则称该流形为 Kähler 双曲流形 ϕ。

Date: 2023年3月20日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 32M05，30C20，30F45。
Key words and phrases. 西格尔域，单位球，K¨ahler 势函数，势函数梯度，抛物型向量场，双曲型向量场，

使得 $\|\phi\|_g < \infty$。他在同一篇论文中指出，若一个完备、单连通的 K¨ahler 双曲流形 M 存在紧商空间，则当 $p+q \neq \dim_{\mathbb{C}} M$ 时有 $\mathcal{H}^{p,q} = 0$，当 $p+q = \dim_{\mathbb{C}} M$ 时有 $\mathcal{H}^{p,q} \neq 0$，其中 $\mathcal{H}^{p,q}$ 表示 M 上双次数为 (p,q) 的调和 L^2 形式空间。关于 K¨ahler 双曲流形的研究，可参见 [BDET22] 及其中的参考文献。

其中一项有趣的结果由 Kai–Ohsawa [KO07], 证明，他们证明了任意有界齐性域 B 都存在伯格曼度量的一个势 ϕ，且其微分范数为常数。在 [CLY20], 中，Choi–Lee–Yoo 证明，在单位圆盘 Δ 上，Poincar´é 度量的此类势在自同构作用下唯一，前提是具有常微分范数的势所对应的常数唯一。基于这一性质，他们将上半空间刻画为一个域：该域存在典范势，其微分范数为某个常数。最近，Choi–Lee–Seo [CLS23] 证明，若一个维数为 n的单连通复流形M 覆盖某个紧复流形，且具有负里奇曲率 $-K$的完备 K¨ahler–Einstein 度量 ω，并且若 M 存在满足条件 $\|\partial\varphi\|^2_\omega \equiv \frac{n+1}{K}$ 的势 φ: $M \to \mathbb{R}$，则 M 与单位球双全纯。另请参见 [Lee21]。

本文将 Choi–Lee–Yoo 的结果推广 [CLY20] 至更高维的球 $\mathbb{B}^n$，其中 $n \geq 2$。令

$$\mathbb{B}^n := \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$$

为 $\mathbb{C}^n$ 中的单位球，且

$$\mathbb{H}^n := \{w \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} w_n > |w_1|^2 + \cdots + |w_{n-1}|^2\}$$

为与 $\mathbb{B}^n$ 双全纯的第二类西格尔域，其凯莱变换$\mathcal{C}$为: $\mathbb{B}^n \to \mathbb{H}^n$ 由下式给出

$$\mathcal{C}(z) = \left(\frac{z_1}{1-z_n}, \ldots, \frac{z_{n-1}}{1-z_n}, \frac{1+z_n}{1-z_n}\right).$$

令 $\omega_{\mathbb{H}^n}$ 和 $\omega_{\mathbb{B}^n}$ 分别为定义在 $\mathbb{H}^n$ 和$\mathbb{B}^n$上的里奇曲率为 -1 的不变 K¨ahler–Einstein 度量。$\omega_{\mathbb{H}^n}$ 的典范（K¨ahler）势由 $\log\psi_0$ 给出，其中

$$\psi_0(w) := (\operatorname{Re} w_n - |w_1|^2 - \cdots - |w_n|^2)^{-n-1}$$

以及拉回 $\log\psi_0$ 经 $\mathcal{C}$的拉回是 $\omega_{\mathbb{B}^n}$的一个 K¨ahler 势，由 $\log\varphi_0$ 给出，其中

$$\varphi_0(z) := \psi_0 \circ \mathcal{C}(z) = \frac{|1-z_n|^{2(n+1)}}{(1-|z|^2)^{n+1}}.$$

它们的微分范数的平方，$\|\partial\log\psi_0\|^2_{\omega_{\mathbb{H}^n}}$和 $\|\partial\log\varphi_0\|^2_{\omega_{\mathbb{B}^n}}$，是常数 $n+1$。有趣的是，若 $\mathbb{B}^n$ 上存在一个关于 $\omega_{\mathbb{B}^n}$ 的势函数，且其微分范数为常数，那么该范数常数必为 $n+1$（关于 Δ，见定理 2.1；关于带有 $n \geq 2$的 $\mathbb{B}^n$，见定理 3.3）。

我们的第一个主要定理如下:

定理 1.1. 设 $\omega_{\mathbb{H}^n}$ 为 $\mathbb{H}^n$上的 Bergman–Poincar´e 度量。假设存在一个正实值函数 ψ: $\mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$，使得 $\log\psi$ 是 $\omega_{\mathbb{H}^n}$ 的 K¨ahler 势函数，并且 $\|\partial\log\psi\|_{\omega_{\mathbb{H}^n}}$ 在 $\mathbb{H}^n$上为常数。那么，除去 $\mathbb{H}^n$ 在 $(0,\ldots,0,1) \in \mathbb{H}^n$处的各向同性子群的作用，$\log\psi$ 就是 $\mathbb{H}^n$ 的典范势。

定理 1 .1 可以通过凯莱变换在 $\mathbb{B}^n$ 上改写如下 :

推论 1.2. 单位球上 Bergman–Poincar´e 度量的任意 K¨ahler 势，只要具有常微分范数，便等于 $\log\varphi_0$，相差 $\mathbb{B}^n$ 在 0 处的各向同性子群作用。

对于 $n = 1$，定理 1.1 和推论 1.2 在某些条件下得到了证明，见 [CLY20，定理 1.2]。在同一篇论文中，作为一项应用，作者证明了：若 Ω 是 $\mathbb{C}$ 中的 $\omega_\Omega := \sqrt{-1}\lambda dz \wedge d\bar{z}$是一个完备厄米度量，且其

高斯曲率 -1，则 Ω 与 $\mathbb{H}^1$ 仿射等价，当且仅当 $\|\partial \log \lambda\|_{\omega_\Omega}$ 是一个常数。根据黎曼映射定理，注意到这样的 Ω 与单位圆盘 Δ 双全纯。

现在设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个有界域，且 Ω 与单位球 $\mathbb{B}^n$ 双全纯，并赋予 Ω 完备的 K¨ahler–Einstein 度量 $\omega_\Omega = \sqrt{-1}\sum_{i,\ j=1}^{n} g_{i\bar{j}} dz_i \wedge d\overline{z}_j$ 其里奇曲率为 -1。由于 ω_Ω 具有常里奇曲率，自然的 K¨ahler 势为 $\log\det(g_{i\bar{j}})$。然而，与情形 $n = 1$ 不同，条件 $\|\partial \log\det g_{i\bar{j}}\|_{\omega_\Omega} \equiv c$ 并不能推出 Ω 与 $\mathbb{H}^n$ 仿射等价 ~。例如，考虑一个全纯映射 $\mathcal{C}\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n$，定义为

$$\widetilde{\mathcal{C}}(z) = \left(\frac{z_1}{1-z_n} + g_1(z_n), \cdots, \frac{z_{n-1}}{1-z_n} + g_{n-1}(z_n), \frac{1+z_n}{1-z_n} \right)$$

~其中 $g_j\colon \Delta \to \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n-1$ 是一些全纯函数。令 $\Omega := \mathcal{C}(\mathbb{B}^n)$ 为 $\widetilde{\mathcal{C}}$ 的像。通过简单计算可得 $\det \partial\widetilde{\mathcal{C}} = (1-z_n)^{-(n+1)}$，且 $\widetilde{\mathcal{C}}$ 是到 Ω 上的双全纯映射。于是由 (6.7) 得

$$\det g_{i\bar{j}} \circ \widetilde{\mathcal{C}} = \frac{|1-z_n|^{2(n+1)}}{(1-|z|^2)^{n+1}},$$

~并且这意味着 $\|\partial \log\det g_{i\bar{j}}\|_{\omega_\Omega}$ 是一个常数，因为 $\mathcal{C}$ 是等距变换。然而，我们可以选择 g_j, $j = 1, \ldots, n-1$，使得 Ω 与 $\mathbb{H}^n$并非仿射等价。注意，Ω 可以是凸域。基于这一观察，要从仿射等价的意义上刻画与单位球双全纯的域，我们需要一些强条件。

我们的第二个主要定理如下：

定理 1.3. 任意与单位球双全纯的 $\mathbb{C}^n$ 仿射齐性域都与 $\mathbb{H}^n$仿射等价。

为证明定理 1.3，我们利用第二类齐性 Siegel 域的李代数结构，该结构由 Kaup–Matsushima–Ochiai 在 [KMO70]中进行了深入研究。特别地，我们刻画了构成$\mathfrak{aff}(\mathbb{H}^n)$ 的基的完全全纯向量场。

在 [MT92], 中，Mok–Tsai 证明，若一个秩为 $B \subset \mathbb{C}^n$ 的有界对称域 $r \geq 2$与某个无界凸域双全纯，则该映射在 B 的自同构和 $\mathbb{C}^n$的仿射变换作用下应为凯莱变换。为证明这一点，他们证明该双全纯映射可以延拓为 B的紧对偶上的一个自同构。接着，他们确定了这个自同构的具体形式。对于 $\mathbb{B}^n$，即秩为 1 的有界对称域，我们很容易看出证明的第一部分并不成立。另一方面，我们发现可以刻画 $\mathbb{CP}^n$的自同构；该自同构将 $\mathbb{B}^n$ 映到某个 K¨ahler 势具有常微分范数的域上。

设 $\mathbb{CP}^n$ 为维数 n 的复射影空间，$[z] = [z_1, \ldots, z_{n+1}]$ 为其齐次坐标。那么，任意非退化的 $(n+1) \times (n+1)$ 矩阵 $A = (A_{ij})$ 都可视为 $\mathbb{CP}^n$ 上的一个全纯自同构，由下式给出

$$[z] \mapsto [Az] = \left[\sum_j A_{1j} z_j, \cdots, \sum_j A_{n+1j} z_j \right]. \tag{1.1}$$

考虑从 $\mathbb{C}^n$ 到 $\mathbb{CP}^n$ 的典范嵌入，由 $(z_1, \ldots, z_n) \hookrightarrow [z_1, \ldots, z_n, 1]$给出。那么，映射 (1.1) 在 $\mathbb{C}^n$ 上的实现为

$$z \in \mathbb{C}^n \mapsto \left[\frac{\sum_j A_{1j} z_j}{\sum_j A_{n+1j} z_j}, \cdots, \frac{\sum_j A_{nj} z_j}{\sum_j A_{n+1j} z_j} \right]. \tag{1.2}$$

这种形式为 (1.2) 的映射称为 M ¨比乌斯变换。

我们的最后一个定理如下：

定理 1.4. 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个域，且 $G\colon \mathbb{B}^n \to \Omega$ 是一个双全纯映射，它是某个莫比乌斯变换的限制。设 $\omega_\Omega = \sum_{i,\,j=1}^{n} g_{i\bar{j}} dz_i \wedge d\bar{z}_j$ 是 Ω 上具有里奇曲率 -1 的凯勒–爱因斯坦度量。假设 $\|\partial \log \det(g_{i\bar{j}})\|_{\omega_\Omega}$ 是常数。那么，Ω 和 G分别与 $\mathbb{H}^n$ 和 $\mathcal{C}$ 仿射等价。

本文结构如下：第 2 节证明 K¨ahler 势关于 Poincar`e 度量在 $\mathbb{H}^1$ 上的唯一性（相差自同构）。第 3 节介绍 $\mathbb{H}^n$的几何，例如，¨的 K $\mathbb{H}^n$ahler–Einstein 度量、K¨ahler 势以及抛物／双曲向量场。此外，我们将证明 ¨上关于伯格曼度量具有常微分范数的 K $\mathbb{H}^n$ahler 势 $n \geq 2$ 相差自同构时唯一。第 3.5 节和第 3.6 节分别介绍由双曲向量场和抛物向量场的实部消去的 K¨ahler 势的一些性质。第 4 节证明定理 1.1。第 5 节刻画与 Kaup–Matsushima–Ochiai 在 $\mathfrak{aut}$（$\mathbb{H}^n$）中给出的 [KMO70]李代数分解相对应的完全全纯向量场。第 6 节证明定理 1.3 和定理 1.4。

致谢 本研究得到三星科学技术基金会项目编号 SSTF-BA2201-01 的资助。第二作者获得韩国政府资助的韩国国家研究基金会（NRF）拨款（编号 NRF-2022R1F1A1063038）。

