arXiv:2303.10072v1 [math.CA] 16 Mar 2023

海尔斯–乌拉姆稳定性某类离散Hill方程的

DOUGLAS R. ANDERSON 和 Masakazu Onitsuka

摘要。我们建立了具有周期系数的二阶线性Hill型 h-差分方程的海尔斯–乌拉姆稳定性。利用关于任意阶周期系数一阶 h-差分方程（包括齐次和非齐次方程）的结果，我们还建立了一个海尔斯–乌拉姆稳定性常数。文中给出了若干有趣的例子。作为一项有力的应用，我们利用主要结果证明了某种具有一类周期系数的三阶 h-差分方程的海尔斯–乌拉姆稳定性。

1. 文献综述

Ulam稳定性源于Ulam在专著 [24], 中提出的一个问题，Hyers对该问题作了部分解答 [13] ，随后Rassias对其进行了推广 [21]。由此，Ulam稳定性（亦称海尔斯–乌拉姆稳定性或海尔斯–乌拉姆–拉西阿斯稳定性）在微分方程、差分方程（递推关系）、函数方程和算子领域得到了发展；有关这一主题的文献综述，参见Brillouët–Belluot、Brzdęk和Ciepliński [4] ，另见Brzdęk、Popa、Raşa和Xu [5]。若聚焦于离散情形下的Ulam稳定性，可参见Popa [18, 19], ；近期关于时间尺度的研究见András和Mészáros [3] 、Brzdęk和Wójcik [6], 、Hua、Li和Feng[12], 、Jung和Nam [14], 、Nam [15, 16, 17], 、Shen [22, 23], ， 以及Rasouli、Abbaszadeh和Eshaghi[20]。

Fukutaka 和 ONITSUKA [9, 10, 11] 研究了连续区间上具有周期系数的一阶齐次线性微分方程以及某类 Hill微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性最佳常数，从而促使人们探索差分方程中的Hill型方程。另请参阅 C˘adariu、Popa 和 Raşa [7], 以及 Dragičević [8]的相关论文。具体而言，Fukutaka 和 ONITSUKA [9, 10, 11] 考虑了二阶方程$y'' = a(t)y$ 及其相关的 Hyers-Ulam 稳定性，其中变系数函数具有如下形式 $a(t) = \lambda^2(t) - \lambda'(t)$，其中 λ是周期为 $\omega > 0$的连续可微周期函数。他们的主要结果之一是，Hill方程

$$y'' = \Big(\lambda^2(t) - \lambda'(t)\Big)y \tag{1.1}$$

2020 数学主题分类。39A10, 34N05, 39A23, 39A45。关键词和短语。稳定性；周期的； h-差分方程；恒定步长；Hill 方程。

当且仅当 $\int_0^\omega \lambda(t)dt \neq 0$时具有 Hyers-Ulam 稳定性（HUS）。若 $\int_0^\omega \lambda(t)dt > 0$，则

$$K^* := \max_{t\in(0,\omega]} \left[e^{-\int_0^t \lambda(s)ds} \int_{-\infty}^{t} \left(e^{2\int_0^s \lambda(u)du} \int_s^\infty e^{-\int_0^u \lambda(v)dv} du \right) ds \right]$$

是式 (1.1) 的最小（最佳）Hyers-Ulam常数。Dragičević [8] 沿着这一思路，进一步研究了如下形式的相关扰动方程

$$y'' = b(t)y' + \Big(\lambda^2(t) - \lambda'(t) + c(t)\Big)y + f(t, y, y'), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

总的来说，他发现，如果使用上确界范数，且 b 和 c 足够小，那么式 (1.2) 具有 HUS 性质；如果 f关于第二个和第三个变量满足联合 Lipschitz条件，且 Lipschitz 常数足够小，那么 $\int_0^\omega \lambda(t)dt \neq 0$。至于这一背景下的离散版本，据我们所知，相关文献尚有空白：目前还没有人研究相应的 Hill 型h-差分方程。下文拟采用如下近似

$$\lambda^2(t) - \lambda'(t) \approx \lambda(t)\lambda(t+h) - \Delta_h\lambda(t), \quad \Delta_h\lambda(t) := \frac{\lambda(t+h) - \lambda(t)}{h}.$$

在这一离散情形下，λ是周期的，即对所有 $t \in \{0, h, 2h, 3h, \ldots\}$，均有 $\lambda(t+\omega) = \lambda(t)$。正如我们将看到的，下文采用的技巧并非对连续情形的简单离散化复述，而是专门针对步长为$h > 0$的离散情形所发展和定制的。

基于上述动机，我们将按如下方式展开。第2节中，我们为两个相关的、系数为周期系数的一阶 h差分方程引入HUS的定义，其中一个是齐次方程，另一个是非齐次方程；并介绍基于其周期值的周期 λ 的一些关键常数。我们对文献中关于系数为周期系数的一阶 h差分方程的Hyers-Ulam稳定性的一项重要既有结果（包括一个Hyers-Ulam稳定性常数）进行了修订，使其适用于这两个相关方程。第3节沿着上述思路引入一种可能的Hill型 h差分方程。本节给出本文的主要结果，即所提出的离散Hill方程在齐次和非齐次二阶情形下满足Hyers-Ulam稳定性的条件，以及相应的Hyers-Ulam稳定性常数。第4节深入探讨两个非平凡例子：一个具有指定的周期为3（3-周期）系数，另一个具有一般的周期为2的系数。我们提供了两者的详细分析，包括HUS常数。第5节利用离散二阶情形中的稳健结果，为某些离散三阶Hill方程推导出全新的结果。据我们所知，连续情形尚无类似结果，这进一步彰显了本文的新颖性。我们还给出一个离散三阶例子，该例子运用并拓展了第4节中的一个例子以及第5节的结果。第6节以简短的结语作结。

2. 一阶周期系数

设 $h > 0$，并定义一致离散集 $\mathcal{H} := \{0, h, 2h, 3h, \ldots\}$。离散指数函数定义为

$$e_\lambda(t) := \prod_{k=0}^{\frac{t-h}{h}} (1 + h\lambda(kh)), \quad \text{where} \quad \prod_{k=0}^{-1} f(k) \equiv 1. \tag{2.1}$$

本节利用任意有限周期的系数函数，研究具有 n 周期（周期为 n）系数的一阶线性齐次差分方程的 Hyers-Ulam 稳定性（定义如下）

$$\Delta_h x(t) - \lambda(t)x(t) = 0, \qquad \Delta_h x(t) := \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \tag{2.2}$$

其中 $n \in \mathbb{N}$、$\lambda: \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\lambda(t) := \lambda_k \quad \text{if} \quad \frac{t}{h} \equiv k \mod n \tag{2.3}$$

对于 $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$，以及满足以下条件的 λ_0、λ_1、……、$\lambda_{n-1} \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{-1}{h}\}$，系数函数 λ 的周期为 n，而 λ 对任何 $k < n$ 都不是周期的。容易验证，式（2.1）中的离散指数函数 e_λ 满足式（2.2），且 $e_\lambda(0) = 1$。令 λ_0、λ_1、……、$\lambda_{n-1} \in \mathbb{C}\backslash\{\frac{-1}{h}\}$。为方便起见，注意到

$$|e_\lambda(kh)| = |1 + h\lambda_0||1 + h\lambda_1| \cdots |1 + h\lambda_{k-1}|, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

定义 2.1（Hyers-Ulam 稳定性）。当且仅当存在常数 $K > 0$，使得满足以下性质时，方程 (2.2) 具有 Hyers-Ulam 稳定性：对于任意 $\varepsilon > 0$，若函数 $\psi: \mathcal{H} \to \mathbb{R}$满足 $|\Delta_h\psi(t) - \lambda(t)\psi(t)| \le \varepsilon$ 对所有 $t \in \mathcal{H}$成立，则存在方程 (2.2) 的一个解 $x: \mathcal{H} \to \mathbb{R}$，使得 $|\psi(t) - x(t)| \le K\varepsilon$ 对所有 $t \in \mathcal{H}$成立。这样的常数 K 称为方程 (2.2) 在 $\mathcal{H}$上的 Hyers-Ulam 稳定性常数。

注意，若 $|e_\lambda(nh)| = 1$，则 (2.2) 不具有 Hyers-Ulam 稳定性 [2, 注 4.1]。

注 2.2。假设 系数函数 λ 满足 (2.3)，其中 λ_0、λ_1、……、$\lambda_{n-1} \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{-1}{h}\}$。设

$$S_0 = S_0(\lambda) = \frac{1}{|1 + h\lambda_0|} + \frac{1}{|1 + h\lambda_0||1 + h\lambda_1|} + \cdots + \frac{1}{|1 + h\lambda_0||1 + h\lambda_1| \cdots |1 + h\lambda_{n-1}|} \tag{2.4}$$

and

$$\begin{aligned} S_k &= S_k(\lambda) \\ &= \frac{1}{|1+h\lambda_k|} + \frac{1}{|1+h\lambda_k||1+h\lambda_{k+1}|} + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{|1+h\lambda_k|\cdots|1+h\lambda_{n-1}|} + \frac{1}{|1+h\lambda_k|\cdots|1+h\lambda_{n-1}||1+h\lambda_0|} + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{|1+h\lambda_k|\cdots|1+h\lambda_{n-1}||1+h\lambda_0|\cdots|1+h\lambda_{k-1}|} \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中 $k \in \{1, \ldots, n-1\}$。我们将在下述定理中用到这些和，该定理为 [2, 定理 4.4]。

