数学教育中的计算机辅助证明与自动化方法

ThierryNoah
Dana-Picard耶路撒冷技术学
院 耶路撒冷，以色列
ndp@jct.ac.il

本文是对2022年8月在海法（以色列）举行的ThEdu'22研讨会特邀主题演讲的扩展版本。简要介绍计算机代数系统、动态几何系统及其他实用技术的发展后，我们展示这些技术对数学教育以及更广泛的STEAM教育框架所产生的影响。我们尤其探讨如何将数学教育转变为"探索—发现—猜想—证明"的模式，避免将软件当作黑箱使用。这一模式与所谓的21世纪教育的4C十分契合。沟通与协作不仅体现在人与人之间，也体现在机器之间以及人与机器之间。输出结果的某些特征凸显了批判性思维的必要性。我们还讨论了使用自动化命令进行探索和发现的做法，并提及其存在局限性的情形。我们以参数积分（描述某个数学概念的"认知邻域"）、平面几何以及平面曲线研究（包络线、等视曲线）中的例子来阐释这一主题。部分例子给出了完整的推导过程，其他例子则作了解释并附上参考文献。

1 引言

1.1 简述漫长历史，并融入个人视角。

20世纪80年代，计算机辅助证明并不总是容易得到学界认可。在机器辅助计算兴起之初，只有数值算法能够提供近似结果。这些算法并不总能给出某个问题的所有解。

后来，人们开始开发并实现符号计算算法。有时，研究者必须使用通用语言，针对自己的问题编写专门程序。M. Schaps 在 80 年代对一般结合代数进行分类时 [38, 39] ，编写了用于计算给定代数的霍赫希尔德上同调群和自同构群的程序；这两种程序各自都能验证另一种程序所得结果的正确性。同调群消失意味着给定代数是刚性的，因此它确定了簇$\mathbf{Alg}_n$ 中的一个分支；该簇以参数化n–维结合代数。对于局部代数，即形如 $\mathbb{F}[X]/\mathscr{I}$ 的代数，其中 $\mathscr{I}$是多项式环 $\mathbb{F}[X]$, 中的一个理想，我们开始使用 Gr¨obner 基计算。该项目实现了对维数6、7和8的一般代数的分类；参见 [38]。更低维数的情形此前已有研究。

世界上其他研究人员当时已经在使用计算机计算，但有时会附上一则免责声明，说明期刊对这些计算不承担责任。计算过程很耗时（对于一个局部代数，使用 4.77Hz 的个人电脑计算可能需要 20 分钟）。为了阅读输出结果，我们必须将其打印出来（打印在宽幅连续纸上），并保存好打印件，以备有人要求核查。

软件的开发与使用并非始终是研究人员的专属。当然，只要计算机体积过大、价格过高，就无法进入常规课堂。随着

J. Marcos、W. Neuper 和 P. Quaresma（编）：《教育软件的定理证明组件》2022（ThEdu'22），EPTCS 375，2023年，第 2–23 页，
doi:10.4204/EPTCS.375.2

© Th. Dana-Picard 本作品采用知识共享署名许可协议授权。

首批手持设备和个人计算机的出现，情况发生了变化。手持计算器只能进行数值运算，但符号计算算法很快便得到开发，并应用于各种设备中。Derive 软件存储在一张小型软盘上，这得益于算法的选择。例如，Derive 计算定积分时所依据的定理既容易证明，又很少在教科书中介绍 [24]。在 [69]，中，我们提出让 Derive 计算一个参数广义积分。Derive 立即用一般参数值算出了结果；当时，其他系统都做不到这一点，只能处理较小的整数值。后来，这款软件的一个“克隆版”被移植到 TI92 上。如今，GeoGebra 已推出适用于个人电脑、iPad 和智能手机的版本。近来，各类数学软件的移动版本使户外数学活动得以开展 [6, 5]。

传统数学教学方法有时会让教师认为数学是一个固定的知识领域。甚至教师培训者最终也会这样认为。然而，世界已经发生了深刻变化，各种可用技术将数学转变为一个实验领域，使人们在教育早期阶段就能发现新事物。P. Quaresma 指出（[61]）：“科学研究和各级教育主要都关注科学知识的发现、验证、沟通和应用。在人类文明进程中，学习、再利用、发明和归档是知识积累的四个关键方面。数千年来，书面书籍和其他实体媒介一直支撑着这一知识积累循环，而严谨推理始终发挥着至关重要的作用。如今，得益于基于计算机应用的新范式，这一过程正变得日益有效。借助此类计算机应用进行几何推理，是未来知识积累与传播最具吸引力的挑战之一。”

本文主要讨论两类数学软件，即计算机代数系统（CAS）和动态几何系统（DGS）[1]。实际上，两者之间的界限正变得越来越模糊。例如，GeoGebra 最初是一个动态几何系统，但后来发展出了其他功能，并嵌入了一个名为 Giac 的计算机代数系统 [52] 。新增功能还包括增强现实工具，可用于户外活动等；参见 [12, 53]。

本文是 2022 年 8 月在以色列海法举行的 ThEdu’22 研讨会主题演讲的扩展版本。

1.2 计算机代数系统。

几十年前，人们就编写了先进的专用程序，例如用于群论的 GAP（其名称是 Groups, Algorithms, Programming 的首字母缩写，如今其应用范围已广泛得多）、用于数论的 FeliX、用于代数几何的 Macaulay2、用于交换代数计算的 CoCoA，等等。这些都是计算机代数系统（CAS）的例子。通用计算机代数系统也开始整合各种数学领域，以及符号算法和数值算法；如今，它们已成为功能强大的多领域助手。网络还提供了交互式平台，供用户使用不同的计算机代数系统，这些系统在后台运行；面向教育的平台 WIMS 就是其中一例。

计算机代数系统的一项核心功能，是能够以类似传统手工计算的方式处理符号数学表达式。当然，命令的语法可能各不相同，有些计算机代数系统也可能比其他系统更易于使用。与学生一起使用时，这可能会带来问题。

[1]还有其他类型的软件，如证明助手和定理证明器，其重要性无论如何强调都不为过。感兴趣的读者可参阅近期发表于 ThEdu 的相关成果，本卷中也有收录

所需功能包括编程语言（使用户能够输入自己的算法）、解释器和化简器。带有多个选项的 **化简** 命令非常重要（模式识别可能不足以引导用户采用高效算法）。请注意，对于给定的计算，输出可能与用户手工计算所得的结果大不相同（如果手工计算可行的话），而且不同的软件包可能会给出不同的输出。化简有助于用户理解，不同格式的输出可能表示同一个数学对象。第 4 节中的一些例子说明了这一点。

学生和教师都需要使用微积分、线性代数及其他领域的算法。因此，计算机代数系统必须包含丰富的算法和特殊函数库。我们引用维基百科页面[2]，以列出更全面的所需功能，其中也包括一些开发者感兴趣的能力。该页面上的第一份列表没有提到绘图功能：可视化、绘图和动画。这些功能出现在第二份列表中，重要性并不亚于其他功能。我们将在第 4 节对此进行说明。