2. Uniqueness of the constant when $n = 1$

令 $\mathbb{H} := \mathbb{H}^1 := \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0\}$ 为右半平面，$\omega_{\mathbb{H}} := -2\sqrt{-1}\partial\bar{\partial} \log \operatorname{Re} w$ 为 $\mathbb{H}$上的 K¨ahler–Einstein 度量。令 $\log \psi_0(w) = \log \frac{1}{(\operatorname{Re} w)^2}$ 为~~$\omega_{\mathbb{H}}$~~的典范 K¨ahler 势。注意，$\|\partial \log \psi_0\|^2_{\omega_{\mathbb{H}}} = 2$。在本节中，对于任意全纯函数 $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$，为简便起见，我们将 $\frac{\partial f}{\partial w}$ 记为 f'。对于向量场 V，我们将 $\frac{V+\overline{V}}{2}$记为 $\operatorname{Re} V$。

本节的目的是证明

定理 2.1. 设 $\psi\colon \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ 是一个函数，使得 $\log \psi$ 是 $\mathbb{H}$上伯格曼度量的势函数。假设

$$\|\partial \log \psi\|^2_{\omega_{\mathbb{H}}} \equiv c$$

对某个常数 $c \in \mathbb{R}$成立。那么，对于某个 $r > 0$，$c = 2$ 和 $\psi = r\psi_0$。

考虑 $\mathbb{H}$的全纯向量场：

$$T := 2\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial w} \quad \text{and} \quad D := 2w\frac{\partial}{\partial w},$$

它们分别生成仿射自同构：

$$\mathcal{T}_s(w) := w + 2\sqrt{-1}s \quad \text{and} \quad \mathcal{D}_s(w) := e^{2s}w,$$

其中 $s \in \mathbb{R}$。通过直接计算，我们得到

$$(\operatorname{Re} D) \log \psi_0 = -2 \quad \text{and} \quad (\operatorname{Re} T) \log \psi_0 = 0$$

and

$$(\mathcal{T}_s)_* D = D - 2sT \quad \text{and} \quad (\mathcal{T}_s)_* T = T. \tag{2.1}$$

引理 2.2. 设 $\psi\colon \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ 是一个 K¨ähler 势，满足 $\omega_{\mathbb{H}}$

$$\|\partial \log \psi\|^2_{\omega_{\mathbb{H}}} \equiv c_1 \quad \textit{and} \quad (\operatorname{Re} D) \log \psi \equiv c_2$$

对于某个常数 c_1 和 c_2。于是 $c_1 = 2$ 和 $c_2 = \pm 2$。

证明。由于 log ψ 和 log ψ_0 是 $\omega_{\mathbb{H}}$的势函数，因此存在一个全纯函数 $f\colon\ \mathbb{H}\to\mathbb{C}$，使得 log ψ − log $\psi_0 = f + f$。由于我们有

$$c_2 = (\operatorname{Re} D)\log\psi = (\operatorname{Re} D)(\log\psi_0 + f + \bar{f}) = -2 + \operatorname{Re}(Df),$$

我们有

$$wf'(w) = \frac{c_2+2}{2} + \sqrt{-1}\beta \tag{2.2}$$

对于某个常数 $\beta\in\mathbb{R}$。记 $C := \frac{c_2+2}{2} + \sqrt{-1}\beta$。注意， c_2 是一个实数。

另一方面，由于我们有

$$\begin{aligned} c_1 = \|\partial\log\psi\|^2_{\omega_{\mathbb{H}}} = \|\partial\psi_0 + \partial f\|^2_{\omega_{\mathbb{H}}} &= \left|-\frac{1}{\operatorname{Re} w} + f'\right|^2 2(\operatorname{Re} w)^2 \\ &= 2 + 2(\operatorname{Re} w)^2|f'|^2 - 4\operatorname{Re} w\operatorname{Re} f', \end{aligned} \tag{2.3}$$

由 (2.2) 可得

$$(c_1-2)|w|^2 = 2(\operatorname{Re} w)^2|C|^2 - 4\operatorname{Re} w\operatorname{Re}(C\bar{w}). \tag{2.4}$$

对 $\frac{\partial^2}{\partial w^2}$ 对 (2.4) 求导可得

$$0 = |C|^2 - 2\overline{C} \tag{2.5}$$

再对 $\frac{\partial^2}{\partial w\partial\bar{w}}$ 求导，我们得到

$$c_1 - 2 = |C|^2 - 2\operatorname{Re}\overline{C}. \tag{2.6}$$

由 (2.5)， C 是实数，因此由 (2.5) 和 (2.6) 可得 $c_1 = 2$ 和 $C = 0$，或 2。这意味着 $c_2 = \pm 2$。□

引理 2.3. 设 $\psi\colon\ \mathbb{H}\to\mathbb{R}$ 是 $\omega_{\mathbb{H}}$ 的 K ¨ahler 势，满足

$$\|\partial\log\psi\|^2_{\omega_{\mathbb{H}}} \equiv c_1 \quad and \quad (\operatorname{Re} T)\log\psi \equiv c_2$$

对某个常数 c_1 和 c_2。那么，对于某个 $r >$，有 $c_1 = 2$、 $c_2 = 0$ 和 $\psi = r\psi_0 \quad 0.$

证明. 由于 log ψ 和 log ψ_0 是 $\omega_{\mathbb{H}}$ 的势，因此存在一个全纯函数 $f\colon\ \mathbb{H}\to\mathbb{C}$，使得 log ψ − log $\psi_0 = f + f$。由于我们有

$$c_2 = (\operatorname{Re} T)\log\psi = (\operatorname{Re} T)(\log\psi_0 + f + \bar{f}) = \operatorname{Re}(Tf),$$

我们得到

$$f'(w) = \beta - \sqrt{-1}\frac{c_2}{2} =: C. \tag{2.7}$$

另一方面，由 (2.3) 可得

$$c_1 - 2 = 2(\operatorname{Re} w)^2|C|^2 - 4\operatorname{Re} w\operatorname{Re} C.$$

比较 w 和 $\overline{w}$ 中单项式的系数，可得 $c_1 = 2$ 和 $C = 0$，这意味着 $c_2 = 0$。由于根据 (2.7)， f 是一个常数，证明完成。□

定理 2.1 的证明：在定理的假设下，存在一个处处不为零的全纯完备向量场 W 定义在 $\mathbb{H}$，见[CL21，定理 3。2] 满足 (Re W) log $\psi \equiv 0$。通过对 $\mathbb{H}$取某个各向同性自同构，我们可以假设 W在无穷远点处消失。由于 $\mathbb{H}$ 的自同构群维数为 3，而固定无穷远点的李子群维数为 2，我们可以将 W 表示为

$$W = aD + bT$$

其中 a、 $b\in\mathbb{R}$ 为某些常数。

步骤1：假设 $a \neq 0$。利用 (2.1)，我们得到

$$(\mathcal{T}_s)_*W = aD + (b - 2sa)T. \tag{2.8}$$

若取 $s = \frac{b}{2a}$，则有 $\widetilde{W} := (\mathcal{T}_s)_* W = aD$。此外，$\log \widetilde{\psi}$ 也是 $\omega_{\mathbb{H}}$ 的一个 K¨ahler 势，其满足 $\widetilde{\psi} := \psi \circ \mathcal{T}_{-s}$: $\mathbb{H} \to \mathbb{R}$，且 $\|\partial \log \widetilde{\psi}\|^2_{\omega_{\mathbb{H}}} \equiv c$，因为 $\mathcal{T}_s$ 是关于 $\omega_{\mathbb{H}}$ 的全纯 $\widetilde{\ }$ 等距变换。由引理 2.2，得到 (Re W) log $\psi = a$(Re D) log $\psi = \pm 2a$，而这一矛盾意味着 $a = 0$。

步骤 2：由于 W 处处不为零，我们有 $W = bT$，且 $b \neq 0$。这意味着 $0 =$(Re W) log $\psi = b$(Re T) log ψ，因此由引理 2.3 可得 $c = 2$ 和 $\psi = r\psi_0$。□

推论 2.4. 设 ψ: $\mathbb{H} \to \mathbb{R}$ 是一个函数，使得 log ψ 是完备 K¨ahler–Einstein 度量 $\widetilde{\omega}$ 在 $\mathbb{H}$ 上的势，且其里奇曲率为 $-\kappa$，其中 $\kappa > 0$。假设

$$\|\partial \log \psi\|^2_{\widetilde{\omega}} \equiv c$$

对于某个常数 $c \in \mathbb{R}$。那么 $c = \frac{2}{\kappa}$ 且 $\psi = r\psi_0^{1/\kappa}$，其中某个 $r > 0$。

证明。由于 $\mathbb{H}^n$ 上的伯格曼度量是里奇曲率为 -1的 K¨ahler–Einstein 度量，因此我们有 $\widetilde{\omega} = \frac{1}{\kappa}\omega_{\mathbb{H}^n}$。这意味着 κ log ψ是伯格曼度量的一个 K¨ahler 势，并满足定理 2.1 中的条件。因此，$c\kappa = 2$ 且 $\psi^\kappa = r\psi_0$，其中某个 $r > 0$。证毕。□

3. Geometry of $\mathbb{H}^n$

本节介绍 $\mathbb{H}^n$ 的伯格曼度量的 K¨ahler 势的一些性质。我们还将证明，若 $\mathbb{H}^n$ 的伯格曼度量存在一个具有常微分范数 c 的势，则 $c = n + 1$（第 3.2 节）。此外，我们推导出一个由常微分范数条件导出的方程，并描述在 $\mathbb{H}^n$ 上生成仿射自同构的全纯向量场的行为。本节介绍的内容对于证明定理 1.1 至关重要。

3.1. 伯格曼度量的典范 K¨ahler 势。设 $\mathbb{B}^n := \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的单位球，并且

$$\mathbb{H}^n := \{w \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Re}\ w_n > |w_1|^2 + \cdots + |w_{n-1}|^2\}$$

设其为与 $\mathbb{B}^n$ 双全纯的第二类西格尔域，二者之间的凯莱变换 $\mathcal{C}$: $\mathbb{B}^n \to \mathbb{H}^n$ 定义为

$$\mathcal{C}(z) = \left(\frac{z_1}{1 - z_n}, \ldots, \frac{z_{n-1}}{1 - z_n}, \frac{1 + z_n}{1 - z_n}\right).$$

$\mathcal{C}$ 的逆映射 $\mathcal{F} := \mathcal{C}^{-1}$: $\mathbb{H}^n \to \mathbb{B}^n$ 定义为

$$\mathcal{F}(w) = \left(\frac{2w_1}{w_n + 1}, \ldots, \frac{2w_{n-1}}{w_n + 1}, \frac{w_n - 1}{w_n + 1}\right).$$

设 $\omega_{\mathbb{H}^n}$ 是 $\mathbb{H}^n$ 上具有里奇曲率 -1 的 K¨ahler–Einstein 度量，即对于 $w' := (w_1, \ldots, w_{n-1})$

$$\omega_{\mathbb{H}^n} = -(n+1)\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log(\mathrm{Re}\, w_n - |w'|^2).$$

令 $(g_{i\bar{j}})$ 表示 $\omega_{\mathbb{H}^n}$ 关于标准欧几里得坐标的矩阵形式。注意，$\omega_{\mathbb{H}^n}$是 $\mathbb{H}^n$的伯格曼度量。令 $(g^{k\bar{j}})$ 表示 $(g_{i\bar{j}})$ 的逆矩阵，并满足 $\sum_j g_{i\bar{j}} g^{k\bar{j}} = \delta_{ik}$。具体而言，

$$(g^{k\bar{j}}) = \frac{\mathrm{Re}\, w_n - |w'|^2}{n+1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & 2w_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 2w_{n-1} \\ \hline 2\overline{w}_1 & \cdots & 2\overline{w}_{n-1} & 4\mathrm{Re}\, w_n \end{array}\right).$$