定理 2.3. 假设系数函数 λ 满足(2.3)，其中 λ_0、λ_1、.....、$\lambda_{n-1} \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{-1}{h}\}$，且$0 < |e_\lambda(nh)| \neq 1$。设 $S_0 = S_0(\lambda)$ 和 $S_k = S_k(\lambda)$ 对于 $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ 分别由(2.4) 和(2.5)给出。那么，(2.2) 在 $\mathcal{H}$上具有 *Hyers-Ulam* 稳定性，其 *Hyers-Ulam* 稳定性常数为

$$K_0(\lambda) := \frac{h|e_\lambda(nh)|}{|1-|e_\lambda(nh)||} \max\{S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}\} \tag{2.6}$$

在 $\mathcal{H}$上。此外，若 $|e_\lambda(nh)| > 1$，则 K_0 是(2.2)的最小 *Hyers-Ulam* 稳定性常数。

此外，考虑相关方程

$$\Delta_h y(t) + \lambda(t)y(t) = f(t), \qquad t \in \mathcal{H}, \tag{2.7}$$

其中，我们通过将 λ 替换为 $-\lambda$，并加入非齐次项f，对 (2.2) 进行了修改。

定义 2.4（Hyers-Ulam 稳定性）。当且仅当存在常数 $L > 0$ 满足以下性质时，方程 (2.7) 具有 Hyers-Ulam 稳定性：对于任意 $\varepsilon > 0$，若函数 $\eta : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ 满足 $|\Delta_h\eta(t) + \lambda(t)\eta(t) - f(t)| \leq \varepsilon$ 对所有 $t \in \mathcal{H}$ 均成立，则存在方程 (2.7) 的一个解 $y : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$，使得 $|\eta(t) - y(t)| \leq L\varepsilon$ 对所有 $t \in \mathcal{H}$ 均成立。这样的常数 L 称为方程 (2.7) 在 $\mathcal{H}$ 上的 Hyers-Ulam 稳定性常数。

在下面的定理中，我们利用定义 2.4 推导出一个新结果。该结果通过将 λ 改为 $-\lambda$，并在方程 (2.2) 的右侧引入非齐次项 f，对基于定义 2.1 的前述定理 2.3 作了修正。

定理 2.5. 假设系数函数 $-\lambda$满足(2.3)，其中 $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{h}\}$，且 $0 < |e_{-\lambda}(nh)| \neq 1$。令 $S_0(-\lambda)$ 和 $S_k(-\lambda)$ 对 $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ 由(2.4) 和(2.5)分别给出，并将这些表达式中的 λ 替换为 $-\lambda$。那么，(2.7) 在 $\mathcal{H}$上具有 *Hyers-Ulam* 稳定性，其 *Hyers-Ulam* 稳定性常数

$$K_0(-\lambda) := \frac{h|e_{-\lambda}(nh)|}{|1-|e_{-\lambda}(nh)||} \max\{S_0(-\lambda), S_1(-\lambda), \ldots, S_{n-1}(-\lambda)\} \tag{2.8}$$

为 $\mathcal{H}$。此外，若 $|e_{-\lambda}(nh)| > 1$，则 $K_0(-\lambda)$ 是(2.7)的最小 ***Hyers-Ulam*** 稳定性常数。

证明。设 u 是 $\mathcal{H}$上方程 (2.7) 的一个解，并设 $\eta: \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ 是一个函数，使得对所有 $t \in \mathcal{H}$, $|\Delta_h\eta(t) + \lambda(t)\eta(t) - f(t)| \leq \varepsilon$。那么，利用 u 和 η，可得

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq |\Delta_h\eta(t) + \lambda(t)\eta(t) - f(t)| \\ &= |\Delta_h\eta(t) + \lambda(t)\eta(t) - (\Delta_h u(t) + \lambda(t)u(t))| \\ &= |\Delta_h(\eta - u)(t) + \lambda(t)(\eta - u)(t)| \\ &= |\Delta_h(\eta - u)(t) - (-\lambda)(t)(\eta - u)(t)|. \end{aligned}$$

如定义 2.1 所示，函数 $\psi = (\eta - u)$ 满足 $|\Delta_h\psi(t) - (-\lambda)(t)\psi(t)| \leq \varepsilon$。由定理 2.3，将 λ替换为 $-\lambda$，可知方程 (2.2) 具有 Hyers-Ulam 稳定性。因此，根据定义 2.1，存在方程 (2.2) 的一个解 $v: \mathcal{H} \to \mathbb{R}$，其中 λ替换为 $-\lambda$，即 $\Delta_h v(t) + \lambda(t)v(t) = 0$，使得

$$|\psi(t) - v(t)| = |(\eta - u)(t) - v(t)| \leq K_0(-\lambda)\varepsilon.$$

现在令 $y(t) = (u + v)(t)$。那么，

$$\Delta_h y(t) + \lambda(t)y(t) = \Delta_h(u + v)(t) + \lambda(t)(u + v)(t) = f(t),$$

因此， y 是方程 (2.7) 的一个解，并且对于所有 $t \in \mathcal{H}$， $|\eta(t) - y(t)| \leq K_0(-\lambda)\varepsilon$。根据定义 2.4，方程 (2.7) 具有 Hyers-Ulam 稳定性，其 Hyers-Ulam 稳定性常数为 $L = K_0(-\lambda)$。 □

3. 一种可能的希尔型离散方程

以前一节为基础，我们将在本文余下部分介绍全新的结果。对于给定的常步长 $h > 0$，定义前向差分算子如下:

$$\Delta_h y(t) = \frac{y(t + h) - y(t)}{h} \quad \text{and} \quad \Delta_h^2 y(t) = \Delta_h(\Delta_h y(t)),$$

并再次令 $\mathcal{H} = \{0, h, 2h, \ldots\}$。现在，考虑离散希尔型 h-差分方程

$$\Delta_h^2 y(t) + [\Delta_h\lambda(t) - \lambda(t)\lambda(t + h)]\, y(t) = 0, \tag{3.1}$$

其中 $\lambda: \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ 且 $\lambda(t + \omega) = \lambda(t)$，对于某个 $\omega \in \mathcal{H}$。

定义 3.1（Hyers-Ulam 稳定性）。 方程（3.1）具有 Hyers-Ulam 稳定性，当且仅当存在常数 $K > 0$ 满足以下性质：对于任意 $\varepsilon > 0$，若函数$\xi: \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ 满足$|\Delta_h^2\xi(t) + [\Delta_h\lambda(t) - \lambda(t)\lambda(t + h)]\,\xi(t)| \leq \varepsilon$，对所有 $t \in \mathcal{H}$ 均成立，则存在方程（3.1）的一个解 $y: \mathcal{H} \to \mathbb{R}$，使得 $|\xi(t) - y(t)| \leq K\varepsilon$ 对所有 $t \in \mathcal{H}$ 均成立。这样的常数 K 称为方程（3.1）在 $\mathcal{H}$ 上的 Hyers-Ulam 稳定性常数。

注意，若 $\lambda(t) \equiv \lambda \in \left(0, \frac{1}{h}\right) \cup \left(\frac{1}{h}, \frac{2}{h}\right) \cup \left(\frac{2}{h}, \infty\right)$，则（3.1）具有以下形式

$$\Delta_h^2 y(t) - \lambda^2 y(t) = 0,$$

其具有 Hyers-Ulam 稳定性 [1, 定理 3.4]，且具有最佳 Hyers-Ulam 稳定性常数

$$K = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda^2} & \text{if} \quad \lambda \in \left(0, \frac{1}{h}\right) \\ \dfrac{h}{\lambda|2 - h\lambda|} & \text{if} \quad \lambda \in \left(\frac{1}{h}, \frac{2}{h}\right) \cup \left(\frac{2}{h}, \infty\right). \end{cases}$$

定理 *3.2*（主要结果）。假设系数函数 λ 满足 *(2.3)*，其中 $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}\backslash\{\pm\frac{1}{h}\}$，且 $0 < |e_{\pm\lambda}(nh)| \neq 1$，其中离散指数函数由 *(2.1)* 给出。设 $S_0 = S_0(\pm\lambda)$ 和 $S_k = S_k(\pm\lambda)$ 对于 $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ 分别由 *(2.4)* 和 *(2.5)* 给出。此外，设 $K_0(\pm\lambda)$ 分别如 *(2.6)* 和 *(2.8)* 所示。那么，*(3.1)* 在 $\mathcal{H}$ 上具有 *Hyers-Ulam* 稳定性，其 *Hyers-Ulam* 稳定性常数为 $K = K_0(\lambda)K_0(-\lambda)$。

证明。对于任意 $\varepsilon > 0$，设函数 $\xi : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ 满足

$$\left|\Delta_h^2 \xi(t) + [\Delta_h \lambda(t) - \lambda(t)\lambda(t+h)]\,\xi(t)\right| \leq \varepsilon$$