维基百科页面还指出，计算机代数系统也应包含一种编程语言，以便用户实现自己的算法；支持任意精度数值运算、精确整数运算和数论功能；以二维形式编辑数学表达式；绘制二维和三维函数图像及参数图，并为其制作动画；绘制图表和示意图；提供应用程序接口，以便通过数据库等外部程序与其连接（我们稍后将讨论不同系统之间进行对话的必要性），或在编程语言中调用计算机代数系统；支持字符串处理，例如匹配和搜索；提供用于应用数学的附加组件，例如物理学、生物信息学和计算化学，以及用于物理计算的软件包等。一些计算机代数系统还包含图形制作与编辑功能，例如计算机生成图像；也包含信号处理功能，如图像处理和声音合成。动态几何系统或许能够满足其中若干项要求。

作为现有大量软件包的可视化示例，图1展示了谷歌搜索“计算机代数系统”后的结果。



图1：谷歌搜索计算机代数系统的可视化结果

危险之处在于将计算机代数系统当作黑箱使用。也就是说，用户输入命令，却不知道它是如何工作的。用户输入数据、得到输出，然后依赖这些结果。显而易见，教育者不会选择这种做法。

1.3 动态几何系统。

后来，又出现了其他称为动态几何系统（DGS）的软件包：Geometric SketchPad、Cinderella、Cabri Geometer、GeoGebra 等。编程需求并未消失，但交互性是其核心特征。人机交互的方式不同于计算机代数系统（CAS）通常提供的方式。动态几何系统（DGS）提供了表示和操作几何对象的方法，而这些方法无法通过使用圆规和直尺进行传统纸笔作业来实现。这些不同的环境为学生提供了探索几何对象、测量

[2]https://en.wikipedia.org/wiki/Computer_代数_系统

屏幕上和户外的对象的机会。它们有助于学生形成对许多性质和定理的不同理解。动态几何系统提供了拖动和测量功能，但教师有时不愿使用这些功能，因为他们担心证明的作用会逐渐消失。Mariotti [55]对这些担忧进行了反思，同时提出了更积极的看法。她的反思基于使用 Cabri 软件开展的工作。

动态几何系统（DGS）既提供按钮驱动的命令，也提供书面命令，其语法与计算机代数系统（CAS）中的语法相似。通常，每个命令都有书面形式和对应按钮，但两者的功能有时略有不同。例如，在 GeoGebra 中，将点附着到对象上的按钮有一个书面命令版本，可用于按钮无法处理的情况。总体而言，这种按钮与书面命令并存的双重特性提升了软件的易用性。

主要的动态功能是拖动点和滑动条。基本对象是自由点，其他构造依赖于这些自由点。用鼠标拖动一个自由点，会自动改变所有依赖于它的对象。例如，线段 AB 的中点I 取决于端点 A 和B。用鼠标拖动A （或B，一次拖动一个），会改变I。滑动条对应一个实参数；它可以用于定义依赖于该参数的对象，并动态改变这些对象。对于包含多个参数的构造，每个参数都要定义一个滑块（通常软件会自动提示）。使用滑块可以创建动态图形和构造。拖动和滑块将几何学变成了一个实验领域。如今，几何教学中的关键词是探索和实验。通过拖动和滑块进行改变，可以为所研究的情形提供无穷多个例子。这并非证明，但能增强确信。此外，还可以提出猜想，随后必须对其进行证明。在使用动态几何系统时，探索—猜想—证明这一过程无处不在。

计算机代数系统也提供动画，但有一个重要区别。使用计算机代数系统时，动画由一条带有若干选项（大小、每秒帧数等）的特定命令定义。随后动画会自动运行，无需人为干预。人可以观察运行情况，有时也可以进行干预，但这种干预并不重要。动态几何系统中的动画几乎可以完全自动运行：滑块提供的动画开启选项是一项重要功能，有时还会为研究对象配合使用轨迹开启选项。动画也可以由鼠标驱动，即由人来控制。第 4 节给出了一些示例。感兴趣的读者还可以参阅维基百科上的专门页面[3]。

熟练地用手操作，会使软件成为人体某种意义上的义肢；Debray 认为，能够制造义肢正是人之所以为人的原因 [45]。也许我们现在讨论的是增强型人类？我们更愿意说，这是一个完全的人，一个具有强大数字素养的人。

1.4 人机交互与机机交互的核心问题 n

计算机代数系统和动态几何系统的出现，为研究和教育开辟了广阔的新领域。二者各自提供的功能各不相同，但也有交集。通过将这两类技术联网，可以得出重要结果： [64, 32], 其中一种在几何和动力学方面更强大，另一种则具有更强的代数运算能力。毕竟，研究一个数学对象需要依托不同的表征寄存器（代数、数值、几何等） [48]。例如，有些软件包仅用于二维或三维。GeoGebra 两者兼备，其中二维窗口与三维窗口中的xy–平面完全同步。当然，它们也与代数窗口同步。考虑同一对象的不同表征

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Interactive_几何学_软件

，也就是从多个视角进行考察，一方面能够在不同数学领域之间搭建桥梁（参见第 2 节），另一方面能够推导出新的定理，或为经典定理找到新的证明（例如 [40]）。迄今为止，为了同时利用这两种环境——计算机代数系统和动态几何系统——我们通常需要在两个系统之间复制粘贴。计算机代数系统与动态几何系统之间缺乏沟通的问题长期以来一直受到关注 [64, 65, 32], 我们希望在不久的将来找到解决方案。实际上，其中一种解决方案是将计算机代数系统嵌入 GeoGebra [52], 但截至目前，动态几何系统和计算机代数系统仍然彼此独立。近年来，动态几何的功能已融入计算机代数系统，而计算机代数系统的核心分支也已在动态几何系统中实现 [52]。要充分整合所有功能，仍需进一步努力。

除了机器与机器之间的沟通和协作之外，人机沟通中也出现了新的行为。这也极大地影响了人与人之间的沟通和协作。我们是否应该提到，在新冠疫情危机期间，人与人之间以及人与机器之间的沟通出现了新的形式 [29]?

综合运用各种技术，包括网页浏览和数据挖掘，能够极大地推动所谓的21世纪教育的4C各个分支的发展：沟通、协作、批判性思维和创造力 [20]。通常认为前两个C发生在人与人之间，但人机之间以及机器与机器之间的沟通和协作也至关重要。在 [33], 中，我们甚至提出了第五个C，即好奇心，这是人类继续前进的必备条件。由此可以考虑新的教学情境，并探索应对这些情境的新方法。数学教育已从传统的定义—定理—证明模式转变为探索性领域。其过程如今可以是探索—发现—猜想—证明（或证伪）。

4C 是科学、技术、工程、艺术与数学教育方法的概念基础。可以通过抽象代数、组合数学与积分、平面代数曲线和代数曲面的研究，以及数学与艺术中的示例和活动来阐释这一理念。相关内容可参见 [63] 中的论文。