$\omega_{\mathbb{H}^n}$ 的典范势为 $\log\psi_0$，其中

$$\psi_0(w) := (\mathrm{Re}\ w_n - |w'|^2)^{-n-1}$$

对于 $w = (w_1, \ldots, w_n) = (w', w_n)$。注意，

$$\begin{aligned}
\|\partial \log\psi_0\|^2_{\omega_{\mathbb{H}^n}} &= \frac{(n+1)^2}{(\mathrm{Re}\, w_n - |w'|^2)^2}\|\partial(\mathrm{Re}\, w_n - |w'|^2)\|^2_{\omega_{\mathbb{H}^n}} \\
&= \frac{n+1}{(\mathrm{Re}\, w_n - |w'|^2)} X \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & 2w_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 2w_{n-1} \\ \hline 2\overline{w}_1 & \cdots & 2\overline{w}_{n-1} & 4\mathrm{Re}\, w_n \end{array}\right) \overline{X}^t \\
&= \frac{n+1}{(\mathrm{Re}\, w_n - |w'|^2)} \left(0, \cdots, 0, 2(\mathrm{Re}\, w_n - |w'|^2)\right) \overline{X}^t \\
&= n+1
\end{aligned}$$

其中 $X = (-w_1, \cdots, -w_{n-1}, 1/2)$ 表示欧几里得坐标下的 $\partial(\mathrm{Re}\ w_n - |w'|^2)$。$\mathcal{C}$ 将 ψ_0 拉回到 $\mathbb{B}^n$ 所得的函数为

$$\varphi_0(z) := \psi_0 \circ \mathcal{C}(z) = \frac{|1-z_n|^{2(n+1)}}{(1-|z|^2)^{n+1}}$$

对于 $z = (z_1, \ldots, z_n)$。设 $\omega_{\mathbb{B}^n}$ 为 $\mathbb{B}^n$上里奇曲率为 -1的 K¨ahler–Einstein（伯格曼）度量，即

$$\omega_{\mathbb{B}^n} = \sqrt{-1}\partial\bar\partial \log K_{\mathbb{B}^n}(z,z) = -(n+1)\sqrt{-1}\partial\bar\partial\log(1-|z|^2)$$

其中 $K_{\mathbb{B}^n}$ 表示 $\mathbb{B}^n$的伯格曼核。因此，$\log\varphi_0$ 是 $\omega_{\mathbb{B}^n}$的 K¨ahler 势。由于 $\mathcal{C}$ 关于 $\omega_{\mathbb{H}^n}, \omega_{\mathbb{B}^n}$是等距变换，我们有

$$\|\partial\log\varphi_0\|^2_{\omega_{\mathbb{B}^n}} = n+1.$$

3.2. $\mathbb{H}^n$ 具有 $n \geq 2$时常数的唯一性。本小节中，我们将对重复指标采用求和约定，并记

$$\partial_k := \frac{\partial}{\partial w_k}, \quad f_j := \frac{\partial f}{\partial w_j}, \quad f_{\bar j} := \frac{\partial f}{\partial \overline{w}_j}, \quad f^{\bar k} := f_j g^{j\bar k}, \quad f^k := f_{\bar j} g^{k\bar j}.$$

我们还将使用向量系数上的协变导数记号，以分号表示 $f_{j;k}$。

设 $\psi\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ 是一个函数，使得 $\log\ \psi$ 是 $\omega_{\mathbb{H}^n}$ 的 K¨ahler 势，并满足$\|\partial\log\psi\|^2_{\omega_{\mathbb{H}^n}} \equiv c$，其中 $c \in \mathbb{R}$为某个常数。令 $\Psi := \log\ \psi$，并在 $\mathbb{H}^n$ 上定义向量场 V如下:

$$V := \mathrm{grad}\,\Psi = \Psi^k \partial_k.$$

由于我们有

$$0 = \partial_j \|\partial\Psi\|^2_{\omega_{\mathbb{H}^n}} = \partial_j(\Psi_i\Psi^i) = \Psi_{i;j}\Psi^i + \Psi_i\Psi^i{}_{;j} = \Psi_{i;j}\Psi^i + \Psi_j,$$

我们得到

$$\Psi_{i;j}\Psi^i = -\Psi_j. \tag{3.1}$$

令 $\mathrm{span}\{V, \overline{V}\}$ 表示由 V和 $\overline{V}$生成的分布。

引理3.1. $\mathrm{span}\{V, \overline{V}\}$ 是可积的。

证明。根据关系 $\Psi_{\ell;k} = \Psi_{k;\ell}$，我们得到

$$\begin{aligned}
&= [\Psi^k\partial_k, \Psi^{\bar j}\partial_{\bar j}] = \Psi^k\Psi^{\bar j}{}_{;k}\partial_{\bar j} - \Psi^{\bar j}\Psi^k{}_{;\bar j}\partial_k = \Psi^k\Psi_{\ell;k}g^{\ell\bar j}\partial_{\bar j} - \Psi^{\bar j}\Psi_{\bar\ell;\bar j}g^{k\bar\ell}\partial_k \\
&= \Psi^k\Psi_{k;\ell}g^{\ell\bar j}\partial_{\bar j} - \Psi^{\bar j}\Psi_{\bar j;\bar\ell}g^{k\bar\ell}\partial_k = -\Psi^{\bar j}\partial_{\bar j} + \Psi^k\partial_k = V - \overline{V},
\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

Le引理 3.2。 $\mathbb{H}^n$ 中由 $\{V, \overline{V}\}$ 张成的可积子流形是全测地的。

证明。令 ∇为 $\omega_{\mathbb{H}^n}$ 的 K¨ahler 联络。注意 $\Psi^j{}_{;k} = \Psi_{\bar{\ell};k} g^{j\bar{\ell}} = g_{k\bar{\ell}} g^{j\bar{\ell}} = \delta_{jk}$。由 (3.1)

$$\nabla_V V = \nabla_{\Psi^k \partial_k} \Psi^j \partial_j = \Psi^k \Psi^j{}_{;k} \partial_j = \Psi^j \partial_j = V$$

and

$$\nabla_{\overline{V}} V = \nabla_{\Psi^{\bar{k}} \partial_{\bar{k}}} \Psi^j \partial_j = \Psi^{\bar{k}} \Psi^j{}_{;\bar{k}} \partial_j = -\Psi^j \partial_j = -V,$$

这意味着可积子流形是全测地的。 □

由于任意完备 K¨ahler 度量的 K¨ahler 势函数的梯度向量场是完备的，V是完备的。令 S为 $\mathbb{H}^n$ 中 span$\{V, \overline{V}\}$ 的极大可积子流形，且经过 (0, . . . , 0, 1)。通过复合 $\mathbb{H}^n$ 在 (0, . . . , 0, 1) 处的一个各向同性自同构，我们可以假设 $S = \{(0, \ldots, 0, w_n) \in \mathbb{H}^n\} \cong \mathbb{H}$。因此， $\omega_S := \omega_{\mathbb{H}^n}|_S = \frac{n+1}{2}\omega_{\mathbb{H}}$，即

$$(\partial\bar{\partial} \log \psi)|_S = \partial\bar{\partial}(\log \psi|_S) = \frac{n+1}{2}\omega_{\mathbb{H}}.$$

这意味着 log $\psi|_S$ 是度量 ω_S 的一个势函数。

另一方面，由于

$$\|\partial \log \psi|_S\|^2_{\omega_S} = \frac{|V \log \psi|^2}{\|V\|^2_{\omega_{\mathbb{H}}}} = \|\partial \log \psi\|^2_{\mathbb{H}^n},$$

我们有

$$\|\partial \log \psi|_S\|^2_{\omega_S} = c.$$

由于 ω_s 的里奇曲率为 $-\frac{2}{n+1}$，由推论 2.4 可得 $c = n + 1$。

综上，我们得到

定理 3.3. 设 ψ: $\mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ 是一个函数，使得 log ψ 是 $\omega_{\mathbb{H}^n}$ 的 K¨ahler 势函数。假设

$$\|\partial \log \psi\|^2_{\omega_{\mathbb{H}^n}} \equiv c$$

对于某个常数 $c \in \mathbb{R}$。于是 $c = n + 1$。

3.3. 完备仿射全纯向量场。设 $\mathcal{T}_s$、 $\mathcal{T}^{2,k}_s$、 $\mathcal{T}^{3,k}_s$以及 $\mathcal{D}_s$ 满足 k =1, . . . , $n-1$，它们是 $\mathbb{H}^n$ 的仿射自同构单参数族，由下式给出:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_s(w_1, \ldots, w_n) &= (w_1, \ldots, w_{n-1}, w_n + 2\sqrt{-1}s), \\
\mathcal{T}^{2,k}_s(w_1, \ldots, w_n) &= (w_1, \ldots, w_k + s, \ldots, w_{n-1}, w_n + 2sw_k + s^2), \\
\mathcal{T}^{3,k}_s(w_1, \ldots, w_n) &= (w_1, \ldots, w_k + \sqrt{-1}s, \ldots, w_{n-1}, w_n - 2\sqrt{-1}sw_k + s^2), \\
\mathcal{D}_s(w_1, \ldots, w_n) &= (e^s w_1, \ldots, e^s w_{n-1}, e^{2s} w_n)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

对于 $s \in \mathbb{R}$。注意， $\mathcal{C}^{-1} \circ \mathcal{T}_s \circ \mathcal{C}$、 $\mathcal{C}^{-1} \circ \mathcal{T}^{2,k}_s \circ \mathcal{C}$、 $\mathcal{C}^{-1} \circ \mathcal{T}^{3,k}_s \circ \mathcal{C}$ 是$\mathbb{B}^n$ 的抛物型自同构，而 $\mathcal{C}^{-1} \circ \mathcal{D}_s \circ \mathcal{C}$ 是 $\mathbb{B}^n$ 的双曲型自同构。定义$\mathbb{H}^n$ 的自同构 $\mathcal{S}^{1,k}$ 如下:

$$\mathcal{S}^{1,k}(w_1, \ldots, w_n) := (w_k, w_2, \ldots, w_{k-1}, w_1, w_{k+1}, \ldots, w_n) \tag{3.3}$$

for 每个 $k = 1, \ldots, n-1$。这些是 $\mathbb{H}^n$ at (0, . . . , 0, 1 处的各向同性自同构).

由 $\mathcal{T}_s^1, \mathcal{T}_s^2, \mathcal{T}_s^3, \mathcal{D}_s$ 生成的完全全纯向量场为

$$\begin{aligned} T &= 2\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial w_n}, \\ T^{2,k} &= 2w_k\frac{\partial}{\partial w_n} + \frac{\partial}{\partial w_k}, \quad 1 \le k \le n-1, \\ T^{3,k} &= -2\sqrt{-1}w_k\frac{\partial}{\partial w_n} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial w_k}, \quad 1 \le k \le n-1, \\ D &= 2w_n\frac{\partial}{\partial w_n} + \sum_{k=1}^{n-1} w_k\frac{\partial}{\partial w_k}, \end{aligned}$$

分别。注意，$(\mathcal{T}_s)_*D = D - 2sT$。

设 $U(n-1)\times\{1\}$ 是 $\mathbb{H}^n$ 在点 $(0,\dots,0,1)$ 处的各向同性子群中包含的子群，它在 $\mathbb{H}^n$ 上的作用为：对于任意 $U \in U(n)$，均有 $(w', w_n) \mapsto (Uw', w_n)$。由 $U(n-1)\times\{1\}$ 生成的完全全纯向量场具有如下形式：

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} u_{ij} w_j \frac{\partial}{\partial w_i} \tag{3.4}$$

其中 $u = (u_{ij}) \in \{(u_{ij})_{i,\,j=1}^{n-1} :\ u_{ij} + \overline{u}_{ji} = 0\}$，是 $U(n-1)$ 的李代数。我们将形如 (3.4) 的向量场称为酉向量场。与 $U(n-1)\times\{1\}$ 对应的完全全纯向量场有 $(n-1)^2$ 个：

$$U^{ij} := w_j\frac{\partial}{\partial w_i} - w_i\frac{\partial}{\partial w_j}, \quad V^{ij} := \sqrt{-1}\left(w_j\frac{\partial}{\partial w_i} + w_i\frac{\partial}{\partial w_j}\right), \quad 1 \le i < j \le n-1,$$

$$W^k := \sqrt{-1}w_k\frac{\partial}{\partial w_k}, \quad 1 \le k \le n-1.$$

经过直接计算，T、$T^{2,k}$、$T^{3,k}$和 D在式（3.2）和（3.3）中的自同构作用下的推前如下：

（1） $\mathcal{T}_s$作用：

$$\begin{aligned} &(\mathcal{T}_s)_*D = D - 2sT, \quad (\mathcal{T}_s)_*T = T, \quad (\mathcal{T}_s)_*T^{2,k} = T^{2,k}, \quad (\mathcal{T}_s)_*T^{3,k} = T^{3,k}, \\ &(\mathcal{T}_s)_*U^{ij} = U^{ij}, \quad (\mathcal{T}_s)_*V^{ij} = V^{ij}, \quad (\mathcal{T}_s)_*W^k = W^k \end{aligned} \tag{3.5}$$