对所有 $t \in \mathcal{H}$ 均成立。定义函数 $\psi(t) := \Delta_h \xi(t-h) + \lambda(t-h)\xi(t-h)$，其中 $t \in \mathcal{H}\backslash\{0\}$。作平移并代入后，得到

$$\begin{aligned} \Delta_h \psi(t+h) - \lambda(t+h)\psi(t+h) &= \Delta_h^2 \xi(t) + \frac{1}{h}\left[\lambda(t+h)\xi(t+h) - \lambda(t)\xi(t)\right] \\ &\quad - \lambda(t+h)\Delta_h \xi(t) - \lambda(t+h)\lambda(t)\xi(t) \\ &= \Delta_h^2 \xi(t) + \frac{1}{h}\left[\lambda(t+h)\xi(t) - \lambda(t)\xi(t)\right] - \lambda(t+h)\lambda(t)\xi(t) \\ &= \Delta_h^2 \xi(t) + \left[\Delta_h \lambda(t) - \lambda(t)\lambda(t+h)\right]\xi(t) \end{aligned}$$

对所有 $t \in \mathcal{H}$ 均成立。将变量平移回去，可得 $|\Delta_h \psi(t) - \lambda(t)\psi(t)| \leq \varepsilon$ 对所有 $t \in \mathcal{H}\backslash\{0\}$ 均成立。令 S_0 和 S_k（$k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$），分别由 (2.4) 和 (2.5) 给出。根据定义 2.1 和定理 2.3，(2.2) 具有 Hyers-Ulam 稳定性，其 Hyers-Ulam 稳定性常数为 $K_0(\lambda)$，如 (2.6) 所示。此外，若 $|e_\lambda(nh)| > 1$，则 $K_0(\lambda)$ 是 (2.2) 的最小 Hyers-Ulam 稳定性常数。特别地，存在 (2.2) 的一个解 x，使得 $|\psi(t) - x(t)| \leq K_0(\lambda)\varepsilon$ 在 $\mathcal{H}\backslash\{0\}$ 上成立。利用 ψ 的定义，得到

$$|\Delta_h \xi(t-h) + \lambda(t-h)\xi(t-h) - x(t)| = |\psi(t) - x(t)| \leq K_0(\lambda)\varepsilon, \quad t \in \mathcal{H}\backslash\{0\},$$

使得

$$|\Delta_h \xi(t) + \lambda(t)\xi(t) - x(t+h)| \leq K_0(\lambda)\varepsilon = \varepsilon', \quad t \in \mathcal{H}.$$

由定理 2.5，对于所有 $t \in \mathcal{H}$，若 $f(t) = x(t+h)$，则存在差分方程的一个解 $\eta : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$

$$\Delta_h \eta(t) + \lambda(t)\eta(t) = x(t+h), \quad t \in \mathcal{H}, \tag{3.2}$$

根据定义 2.4,

$$|\xi(t)-\eta(t)| \le K_0(-\lambda)\varepsilon' = K_0(-\lambda)K_0(\lambda)\varepsilon$$

对所有 $t \in \mathcal{H}$ 均成立。此外，对 (3.2) 应用 h-差分算子并使用离散乘积法则，可得

$$\begin{aligned}
\Delta_h^2\eta(t) + [\Delta_h\lambda(t) - \lambda(t)\lambda(t+h)]\eta(t) &= \Delta_h^2\eta(t) + \eta(t)\Delta_h\lambda(t) + \lambda(t+h)\Delta_h\eta(t) \\
&\quad -\lambda(t+h)\Delta_h\eta(t) - \lambda(t)\lambda(t+h)\eta(t) \\
&= \Delta_h^2\eta(t) + \Delta_h\left(\lambda(t)\eta(t)\right) \\
&\quad -\lambda(t+h)\left(\Delta_h\eta(t) + \lambda(t)\eta(t)\right) \\
&= \Delta_h x(t+h) - \lambda(t+h)x(t+h) \\
&= 0
\end{aligned}$$

对于 $t \in \mathcal{H}$，因为 $x = x(t)$ 是 (2.2) 在 $\mathcal{H}\backslash\{0\}$ 上的一个解。因此， η 也是 (3.1) 在 $\mathcal{H}$ 上的一个解，并满足

$$|\xi(t)-\eta(t)| \le K_0(-\lambda)K_0(\lambda)\varepsilon, \qquad t \in \mathcal{H}.$$

因此，利用 (2.6) 和 (2.8)，(3.1) 具有 Hyers-Ulam 稳定性，其 Hyers-Ulam 稳定性常数分别为 $K = K_0(\lambda)K_0(-\lambda)$。□

接下来，我们考虑非齐次离散Hill型 h-差分方程

$$\Delta_h^2 y(t) + [\Delta_h\lambda(t) - \lambda(t)\lambda(t+h)]\, y(t) = f(t), \tag{3.3}$$

其中 $\lambda, f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$，且 $\lambda(t+\omega) = \lambda(t)$，其中某个 $\omega \in \mathcal{H}$。

定义 3.3（Hyers-Ulam 稳定性）。方程 (3.3) 具有 Hyers-Ulam 稳定性，当且仅当存在常数 $L > 0$，使其满足以下性质：对于任意 $\varepsilon > 0$，若函数 $\xi\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$满足 $|\Delta_h^2\xi(t) + [\Delta_h\lambda(t) - \lambda(t)\lambda(t+h)]\,\xi(t) - f(t)| \le \varepsilon$ 对所有 $t \in \mathcal{H}$成立，则存在方程 (3.3) 的一个解$y\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$，使得 $|\xi(t) - y(t)| \le L\varepsilon$ 对所有 $t \in \mathcal{H}$成立。这样的常数 L 称为方程 (3.3) 在 $\mathcal{H}$上的 Hyers-Ulam 稳定性常数。

定理 3.4. 假设系数函数 λ对 $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}\backslash\{\pm\frac{1}{h}\}$满足 *(2.3)*，且 $0 < |e_{\pm\lambda}(nh)| \ne 1$，其中离散指数函数由 *(2.1)* 给出。设 $S_0 = S_0(\pm\lambda)$ 和 $S_k = S_k(\pm\lambda)$ 对于 $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ 分别由 *(2.4)* 和 *(2.5)* 给出。此外，设 $K_0(\pm\lambda)$分别如 *(2.6)* 和 *(2.8)* 所示。则 *(3.3)* 在 $\mathcal{H}$上具有 *Hyers-Ulam* 稳定性，其 *Hyers-Ulam* 稳定性常数为 $L = K_0(\lambda)K_0(-\lambda)$。

证明。设 $\varepsilon > 0$ 为任意固定常数，且 u 是 (3.3) 在 $\mathcal{H}$上的一个解。假设$\eta\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ 满足

$$\left|\Delta_h^2\eta(t) + [\Delta_h\lambda(t) - \lambda(t)\lambda(t+h)]\,\eta(t) - f(t)\right| \le \varepsilon$$

对所有 $t \in \mathcal{H}$均成立。于是我们有

$$\begin{aligned}\varepsilon &\geq \left|\Delta_h^2\eta(t) + [\Delta_h\lambda(t) - \lambda(t)\lambda(t+h)]\,\eta(t) - f(t)\right| \\ &= \left|\Delta_h^2\eta(t) + [\Delta_h\lambda(t) - \lambda(t)\lambda(t+h)]\,\eta(t) - \left(\Delta_h^2 u(t) + [\Delta_h\lambda(t) - \lambda(t)\lambda(t+h)]\,u(t)\right)\right| \\ &= \left|\Delta_h^2(\eta-u)(t) + [\Delta_h\lambda(t) - \lambda(t)\lambda(t+h)]\,(\eta-u)(t)\right|.\end{aligned}$$

如定义 3.1 所示，函数 $\psi = (\eta - u)$ 满足

$$\left|\Delta_h^2\psi(t) + [\Delta_h\lambda(t) - \lambda(t)\lambda(t+h)]\,\psi(t)\right| \leq \varepsilon.$$

根据定理 3.2，存在方程 (3.1) 的一个解 $v\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$，使得

$$|\psi(t) - v(t)| = |(\eta-u)(t) - v(t)| \leq K_0(\lambda)K_0(-\lambda)\varepsilon.$$

定义 $y(t) = (u+v)(t)$。于是，我们有

$$\Delta_h^2 y(t) + [\Delta_h\lambda(t) - \lambda(t)\lambda(t+h)]\,y(t) = \Delta_h^2(u+v)(t) + [\Delta_h\lambda(t) - \lambda(t)\lambda(t+h)]\,(u+v)(t) = f(t).$$

也就是说， y 是方程 (3.3) 的一个解，且对所有 $t \in \mathcal{H}$，都有 $|\eta(t) - y(t)| \leq K_0(\lambda)K_0(-\lambda)\varepsilon$。因此，(3.3) 具有 Hyers-Ulam 稳定性，其 Hyers-Ulam 稳定性常数为 $L = K_0(\lambda)K_0(-\lambda)$。□