1.5 数值表示与符号表示

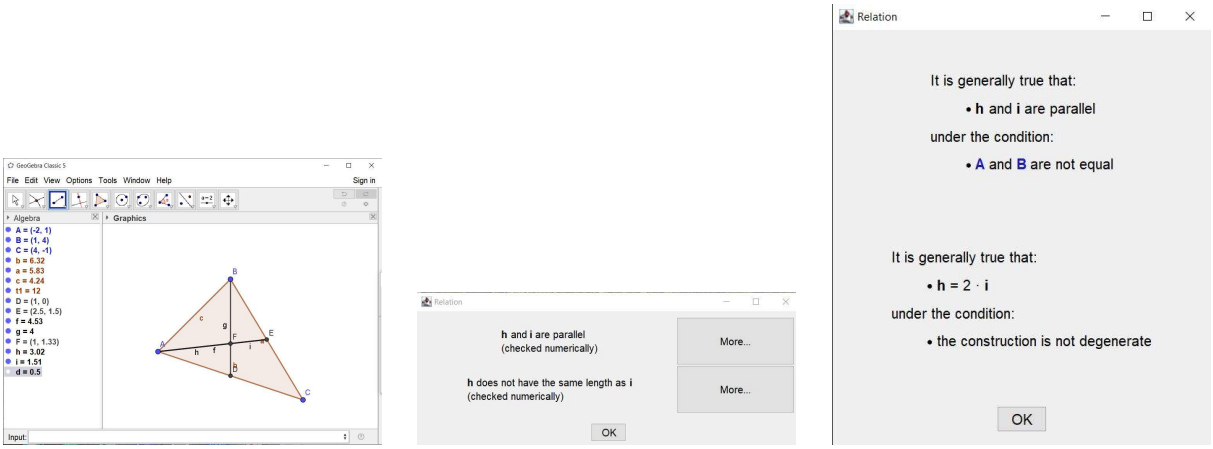
从符号数据到绘图，需要计算大量数值数据，并可根据需要显示出来。数值数据也意味着需要掌握近似方法 [30]。选定网格（3D 情况下）或定义域区间的划分（2D 情况下）后，通过插值获得这些数值数据。这可能会导致奇怪的绘图 [78, 79]。可以通过设置不连续性选项，或使用非标准网格来解决这一问题（Maple 为 3D 绘图提供了约 20 种非标准网格）。

出于其他需求，数值算法与符号算法之间的差异促使 GeoGebra 的开发者为例如 **Relation** 命令[4]提供两种输出。图 2 展示了输出结果的屏幕截图。常规的 Relation 命令仅根据数值数据给出答案。“更多”按钮则会运行其他算法，这次运行的是符号算法，因此输出结果更加精确。它是教育领域的一种高效工具，可协助教师设计新的活动。

2 数学概念的认知邻域

无论是面对单个学生还是整个班级，教师都会面临一些挑战

[4]本文使用了 *GeoGebra Discovery* 的测试版。该软件包由 Z. Kov´acs 开发，基于常规版 GeoGebra。它包含一个更高级的 **Relation** 命令。该软件包可从 https://github.com/kovzol/geogebra-discovery 免费下载（请在该页面查看最新更新版本）。



(a) (b) (c)

图 2：Relation 命令提供的弹出窗口

1. 运用不止一种新近可用的技术，激发学生对交织运用各种技巧的好奇心。2. 让数学更具吸引力，并通过探索新的方向，展现它作为一个充满活力的知识领域的一面。3. 发现表面上不同领域之间的联系。在传统课程中，各门课程通常作为彼此独立的主题来讲授，彼此之间往往缺少衔接。例如，尽管区间 $\mathbb{R}$ 上连续函数（分别为可微函数）集合具有向量空间的自然结构，但有些教师仍不愿在《线性代数》课程中引入《微积分》的例子。4. 探索其他“看起来像”（巩固？）所研究的数学对象的数学对象。通常由教师设计这类任务；也就是说，在这一情境中，教师是主动且富有创造力的。

积分教学的进阶步骤之一，是学习依赖一个（或多个）参数的定积分。这比普通定积分更抽象，在应用情境中也十分重要 [42]。对参数定积分的研究能建立数学内部的联系：积分、组合数学、物理问题中的应用；数学史相关主题也能进一步强化这些联系。数学概念、它们之间的桥梁以及借助工具实现的技术，再加上恰当的技术性论述（这是 Artigue [3] 创造的术语），共同构成了我们所说的认知邻域。在探索这样的认知邻域时，教师和学生会考察一些“看起来像”原始研究对象的数学对象。这类任务通常由教师设计；也就是说，在这一情境中，教师是主动且富有创造力的，而学生则复现教师的操作步骤。这些活动促使学生寻找相关材料。对学生最近发展区（ZPD [73]）的探索会逐步构建一个不断扩大的邻域。

可以发现与相邻数学主题以及“现实世界”情境之间的联系。在这里，学生更加自主，也能发挥更多主动性。实际上，教育者和学生都富有创造力。

图 3 展示了这种用于参数积分的构造，如 [43, 44] 中所探讨的。

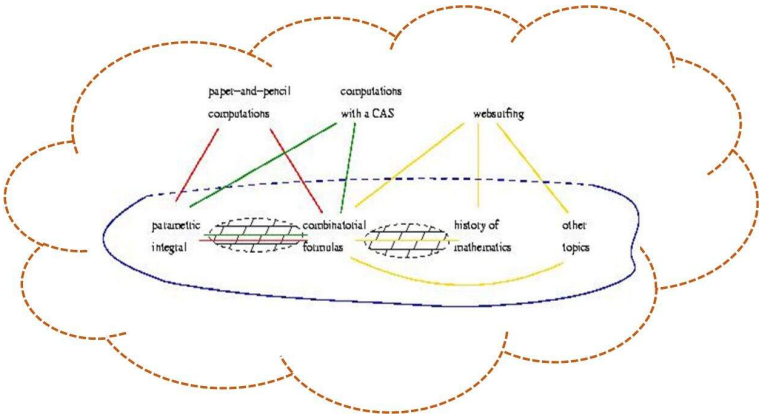


图3：认知邻域的可视化

3 下一步：几何学中的自动演绎（ADG）

在过去几十年里，这一研发领域取得了长足进展，已有数十篇论文和会议报告专门探讨相关进展。因此，我们只介绍其中一小部分。感兴趣的读者可以查阅我们提到的少数几篇论文中丰富的参考文献，也可以看看 ACA（计算机代数应用，尤其是教育专题会议，但不限于此）和 ADG 会议的论文集。在更早的时期，一篇简短的综述发表于 [26]。

在 [10] Botana和Ab´anades写道，ADG的定义如下：“研究和开发旨在证明几何定理的计算机程序。”随后，他们将这一领域追溯到1963年，当时Gelernter [49] 将其与人工智能联系起来。他们写道：“然而，这一领域真正兴盛起来是在20世纪80年代初期，当时吴文俊开发了一种基于Ritt特征集的代数方法，用于证明一类特定的几何定理 [76]。多位作者运用吴文俊的方法 [77, 75, 76]取得了令人瞩目的成果，促使研究人员考虑其他代数方法，其中基于Gr¨obner基的方法 [19] 被证明最为重要。”