（2） $\mathcal{T}^{2,k}_s$作用：

$$\begin{aligned} &(\mathcal{T}_s^{2,k})_*D = D - sT^{2,k}, \quad (\mathcal{T}_s^{2,k})_*T = T, \quad (\mathcal{T}_s^{2,k})_*T^{2,k} = T^{2,k}, \\ &(\mathcal{T}_s^{2,k})_*T^{3,k} = 2sT + T^{3,k}, \quad (\mathcal{T}_s^{2,k})_*T^{2,\ell} = T^{2,\ell}, \quad (\mathcal{T}_s^{2,k})_*T^{3,\ell} = T^{3,\ell}\,(\ell \ne k), \\ &(\mathcal{T}_s^{2,k})_*U^{ij} = U^{ij}\,(k \ne i,j), (\mathcal{T}_s^{2,i})_*U^{ij} = U^{ij} + sT^{2,j}, \quad (\mathcal{T}_s^{2,j})_*U^{ij} = U^{ij} - sT^{2,i}, \\ &(\mathcal{T}_s^{2,k})_*V^{ij} = V^{ij}\,(k \ne i,j), \quad (\mathcal{T}_s^{2,i})_*V^{ij} = V^{ij} - sT^{3,j}, \quad (\mathcal{T}_s^{2,j})_*V^{ij} = V^{ij} - sT^{3,i}, \\ &(\mathcal{T}_s^{2,k})W^k = W^k - sT^{3,k} - s^2T, \quad (\mathcal{T}_s^{2,k})W^\ell = W^\ell\,(k \ne \ell), \end{aligned} \tag{3.6}$$

(3) $\mathcal{T}^{3,k}_s$作用：

$$\begin{aligned} &(\mathcal{T}_s^{3,k})_*D = D - sT^{3,k}, \quad (\mathcal{T}_s^{3,k})_*T = T, \quad (\mathcal{T}_s^{3,k})_*T^{2,k} = -2sT + T^{2,k}, \\ &(\mathcal{T}_s^{3,k})_*T^{3,k} = T^{3,k}, \quad (\mathcal{T}_s^{3,k})_*T^{2,\ell} = T^{2,\ell}, \quad (\mathcal{T}_s^{3,k})_*T^{3,\ell} = T^{3,\ell}\,(\ell \ne k), \\ &(\mathcal{T}_s^{3,k})_*U^{ij} = U^{ij}\,(k \ne i,j) \quad (\mathcal{T}_s^{3,i})_*U^{ij} = U^{ij} + sT^{3,j}, \quad (\mathcal{T}_s^{3,j})_*U^{ij} = U^{ij} - sT^{3,i}, \\ &(\mathcal{T}_s^{3,k})_*V^{ij} = V^{ij}\,(k \ne i,j), \quad (\mathcal{T}_s^{3,i})_*V^{ij} = V^{ij} + sT^{2,j}, \quad (\mathcal{T}_s^{3,j})_*V^{ij} = V^{ij} + sT^{2,i}, \\ &(\mathcal{T}_s^{3,k})W^k = W^k + sT^{2,k} - s^2T, \quad (\mathcal{T}_s^{3,k})W^\ell = W^\ell\,(k \ne \ell), \end{aligned} \tag{3.7}$$

(4) $\mathcal{S}^{1,\,k}$作用:

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{S}^{1,k})_*T^{2,k}=T^{2,1},\quad (\mathcal{S}^{1,k})_*T^{3,k}=T^{3,1},\quad (\mathcal{S}^{1,k})_*T=T,\\
&(\mathcal{S}^{1,k})_*T^{2,\ell}=T^{2,\ell},\quad (\mathcal{S}^{1,k})_*T^{3,\ell}=T^{3,\ell}\,(\ell\neq k),\\
&(\mathcal{S}^{1,i})_*U^{ij}=U^{1j},\quad (\mathcal{S}^{1j})_*U^{1j}=-U^{1j},\\
&(\mathcal{S}^{1,i})_*V^{ij}=V^{1j},\quad (\mathcal{S}^{1,j})_*V^{1j}=V^{1j},\\
&(\mathcal{S}^{1,k})_*W^{k}=W^{1},\quad (\mathcal{S}^{1,k})_*W^{\ell}=W^{\ell}\,(k\neq \ell).
\end{aligned}\tag{3.8}$$

3.4. 具有常微分范数的条件。设 $\psi\colon \mathbb{H}^n\to\mathbb{R}$ 是一个函数，使得

$$\sqrt{-1}\partial\bar\partial\log\psi=\omega_{\mathbb{H}^n}\quad\text{ and }\quad \|\partial\log\psi\|^2_{\omega_{\mathbb{H}^n}}\equiv c$$

对于某个常数 c成立。设 f是一个全纯函数，使得 $\log\,\psi=\log\psi_0+f+\overline{f}$。根据定理 3.3，我们得到 $c=n+1$。由于 $\|\partial\log\psi\|^2_{\omega_{\mathbb{H}^n}}=\|\partial\log\psi_0\|^2_{\omega_{\mathbb{H}^n}}=n+1$，因此我们有

$$\begin{aligned}
n+1=\|\partial\log\psi\|^2_{\omega_{\mathbb{H}^n}}&=\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial\log\psi}{\partial w_k}\frac{\partial\log\psi}{\partial\overline{w}_j}g^{k\bar j}\\
&=\|\partial\log\psi_0\|^2_{\omega_{\mathbb{H}^n}}+\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial w_k}\frac{\partial\log\psi_0}{\partial\overline{w}_j}g^{k\bar j}+\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{w}_j}\frac{\partial\log\psi_0}{\partial w_k}g^{k\bar j}+\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial w_k}\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{w}_j}g^{k\bar j},
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
0&=2\mathrm{Re}\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{w}_j}\frac{\partial\log\psi_0}{\partial w_k}g^{k\bar j}+\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial w_k}\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{w}_j}g^{k\bar j}\\
&=-4(\mathrm{Re}\,w_n-|w'|^2)\mathrm{Re}\,\frac{\partial f}{\partial w_n}+\|df\|^2_{\omega_{\mathbb{H}^n}}\\
&=-4(n+1)\mathrm{Re}\,\frac{\partial f}{\partial w_n}+\sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{\partial f}{\partial w_j}\right|^2+\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{w}_n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial w_j}w_j\right)+4\mathrm{Re}\,w_n\left|\frac{\partial f}{\partial w_n}\right|^2.
\end{aligned}\tag{3.9}$$

值得注意的是，由 (3.9) 可知，$\frac{\partial f}{\partial w_n}\colon \mathbb{H}^n\to\mathbb{C}$ 是一个全纯函数，其像包含于 $\overline{\mathbb{H}^1}=\{w\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Re}\ w\geq 0\}$。考虑全纯函数 $\frac{\partial f}{\partial w_n}\circ\mathcal{C}\colon \mathbb{B}^n\to\mathbb{C}$，若在 $\mathbb{H}^n$ 中存在一点使得 $\mathrm{Re}\frac{\partial f}{\partial w_n}=0$，则 $\mathrm{Re}\ \frac{\partial f}{\partial w_n}$ 恒等于零。由 (3.9) 中的第二个等式，$df\equiv 0$ 在 $\mathbb{H}^n$ 上成立，因此 f 是一个常数。

引理 3.4. 设 $\psi\colon \mathbb{H}^n\to\mathbb{R}$ 是一个 K¨ahler 势，其相对于伯格曼度量具有常微分范数。设 f 是定义在 $\mathbb{H}^n$ 上的全纯函数，使得 $\log\,\psi=\log\,\psi_0+f+\overline{f}$。若存在一点 $p\in\mathbb{H}^n$ 使得 $\mathrm{Re}\ \frac{\partial f}{\partial w_n}(p)=0$，则 f是一个常数。

3.5. 双曲向量场。由于我们有

$$\begin{aligned}
D\log\psi_0&=-(n+1)\left(2w_n\frac{\partial}{\partial w_n}+\sum_{k=1}^{n-1}w_k\frac{\partial}{\partial w_k}\right)\log\left(\mathrm{Re}\ w_n-|w'|^2\right)\\
&=-\frac{n+1}{\mathrm{Re}\,w_n-|w'|^2}\left(2w_n\frac{\partial}{\partial w_n}+\sum_{k=1}^{n-1}w_k\frac{\partial}{\partial w_k}\right)\left(\mathrm{Re}\ w_n-|w'|^2\right)\\
&=-\frac{n+1}{\mathrm{Re}\,w_n-|w'|^2}\left(w_n-|w'|^2\right),
\end{aligned}$$

我们得到

$$(\mathrm{Re}\ D)\log\psi_0 = -(n+1). \tag{3.10}$$

设 $U = \sum_{i}^{n-1}{}_{,j=1}\, u_{ij}w_j\frac{\partial}{\partial w_i}$ 是一个酉向量场。由于我们有

$$\begin{aligned} U\log\psi_0 &= -\frac{n+1}{\mathrm{Re}\, w_n - |w'|^2}\left(\sum_{i,j=1}^{n-1} u_{ij}w_j\frac{\partial}{\partial w_i}\right)(\mathrm{Re}\, w_n - |w'|^2) \\ &= \frac{n+1}{\mathrm{Re}\, w_n - |w'|^2}\sum_{i,j=1}^{n-1} u_{ij}w_j\overline{w}_i \\ &= \frac{n+1}{\mathrm{Re}\, w_n - |w'|^2}\left(\sum_{i<j}^{n-1} u_{ij}w_j\overline{w}_i + \sum_{i>j}^{n-1} u_{ij}w_j\overline{w}_i\right) \\ &= \frac{2\sqrt{-1}(n+1)}{\mathrm{Re}\, w_n - |w'|^2}\mathrm{Im}\left(\sum_{i<j}^{n-1} u_{ij}w_j\overline{w}_i\right), \end{aligned}$$

我们得到

$$(\mathrm{Re}\, U)\log\psi_0 = 0. \tag{3.11}$$

引理3.5. 设 $\psi\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ 是一个函数，满足 $\partial\overline{\partial}\log\ \psi = \omega_{\mathbb{H}^n}$ 和 $\|\partial\log\ \psi\|^2_{\mathbb{H}^n} \equiv n+1$。设$U$ 是一个酉向量场。若

$$(\mathrm{Re}\,(D+U))\log\psi \equiv c$$

对于某个常数 c，则 $c = \pm(n+1)$。

证明。由于 $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\psi_0 = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\ \psi = \omega_{\mathbb{H}^n}$，$\log\ \psi - \log\ \psi_0$ 是一个多重调和函数。设 $f\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{C}$ 是一个全纯函数，使得 $\log\ \psi - \log\ \psi_0 = f + \bar{f}$。因此我们有

$$(\mathrm{Re}(D+U))\log\psi = -(n+1) + \mathrm{Re}\left(2w_n\frac{\partial f}{\partial w_n} + \sum_{k=1}^{n-1} w_k\frac{\partial f}{\partial w_k} + \sum_{i,j=1}^{n-1} u_{ij}w_j\frac{\partial f}{\partial w_i}\right) \equiv c$$

由 (3.10) 和 (3.11)，因此 $w_n\frac{\partial f}{\partial w_n}$限制在 $\{(0,\dots,0,w_n) \in \mathbb{H}^n\}$ 上为常数。设

$$\frac{\partial f}{\partial w_n}(0,\dots,0,w_n) = \frac{C}{w_n} \tag{3.12}$$

对于某个常数 C。由 (3.9) 可得

$$0 = -4(n+1)\mathrm{Re}\frac{C}{w_n} + \sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{\partial f}{\partial w_j}\right|^2 + 4\mathrm{Re}\, w_n\left|\frac{C}{w_n}\right|^2. \tag{3.13}$$