4. 例子

在本节中，我们给出一些例子，以应用前几节的结果。

例 4.1. 固定步长 $h > 0$。对于 $A > 0$but $A \notin \left\{\frac{1}{h}, \frac{\sqrt{2}}{h}\right\}$，令 $\lambda(t) = \frac{2A}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2\pi t}{3h}\right)$。那么， λ是 $\mathcal{H}$ 上的一个 3-周期，其中 $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = A$ 和 $\lambda_2 = -A$。此外， $\Delta_h\lambda(t) - \lambda(t)\lambda(t+h)$ 是 $\mathcal{H}$ 上由 $\left\{\frac{A}{h}, {}^{A}_{(Ah-2)\,h}, \frac{A}{h}\right\}$ 给出的 3-周期。分别使用 (2.4) 和 (2.5)，可得

$$\begin{aligned} S_0(\lambda) &= 1 + \tfrac{1}{|1+Ah|} + \tfrac{1}{|1+Ah||1-Ah|}, & S_0(-\lambda) &= 1 + \tfrac{1}{|1-Ah|} + \tfrac{1}{|1-Ah||1+Ah|}, \\ S_1(\lambda) &= \tfrac{1}{|1+Ah|} + \tfrac{2}{|1+Ah||1-Ah|}, & S_1(-\lambda) &= \tfrac{1}{|1-Ah|} + \tfrac{2}{|1-Ah||1+Ah|}, \\ S_2(\lambda) &= \tfrac{2}{|1-Ah|} + \tfrac{1}{|1+Ah||1-Ah|}, & S_2(-\lambda) &= \tfrac{2}{|1+Ah|} + \tfrac{1}{|1-Ah||1+Ah|}. \end{aligned}$$

由 (2.1) 以及 $t = 3h$，可得

$$e_{\pm\lambda}(3h) = 1 - h^2A^2, \qquad A \neq \frac{1}{h}.$$

若 $|e_\lambda(3h)| = 1$，则 (2.2) 不具有 Hyers-Ulam 稳定性；若 $|e_{-\lambda}(3h)| = 1$，则根据 [2, 注 4.1]，(2.7) 不具有 Hyers-Ulam 稳定性。若 $A \neq \frac{\sqrt{2}}{h}$，则 $|e_{\pm\lambda}(3h)| \neq 1$。利用

计算机代数系统进行计算，可得

$$\max\{S_0(\lambda),S_1(\lambda),S_2(\lambda)\}=\begin{cases}S_2(\lambda) & \text{if} \quad A\in\left(0,\ \frac{1}{h}\right)\cup\left(\frac{1}{h},\ \frac{\sqrt{2}}{h}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{h},\ \frac{1+\sqrt{17}}{2h}\right)\\ S_0(\lambda) & \text{if} \quad A\in\left[\frac{1+\sqrt{17}}{2h},\ \infty\right),\end{cases}$$

$$\max\{S_0(-\lambda),S_1(-\lambda),S_2(-\lambda)\}=\begin{cases}S_1(-\lambda) & \text{if} \quad A\in\left(0,\ \frac{1}{h}\right)\cup\left(\frac{1}{h},\ \frac{\sqrt{2}}{h}\right)\\ S_0(-\lambda) & \text{if} \quad A\in\left[\frac{\sqrt{2}}{h},\ \infty\right).\end{cases}$$

利用定理 3.2，对于步长 $h>0$，但 $h\notin\left\{\frac{1}{A},\ \frac{\sqrt{2}}{A}\right\}$，方程（3.1）在 $\mathcal{H}$ 上具有 Hyers-Ulam 稳定性，其 Hyers-Ulam 稳定性常数为 $K=K_0(\lambda)K_0(-\lambda)$，其中由（2.6）和（2.8）可得

$$K_0(\lambda):=\frac{h|e_\lambda(3h)|}{|1-|e_\lambda(3h)||}\max\{S_0(\lambda),S_1(\lambda),S_2(\lambda)\},$$

$$K_0(-\lambda):=\frac{h|e_{-\lambda}(3h)|}{|1-|e_{-\lambda}(3h)||}\max\{S_0(-\lambda),S_1(-\lambda),S_2(-\lambda)\}.$$

具体而言，对于任意步长 $h>0$，以及任意 $A>0$，但 $A\notin\left\{\frac{1}{h},\ \frac{\sqrt{2}}{h}\right\}$，方程（3.1）在 $\mathcal{H}$ 上具有 Hyers-Ulam 稳定性，其 Hyers-Ulam 稳定性常数 $K=K_0(\lambda)K_0(-\lambda)$ 由下式给出

$$K=\frac{h^2\left|1-h^2A^2\right|^2}{|1-|1-h^2A^2||^2}\begin{cases}S_2(\lambda)S_1(-\lambda) & \text{if} \quad A\in\left(0,\ \frac{1}{h}\right)\cup\left(\frac{1}{h},\ \frac{\sqrt{2}}{h}\right)\\ S_2(\lambda)S_0(-\lambda) & \text{if} \quad A\in\left(\frac{\sqrt{2}}{h},\ \frac{1+\sqrt{17}}{2h}\right)\\ S_0(\lambda)S_0(-\lambda) & \text{if} \quad A\in\left[\frac{\sqrt{2}}{h},\ \infty\right).\end{cases}$$

例 4.2. 固定步长 $h>0$。对于 $A,B>0$，满足 $A\neq B$ 且 $A,B\notin\left\{\frac{1}{h}\right\}$，令

$$\lambda(t)=\begin{cases}A & \text{if} \quad \frac{t}{h}\equiv 0 \mod 2,\\ B & \text{if} \quad \frac{t}{h}\equiv 1 \mod 2.\end{cases}$$

于是，λ 是 $\mathcal{H}$上的二周期，其中 $\lambda_0=A$ 和 $\lambda_1=B$。此外，$\Delta_h\lambda(t)-\lambda(t)\lambda(t+h)$是 $\mathcal{H}$ 上由 $\left\{\frac{B-A(1+Bh)}{h},\ \frac{A-B}{(1+Ah}{h}\right\}$）给出的二周期。分别利用（2.4）和（2.5），得到

$$\begin{aligned}S_0(\lambda)&=\frac{1}{|1+Ah|}+\frac{1}{|1+Ah||1+Bh|}, & S_0(-\lambda)&=\frac{1}{|1-Ah|}+\frac{1}{|1-Ah||1-Bh|},\\ S_1(\lambda)&=\frac{1}{|1+Bh|}+\frac{1}{|1+Ah||1+Bh|}, & S_1(-\lambda)&=\frac{1}{|1-Bh|}+\frac{1}{|1-Ah||1-Bh|}.\end{aligned}$$

由（2.1）及 $t=2h$，得到

$$e_{\pm\lambda}(2h)=(1\pm Ah)(1\pm Bh), \qquad A,B\neq\frac{1}{h}.$$

若 $|e_\lambda(2h)|=1$，则 (2.2) 不具有 Hyers-Ulam 稳定性；若 $|e_{-\lambda}(2h)|=1$，则根据 [2, 注 4.1], (2.7) 不具有 Hyers-Ulam 稳定性。逐一分析各情形可知，若 $A\neq\frac{B}{-1+Bh}$ $\left(h\neq\frac{A+B}{AB}\right)$

对于 $B > \frac{1}{h}$，且 $A \neq \frac{2-Bh}{h\,1-Bh()}$ 对于 $B \in \left(0, \frac{1}{h}\right) \cup \left(\frac{2}{h}, \infty\right)$，则 $|e_{\pm\lambda}(2h)| \neq 1$。利用计算机代数系统进行计算可知

$$\max\{S_0(\lambda), S_1(\lambda)\} = \begin{cases} S_0(\lambda) & \text{if} \quad 0 < A \leq B \\ S_1(\lambda) & \text{if} \quad A > B, \end{cases}$$

$$\max\{S_0(-\lambda), S_1(-\lambda)\} = \begin{cases} S_0(-\lambda) & \text{if} \quad \begin{cases} 0 < A < B & \text{and} \quad h \in \left(\frac{2}{A+B}, \frac{1}{A}\right) \cup \left(\frac{1}{A}, \infty\right), \text{ or} \\ A > B > 0 & \text{and} \quad h \in \left(0, \frac{1}{A}\right) \cup \left(\frac{1}{A}, \frac{2}{A+B}\right) \end{cases} \\ S_1(-\lambda) & \text{if} \quad \begin{cases} 0 < A < B & \text{and} \quad h \in \left(0, \frac{1}{B}\right) \cup \left(\frac{1}{B}, \frac{2}{A+B}\right), \text{ or} \\ A > B > 0 & \text{and} \quad h \in \left(\frac{2}{A+B}, \frac{1}{B}\right) \cup \left(\frac{1}{B}, \infty\right). \end{cases} \end{cases}$$

应用步长为 $h > 0$ 但 $h \notin \left\{\frac{1}{A}, \frac{1}{B}\right\}$ 的定理 3.2，可知方程（3.1）在 $\mathcal{H}$ 上具有 Hyers-Ulam 稳定性，其 Hyers-Ulam 稳定性常数为 $K = K_0(\lambda)K_0(-\lambda)$，其中根据（2.6）和（2.8）

$$K_0(\lambda) := \frac{h|e_\lambda(2h)|}{|1-|e_\lambda(2h)||} \max\{S_0(\lambda), S_1(\lambda)\}, \quad K_0(-\lambda) := \frac{h|e_{-\lambda}(2h)|}{|1-|e_{-\lambda}(2h)||} \max\{S_0(-\lambda), S_1(-\lambda)\}.$$