多年来，其他研究人员和开发者也加入了这一领域。随着软件不断发展，相关定义也变得更加精确。2016年，我们可以看到如下描述 [1]：“我们所说的初等几何定理自动证明，是指通过计算代数几何方法来证明定理的途径；这一方法由吴文俊于四十年前开创，并因周氏的著作 [21]而广为人知。粗略地说，其思路是运用计算机代数方法提供算法，以确认（或否定）给定几何命题的真伪。更确切地说，目标是判定给定命题是否普遍成立，也就是说，除了一些由算法描述的退化情形外，该命题是否为真。”

不同类型软件的发展，在本例中即动态几何系统和自动定理证明器，使自动推理与动态几何得以结合。这些软件之间的协作非常成功。2020年，Kov´acs和Recio写道 [53]：“在过去半个世纪里，初等几何中的自动演绎日益成为自动推理领域最成功的成就之一。在这几十年间，人们研究并开发了各种方法和技术，用于自动证明和发现初等几何命题。另一方面，动态几何软件系统也相继出现，例如Cabri几何、C.a.R.、Cinderella、DrGeo、GeoGebra、几何画板、Geometry Expert、Geometry Expressions和Kig，这些系统在

数学教育中的应用日益广泛。其中一些拥有遍布全球的大量用户（超过三千万）。因此，将这两种工具（自动定理证明和动态几何）结合起来，是一个非常自然、富有挑战性且前景广阔的课题，目前正吸引着来自世界各地的逻辑、符号计算、软件开发、代数几何和数学教育领域的专家参与。”

几何学的一个核心主题是确定几何轨迹。已有许多研究成果，其中一些见于 [9, 8]。我们将在第4.2小节探索一些轨迹。人们已开发并在 GeoGebra 中实现了用于自动探索和发现几何轨迹的命令。我们将在第4.2小节展示这些命令。

在第4.3小节，我们将讨论另一个主题，即平面曲线参数族的包络线。尽管 Thom 曾抱怨说 [71] （早在 1962年）这一内容已从教学大纲中消失，但研究并未止步，许多论文都致力于探讨包络线、软件开发和数学教育。 [15, 14, 39, 13, 27, 33]列举了其中一小部分。对于实际问题，也必须开发近似方法；例如，参见 [67, 60]。GeoGebra 中已实现一个自动命令，用于确定平面曲线族的包络线。第4.3小节中给出了相关示例。最初的计算需要求解一个非线性方程组，这可以借助计算机代数系统完成。输出是一组曲线的参数表示，可能还需要化简，因此化简命令十分重要。检查方程并绘制图像后，可以发现各分支互为补集。通常需要借助代数工具加以证明。首先，必须将参数表示转换为多项式，然后便可应用 Gr¨obner 软件包。这些软件包可能未在动态几何系统中实现，因此必须将工作转移到另一个计算机代数系统中，通常是通过复制粘贴完成。得到的多项式在一个多项式环中生成一个理想。通过消去参数，可以导出包络线的隐式方程。此步骤通过用于计算 Gr¨obner 基的软件包完成；关于 Gr¨obner 基的理论，参见 [23, 57] ；关于有理曲线，参见 [68] 。再次使用计算机代数系统，可以对所得多项式进行因式分解，从而判断包络线是否可约。当然，计算机代数系统提供绘图功能，其输出可以验证此前通过动态几何系统所得的结果。

包络线有不同的定义，见 [18]；我们将在第4.3小节中用自动化方法展示这些定义。等距曲线以轨迹的形式求出；借助动态几何系统，可以清楚地说明它们与包络线之间的区别，如 [28] 所示。

我们稍后将讨论的第三个主题是平面曲线等光曲线的确定。这一问题已被研究多年 [22, 56, 70]。在技术丰富的环境中开展工作，带来了新的成果 [35,37]。近来，内等光曲线也得到了研究 [36]。 [34] 中还将一些动力学方法引入等光曲线的研究。截至目前，尚未实现用于等光曲线发现的专用命令；不过，现有功能足以支持探索、计算和结果验证。这是第4.4小节的主题。

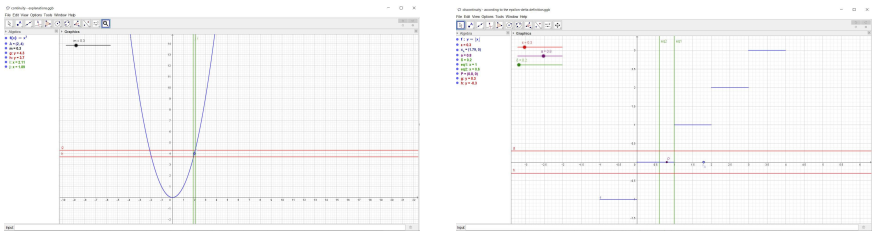
最后，我们想提及 Pavel Pech 的著作 [59]。其中一章专门讨论自动定理证明和自动发现。后续章节则借助多项式研究几何学中的经典定理，并使用 CoCoA——一款可免费下载、用于多项式环计算的软件；参见 [2]。

4 其他示例

现在，我们介绍几个技术可能发挥关键作用的数学活动。在探索、发现和证明中，我们使用 GeoGebra 和 Maple。

4.1 探究函数的连续性

掌握 $\varepsilon-\delta-$ 定义对学生来说往往很困难。借助技术进行探索能让理解变得更容易。为了让内容更容易理解、更直观，我们用 GeoGebra[5]开发了一个小程序。图 4 展示了两个屏幕截图。滑块可以分别调整ε 和 δ的值，这有助于初步探索。学生注意到， ε 确定了一个水平带， δ确定了一个垂直带，两者的交集是一个以点（$x_0, f(x_0)$为中心的矩形，问题在于函数的图像是否完全落在矩形内。当 ε 很小时，就会出现不连续性，而且没有任何 δ 的取值能实现这一点。之后，教师可以提出另一个小程序[6], ，其中



(a) 连续性 (b) 不连续性

图 4：根据 $\varepsilon-\delta-$ 定义探索函数的连续性

利用了 δ 与 ε 的依赖关系，如图 5 所示，并且只显示一个滑块。这个小程序需要事先进行人工操作，以发现 δ 与 ε之间依赖关系的公式。因此，它不适合用于探索，更适合用于说明，甚至有助于巩固新知识。当然，最理想的情况是学生能够开发这样的小程序，而不依赖教师。学生可以为此培养相应的技能。如果学生做不到，教师可以提供一些支架（[58], 第 105-107 页）。

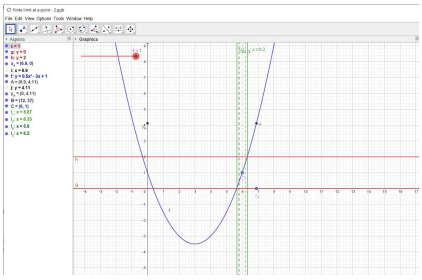


图 5：用于说明连续性的更高级步骤

4.2 几何轨迹的探索

GeoGebra 提供了多种自动命令，用于确定几何轨迹。根据具体情况，描迹点在几何上是否与运动点相关，或者描迹点是否必须满足给定条件，

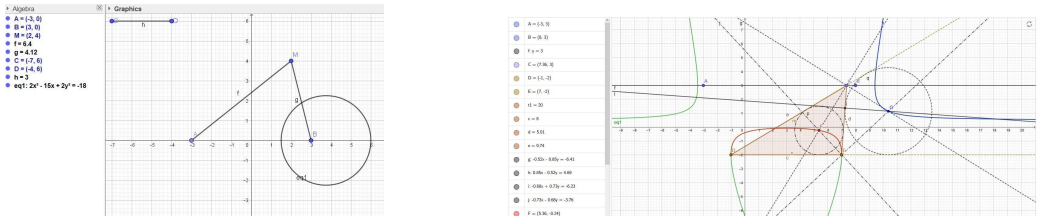
[5]可访问：https://www.geogebra.org/m/bkj8872v[6] https://www.geogebra.org/m/zsb6p2vd