令 $C = \alpha + \sqrt{-1}\beta$ 为 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$。假设 $\beta \neq 0$。那么对于 $w_n = -\sqrt{-1}\beta$，我们得到与方程 (3.13) 矛盾的结果，因此 C 是一个实数。由此可得

$$0 = -4(n+1)C\frac{\mathrm{Re}\, w_n}{|w_n|^2} + \sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{\partial f}{\partial w_j}\right|^2 + 4\mathrm{Re}\, w_n\left|\frac{C}{w_n}\right|^2.$$

由最大值原理，对于每个 $j = 1,\dots,n-1$，$\frac{\partial f}{\partial w_j} \equiv 0$ 在 $\{(0,\dots,0,w_n)\}$ 上成立。因此，我们得到

$$(n+1)C = C^2$$

因此 $C = 0$ 或 $C = n+1$。由 (3.12)，由于 $c = 2C - (n+1)$，因此 $c = -(n+1)$ 或 $c = n+1$。 □

3.6. 抛物向量场。由于

$$T\log\psi_0=-(n+1)\left(2\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial w_n}\right)\log\left(\mathrm{Re}\ w_n-|w'|^2\right)=\frac{-\sqrt{-1}(n+1)}{\mathrm{Re}\ w_n-|w'|^2},$$

我们有

$$(\mathrm{Re}\ T)\log\psi_0\equiv 0. \tag{3.14}$$

引理 3.6. 设 ψ: $\mathbb{H}^n\to\mathbb{R}$ 是一个满足 $\partial\bar{\partial}\log\ \psi=\omega_{\mathbb{H}^n}$ 且 $\|\partial\log\ \psi\|^2_{\mathbb{H}^n}\equiv n+1$的函数。设$U$ 为一个酉向量场。若

$$(\mathrm{Re}\,(T+U))\log\psi\equiv c$$

对某个常数 c成立，则 $c=0$ 且 $\psi=r\psi_0$ 对某个 $r>0$成立。

证明. 设 f是定义在 $\mathbb{H}^n$ 上的全纯函数，使得 $\log\ \psi=\log\ \psi_0+f+\overline{f}$。由于根据 (3.14)

$$(\mathrm{Re}\,(T+U))\log\psi=\mathrm{Re}\,(Tf+Uf)=\mathrm{Re}\left(2i\frac{\partial f}{\partial w_n}+\sum_{i,j=1}^{n-1}u_{ij}w_j\frac{\partial f}{\partial w_i}\right)\equiv c, \tag{3.15}$$

并且这意味着，对于定义在 {上的某个常数 C，有 $\frac{\partial f}{\partial z_n}\equiv C$(0,... , 0, w_n) $\in\mathbb{H}^n$}。因此，根 (3.9) 据我们得到

$$\begin{aligned}0&=-4(n+1)\mathrm{Re}\,C+\sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{\partial f}{\partial w_j}\right|^2+4|C|^2\mathrm{Re}\,w_n\\&=\sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{\partial f}{\partial w_j}\right|^2+\mathrm{Re}\left(-4(n+1)C+4|C|^2w_n\right)\end{aligned} \tag{3.16}$$

on {(0, . . . , 0, w_n) $\in\mathbb{H}^n$}。对 $\frac{\partial^2}{\partial w_n\partial\overline{w}_n}$ 求 (3.16) 的导数，我们有 e

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial w_n\partial w_j}\right|^2\equiv 0$$

因此，$\frac{\partial f}{\partial w_j}$ 与 $j=1$、. . .、 $n-1$ 在 {(0, . . . , 0, w_n) $\in\mathbb{H}^n$} 上为常数。由 (3.16) 可知， $4|C|^2w_n$ 在 {(0, . . . , 0, w_n) $\in\mathbb{H}^n$} 上为常数。因此， $C=0$ 且 $c=0$。由 (3.15) 和 (3.16) 可知， f 为常数。证明完毕。□

Rem引理 3.7. 对于向量场 $T^{2,k}$ 和 $T^{3,k}$，其中 $k=1$、. . .、 $n-1$，我们还有

$$(\mathrm{Re}\ T^{2,k})\log\psi_0=(\mathrm{Re}\ T^{3,k})\log\psi_0\equiv 0$$

由于

$$\begin{aligned}T^{2,k}\log\psi_0&=-(n+1)\left(2w_k\frac{\partial}{\partial w_n}+\frac{\partial}{\partial w_k}\right)\log\left(\mathrm{Re}\ w_n-|w'|^2\right)\\&=\frac{-(n+1)2\sqrt{-1}\,\mathrm{Im}\ w_k}{\mathrm{Re}\ w_n-|w'|^2},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}T^{3,k}\log\psi_0&=-(n+1)\left(-2\sqrt{-1}w_k\frac{\partial}{\partial w_n}+\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial w_k}\right)\log\left(\mathrm{Re}\ w_n-|w'|^2\right)\\&=\frac{(n+1)2\sqrt{-1}\,\mathrm{Re}\,w_k}{\mathrm{Re}\ w_n-|w'|^2}.\end{aligned}$$

4. Proof of Theorem 1.1

设 ψ: $\mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ 是一个取正值的函数，满足

$$\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\psi = \omega_{\mathbb{H}^n}, \quad \|\partial\log\psi\|^2_{\omega_{\mathbb{H}^n}} = n+1.$$

Let

$$W := \sqrt{-1}\psi^{\frac{-n}{n+1}}\mathrm{grad}(\psi)$$

它是定义在 $\mathbb{H}^n$ 上的处处不为零的全纯完备向量场，见 [CL21，定理 3。2] 满足 (Re W) log $\psi \equiv 0$。

通过复合 $\mathbb{H}^n$ 在 (0, . . . , 0, 1) 处的一个各向同性变换，我们可以假设 W 在无穷远点处消失，即 $\mathcal{F}_*W$ 在 (0, . . . , 0, 1) $\in \partial\mathbb{B}^n$ 处消失。由于 $\mathbb{H}^n$ 的自同构群的李代数，也就是 $\mathbb{H}^n$ 上完全全纯向量场的集合，同构于 $\mathfrak{su}(n, 1)$，其维数为 n^2+2n。因此，它由对应于 $\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1) \times \mathfrak{u}(\mathfrak{n}))$ 以及 $\mathcal{D}, \mathcal{T}^1, \mathcal{T}^{2,\ k}, \mathcal{T}^{3,\ k}$ 的全纯向量场生成，其中 $k = 1, \ldots, n-1$。然而，在无穷远点处消失的完全全纯向量场为 $D, T, T^{2,\ k}, T^{3,\ k}, U^{ij}$，并且 V^{ij}, W 有一个分解

$$W = aD + bT + \sum_{k=1}^{n-1} c_k T^{2,k} + \sum_{k=1}^{n-1} d_k T^{3,k} + \sum_{1\le i<j\le n-1} e_{ij}U^{ij} + \sum_{1\le i<j\le n-1} f_{ij}V^{ij} + \sum_{k=1}^{n-1} g_k W^k$$

其中 a、b、c_k、d_k、e_{ij}、f_{ij}、$g_k \in \mathbb{R}$。注意，根据引理3，$b \neq 0$ 或 $\sum_{k=1}^{n-1} c_k \neq 0$ 或 $\sum_{k=1}^{n-1} d_k \neq 0$。 5.

步骤1：由（3.8）可得

$$\left(\mathcal{S}^{1,n-1}\mathcal{S}^{1,n-2}\cdots\mathcal{S}^{1,2}\right)_* W = aD + bT + cT^{2,1} + dT^{3,1} + \sum_{j=2}^{n-1} e_j U^{1j} + \sum_{j=2}^{n-1} f_j V^{1j} + gW^1$$

其中 $c := \sum_{k=1}^{n-1} c_k$, $d := \sum_{k=1}^{n-1} d_k$, $e_j := -\sum_{i=1}^{j-1} e_{ij}$, $f_j := \sum_{i=1}^{j-1} f_{ij}$ and $g := \sum_{k=1}^{n-1} g_k$。对于 $\mathcal{T} := \mathcal{T}^{3,s_3}_{\ \ \ \ n-1,n-1}\cdots\mathcal{T}^{3,s_3}_{\ \ \ \ 1,1}\mathcal{T}^{2,s_2}_{\ \ \ \ n-1,n-1}\cdots\mathcal{T}^{2,s_2}_{\ \ \ \ 1,1}\mathcal{T}_{s_1}$，由 (3.5)、(3.6)、(3.7) 可得

$$\mathcal{T}_*D = D + \left(2\sum_{j=1}^{n} s_{2,j}s_{3,j} - 2s_1\right)T - \sum_{j=1}^{n} s_{3,j}T^{3,j} - \sum_{j=1}^{n} s_{2,j}T^{2,j},$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_*T &= T,\\
\mathcal{T}_*T^{2,1} &= T^{2,1} - 2s_{3,1}T,\\
\mathcal{T}_*T^{3,1} &= T^{3,1} + 2s_{2,1}T,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_*U^{1j} &= U^{1j} + 2(s_{3,1}s_{2,j} - s_{2,1}s_{3,j})T - s_{3,j}T^{3,1} - s_{2,j}T^{2,1} + s_{3,1}T^{3,j} + s_{2,1}T^{2,j},\\
\mathcal{T}_*V^{1j} &= V^{1j} - 2(s_{3,1}s_{3,j} + s_{2,1}s_{2,j})T + s_{3,j}T^{2,1} - s_{2,j}T^{3,1} + s_{3,1}T^{2,j} - s_{2,1}T^{3,j},
\end{aligned}$$

and

$$\mathcal{T}_*W^1 = W^1 + s_{3,1}T^{2,1} - s_{2,1}T^{3,1} - (s^2_{3,1} + s^2_{2,1})T.$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathcal{T}\mathcal{S}^{1,n-1}\mathcal{S}^{1,n-2}\cdots\mathcal{S}^{1,2}\right)_* W \\
&= aD + \left(2a\sum_{j=1}^{n} s_{2,j}s_{3,j} - 2as_1 + b - 2cs_{3,1} + 2ds_{2,1} \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{j=2}^{n-1} 2e_j(s_{3,1}s_{2,j} - s_{2,1}s_{3,j}) - \sum_{j=2}^{n-1} 2f_j(s_{3,1}s_{3,j} + s_{2,1}s_{2,j}) - (s_{3,1}^2 + s_{2,1}^2)g \right) T \\
&+ \left(-as_{2,1} + c - \sum_{j=2}^{n-1} e_j s_{2,j} + \sum_{j=2}^{n-1} f_j s_{3,j} + gs_{3,1} \right) T^{2,1} \\
&+ \left(-as_{3,1} + d - \sum_{j=2}^{n-1} e_j s_{3,j} - \sum_{j=2}^{n-1} f_j s_{2,j} - s_{2,1}g \right) T^{3,1} \\
&+ \sum_{j=2}^{n-1}(-as_{2,j} + s_{2,1}e_j + s_{3,1}f_j)T^{2,j} + \sum_{j=2}^{n-1}(-as_{3,j} + s_{3,1}e_j - s_{2,1}f_j)T^{3,j} \\
&+ \sum_{j=2}^{n-1} e_j U^{1j} + \sum_{j=2}^{n-1} f_j V^{1j} + gW^1.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

考虑以下线性方程组:

$$
\begin{aligned}
&-as_{2,1} + c - \sum_{j=2}^{n-1} e_j s_{2,j} + \sum_{j=2}^{n-1} f_j s_{3,j} + gs_{3,1} = 0, \\
&-as_{3,1} + d - \sum_{j=2}^{n-1} e_j s_{3,j} - \sum_{j=2}^{n-1} f_j s_{2,j} - s_{2,1}g = 0, \\
&-as_{2,j} + s_{2,1}e_j + s_{3,1}f_j = 0, \quad \forall j = 2,\dots,n-1 \\
&-as_{3,j} + s_{3,1}e_j - s_{2,1}f_j = 0, \quad \forall j = 2,\dots,n-1
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