具体而言，对于任意步长 $h > 0$ 和任意 $A > 0$ 但 A，$B \notin \left\{\frac{1}{h}\right\}$，方程（3.1）在 $\mathcal{H}$ 上具有 Hyers-Ulam 稳定性，其 Hyers-Ulam 稳定性常数 $K = K_0(\lambda)K_0(-\lambda)$ 由下式给出

$$K = \frac{h^2\,|1-A^2h^2|\,|1-B^2h^2|}{|1-|1+Ah||1+Bh||\,|1-|1-Ah||1-Bh||}$$

$$\cdot \begin{cases} S_0(\lambda)S_0(-\lambda) & \text{if} \quad 0 < A < B \text{ and } h \in \left(\frac{2}{A+B}, \frac{1}{A}\right) \cup \left(\frac{1}{A}, \frac{A+B}{AB}\right) \cup \left(\frac{A+B}{AB}, \infty\right) \\ S_0(\lambda)S_1(-\lambda) & \text{if} \quad 0 < A < B \text{ and } h \in \left(0, \frac{1}{B}\right) \cup \left(\frac{1}{B}, \frac{2}{A+B}\right) \\ S_1(\lambda)S_0(-\lambda) & \text{if} \quad A > B > 0 \text{ and } h \in \left(0, \frac{1}{A}\right) \cup \left(\frac{1}{A}, \frac{2}{A+B}\right) \\ S_1(\lambda)S_1(-\lambda) & \text{if} \quad A > B > 0 \text{ and } h \in \left(\frac{2}{A+B}, \frac{1}{B}\right) \cup \left(\frac{1}{B}, \frac{A+B}{AB}\right) \cup \left(\frac{A+B}{AB}, \infty\right). \end{cases}$$

至此，例子便完成了。

5. 三阶方程的应用

本节通过应用主定理，建立某些三阶线性 h-差分方程的 Hyers-Ulam 稳定性。现在，我们考虑三阶 h-差分方程

$$\Delta_h^3 y(t) + p(t)\Delta_h^2 y(t) + q(t)\Delta_h y(t) + r(t)y(t) = 0 \tag{5.1}$$

with

$$\begin{aligned} p(t) &= \lambda(t+2h), \\ q(t) &= 2\Delta_h\lambda(t+h) + \Delta_h\lambda(t+2h) - \lambda(t+2h)\lambda(t+3h), \\ r(t) &= \Delta_h^2\lambda(t) + \lambda(t)\Delta_h\lambda(t+2h) - \lambda(t)\lambda(t+2h)\lambda(t+3h), \end{aligned} \tag{5.2}$$

其中 $\lambda: \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ 且 $\lambda(t+\omega) = \lambda(t)$，其中某个 $\omega \in \mathcal{H}$。

定义 5.1 (Hyers-Ulam 稳定性)。 方程 (5.1) 具有 Hyers-Ulam 稳定性，当且仅当存在常数 $K > 0$，使其具有以下性质：对于任意 $\varepsilon > 0$，若函数 $\xi: \mathcal{H} \to \mathbb{R}$满足 $|\Delta_h^3\xi(t) + p(t)\Delta_h^2\xi(t) + q(t)\Delta_h\xi(t) + r(t)\xi(t)| \leq \varepsilon$ 对所有 $t \in \mathcal{H}$均成立，则存在 (5.1) 的一个解$y: \mathcal{H} \to \mathbb{R}$，使得 $|\xi(t) - y(t)| \leq K\varepsilon$ 对所有 $t \in \mathcal{H}$均成立。这样的常数 K 称为 (5.1) 在 $\mathcal{H}$上的 Hyers-Ulam 稳定性常数。

定理*5.2.* 假设系数函数 λ 满足 *(2.3)*，其中 $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}\backslash\{\pm\frac{1}{h}\}$，且 $0 < |e_{\pm\lambda}(nh)| \neq 1$，离散指数函数如 *(2.1)* 所定义。设 $S_0 = S_0(\pm\lambda)$ 和 $S_k = S_k(\pm\lambda)$ 分别由 *(2.4)* 和 *(2.5)* 给出。此外，设 $K_0(\pm\lambda)$ 分别如 *(2.6)* 和 *(2.8)* 所示。那么，*(5.1)* 与 *(5.2)* 在 $\mathcal{H}$ 上具有 *Hyers-Ulam* 稳定性，其 *Hyers-Ulam* 稳定性常数为 $K = K_0(\lambda)(K_0(-\lambda))^2$。

证明。 令 $\varepsilon > 0$ 为一个固定的任意常数。假设 $\xi: \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ 满足

$$\left|\Delta_h^3\xi(t) + p(t)\Delta_h^2\xi(t) + q(t)\Delta_h\xi(t) + r(t)\xi(t)\right| \leq \varepsilon$$

对所有 $t \in \mathcal{H}$均成立，其中 p、q和 r见式（5.2）。令 $\psi(t) := \Delta_h\xi(t-2h) + \lambda(t-2h)\xi(t-2h)$，其中$t \in \mathcal{H}\backslash\{0, h\}$。由于

$$\Delta_h\psi(t+2h) = \Delta_h^2\xi(t) + \lambda(t+h)\Delta_h\xi(t) + (\Delta_h\lambda(t))\,\xi(t)$$

and

$$\Delta_h^2\psi(t+2h) = \Delta_h^3\xi(t) + \lambda(t+2h)\Delta_h^2\xi(t) + 2\,(\Delta_h\lambda(t+h))\,\Delta_h\xi(t) + \left(\Delta_h^2\lambda(t)\right)\xi(t)$$

成立，我们可知

$$\begin{aligned}
&\Delta_h^2\psi(t+2h) + [\Delta_h\lambda(t+2h) - \lambda(t+2h)\lambda(t+3h)]\,\psi(t+2h)\\
&\quad= \Delta_h^3\xi(t) + \lambda(t+2h)\Delta_h^2\xi(t) + 2\,(\Delta_h\lambda(t+h))\,\Delta_h\xi(t) + \left(\Delta_h^2\lambda(t)\right)\xi(t)\\
&\qquad+ [\Delta_h\lambda(t+2h) - \lambda(t+2h)\lambda(t+3h)]\,[\Delta_h\xi(t) + \lambda(t)\xi(t)]\\
&\quad= \Delta_h^3\xi(t) + p(t)\Delta_h^2\xi(t) + q(t)\Delta_h\xi(t) + r(t)\xi(t)
\end{aligned}$$

对所有 $t \in \mathcal{H}$均成立。将变量换回原来的变量，可得

$$\left|\Delta_h^2\psi(t) + [\Delta_h\lambda(t) - \lambda(t)\lambda(t+h)]\psi(t)\right| \leq \varepsilon$$

对所有 $t \in \mathcal{H}\backslash\{0, h\}$。设 $S_0 = S_0(\pm\lambda)$ 和 $S_k = S_k(\pm\lambda)$ 分别由（2.4）和（2.5）给出。此外，设 $K_0(\pm\lambda)$ 分别如（2.6）和（2.8）所示。根据定理 3.2，方程（3.1）具有 Hyers-Ulam 稳定性，其 Hyers-Ulam 稳定性常数为$K_0(\lambda)K_0(-\lambda)$。也就是说，存在方程（3.1）的一个解 x，使得 $|\psi(t) - x(t)| \leq K_0(\lambda)K_0(-\lambda)\varepsilon$ 在$\mathcal{H}\backslash\{0, h\}$上成立。根据 ψ 的定义，我们得到不等式

$$|\Delta_h\xi(t-2h) + \lambda(t-2h)\xi(t-2h) - x(t)| = |\psi(t) - x(t)| \leq K_0(\lambda)K_0(-\lambda)\varepsilon, \quad t \in \mathcal{H}\backslash\{0, h\},$$

因此

$$|\Delta_h\xi(t)+\lambda(t)\xi(t)-x(t+2h)|\le K_0(\lambda)K_0(-\lambda)\varepsilon=\tilde{\varepsilon},\quad t\in\mathcal{H}.$$

利用定理 2.5，对于所有 $t\in\mathcal{H}$，存在差分方程的一个解 $\eta:\ \mathcal{H}\to\mathbb{R}$，使得 $f(t)=x(t+2h)$

$$\Delta_h\eta(t)+\lambda(t)\eta(t)=x(t+2h),\quad t\in\mathcal{H},\tag{5.3}$$

使得

$$|\xi(t)-\eta(t)|\le K_0(-\lambda)\tilde{\varepsilon}=K_0(\lambda)(K_0(-\lambda))^2\varepsilon$$

对于所有 $t\in\mathcal{H}$。

接下来，我们将证明 η 在 $\mathcal{H}$ 上也是带有 (5.2) 的 (5.1) 的一个解。由 (5.3) 和离散乘积法则可得

$$\Delta_h^2x(t+2h)=\Delta_h^3\eta(t)+\lambda(t+2h)\Delta_h^2\eta(t)+2\left(\Delta_h\lambda(t+h)\right)\Delta_h\eta(t)+\left(\Delta_h^2\lambda(t)\right)\eta(t)$$