（布尔表达式），输出形式各不相同：可以是曲线的绘图，也可以是绘图与隐式方程的组合。近期的发展还提供了平面区域的绘图[7]。

4.2.1 经典与较不经典的作图。

在平面上取两点A 和B 。满足比值AM/BM 等于k 的点M 的几何轨迹，在$k = 1$时是线段AB 的垂直平分线，否则是一个圆。可以使用轨迹命令，并通过滑块改变比值来探索这一问题（参见 https://www.geogebra. org/m/vqqkd57t）。对于每个参数值，都会给出一个隐式方程。

小程序 https://www.geogebra.org/m/v2kdhrus 展示了一个三角形的内心和旁心轨迹的作图，其中两个顶点固定，第三个顶点沿一条直线移动；见图 6(b)。这里使用的命令版本为 Locus(<Point Creating Locus line >, <Point>)，输出为轨迹的绘图，但无法得出方程。



(a) (b)

图 6：几何轨迹

可以采用相同的构造方法，寻找满足条件的点M 的几何轨迹：角 $\angle AMB = \theta$fro 给定的 θ。结果是一个圆。在这种情况下，教师应提醒学生，实际上，几何轨迹是去掉两个点A 和B后的圆，因为如果$M \in \{A, B\}$，那么角根本不存在。这是培养批判性思维的好机会 [20]。

4.2.2 抛物线准线之外。

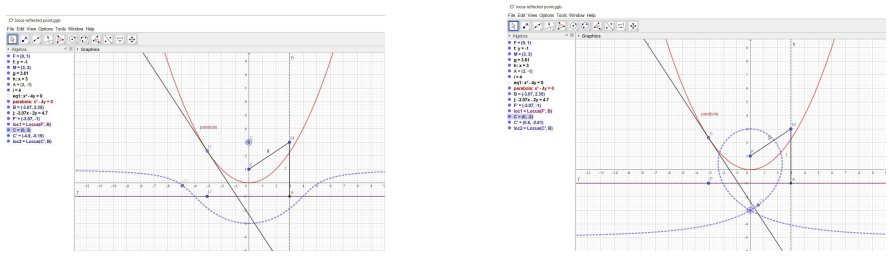
设 $\mathscr{P}$ 为方程为$y = x^2$的抛物线。记B 为 $\mathscr{P}$ 上的一点，C 为 $\mathscr{P}$的y–轴上的一点。令C' 为C 关于抛物线在B处的切线反射所得的像。图 7 展示了两个例子。Locus(<创建直线的点>, <点>)生成了点状绘图，但没有给出方程。可以检索平面曲线数据库，以确定得到的是哪条曲线，并尝试为其找到合适的方程。学生观察到，光滑曲线与具有重合点的曲线之间的极限情形是点C 为抛物线的焦点$\mathscr{P}$；在这种情况下，点C' 的几何轨迹就是抛物线的准线。

4.2.3 一条交叉曲线。

给定一个以原点为圆心的圆。我们研究圆的切线与坐标轴的截距中点所形成的几何轨迹。GeoGebra 中提供了一个自动命令——轨迹命令。文中给出了几个版本，学生需要从中选择。图 8 展示了一个操作界面的截图[8]： 其中进行了一项纯几何构造，使得

[7]Derive 完成了这项工作，以图形方式表示两个变量的不等式。

[8]https://www.geogebra.org/m/bmdfd3hm



(a) (b)

图 7：抛物线y–轴点关于切线反射所得的轨迹

可以使用轨迹（<点>，<点>）命令。此处，中点是描迹点，圆上的点是动点（术语详情见 [54]）。所得到的曲线可能无法直接识别

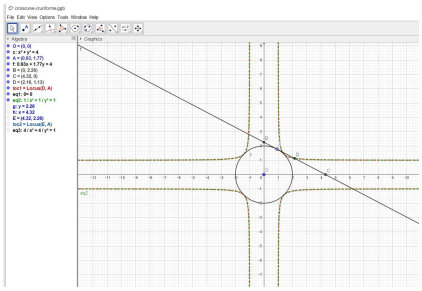


图 8：几何轨迹的自动探索

并不困难。在我们的例子中，圆的半径为 2。该几何轨迹的方程为

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1 \tag{1}$$

这个方程既可以手工推导，也可以借助计算机代数系统推导。反过来，也可以在经典平面曲线目录中找到它[9]，，但这种搜索并无助于理解。也许根据图像进行网络搜索会有所帮助，我们没有尝试。

注 1 方程（2）可以化为多项式方程，即

$$x^2+y^2=x^2y^2. \tag{2}$$

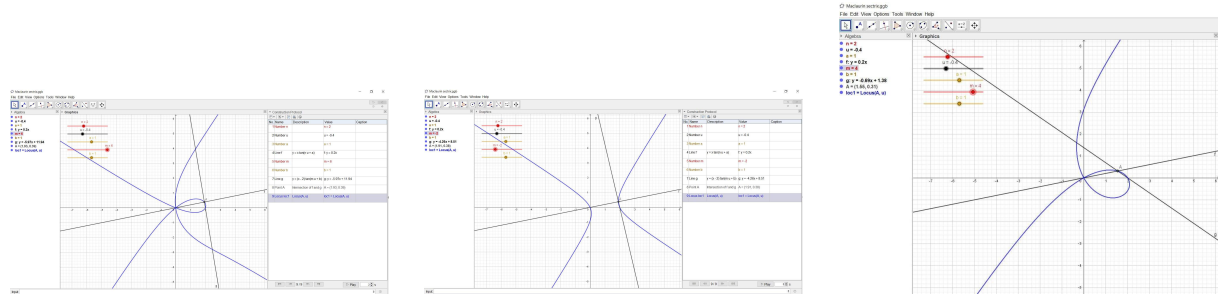
这可能表明，进行多项式计算的软件包对当前的探索有所帮助。这里也必须运用批判性思维，因为有效域并不相同。

4.2.4 一条六次曲线。

六次曲线是六次曲线。麦克劳林六次曲线是两条直线交点的几何轨迹，这两条直线分别以恒定角速度绕不同的点旋转，这些点称为极点。图 9

[9]例如 Mathcurve 网站。该曲线可在以下网址找到：https://mathcurve.com/courbes2d.gb/cruciforme/ cruciforme.shtml