这使得方程 (4.1) 不含有 $T^{2,\,j}, T^{3,\,j}, j = 1,\dots,n-1$ 因子。这个线性方程组等价于

$$
\left(\begin{array}{cc|cc|c|cc}
a & -g & e_2 & -f_2 & \cdots & e_{n-1} & -f_{n-1} \\
g & a & f_2 & e_2 & \cdots & f_{n-1} & e_{n-1} \\
\hline
-e_2 & -f_2 & a & 0 & & & \\
f_2 & -e_2 & 0 & a & & & \\
\hline
\vdots & \vdots & & & \ddots & & \\
\hline
-e_{n-1} & -f_{n-1} & & & & a & 0 \\
f_{n-2} & -e_{n-2} & & & & 0 & a
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c} s_{2,1} \\ s_{3,1} \\ s_{2,2} \\ s_{3,2} \\ \vdots \\ s_{2,n-1} \\ s_{3,n-1} \end{array}\right)
=
\left(\begin{array}{c} c \\ d \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array}\right).
\tag{4.3}
$$

由于 $a \neq 0$ 意味着 (4.3) 中左侧矩阵的行列式非零，因此存在$s_{2,\,\ell}$ 和$s_{3,\,\ell}$ 满足方程 (4.3)。此外，我们可以选择 s_1，使方程 (4.1) 不含 T 因子。取这样的 $s_{2,\,\ell}$, $s_{3,\,\ell}$ 和 s_1，对于

$$
\widetilde{W} := \left(\mathcal{T}_{s_{3,n-1}}^{3,n-1}\cdots\mathcal{T}_{s_{3,1}}^{3,1}\mathcal{T}_{s_{2,n-1}}^{2,n-1}\cdots\mathcal{T}_{s_{2,1}}^{2,1}\mathcal{T}_{s_1}\mathcal{S}^{1,n-1}\mathcal{S}^{1,n-2}\cdots\mathcal{S}^{1,2}\right)_* W
$$

and

$$
\widetilde{\varphi} := \varphi \circ \left(\mathcal{T}_{s_{3,n-1}}^{3,n-1}\cdots\mathcal{T}_{s_{3,1}}^{3,1}\mathcal{T}_{s_{2,n-1}}^{2,n-1}\cdots\mathcal{T}_{s_{2,1}}^{2,1}\mathcal{T}_{s_1}\mathcal{S}^{1,n-1}\mathcal{S}^{1,n-2}\cdots\mathcal{S}^{1,2}\right)
$$

我们得到

$$\widetilde{W}\log\widetilde{\psi}=\left(aD-\sum_{j=2}^{n-1}e_jU^{1j}+\sum_{j=2}^{n-1}f_jV^{1j}+gW^1\right)\log\widetilde{\psi}.$$

~ ~ ~ ~由引理（3.5），由于 $0=(\mathrm{Re}\ W)\log\ \psi=a(\mathrm{Re}\ D)\log\ \psi=(n+1)a\log\ \psi$，我们得到 $a=0$。

步骤 2：由于 $a=0$，我们有

$$\left(\mathcal{S}^{1,n-1}\mathcal{S}^{1,n-2}\cdots\mathcal{S}^{1,2}\right)_*W=bT+cT^{2,1}+dT^{3,1}+\sum_{j=2}^{n-1}e_jU^{1j}+\sum_{j=1}^{n-1}f_jV^{1j}+gW^1.$$

若 c 和 d 均为零，则由引理 3.6 可完成证明。

现在假设 c 或 d 非零。此外，若 b 非正，则通过乘以 -1，我们可以假设 $b\geq 0$。由 (4.1) 可得

$$\begin{aligned}
&\left(\mathcal{TS}^{1,n-1}\mathcal{S}^{1,n-2}\cdots\mathcal{S}^{1,2}\right)_*W\\
&=\left(b-2cs_{3,1}+2ds_{2,1}+\sum_{j=2}^{n-1}2e_j(s_{3,1}s_{2,j}-s_{2,1}s_{3,j})-\sum_{j=2}^{n-1}2f_j(s_{3,1}s_{3,j}+s_{2,1}s_{2,j})-(s_{3,1}^2+s_{2,1}^2)g\right)T\\
&+\left(c-\sum_{j=2}^{n-1}e_js_{2,j}+\sum_{j=2}^{n-1}f_js_{3,j}+gs_{3,1}\right)T^{2,1}+\left(d-\sum_{j=2}^{n-1}e_js_{3,j}-\sum_{j=2}^{n-1}f_js_{2,j}-s_{2,1}g\right)T^{3,1}\\
&+\sum_{j=2}^{n-1}(s_{2,1}e_j+s_{3,1}f_j)T^{2,j}+\sum_{j=2}^{n-1}(s_{3,1}e_j-s_{2,1}f_j)T^{3,j}+\sum_{j=2}^{n-1}e_jU^{1j}+\sum_{j=2}^{n-1}f_jV^{1j}+gW^1.
\end{aligned}$$

若对所有 j和 $g\neq 0$，均有 $e_j=f_j=0$。那么，取 $s_{3,\ 1}=-\frac{c}{g}$和 $s_{2,\ 1}=\frac{d}{g}$，

$$\left(\mathcal{TS}^{1,n-1}\mathcal{S}^{1,n-2}\cdots\mathcal{S}^{1,2}\right)_*W=\left(b+\frac{c^2+d^2}{g}\right)T+gW^1$$

对于某个 $\alpha\in\mathbb{R}$，由引理 3.6 可知，证明完成。

若对所有 j 和 $g=0$，$e_j=f_j=0$。那么选取 $s_{3,1}, s_{2,1}$，使得 $b-2cs_{3,1}+2ds_{2,1}=0$，我们得到

$$\left(\mathcal{TS}^{1,n-1}\mathcal{S}^{1,n-2}\cdots\mathcal{S}^{1,2}\right)_*W=cT^{2,1}+dT^{3,1}.$$

Let

$$\widetilde{W}:=\left(\mathcal{T}^{3,n-1}_{s_{3,n-1}}\cdots\mathcal{T}^{3,1}_{s_{3,1}}\mathcal{T}^{2,n-1}_{s_{2,n-1}}\cdots\mathcal{T}^{2,1}_{s_{2,1}}\mathcal{S}^{1,n-1}\mathcal{S}^{1,n-2}\cdots\mathcal{S}^{1,2}\right)_*W$$

and

$$\widetilde{\psi}:=\psi\circ\left(\mathcal{T}^{3,n-1}_{s_{3,n-1}}\cdots\mathcal{T}^{3,1}_{s_{3,1}}\mathcal{T}^{2,n-1}_{s_{2,n-1}}\cdots\mathcal{T}^{2,1}_{s_{2,1}}\mathcal{S}^{1,n-1}\mathcal{S}^{1,n-2}\cdots\mathcal{S}^{1,2}\right).$$

于是得到

$$\widetilde{W}=2Aw_1\frac{\partial}{\partial w_n}+\overline{A}\frac{\partial}{\partial w_1}$$

对于 $A=c-\sqrt{-1}d$。我们注意到 A 非零。设 f 是一个全纯函数，使得˜ − ~ ~
$\log\ \psi=\log\psi_0+f+f$。根据关系式 $0=(\mathrm{Re}\ W)\log\ \psi$，我们得到

$$2Aw_1\frac{\partial f}{\partial w_n}+\overline{A}\frac{\partial f}{\partial w_1}=0 \tag{4.4}$$

因此

$$\frac{\partial f}{\partial w_1}(0,w_2,\ldots,w_n)=0. \tag{4.5}$$

对 $\frac{\partial}{\partial w_1}$ 求 (4.4) 的导数，得到

$$2A\frac{\partial f}{\partial w_n}+2Aw_1\frac{\partial^2 f}{\partial w_1\partial w_n}+\overline{A}\frac{\partial^2 f}{\partial w_1^2}=0. \tag{4.6}$$

对 (3.9) 关于 $\frac{\partial^2}{\partial w_1\partial\overline{w}_1}$ 求导，得到

$$0=\sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial w_1\partial w_j}\right|^2+\mathrm{Re}\left(\frac{\partial^2\overline{f}}{\partial\overline{w}_1\partial\overline{w}_n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\frac{\partial f}{\partial w_j}w_j\right)\right)+4\mathrm{Re}w_n\left|\frac{\partial^2 f}{\partial w_1\partial w_n}\right|^2. \tag{4.7}$$

在任意点 $(0,0,\ldots,0,w_n)\in\mathbb{H}^n$ 处，由 (4.5) 和 (4.7) 得到

$$0=\sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial w_1\partial w_j}\right|^2+4\mathrm{Re}\,w_n\left|\frac{\partial^2 f}{\partial w_1\partial w_n}\right|^2.$$

特别地，得到

$$\frac{\partial^2 f}{\partial w_1^2}(0,\ldots,0,w_n)=0.$$

由 (4.6)

$$\frac{\partial f}{\partial w_n}(0,\ldots,0,w_n)=0 \tag{4.8}$$

对任意 w_n，其中 $\mathrm{Re}\,w_n>0$，因此由引理3，4 f 是常数。证明至此完成。若 $e_j\neq 0$ 或 $f_j\neq 0$ 对某个 j 成立，则令 $s_{2,\,1}=s_{3,\,1}=0$, $s_{2,\,\ell}=0$, $s_{3,\,\ell}=0$ 对于 $\ell\neq j$，并且

$$s_{2,j}=\frac{e_jc+f_jd}{e_j^2+f_j^2},\quad s_{2,j}=\frac{-f_jc+e_jd}{e_j^2+f_j^2}$$

因此 $c=\sum_{j=2}^{n-1}e_js_{2,\,j}+\sum_{j=2}^{n-1}f_js_{3,\,j}$ 以及 $d=\sum_{j=2}^{n-1}e_js_{3,\,j}+\sum_{j=2}^{n-1}f_js_{2,\,j}$。由此

$$\left(\mathcal{T}\mathcal{S}^{1,n-1}\mathcal{S}^{1,n-2}\cdots\mathcal{S}^{1,2}\right)_*W=bT+\sum_{j=2}^{n-1}e_jU^{1j}+\sum_{j=2}^{n-1}f_jV^{1j}+gW^1. \tag{4.9}$$

根据引理 3.6，证明完成。 □

5. Lie algebra structure of $\mathbb{H}^n$

在[KMO70] 中，Kaup–Matsushima–Ochiai 研究了第二类齐性 Siegel 域的李代数结构。本节的目标是求出李代数$\mathfrak{aut}(\mathbb{H}^n$相对于 Kaup–Matsushima–Ochiai 在其著作中所描述的分解的基。

对于一个 域 Ω 属于 $\mathbb{C}^n$，记 Aff(Ω) 为 Ω 的仿射变换群，即。 e.

$$\mathrm{Aff}(\Omega)=\{f:f(z)=Az+b,A\in GL(n,\mathbb{C}),b\in\mathbb{C}^n,f(\Omega)=\Omega\}$$

并将其李代数记为 $\mathfrak{aff}(\Omega)$，它与 Ω 上完全全纯向量场的集合同构。

根据 [KMO70，定理 4] 李代数 $\mathfrak{aut}(\mathbb{H}^n)$ $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}^n)$ 有如下分解

$$\mathfrak{aut}(\mathbb{H}^n)=\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_{-1/2}\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_{1/2}\oplus\mathfrak{g}_1$$

其中 $\mathfrak{g}_a=\{V\in\mathfrak{aut}(\mathbb{H}^n):[D,V]=aV\}$。于是我们有

$$T\in\mathfrak{g}_{-1},\quad T^{2,k},T^{3,k}\in\mathfrak{g}_{-1/2},\quad D,U^{ij},V^{ij},W^k\in\mathfrak{g}_0.$$

考虑在 $(0,\dots,0,1)$ 处的 $\mathbb{H}^n$ 上的对合自同构 σ，即它满足 $\sigma\circ\sigma=\mathrm{Id}_{\mathbb{H}^n}$，且 $\sigma(0,\dots,0,1)=(0,\dots,0,1)$，其定义如下:

$$\sigma(w)=\mathcal{C}(-\mathcal{F}(w))=\left(-\frac{w_1}{w_n},\dots,-\frac{w_{n-1}}{w_n},\frac{1}{w_n}\right).$$