对于所有 $t\in\mathcal{H}$。因此我们得到

$$\begin{aligned}
&\Delta_h^3\eta(t)+p(t)\Delta_h^2\eta(t)+q(t)\Delta_h\eta(t)+r(t)\eta(t)\\
&\quad=\Delta_h^3\eta(t)+\lambda(t+2h)\Delta_h^2\eta(t)+2\left(\Delta_h\lambda(t+h)\right)\Delta_h\eta(t)+\left(\Delta_h^2\lambda(t)\right)\eta(t)\\
&\qquad+\left[\Delta_h\lambda(t+2h)-\lambda(t+2h)\lambda(t+3h)\right]\left[\Delta_h\eta(t)+\lambda(t)\eta(t)\right]\\
&\quad=\Delta_h^2x(t+2h)+\left[\Delta_h\lambda(t+2h)-\lambda(t+2h)\lambda(t+3h)\right]x(t+2h)\\
&\quad=0
\end{aligned}$$

对于 $t\in\mathcal{H}$。因此，η 也是 $\mathcal{H}$ 上满足 (5.2) 的 (5.1) 的一个解，所以，满足 (5.2) 的 (5.1) 具有 Hyers-Ulam 稳定性，其 Hyers-Ulam 稳定性常数为 $K=K_0(\lambda)(K_0(-\lambda))^2,$，分别利用 (2.6) 和 (2.8) 得出。□

接下来，我们考虑满足以下条件的 (5.1):

$$\begin{aligned}
p(t)&=-\lambda(t+2h),\\
q(t)&=-2\Delta_h\lambda(t+h)+\Delta_h\lambda(t+2h)-\lambda(t+2h)\lambda(t+3h),\\
r(t)&=-\Delta_h^2\lambda(t)-\lambda(t)\Delta_h\lambda(t+2h)+\lambda(t)\lambda(t+2h)\lambda(t+3h),
\end{aligned}\tag{5.4}$$

其中 $\lambda:\ \mathcal{H}\to\mathbb{R}$ 且 $\lambda(t+\omega)=\lambda(t)$，对于某个 $\omega\in\mathcal{H}$。

定理 5.3. 假设系数函数 λ 对于 λ_0、λ_1、…、$\lambda_{n-1}\in\mathbb{R}\backslash\{\pm\frac{1}{h}\}$ 满足 (2.3)，其中 $0<|e_{\pm\lambda}(nh)|\neq 1$，离散指数函数由 (2.1) 给出。设 $S_0=S_0(\pm\lambda)$ 和 $S_k=S_k(\pm\lambda)$ 对于 $k\in\{1,2,\dots,n-1\}$ 分别由 (2.4) 和 (2.5) 给出。此外，设 $K_0(\pm\lambda)$ 分别如 (2.6) 和 (2.8) 所示。则 (5.1) 与 (5.4) 在 $\mathcal{H}$ 上具有 Hyers-Ulam 稳定性，其 Hyers-Ulam 稳定性常数为 $K=(K_0(\lambda))^2K_0(-\lambda)$。

证明。令 $\varepsilon > 0$ 为任意固定常数。假设 ξ： $\mathcal{H} \to \mathbb{R}$ 满足

$$\left|\Delta_h^3 \xi(t) + p(t)\Delta_h^2 \xi(t) + q(t)\Delta_h \xi(t) + r(t)\xi(t)\right| \leq \varepsilon$$

对所有 $t \in \mathcal{H}$，其中 p、 q 和 r 由 (5.4) 给出。定义 $\psi(t) := \Delta_h \xi(t-2h) - \lambda(t-2h)\xi(t-2h)$，其中 $t \in \mathcal{H}\backslash\{0,h\}$。由于

$$\Delta_h \psi(t+2h) = \Delta_h^2 \xi(t) - \lambda(t+h)\Delta_h \xi(t) - (\Delta_h \lambda(t))\,\xi(t)$$

and

$$\Delta_h^2 \psi(t+2h) = \Delta_h^3 \xi(t) - \lambda(t+2h)\Delta_h^2 \xi(t) - 2\,(\Delta_h \lambda(t+h))\,\Delta_h \xi(t) - \left(\Delta_h^2 \lambda(t)\right)\xi(t)$$

成立，我们看到

$$\begin{aligned}
&\Delta_h^2 \psi(t+2h) + [\Delta_h \lambda(t+2h) - \lambda(t+2h)\lambda(t+3h)]\,\psi(t+2h) \\
&\quad = \Delta_h^3 \xi(t) - \lambda(t+2h)\Delta_h^2 \xi(t) - 2\,(\Delta_h \lambda(t+h))\,\Delta_h \xi(t) - \left(\Delta_h^2 \lambda(t)\right)\xi(t) \\
&\qquad + [\Delta_h \lambda(t+2h) - \lambda(t+2h)\lambda(t+3h)]\,[\Delta_h \xi(t) - \lambda(t)\xi(t)] \\
&\quad = \Delta_h^3 \xi(t) + p(t)\Delta_h^2 \xi(t) + q(t)\Delta_h \xi(t) + r(t)\xi(t)
\end{aligned}$$

对所有 $t \in \mathcal{H}$。因此我们有

$$\left|\Delta_h^2 \psi(t) + [\Delta_h \lambda(t) - \lambda(t)\lambda(t+h)]\psi(t)\right| \leq \varepsilon$$

对所有 $t \in \mathcal{H}\backslash\{0,h\}$。由定理 3.2 可知，存在方程 (3.1) 的一个解 x，使得在 $\mathcal{H}\backslash\{0,h\}$ 上有 $|\psi(t) - x(t)| \leq K_0(\lambda)K_0(-\lambda)\varepsilon$。这意味着

$$|\Delta_h \xi(t) - \lambda(t)\xi(t) - x(t+2h)| \leq K_0(\lambda)K_0(-\lambda)\varepsilon = \tilde{\varepsilon}, \quad t \in \mathcal{H}.$$

根据定理 2.5，将 $f(t) = x(t+2h)$ 和 λ 替换为 $-\lambda$，对所有 $t \in \mathcal{H}$，存在一个解η： $\mathcal{H} \to \mathbb{R}$，它满足差分方程

$$\Delta_h \eta(t) - \lambda(t)\eta(t) = x(t+2h), \quad t \in \mathcal{H}$$

使得

$$|\xi(t) - \eta(t)| \leq K_0(\lambda)\tilde{\varepsilon} = (K_0(\lambda))^2 K_0(-\lambda)\varepsilon$$

对所有 $t \in \mathcal{H}$。利用定理5.2的相同技巧，我们可以证明，在 $\mathcal{H}$ 上， η 是满足 (5.4) 的 (5.1) 的一个解。因此，满足 (5.4) 的 (5.1) 具有 Hyers-Ulam 稳定性，其 Hyers-Ulam 稳定性常数为 $K = (K_0(\lambda))^2 K_0(-\lambda)$。□

接下来，我们考虑满足以下条件的 (5.1):

$$\begin{aligned}
p(t) &= \lambda(t+2h), \\
q(t) &= \Delta_h \lambda(t+h) - \lambda(t+h)\lambda(t+2h), \\
r(t) &= \Delta_h^2 \lambda(t) - \lambda(t)\Delta_h \lambda(t+h) - \lambda(t)\lambda(t+h)\lambda(t+2h),
\end{aligned} \tag{5.5}$$

其中 $\lambda\colon \mathcal{H}\to\mathbb{R}$ 且 $\lambda(t+\omega)=\lambda(t)$，其中某个 $\omega\in\mathcal{H}$。

定理 5.4. 假设系数函数 λ 满足 *(2.3)*，其中 $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}\in\mathbb{R}\backslash\{\pm\frac{1}{h}\}$，且 $0<|e_{\pm\lambda}(nh)|\neq 1$，离散指数函数由 *(2.1)* 给出。设 $S_0=S_0(\pm\lambda)$ 和 $S_k=S_k(\pm\lambda)$ 对于 $k\in\{1,2,\dots,n-1\}$ 分别由 *(2.4)* 和 *(2.5)* 给出。此外，设 $K_0(\pm\lambda)$ 分别如 *(2.6)* 和 *(2.8)* 所示。则 *(5.1)* 连同 *(5.5)* 在 $\mathcal{H}$上具有 *Hyers-Ulam* 稳定性，其 *Hyers-Ulam* 稳定性常数为 $K=K_0(\lambda)(K_0(-\lambda))^2$。

证明。令 $\varepsilon>0$ 为任意固定常数。假设 $\xi\colon\ \mathcal{H}\to\mathbb{R}$ 满足

$$\left|\Delta_h^3\xi(t)+p(t)\Delta_h^2\xi(t)+q(t)\Delta_h\xi(t)+r(t)\xi(t)\right|\le\varepsilon$$

对所有 $t\in\mathcal{H}$ 均成立，其中 p、q 和 r 由（5.5）给出。定义

$$\psi(t):=\Delta_h^2\xi(t-2h)+[\Delta_h\lambda(t-2h)-\lambda(t-2h)\lambda(t-h)]\xi(t-2h).$$

由于

$$\begin{aligned}\Delta_h\psi(t+2h)=\Delta_h^3\xi(t)&+\left[\Delta_h\lambda(t+h)-\lambda(t+h)\lambda(t+2h)\right]\Delta_h\xi(t)\\&+\left[\Delta_h^2\lambda(t)-\lambda(t+h)\left(\Delta_h\lambda(t+h)+\Delta_h\lambda(t)\right)\right]\xi(t)\end{aligned}$$