展示了三个例子，角速度之比r 分别为 1/3、-1 或 2（等价地说，为 1/2）。在第一种情况下，得到的曲线是叶形线。请注意分支数量的不同。这些是 GeoGebra 小程序[10]的屏幕截图；通过定义多个滑块即可进行探索。



(a) $r = 1/3$ (b) $r = -1$ (c) $r = 2$

图 9：麦克劳林六次曲线

平面曲线图册将这些曲线展示为彼此独立的对象。滑块可连续改变参数的取值，从而发现若干看似不同的曲线实际上属于同一个族。直线分支的出现则需要进一步的理论推导。

4.3 包络线

包络线有 4 种不同的定义，参见 [18]（第 5 章）。Kock [50] 给出了其中三种，分别称为综合的、非谓述的和解析的定义。我们将根据不同的定义探讨这些例子，并看看自动化方法如何应用。更高级的例子可见于 [40, 27, 28]；专门的数据库也提供了许多例子。

定义 2 *[综合的]* 设 $\mathscr{C}_u$ 为一个依赖于实参数 u 的实平面曲线族。包络线 $\mathscr{E}$ 是特征点 M_u的并集，其中，特征点 M_u 是交点 $\mathscr{C}_u \cap \mathscr{C}_{u+\varepsilon}$ 的极限点，其中 $h \to 0$。换言之，包络线是邻近曲线 $\mathscr{C}_u$交点的极限点集合，

定义 3 *[非谓述的]* 包络线 $\mathscr{E}$ 是一条曲线，在其每个点处都与给定曲线族中的唯一一条曲线相切。$\mathscr{E}$ 与 $\mathscr{C}_u$ 相切的点的轨迹称为 $\mathscr{E}$–特征点 M_u。

定义 4 *[解析的]* 假设曲线族 $\mathscr{C}_u$ 由方程 $F(x, y, u) = 0$ 给出（其中 u 是实参数，且 F 关于 u 可微），则包络线 $\mathscr{E}$ 由以下方程组的解确定：

$$\begin{cases} F(x,y,u) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u} F(x,y,u) = 0 \end{cases}, \tag{3}$$

在定义 4 中，包络线被描述为：在三维 (x, y, u)-空间中，属于方程为 $F(x,y,u) = 0$ 的曲面且切平面

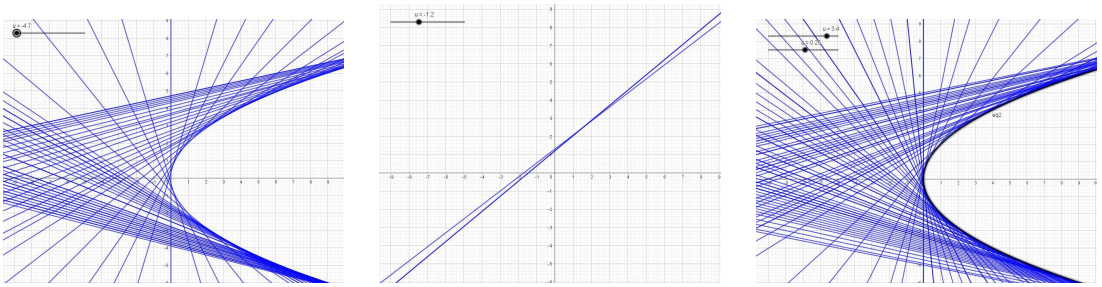
[10] https://www.geogebra.org/f/kwzvga3rpn

平行于u轴的点（或奇异点，因此严格来说没有切平面）的投影。见 [18], 第 102 页。请注意，解析的定义 4 是 Berger [7]（第 9.6.7 节和第 14.6.1 节）和 Rovenski [66] 给出的唯一一种定义。后一本书详细介绍了如何使用 Maple 求包络线。

Remark 5 我们选择用 u 表示参数，因为在 *GeoGebra* 中，t 有特殊用途。

4.3.1 直线族的包络线

我们考虑由方程 $F(x,y,u) = 0$ 给出的直线族，其中 $F(x,y,u) = x + uy + u^2$。文献 [35] 曾使用 Derive 研究过这一族；我们在此研究它，以展示自动命令的用法（如果可行）。图10(a)展示了首次探索的结果，使用了滑块和轨迹开启[11]。鼠标在滑块上的移动速度会影响输出中直线的密度。绘制的直线不要太多，这样既能保留直线族的视觉效果，也不会形成一片完全着色的区域。



(a) 轨迹开启　(b) 两条邻近直线　（c）带包络线

图10：探索直线族

图10展示了一个 GeoGebra 会话，利用其内置的计算机代数系统，根据定义 2 求出特征点。这些点的坐标为 $M_u = (u^2 + u\varepsilon, -2u - \varepsilon)$。我们有：$\lim_{\varepsilon\to 0} M_{u+\varepsilon} = (u^2, -2u)$。这是抛物线的参数表示，其方程为 $y = -4x^2$。图10(b)对两条邻近直线 L_u 和 $L_{u+\varepsilon}$进行了建模。它们的交点为：

$$\begin{cases} x + uy + u^2 = 0 \\ x + (u+\varepsilon)y + (u+\varepsilon)^2 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

所得抛物线绘于图10(c)中。

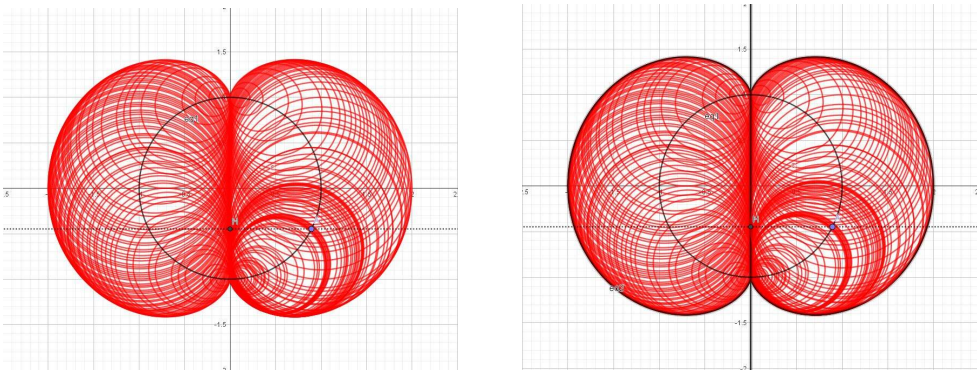
将此方法应用于一般情形可知，定义 2 蕴含定义 4；见 [18, 40]。GeoGebra 提供了计算包络线的命令，但其语法不适用于上述问题。该命令的语法为 Envelope(<Path>, <Point>)；这意味着，该命令旨在求出一族曲线（Path）的包络线，这族曲线在几何上依赖于一个描迹点（Point）。它不适用于像上述例子那样的纯代数情形。

4.3.2 肾形线作为包络线。

设 $\mathscr{U}$ 为以原点为圆心的单位圆。考虑点 A 在 $\mathscr{U}$ 上，以及以A 为圆心且与y–轴相切的圆 $\mathscr{C}_A$ 。若存在，记该圆族的包络线为 $\mathscr{E}$。图11(a)

[11]https://www.geogebra.org/f/qt5pdbah42。请注意，滑块a 的增量必须设为 0.05，才能得到精确的绘图。

展示 使用 GeoGebra 进行首次实验时的屏幕截图[12]，对圆启用轨迹开启 s.