经过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned}\sigma_*\left(\frac{\partial}{\partial w_k}\right)&=-w_n\frac{\partial}{\partial w_k},\quad 1\le k\le n-1\\ \sigma_*\left(\frac{\partial}{\partial w_n}\right)&=-\sum_{j=1}^{n-1}w_nw_j\frac{\partial}{\partial w_j}-w_n^2\frac{\partial}{\partial w_n}=-w_n\left(D-w_n\frac{\partial}{\partial w_n}\right).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\widetilde{T}&:=\sigma_*(T)=-2\sqrt{-1}w_n\left(D-w_n\frac{\partial}{\partial w_n}\right)\\ \widetilde{T}^{2,k}&:=\sigma_*(T^{2,k})=2w_k\left(D-w_n\frac{\partial}{\partial w_n}\right)-w_n\frac{\partial}{\partial w_k}\\ \widetilde{T}^{3,k}&:=\sigma_*(T^{3,k})=-2\sqrt{-1}w_k\left(D-w_n\frac{\partial}{\partial w_n}\right)-\sqrt{-1}w_n\frac{\partial}{\partial w_k}.\end{aligned}$$

由于

$$\left[D,D-w_n\frac{\partial}{\partial w_n}\right]=-\left[D,w_n\frac{\partial}{\partial w_n}\right]=0,$$

我们有

$$\begin{aligned}[D,\widetilde{T}]&=-2\sqrt{-1}(Dw_n)\left(D-w_n\frac{\partial}{\partial w_n}\right)=-4\sqrt{-1}w_n\left(D-w_n\frac{\partial}{\partial w_n}\right)=2\widetilde{T},\\ [D,\widetilde{T}^{2,k}]&=2(Dw_k)\left(D-w_n\frac{\partial}{\partial w_n}\right)-\left[D,w_n\frac{\partial}{\partial w_k}\right]\\ &=2w_k\left(D-w_n\frac{\partial}{\partial w_n}\right)-w_n\frac{\partial}{\partial w_k}=\widetilde{T}^{2,k},\\ [D,\widetilde{T}^{3,k}]&=-2\sqrt{-1}(Dw_k)\left(D-w_n\frac{\partial}{\partial w_n}\right)-\sqrt{-1}\left[D,w_n\frac{\partial}{\partial w_k}\right]\\ &=-2\sqrt{-1}w_k\left(D-w_n\frac{\partial}{\partial w_n}\right)-\sqrt{-1}w_n\frac{\partial}{\partial w_k}=\widetilde{T}^{3,k}.\end{aligned}$$

因此

$$\widetilde{T}\in\mathfrak{g}_1\quad\text{ and }\quad\widetilde{T}^{2,k},\widetilde{T}^{3,k}\in\mathfrak{g}_{1/2}\,.$$

命题 5.1. (1) $\mathfrak{g}_{-1}=\langle T\rangle$, $\mathfrak{g}_{-1/2}=\left\langle T^{2,k},T^{3,k}\right\rangle$, $\mathfrak{g}_0=\left\langle D,U^{ij},V^{ij},W^k\right\rangle$,
$\mathfrak{g}_{1/2}=\left\langle\quad\widetilde{T}^{2,k},\ \widetilde{T}^{3,k}\right\rangle$，$\mathfrak{g}_1=\left\langle\widetilde{T}\right\rangle$,

(2) 对于 $V\in\mathfrak{aut}(\mathbb{H}^n)$，$V\in\mathfrak{aff}(\mathbb{H}^n)$ 当且仅当 $(\mathrm{Re}\ V)\log\ \varphi_0\equiv c$。

证明。对于 (1)，我们指出，向量 $T, D, T^{2,k}, T^{3,k}, U^{ij}, V^{ij}, W^k, \widetilde{T}, \widetilde{T}^{2,k}$和 $\widetilde{T}^{3,k}\mathrm{with}k=1,\dots,n-1$, $1\le i<j\le n-1$ 线性无关，且这些向量场的数量为 n^2+2n。由于 $\dim_{\mathbb{R}}\dim\mathrm{Aut}(\mathbb{H}^n)=n^2+2n$，证明得证。

为证明 (2)，定义 $\rho_0(w):=\mathrm{Re}\,w_n-|w'|^2$。由于

$$\left(D-w_n\frac{\partial}{\partial w_n}\right)\rho_0=w_n-|w'|^2-\frac{w_n}{2}=\frac{w_n}{2}-|w'|^2,$$

我们得到

$$\begin{aligned}(\mathrm{Re}\,\widetilde{T})\rho_0 &= -2\sqrt{-1}w_n\left(\frac{w_n}{2}-|w'|^2\right)+2\sqrt{-1}\bar{w}_n\left(\frac{\overline{w}_n}{2}-|w'|^2\right)\\ &= -\sqrt{-1}(w_n^2-\bar{w}_n^2)+2\sqrt{-1}(w_n-\bar{w}_n)|w'|^2=-2\sqrt{-1}(w_n-\bar{w}_n)\rho_0,\\ (\mathrm{Re}\,\widetilde{T}^{2,k})\rho_0 &= 2w_k\left(\frac{w_n}{2}-|w'|^2\right)+w_n\bar{w}_k+2\bar{w}_k\left(\frac{\bar{w}_n}{2}-|w'|^2\right)+\bar{w}_nw_k\\ &= (w_k+\bar{w}_k)(w_n+\bar{w}_n)-2(w_k+\bar{w}_k)|w'|^2=2(w_k+\bar{w}_k)\rho_0,\\ (\mathrm{Re}\,\widetilde{T}^{3,k})\rho_0 &= -2\sqrt{-1}w_k\left(\frac{w_n}{2}-|w'|^2\right)+\sqrt{-1}w_n\bar{w}_k+2\sqrt{-1}\bar{w}_k\left(\frac{\bar{w}_n}{2}-|w'|^2\right)-\sqrt{-1}\bar{w}_nw_k\\ &= -\sqrt{-1}(w_k-\bar{w}_k)(w_n+\bar{w}_n)+2\sqrt{-1}(w_k-\bar{w}_k)|w'|^2=-2\sqrt{-1}(w_k-\bar{w}_k)\rho_0.\end{aligned}$$

由于 $\log\ \psi_0 = -(n+1)\log\ \rho_0$，我们有

$$X\log\psi_0=-(n+1)\frac{X\rho_0}{\rho_0}$$

对于 $\mathbb{H}^n$ 上任意实切向量场 X，因此

$$\begin{aligned}(\mathrm{Re}\,\widetilde{T})\log\psi_0 &= 2(n+1)\sqrt{-1}(w_n-\bar{w}_n)=-4(n+1)\mathrm{Im}\,w_n,\\ (\mathrm{Re}\,\widetilde{T}^{2,k})\log\psi_0 &= -2(n+1)(w_k+\bar{w}_k)=-4(n+1)\mathrm{Re}\,w_k,\\ (\mathrm{Re}\,\widetilde{T}^{3,k})\log\psi_0 &= -2\sqrt{-1}(n+1)(w_k-\bar{w}_k)=(n+1)\mathrm{Im}\,w_k.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

6. Proofs of Theorem 1.3 and Theorem 1.4

定理 1.3 的证明。设 $F:=G\circ\mathcal{F}\colon\ \mathbb{H}^n\to\Omega$ 为一个双全纯映射，且 $\omega_\Omega=(g_{i\bar{j}})$ 为 Ω 上伯格曼度量的 K¨ahler 形式。我们不妨假设 $(0,\dots,0,1)\in\Omega$ 且 $dF(0)=I_n$。令

$$I_{1,2}:=\begin{pmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&1&\\&&&2\end{pmatrix}.$$

设 $\varphi:=K_\Omega$ 为 Ω 的伯格曼核。由于 Ω 是齐性的，根据自同构作用下伯格曼核的变换公式，我们有

$$K_\Omega(z,z)=c\det(g_{i\bar{j}}(z))$$

对于某个常数 c。这意味着 ω_Ω 是 K¨ahler–Einstein，且 $\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log\varphi=\omega_\Omega$。由于 Ω 是仿射齐性的，因此 $\|\partial\log\varphi\|^2_{\omega_\Omega}$ 是一个常数。令 $\widetilde{\varphi}:=\varphi\circ F$。那么，对于某个常数 C，有 $\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log\widetilde{\varphi}=\omega_{\mathbb{H}^n}$ 以及 $\|\partial\log\widetilde{\varphi}\|^2_{\omega_{\mathbb{H}^n}}\equiv C$。根据推论 1.2，若我们将 $\mathbb{H}^n$ 在 $(0,\dots,0,1)$ 处的一个各向同性变换复合进去，则有 $\widetilde{\varphi}=\psi_0$ 和 $C=n+1$。

若 $V\in\mathfrak{aff}(\Omega)$，则对于某个常数 c，$\mathrm{Re}\,V\log\varphi\equiv c$。因此，命题 1 (2) 意味着 $V\in F_*\mathfrak{aff}(\mathbb{H}^n)$，即

$$\mathfrak{aff}(\Omega)\subset F_*\mathfrak{aff}(\mathbb{H}^n).$$

对于 $p=F(p_0)$，其中 $p_0=(0,\dots,0,1)\in\mathbb{H}^n$，仿射齐性意味着

$$T_p\Omega=\{V(p):V\in\mathfrak{aff}(\Omega)\}.$$

由于 $\{D_{p_0},T_{p_0},T^{2,k}_{p_0},T^{3,k}_{p_0},k=1,\dots,n-1\}$ 是 $T_{p_0}\mathbb{H}^n$ 的基，且对于 $\mathbb{H}^n$的所有酉向量场 U，U_{p_0} 均为零，因此我们得到

$$\widehat{T},\widehat{T}^{2,k},\widehat{T}^{3,k},\widehat{D}\in\mathfrak{aff}(\Omega)$$

其中 $\widehat{T}:=F_*T$, $\widehat{T}^{2,k}:=F_*T^{2,k}$, $\widehat{T}^{3,k}:=F_*T^{3,k}$ 以及 $\widehat{D}:=F_*D$。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$现在将 T 和 D 写作

$$\widehat{T}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}w_j+b_i\right)\frac{\partial}{\partial w_i},\quad \widehat{D}=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\ell=1}^{n}A_{k\ell}w_\ell+B_k\right)\frac{\partial}{\partial w_k}$$

其中常数为 $a_{ij},b_i,A_{k\ell},B_k\in\mathbb{C}$。记 $a=(a_{ij})$、$b=(b_i)$、$A=(A_{k\ell})$ 和 $B=(B_k)$ 分别为对应于 a_{ij}、b_i、$A_{k\ell}$ 和 B_k 的矩阵。令 JF 表示 F 的雅可比矩阵。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$由 $F_*T=T$ 和 $F_*D=D$, 可得

$$\begin{aligned}2\sqrt{-1}\frac{\partial F_i}{\partial z_n}&=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}F_j+b_i,\\ 2z_n\frac{\partial F_i}{\partial z_n}+\sum_{\ell=1}^{n-1}z_\ell\frac{\partial F_i}{\partial z_\ell}&=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}F_j+B_i\end{aligned}\tag{6.1}$$

对任意 $i=1$、.....、n。将这些方程对 $\frac{\partial}{\partial z_k}$ 求导，其中 $k=1$、.....、n，可得

$$\begin{aligned}&2\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial z_n}\frac{\partial F_i}{\partial z_k}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial F_j}{\partial z_k},\\ &2z_n\frac{\partial}{\partial z_n}\frac{\partial F_i}{\partial z_k}+\frac{\partial F_i}{\partial z_k}+\sum_{\ell=1}^{n-1}z_\ell\frac{\partial^2F_i}{\partial z_k\partial z_\ell}=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial F_j}{\partial z_k},\quad \forall k=1,\dots,n-1,\\ &2z_n\frac{\partial}{\partial z_n}\frac{\partial F_i}{\partial z_n}+2\frac{\partial F_i}{\partial z_n}+\sum_{\ell=1}^{n-1}z_\ell\frac{\partial^2F_i}{\partial z_n\partial z_\ell}=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial F_j}{\partial z_n}.\end{aligned}\tag{6.2}$$

在 $(0,\dots,0,z_n)$ 处，写成矩阵形式可得

$$\begin{aligned}2\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial z_n}JF&=aJF,\\ 2z_n\frac{\partial}{\partial z_n}JF+I_{1,2}JF&=AJF.\end{aligned}$$