成立，我们可知

$$\begin{aligned}&\Delta_h\psi(t+2h)+\lambda(t+2h)\psi(t+2h)\\&\quad=\Delta_h^3\xi(t)+\lambda(t+2h)\Delta_h^2\xi(t)+\left[\Delta_h\lambda(t+h)-\lambda(t+h)\lambda(t+2h)\right]\Delta_h\xi(t)\\&\qquad+\left\{\Delta_h^2\lambda(t)-\lambda(t+h)\left[\Delta_h\lambda(t+h)+\Delta_h\lambda(t)\right]+\lambda(t+2h)\left[\Delta_h\lambda(t)-\lambda(t)\lambda(t+h)\right]\right\}\xi(t)\\&\quad=\Delta_h^3\xi(t)+p(t)\Delta_h^2\xi(t)+q(t)\Delta_h\xi(t)+r(t)\xi(t)\end{aligned}$$

对所有 $t\in\mathcal{H}$ 均成立。因此我们有

$$|\Delta_h\psi(t)+\lambda(t)\psi(t)|\le\varepsilon$$

对所有 $t\in\mathcal{H}\backslash\{0,h\}$。由定理 2.5 及 $f(t)\equiv 0$，我们得出存在一个方程 (2.7) 的解 x，满足 $f(t)\equiv 0$，使得 $|\psi(t)-x(t)|\le K_0(-\lambda)\varepsilon$ 在 $\mathcal{H}\backslash\{0,h\}$ 上成立。这意味着

$$\left|\Delta_h^2\xi(t)+[\Delta_h\lambda(t)-\lambda(t)\lambda(t+h)]\xi(t)-x(t+2h)\right|\le K_0(-\lambda)\varepsilon=\tilde{\varepsilon},\quad t\in\mathcal{H}.$$

利用定理 3.4 及 $f(t)=x(t+2h)$，存在一个解 $\eta\colon\ \mathcal{H}\to\mathbb{R}$，满足差分方程

$$\Delta_h^2\eta(t)+[\Delta_h\lambda(t)-\lambda(t)\lambda(t+h)]\eta(t)=x(t+2h),\quad t\in\mathcal{H}\tag{5.6}$$

使得

$$|\xi(t)-\eta(t)|\le K_0(\lambda)K_0(-\lambda)\tilde{\varepsilon}=K_0(\lambda)(K_0(-\lambda))^2\varepsilon$$

对所有的 $t\in\mathcal{H}$。

接下来，我们将证明 η 也是在 $\mathcal{H}$ 上满足 (5.5) 的 (5.1) 的一个解。由 (5.6) 和离散乘积法则可得

$$\begin{aligned}\Delta_h x(t+2h) = \Delta_h^3\eta(t) &+ \left[\Delta_h\lambda(t+h) - \lambda(t+h)\lambda(t+2h)\right]\Delta_h\eta(t)\\ &+ \left[\Delta_h^2\lambda(t) - \lambda(t+h)\left(\Delta_h\lambda(t+h) + \Delta_h\lambda(t)\right)\right]\eta(t)\end{aligned}$$

对所有 $t \in \mathcal{H}$。因此我们得到

$$\begin{aligned}&\Delta_h^3\eta(t) + p(t)\Delta_h^2\eta(t) + q(t)\Delta_h\eta(t) + r(t)\eta(t)\\ &\quad= \Delta_h^3\eta(t) + \lambda(t+2h)\Delta_h^2\eta(t) + \left[\Delta_h\lambda(t+h) - \lambda(t+h)\lambda(t+2h)\right]\Delta_h\eta(t)\\ &\qquad+ \left\{\Delta_h^2\lambda(t) - \lambda(t+h)\left[\Delta_h\lambda(t+h) + \Delta_h\lambda(t)\right] + \lambda(t+2h)\left[\Delta_h\lambda(t) - \lambda(t)\lambda(t+h)\right]\right\}\eta(t)\\ &\quad= \Delta_h x(t+2h) + \lambda(t+2h)x(t+2h)\\ &\quad= 0\end{aligned}$$

对于 $t \in \mathcal{H}$。因此， η 也是 (5.1) 在 $\mathcal{H}$ 上满足 (5.5) 的一个解，因此，(5.1) 在满足 (5.5) 时具有 Hyers-Ulam 稳定性，其 Hyers-Ulam 稳定性常数为 $K = K_0(\lambda)(K_0(-\lambda))^2$。□

最后，我们考虑系数函数为以下形式的 (5.1)

$$\begin{aligned}p(t) &= -\lambda(t+2h),\\ q(t) &= \Delta_h\lambda(t+h) - \lambda(t+h)\lambda(t+2h),\\ r(t) &= \Delta_h^2\lambda(t) - \lambda(t+h)\Delta_h\lambda(t+h) - \left(\lambda(t+h) + \lambda(t+2h)\right)\Delta_h\lambda(t)\\ &\qquad+ \lambda(t)\lambda(t+h)\lambda(t+2h),\end{aligned} \tag{5.7}$$

其中 $\lambda:\ \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ 且对于某个 $\omega \in \mathcal{H}$， $\lambda(t+\omega) = \lambda(t)$。

定理5.5. *假设系数函数 λ 对于 $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}\backslash\{\pm\frac{1}{h}\}$ 满足 (2.3)，且 $0 < |e_{\pm\lambda}(nh)| \neq 1$，其中离散指数函数由 (2.1) 给出。设 $S_0 = S_0(\pm\lambda)$ 和 $S_k = S_k(\pm\lambda)$ 对于 $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ 分别由 (2.4) 和 (2.5) 给出。此外，设 $K_0(\pm\lambda)$ 分别如 (2.6) 和 (2.8) 所示。则 (5.1) 在满足 (5.7) 时，在 $\mathcal{H}$ 上具有 Hyers-Ulam 稳定性，其 Hyers-Ulam 稳定性常数为 $K = (K_0(\lambda))^2K_0(-\lambda)$。*

证明。 定理5.5 的证明采用与定理 5.4 相同的方法。注意，现在我们必须构造一个形如 $\Delta_h\psi(t+2h) - \lambda(t+2h)\psi(t+2h)$ 的表达式，其中

$$\psi(t) := \Delta_h^2\xi(t-2h) + [\Delta_h\lambda(t-2h) - \lambda(t-2h)\lambda(t-h)]\xi(t-2h).$$

这样便以类似的方式完成证明。 □

例5.6。固定步骤 大小为 $h>0$，其中 $h\neq\frac{1}{\pi}$、$\frac{1}{2\pi}$、$\frac{2}{3\pi}$。现在我们考虑在 $\mathcal{H}$ 上的 (5.1) 和 (5.2)。Set

$$\lambda(t)=\begin{cases}\pi & \text{if} \quad \frac{t}{h}\equiv 0 \mod 2,\\ 2\pi & \text{if} \quad \frac{t}{h}\equiv 1 \mod 2.\end{cases}$$

那么，λ 是 $\mathcal{H}$ 上的二周期，其中 $\lambda_0=\pi$ 和 $\lambda_1=2\pi$，并且

$$\begin{aligned}
p(t)&=\lambda(t+2h)=\lambda(t),\\
q(t)&=2\Delta_h\lambda(t+h)+\Delta_h\lambda(t+2h)-\lambda(t+2h)\lambda(t+3h)\\
&=2\Delta_h\lambda(t+h)+\Delta_h\lambda(t)-\lambda(t)\lambda(t+h)\\
&=\begin{cases}-\frac{\pi}{h}-2\pi^2 & \text{if} \quad \frac{t}{h}\equiv 0 \mod 2,\\ \frac{\pi}{h}-2\pi^2 & \text{if} \quad \frac{t}{h}\equiv 1 \mod 2,\end{cases}\\
r(t)&=\Delta_h^2\lambda(t)+\lambda(t)\Delta_h\lambda(t+2h)-\lambda(t)\lambda(t+2h)\lambda(t+3h)\\
&=\Delta_h^2\lambda(t)+\lambda(t)\Delta_h\lambda(t)-\lambda^2(t)\lambda(t+h)\\
&=\begin{cases}-\frac{2\pi}{h^2}+\frac{\pi^2}{h}-2\pi^3 & \text{if} \quad \frac{t}{h}\equiv 0 \mod 2,\\ \frac{4\pi}{h^2}-\frac{2\pi^2}{h}-4\pi^3 & \text{if} \quad \frac{t}{h}\equiv 1 \mod 2.\end{cases}
\end{aligned}$$

由含有 $A=\pi$ 和 $B=2\pi$ 的例 4.2 可得

$$\begin{array}{rclcrcl}
S_0(\lambda) &=& \frac{1}{1+h\pi}+\frac{1}{(1+h\pi)(1+2h\pi)}, & & S_0(-\lambda) &=& \frac{1}{|1-h\pi|}+\frac{1}{|1-h\pi||1-2h\pi|},\\
S_1(\lambda) &=& \frac{1}{1+2h\pi}+\frac{1}{(1+h\pi)(1+2h\pi)}, & & S_1(-\lambda) &=& \frac{1}{|1-2h\pi|}+\frac{1}{|1-h\pi||1-2h\pi|},
\end{array}$$

and

$$e_{\pm\lambda}(2h) \;=\; (1\pm h\pi)(1\pm 2h\pi).$$

此外，我们看到

$$\begin{aligned}
\max\{S_0(\lambda),S_1(\lambda)\}&=S_0(\lambda),\\
\max\{S_0(-\lambda),S_1(-\lambda)\}&=\begin{cases}S_1(-\lambda) & \text{if} \quad h\in\left(0,\frac{1}{2\pi}\right)\cup\left(\frac{1}{2\pi},\frac{2}{3\pi}\right),\\ S_0(-\lambda) & \text{if} \quad h\in\left(\frac{2}{3\pi},\frac{1}{\pi}\right)\cup\left(\frac{1}{\pi},\infty\right).\end{cases}
\end{aligned}$$