（a）用鼠标探索 （b）包络线输出

图11：将肾形线作为圆的包络线进行探索

图11(b)展示了使用包络线命令后小程序的屏幕截图 .

- 过A 作一条垂直于y–轴的直线;
- 求这条直线与y–轴的交点，记为H （每次重新实验时，该交点可能会不同）；
- 绘制一个以A 为圆心并经过H的圆。

包络线命令已生效。输出包含两个分支:

- 在几何窗口中绘制的一条曲线（图中的虚线曲线）；
- 代数窗口中的一个隐式方程。

请注意，方 程是七次的。实际上，该多项式是可约的，可以写成如下形式 s:

$$x(4x^6+12x^4y^2-12x^4+12x^2y^4-24x^2y^2-15x^2+4y^6-12y^4+12y^2-4)=0 \tag{5}$$

这意味着结果是y–轴（由第一项为零给出）与一条六次曲线的并集。快速搜索网页可知，这条六次曲线是肾形线。请注意，如果阅读 Mathcurve 网站（https://mathcurve.com/courbes2d.gb/nephroid/nephroid.shtml），就会发现其中给出的方程需要修改，因为坐标轴各自扮演的角色不同。需要注意的是，y–轴“过大”了。它对应于代数窗口中得到的七次多项式（方程（5））中的因子x，但几何数据表明，只有该轴上的一段线段是相关的。多余部分是代数计算的结果，这些计算在扎里斯基拓扑中确定了一个闭包。

现在的问题是：我们能否改进自动化工作，以获得“真正的”答案？答案是肯定的，下面就来说明。

考虑单位圆的以下参数表示$(x,y) = (\cos u, \sin u), u \in [0, 2\pi]$。那么圆的一般方程为

$$(x-\cos(u))^2+(y-\sin u)^2-\cos^2 u=0. \tag{6}$$

[12]https://www.geogebra.org/m/fxjgmkqu

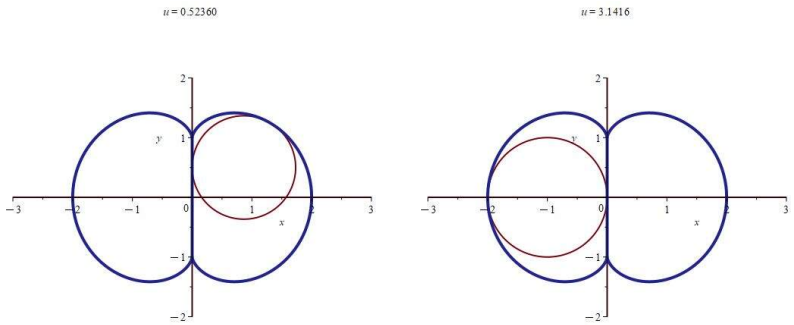
用$F(x,y,u)$表示方程 (6) 的左端。在这种情况下，定义 4 中的方程组如下：

$$\begin{cases}(x-\cos(u))^2+(y-\sin u)^2-\cos^2 u=0\\ x\sin u-y\cos u+\sin 2u=0\end{cases} \tag{7}$$

使用 Maple 求解该方程组，得到以下输出：

```
{x = 0, y = sin(u)}, {x = 2*cos(u)^3, y = -2*sin(u)^3 + 3*sin(u)}
```

第一个分量描述了y–轴上的一条线段，结果非常精确。第二个分量是肾形线的参数表示。图12展示了 Maple 制作的动画的两张截图：为方便读者，我们在此附上 Maple 代码。请注意，坐标轴



(a) (b)

图12：使用 Maple 绘制的圆以及与其一同显示的包络线

已明确定义，以便绘图更易于阅读。

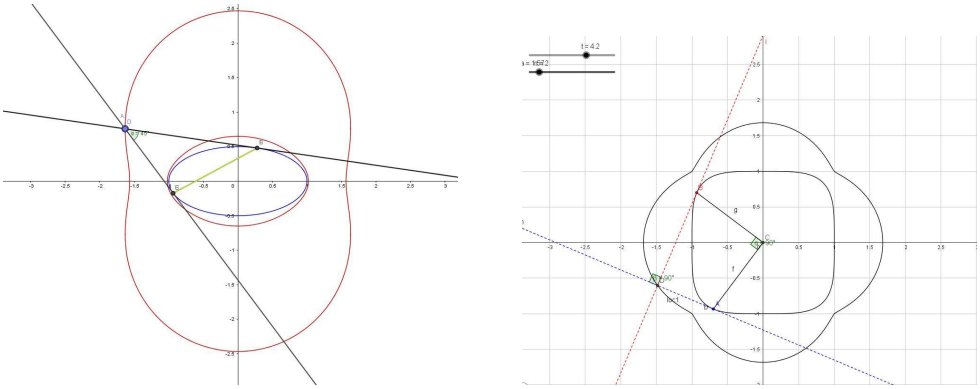
```
F :=(x - cos(u))^2 + (y - sin(u))^2 - cos(u)^2; derF :=diff(F, u); expand(%);
solve({F = 0, derF = 0}, {x, y}); neph :=绘图({[0, sin(u), u = 0 .. 2*Pi], [2
*cos(u)^3, -2*sin(u)^3 + 3*sin(u), u = 0 .. 2*Pi]}, scaling = constrained,
thickness = 4, color = navy); 坐标轴 := implicitplot({x = 0, y = 0}, x = -3 ..
3,y = -2 .. 2); 圆 :=animate(implicitplot, [F = 0], u = 0 .. 2*Pi, thickness = 2);
display( 坐标轴 , neph, 圆 );
```

从这里开始，推导隐式方程需要应用 [28,32, 37, 36]，中介绍的方法：先将三角函数转换为有理表达式，再将数据转换为生成多项式环中理想的多项式，最后使用消元算法。

4.4 平面曲线的等视曲线。

设 $\mathscr{C}$为一条平面曲线， θ为给定的角。$\mathscr{C}$的 θ–等视曲线是平面内满足以下条件的点的几何轨迹：经过点M的两条切线所成的角等于 θ。对于圆锥曲线和 $\theta=90^o$，等视曲线称为正交视线，且早已为人所知。它们分别是抛物线的准线、椭圆的准圆，以及双曲线的准圆（如果存在，

取决于渐近线之间的角度）。图13(a)展示了椭圆在两个互余角下的等视曲线。图13展示了一条六次费马曲线的正交视曲线（即直角对应的等视曲线）。



(a) 椭圆的等视曲线　　(b) 费马曲线的等视曲线

图1：等视曲线

一般而言，圆锥曲线和费马曲线的等视曲线已有相关研究，例如见 [22,56, 35, 41, 37]。这类研究很大程度上依赖软件的使用，但并未使用专门用于等视曲线的命令。主要工具是非线性方程求解器和格罗布纳基软件包。