这意味着

$$-\sqrt{-1}z_naJF+I_{1,2}JF=AJF$$

因此

$$-\sqrt{-1}z_na+I_{1,2}=A.$$

令 $z_n\to 0$，我们得到 $A=I_{1,\,2}$因此 $a=0$。由 $F(0,\dots,0,1)=(0,\dots,0,1)$,$dF(0)=I_n$ 以及 (6.1),

$$\widehat{T}=T,\quad \widehat{D}=D.$$

这意味着

$$\frac{\partial F_i}{\partial z_n}=\delta_{in}\tag{6.3}$$

由 (6.2) 可得

$$\sum_{\ell=1}^{n-1}z_\ell\frac{\partial^2F_i}{\partial z_\ell\partial z_k}=0.$$

现在固定 z_n，并将 $\frac{\partial F_i}{\partial z_k}$ 表示为关于 z_1、.....、z_{n-1} 的 j 次齐次多项式 P_j：

$$\frac{\partial F_i}{\partial z_k}=\sum_{j=0}^{\infty}P_j(z_1,\dots z_{n-1}).\tag{6.4}$$

那么，由于

$$0=\sum_{\ell=1}^{n-1} z_\ell \frac{\partial^2 F_i}{\partial z_\ell \partial z_k}=\sum_{j=1}^{\infty} jP_j(z_1,\dots,z_{n-1}), \tag{6.5}$$

我们得到 $P_j\equiv 0$，对任意 $j=1$、2、.....。这意味着

$$\frac{\partial F_i}{\partial z_k}=\eta(z_n)$$

对于某个函数 η。由于根据 (6.3)

$$0=\frac{\partial^2 F_i}{\partial z_k \partial z_n}=\frac{\partial \eta}{\partial z_n}, \tag{6.6}$$

η 是常数。因此， $\frac{\partial F_i}{\partial z_k}$ 是一个常数 δ_{ik}。结合 (6.3)，我们得到 $F=id$。由此可得 $G=\mathcal{C}$和 $\Omega=\mathbb{H}^n$。

□

定理 1.4 的证明。设 $G\colon \mathbb{B}^n\to D$ 是一个双全纯映射。值得强调的是，由于 ω_D 是伯格曼度量 $\omega_{\mathbb{B}^n}$ 在 $\mathbb{B}^n$上的拉回， G 相对于 $\omega_{\mathbb{B}^n}$和 ω_D是一个等距变换。因此我们得到

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\bar\beta}\circ G\frac{\partial G_\ell}{\partial z_\alpha}\frac{\partial \overline{G}_m}{\partial \overline{z}_\beta}=\frac{\partial^2}{\partial z_\ell \partial \overline{z}_m}\log K_{\mathbb{B}^n}(z,z)$$

其中 $K_{\mathbb{B}^n}$ 表示 $\mathbb{B}^n$的伯格曼核。对等式两边取行列式，可得

$$\det g_{\alpha\overline{\beta}}\circ G|\det dG|^2=\det(g^{\mathbb{B}^n}_{\alpha\bar\beta})=K_{\mathbb{B}^n}(z,z)=\frac{C_1}{(1-|z|^2)^{n+1}} \tag{6.7}$$

¯其中 C_1为某个常数。由于 ω_D是 K¨ahler–Einstein 度量，因此有 $\partial\partial$log det$(g_{\alpha\bar\beta})=\omega_D$。不失一般性，我们可以假设 (0, . . . ,0, 1) $\in D$ 且 G(0) =(0, . . . , 0, 1)。

由于 $\|\partial$log det$(g_{\alpha\bar\beta})\|^2_{\omega_D}\equiv C_2$，其中 C_2为某个常数，因此有

$$\|\partial\left(\log\det(g_{\alpha\bar\beta})\circ G\right)\|^2_{\omega_{\mathbb{B}^n}}\equiv C_2 \quad \text{and} \quad \sqrt{-1}\partial\bar\partial\left(\log\det(g_{\alpha\bar\beta})\circ G\right)=\omega_{\mathbb{B}^n}.$$

定义 φ:=det$(g_{\alpha\bar\beta})\circ G$。由定理 3.3 可得 $C_2=n+1$，由推论 1.2 可得

$$\det(g_{\alpha\bar\beta})\circ G=C_3\frac{|1-z_n|^{2(n+1)}}{(1-|z|^2)^{n+1}}$$

其中 $C_3\in\mathbb{R}$ 为某个常数，这是通过在 0 处对 $\mathbb{B}^n$ 施加一个各向同性变换得到的。因此，由 (6.7) 可得

$$|\det dG|^2=C_4|1-z_n|^{-2(n+1)}$$

其中 C_4 为某个常数，因此有

$$\det dG=C_5(1-z_n)^{-(n+1)} \tag{6.8}$$

其中 C_5为某个常数。通过对 $\mathbb{C}^n$作仿射变换，我们可以假设

$$dG(0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 2\end{pmatrix} \tag{6.9}$$

因此 $C_5=2$。

现在假设 G 是一个 M¨obius 变换，即

$$G(z)=\left(\frac{\sum a_{1,j}z_j+a_{1,n+1}}{\sum a_{n+1,j}z_j+a_{n+1,n+1}},\dots,\frac{\sum a_{n,j}z_j+a_{n,n+1}}{\sum a_{n+1,j}z_j+a_{n+1,n+1}}\right).$$

由于 $a_{n+1,\ n+1}\neq 0$，设 $a_{n+1,\ n+1}=1$。由于 $G(0)=(0,\dots,0,1)$，对任意 $j=1,\ \dots,\ n$ 以及 $a_{n,\ n+1}=1$，都有 $a_{j,\ n+1}=0$。由 (6.9)

$$a_{ki}=\delta_{ki}$$

对所有 $k=1,\ \dots,\ n-1,\ \ i=1,\ \dots,\ n$ 都成立。因此，我们有

$$G(z)=\frac{(z_1,\dots,z_{n-1},\sum a_{n,j}z_j+a_{n,n+1})}{\sum a_{n+1,j}z_j+a_{n+1,n+1}}.$$

对于 $\sigma(z)$，有：$=\sum a_{n+1,\ j}z_j+a_{n+1,\ n+1}$

$$\begin{aligned}dG(z)=&\frac{1}{\sigma(z)}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&a_{n,1}\\0&1&\cdots&0&a_{n,2}\\&&&&\\0&\cdots&0&1&a_{n,n-1}\\0&\cdots&&0&a_{n,n}\end{pmatrix}\\&-\frac{1}{\sigma(z)^2}\begin{pmatrix}a_{n+1,1}z_1&a_{n+1,1}z_2&\cdots&a_{n+1,1}z_{n-1}&a_{n+1,1}(\sum a_{n,j}z_j+a_{n,n+1})\\a_{n+1,2}z_1&a_{n+1,2}z_2&\cdots&a_{n+1,2}z_{n-1}&a_{n+1,2}(\sum a_{n,j}z_j+a_{n,n+1})\\&&&&\\a_{n+1,n}z_1&a_{n+1,n}z_2&\cdots&a_{n+1,n}z_{n-1}&a_{n+1,n}(\sum a_{n,j}z_j+a_{n,n+1})\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{6.10}$$

在 $z=(z_1,0,\dots,0)$ 处，我们有

$$dG(z_1,0,\dots,0)=\frac{1}{\sigma^2}\left(\begin{array}{c|ccc|c}\sigma-a_{n+1,1}z_1&0&\dots&0&a_{n,1}\sigma-a_{n+1,1}(a_{n,1}z_1+z_{n,n+1})\\\hline-a_{n+1,2}z_1&\sigma&&&a_{n,2}\sigma-a_{n+1,2}(a_{n,1}z_1+z_{n,n+1})\\&&\ddots&&\\-a_{n+1,n-1}z_1&&&\sigma&a_{n,n-1}\sigma-a_{n+1,n-1}(a_{n,1}z_1+z_{n,n+1})\\\hline-a_{n+1,n}z_1&0&\dots&0&a_{n,n}\sigma-a_{n+1,n}(a_{n,1}z_1+z_{n,n+1}),\end{array}\right)$$

当 $\sigma:=a_{n+1,\ 1}z_1+a_{n+1,\ n+1}$ 时，由 (6.8) 可得

$$\begin{aligned}2\sigma^{n+2}=&a_{n+1,n+1}\left(\sigma a_{n,n}-a_{n+1,n}(a_{n,1}z_1+a_{n,n+1})\right)\\&+a_{n+1,n}z_1(a_{n,1}a_{n+1,n+1}-a_{n+1,1}a_{n,n+1}).\end{aligned}$$

这意味着 $a_{n+1,1}=0$。通过类似的论证，对于任意 $j=1,\dots,n-1$，我们有 $a_{n+1,j}=0$。由 (6.10) 可得

$$dG(z)=\frac{1}{\sigma(z)^2}\left(\begin{array}{ccc|c}\sigma(z)&&&a_{n,1}\sigma(z)\\&\ddots&&\\&&\sigma(z)&a_{n,n-1}\sigma(z)\\\hline-a_{n+1,n}z_1&\cdots&-a_{n+1,n}z_{n-1}&a_{n,n}\sigma(z)-a_{n+1,n}(\sum a_{n,j}z_j+a_{n,n+1})\end{array}\right).$$

由 (6.9)，对于任意 $j=1,\dots,n-1,\ \ a_{nj}=0$。在 $z=(0,\dots,0,z_n)$ 处，我们有

$$\det dG(z)=\frac{a_{n,n}a_{n+1,n+1}-a_{n+1,n}a_{n,n+1}}{(a_{n+1,n}z_n+a_{n+1,n+1})^{n+1}}=2(1-z_n)^{-1-n}.\tag{6.11}$$

由于 $dG(0)_{nn}=2$，我们有

$$\frac{a_{n,n}a_{n+1,n+1}-a_{n+1,n}a_{n,n+1}}{a_{n+1,n+1}^2}=2.$$

因此，由（6.11）可得

$$a_{n+1,n+1}^2(1-z_n)^{n+1}=(a_{n+1,n}z_n+a_{n+1,n+1})^{n+1}$$

这意味着 s $a_{n+1,\ n+1}^{n-1} = 1$ 且 $a_{n+1,\ n+1} = -a_{n+1,\ n}$。通过旋转，可得 $G = \mathcal{C}$.

□

References

[BDET22] Francesco Bei、Simone Diverio、Philippe Eyssidieux 和 Stefano Trapani。弱 K¨ahler 双曲流形与 Green–Griffiths–Lang 猜想，2022 年。[CL21] Young-Jun Choi 和 Kang-Hyurk Lee。通过 K¨ahler–Einstein 度量构造完全全纯向量场的存在性。 *Ann. Global Anal. Geom.*，60(1):97–109，2021 年。[CLS23] Young-Jun Choi、Kang-Hyurk Lee 和 Aeryeong Seo。通过 K¨ahler–Einstein 势刻画单位球。 *J. Geom. Anal.*，33(4):133，2023 年。[CLY20] Young-Jun Choi、Kang-Hyurk Lee 和 Sungmin Yoo。Poincar´e 度量的某个 K¨ahler 势及其刻画。 *J. Korean Math. Soc.*，57(6):1335–1345，2020 年。[Gro91] M. Gromov。K¨ahler 双曲性与 L_2-Hodge 理论。 *J. Differential Geom.*，33(1):263–292，1991 年。[KMO70] Wilhelm Kaup、Yozˆo Matsushima 和 Takushiro Ochiai。关于广义 Siegel 域的自同构与等价。 *Amer. J. Math.*，92:475–498，1970 年。[KO07] Chifune Kai 和 Takeo Ohsawa。关于有界齐性域的伯格曼度量的注记。*Nagoya Math. J.*，186:157–163，2007 年。[Lee21] Kang-Hyurk Lee。研究具有非紧自同构群的伪凸域时的一种势缩放方法。 *J. Math. Anal. Appl.*，499(1):124997, 15，2021 年。[MT92] Ngaiming Mok 和 I Hsun Tsai。秩为 ≥ 2 的不可约有界对称域的凸实现的刚性。 *J. Reine Angew. Math.*，431:91–122，1992 年。

Department of Mathematics and Research Institute of Natural Science, Gyeongsang National University, Jinju, Gyeongnam, 52828, The Republic of Korea*Email address*: nyawoo@gnu.ac.kr

Department of Mathematics and RIRCM, Kyungpook National University, 80, Daehak-ro, Buk-gu, Daegu, 41566, Republic of Korea*Email address*: aeryeong.seo@knu.ac.kr