采用定理5.2，当步长为 $h>0$ 且满足 $h\neq\frac{1}{\pi}$，$\frac{1}{2\pi}$，$\frac{2}{3\pi}$时，方程(5.1)结合(5.2)在 $\mathcal{H}$上具有 Hyers-Ulam 稳定性，其Hyers-Ulam 稳定性常数为 $K=K_0(\lambda)(K_0(-\lambda))^2,$，其中由(2.6)和(2.8)可得

$$K_0(\lambda):=\frac{h|e_\lambda(2h)|}{|1-|e_\lambda(2h)||}\max\{S_0(\lambda),S_1(\lambda)\}=\frac{2h(1+h\pi)}{(1+h\pi)(1+2h\pi)-1}=\frac{2(1+h\pi)}{\pi(3+2h\pi)},$$

and

$$K_0(-\lambda) := \frac{h|e_{-\lambda}(2h)|}{|1-|e_{-\lambda}(2h)||}\max\{S_0(-\lambda), S_1(-\lambda)\} = \begin{cases} \frac{h(2-h\pi)}{|1-|e_{-\lambda}(2h)||} & \text{if} \quad h \in \left(0, \frac{1}{2\pi}\right) \cup \left(\frac{1}{2\pi}, \frac{2}{3\pi}\right), \\ \frac{2h^2\pi}{|1-|e_{-\lambda}(2h)||} & \text{if} \quad h \in \left(\frac{2}{3\pi}, \frac{1}{\pi}\right) \cup \left(\frac{1}{\pi}, \infty\right) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2-h\pi}{\pi(3-2h\pi)} & \text{if} \quad h \in \left(0, \frac{1}{2\pi}\right), \\ \frac{h(2-h\pi)}{2h^2\pi^2-3h\pi+2} & \text{if} \quad h \in \left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right), \\ \frac{2-h\pi}{\pi(3-2h\pi)} & \text{if} \quad h \in \left(\frac{1}{\pi}, \frac{3}{2\pi}\right), \\ \frac{2h}{2h\pi-3} & \text{if} \quad h \in \left(\frac{2}{3\pi}, \infty\right). \end{cases}$$

具体而言，Hyers-Ulam 稳定性常数 $K = K_0(\lambda)(K_0(-\lambda))^2$ 由下式给出

$$K = \begin{cases} \frac{2(1+h\pi)(2-h\pi)^2}{\pi^3(3+2h\pi)(3-2h\pi)^2} & \text{if} \quad h \in \left(0, \frac{1}{2\pi}\right), \\ \frac{2h^2(1+h\pi)(2-h\pi)^2}{\pi(3+2h\pi)(2h^2\pi^2-3h\pi+2)^2} & \text{if} \quad h \in \left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right), \\ \frac{2(1+h\pi)(2-h\pi)^2}{\pi^3(3+2h\pi)(3-2h\pi)^2} & \text{if} \quad h \in \left(\frac{1}{\pi}, \frac{3}{2\pi}\right), \\ \frac{8h^2(1+h\pi)}{(3+2h\pi)(3-2h\pi)^2} & \text{if} \quad h \in \left(\frac{2}{3\pi}, \infty\right). \end{cases}$$

至此，最后一个例子结束。

6. 结论

本文利用关于具有周期系数的一阶线性 h差分方程的已有结果，证明了具有特定形式周期系数的线性二阶Hill型 h差分方程的Hyers-Ulam 稳定性，并求得其Hyers-Ulam常数。具体而言，如果离散指数函数在 nh处的值不为模为 1，其中 $n \in \mathbb{N}$ 为周期， $h > 0$ 为步长，那么该方程就是Hyers-Ulam 稳定的。我们还详细给出了Hyers-Ulam常数的相关信息。在此基础上，证明了若干相关三阶 h差分方程的Hyers-Ulam 稳定性。文中还给出了二阶和三阶情形的例子。

致谢

第二作者获得了JSPS KAKENHI 项目编号 JP20K03668的资助。

参考文献

[1] D. R. Anderson 和 M. Onitsuka，具有常系数的二阶 h-差分方程 Hyers–Ulam 稳定性的最佳常数，*Results Math.*，第 74 卷，第 151 页（2019年）。doi.org/10.1007/s00025-019-1077-9

[2]D. R. Anderson、M. Onitsuka 和 J. M. Rassias，具有周期系数的一阶 h-差分方程 Ulam 稳定性的最佳常数，*J. Math. Anal.Appl.*，491 (2020) 124363。doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124363

[3] S. András 和 A. R. Mészáros，通过皮卡算子研究时间尺度上动态方程的乌拉姆–海尔斯稳定性，应用数学与计算，219 (2013) 4853–4864。[4] N. Brillouët–Belluot、J. Brzdęk 和 K. Ciepliński，关于乌拉姆型稳定性的一些最新进展，抽象与应用分析，2012 卷，文章编号 716936，共 41 页。[5] J. Brzdęk、D. Popa、I. Raşa 和 B. Xu，《算子的乌拉姆稳定性》，《数学分析及其应用》丛书，学术出版社，2018。[6] J. Brzdęk 和 P. Wójcik，关于某些差分方程的近似解，澳大利亚数学学会会刊，95 卷第 3 期，第 476–481 页（2017）。[7] L. Cˇadariu、D. Popa 和 I. Raşa，具有非常系数的二阶线性微分算子的乌拉姆稳定性，Symmetry 12:9 (2020), 1451。doi.org/10.3390/sym12091451[8] D. Dragičević，某类受扰希尔方程的海尔斯–乌拉姆稳定性，Results Math 76，129 (2021)。doi.org/10.1007/s00025-021-01442-1[9] R. Fukutaka 和 M. Onitsuka，具有周期系数的一阶齐次线性微分方程海尔斯–乌拉姆稳定性的最佳常数，J. Math. Anal. Appl.，473:2 (2019) 1432–1446。[10] R. Fukutaka 和 M. Onitsuka，某类希尔方程的 Ulam 稳定性，Symmetry 11，1483 (2019)。[11] R. Fukutaka 和 M. Onitsuka，希尔方程 Ulam 稳定性的最佳常数，数学科学通报，163 (2020) 102888。doi.org/10.1016/j.bulsci.2020.102888[12] L. Hua、Y. Li 和 J. Feng，时间尺度上动态积分方程的海尔斯–乌拉姆稳定性，Mathematica Aeterna，第 4 卷第 6 期，第 559–571 页（2014）。[13] D. H. Hyers，关于线性泛函方程的稳定性，美国国家科学院院刊，27 (1941) 222–224。[14] S.-M. Jung 和 Y. W. Nam，皮洛逻辑斯蒂差分方程的海尔斯–乌拉姆稳定性，非线性科学与应用杂志，第 10 卷，第 3115–3122 页（2017）。[15] Y. W. Nam，双曲莫比乌斯差分方程的海尔斯–乌拉姆稳定性，Filomat，32;13 (2018)，4555–4575。doi.org/10.2298/FIL1813555N[16] Y. W. Nam，椭圆莫比乌斯差分方程的海尔斯–乌拉姆稳定性，Cogent 数学与统计，第 5 卷第 1 期，第 1–9 页（2018）。[17] Y. W. Nam，双曲莫比乌斯差分方程的海尔斯–乌拉姆稳定性，应用数学与计算，356(1) (2019)，119–136。doi.org/10.1016/j.amc.2019.03.033[18] D. Popa，常系数线性递推关系的海尔斯–乌拉姆稳定性，差分方程进展，（2005）2005: 407076。[19] D. Popa，线性递推关系的海尔斯–乌拉姆–拉西阿斯稳定性，J. Math. Anal. Appl.，309 (2005) 591–597。[20] H. Rasouli、S. Abbaszadeh 和 M. Eshaghi，近似线性递推关系，应用分析杂志，24:1 (2018) 81–85。[21] Th. M. Rassias，关于巴拿赫空间中线性映射的稳定性，美国数学会会刊，72 (1978) 297–300。[22] Y. H. Shen，时间尺度上一阶线性动态方程的乌拉姆稳定性，数学成果，72(4) (2017) 1881–1895。[23] Y. H. Shen 和 Y. J. Li，时间尺度上一阶非齐次线性动态方程的海尔斯–乌拉姆稳定性，数学研究通讯 35:2 (2019) 139–148。doi.org/10.13447/j.1674-5647.2019.02.05[24] S. M. Ulam，《数学问题集》，Interscience，纽约，1960。

一类离散Hill方程的Hyers-Ulam 稳定性

19康考迪亚学院数学系，美国明尼苏达州穆尔黑德 56562，0000-0002-3069-2816电子邮箱: andersod@cord.edu 冈山理科大学应用数学系，日本冈山 700-0005，0000-0001-8598-0746电子邮箱: onitsuka@ous.ac.jp