在这些研究中，等视曲线的绘图是通过代数计算逐一完成的。为了实现自动探索，人们迈出了第一步，开发了自动着色工具 [31, 34]。这些工具可以同时可视化多条等视曲线。参数的变化通过颜色差异来呈现。之后，通过在给定曲线上拖动点的 GeoGebra 功能进行确认[13] 。

在所有情况下，自动命令 Locus 都能立即绘制出曲线。此外，与其他情形一样，滑块（或多个滑块）不仅可以用来探索单条曲线，还能探索随一个（或多个）参数连续变化的一族曲线。不过，该命令无法提供曲线的隐式方程。推导隐式方程需要借助代数工具。这里需要一个求解方程的命令；如前所述，这种命令是任何计算机代数系统的标准功能。当然，它必须包含模式识别，因为不同的问题会导向不同的代数情形（多项式方程、三角方程等）。

这类活动的收获是多方面的：

- 工作具有交互性，即通过人与机器之间的对话来完成。这是体验用户与软件之间相互影响的绝佳机会，教师也可以观察学生中不同的工具生成过程；参见 [72, 3, 4]。

- 一般来说，曲线目录会将曲线呈现为一组离散的对象。自动探索往往会揭示，不同的曲线实际上属于同一个更大的族，其中各条曲线对应于参数的不同取值。作者在 [28],描述过这种情况，在那里，机器与机器之间的沟通至关重要。

[13]感兴趣的读者可以尝试以下小程序：用于椭圆等视曲线的 https://www.geogebra.org/m/a2zpetsc、用于椭圆内等光曲线的 https: //www.geogebra.org/m/kvbnpzt3，以及用于费马曲线等视曲线的 https://www.geogebra.org/m/yjgsbbpk。该网站上还提供了其他小程序。

- 这些活动可以独立开展，也可以作为一种推广活动，旨在开阔视野。在班级活动中，几名学生看到曲线出现时，兴奋地发出了“哇哦！”的惊叹声。

确定等视曲线和包络线的一个核心问题，是求解非线性方程组。求解结果是平面曲线的参数表示。这些参数方程很少是有理的。有时可以通过计算将表达式转化为有理表达式，进而得到多项式。如果可行，可以应用 Gröbner 方法（例如消元法）将参数表示隐式化。但这并非总是可行。即使能够得到多项式，消元法也可能过于耗时或占用过多内存，以至于计算机代数系统无法给出答案；我们在准备 [51] 时就遇到了这种情况：我们在两台配置不同的计算机上启动了计算，但都没有得到结果。

5 结论与后续步骤的一些思考

我们介绍了使用 GeoGebra 和 Maple 进行自动化探索、发现与证明的相关活动。实际上，这不过是浩瀚海洋中的几滴水。首先要指出的是，我们使用了当前版本的 GeoGebra，以及配套软件包 GeoGebra-Discovery，该软件包由 Z. Kov´acs 开发。它包含若干自动化命令，有些是该软件包特有的，有些则是对 GeoGebra 现有命令的扩展。例如，GeoGebra 中已有 Relation 命令，可进行数值计算。GeoGebra-Discovery 版本通过符号算法扩展了该命令；我们在第 1.4 小节展示了一个例子。其他系统也可用于完成同类任务。例如，参见 [11]关于使用 Sage 进行自动化工作的介绍。教育者需要作出的一项重要决定，是选择将要使用的软件。这一选择涉及多个方面。首先，这取决于教师所在机构提供了哪些系统。这既取决于教学方面的选择，也取决于管理者的财务决策。此外，还取决于教师对各种可用软件包的熟悉程度。当然，并非每种计算机代数系统或动态几何系统都适合所有层次的学生。按钮驱动软件可能比需要掌握命令语法的软件更容易使用。此外，按钮驱动命令通常在右键单击按钮时会显示命令说明，这是一个非常实用的功能。提供示例和教程的交互式网站对学生大有帮助。

学生的背景水平至关重要。自动化方法并非旨在作为黑箱使用，而是意在激发用户开发新方法，并对所研究的问题获得更深刻的洞察与理解。黑箱—白箱问题已有相关分析，例如见 [46, 47]）。有时，计算机代数系统有助于弥补理论知识的不足，但此时重要的是“回过头来”，让学生补上缺漏，并理解活动和软件使用中有哪些内容被隐藏了 [25]。批判性思维与创造力必须协同发挥作用。在介绍新方法之前，教师必须了解学生的实际水平，然后才能设计适合探索其最近发展区（ZPD）的课程；参见 [73]。我们重申：“最近发展区指学习者在能力更强者的协助下成功完成任务的能力，因此常与辅助式或支架式学习一并讨论。创建最近发展区需要协助学习任务的认知结构化，并关注学习者当前的能力”（Walker， [74]）。这篇综述的作者强调，他让学生两人一组学习。他们之间的沟通以及随后的协作，有助于强化教师提供支架所带来的益处。前文提到的学生那声“哇哦！”就是这种结果，而当时完成的数学

发现　　作品激发了创造新事物的念头。这已经实现了　　.

动态几何系统和计算机代数系统所提供的探索工具具有多样性，使同一班级中的不同学生能够体验用不同方式解决同一个问题。对于以科学、技术、工程、艺术与数学为导向的学生来说，这为他们创造模型、动画等提供了许多机会。我们在第4.3小节中对此作了说明。因此，教师提供的支架必须更加因人而异，学生最近发展区的探索也变得越来越个性化。某种共同的最近发展区（针对两名学生）也由此形成。智能手机，以及更早之前的随身听（还有其他电子设备，谁还记得它们？），曾在人与人之间造成了一些疏离。在这里，学生可以更自由地使用自己的设备进行体验和探索，再与同学分享他们的发现，这使班级的学习体验更加丰富、更有意义，也更有趣。户外活动也有助于吸引学生学习更多数学，因为这些活动基于他们的日常环境和文化背景。作者教授“数学教育中的技术”实践课程，面向职前教师或在职教师。技术方面的讲授必须始终根据学生的数学水平、文化背景及其他特点加以调整。Artigue [3] 还强调，新的技术知识是学生所获得的新数学知识不可或缺的一部分。可以在学生学习历程的较早阶段提出并探索新的主题或经过更新的主题，因此有必要分析新的教学情境和教学转置 [16, 17]。这一切都是 P. Quaresma [61] 提到的新范式的一部分（参见第 1 节）。每年每位学生以及整个班级的工具发生（见 [72, 3, 4], 等）都截然不同，这并不奇怪。当然，这一点对职前工程师也同样适用。

最后，我们应该再次强调，用于探索、发现和证明的自动化方法是一种新方法，旨在培养新的技能，并强调一种新型的理解。新的进展不断涌现。再次引用 P. Quaresma（同前）的话：“借助此类计算机应用进行几何推理，是未来积累和传播知识最具吸引力的挑战之一。”例如，近期的研究致力于探讨不等式 [62]及其在平面上的绘图。Derive 已经具备了一些相关功能，但现代进展更加丰富。这类进展与个人的教与学过程相结合，值得从新型工具发生的角度加以研究。另一方面，随着不同类型软件之间高效且富有成效的自动化对话取得新成果，新的 CAS-DGS 组合（无论彼此独立还是相互嵌入）都提供了一种新型人工制品，有待转化为工具 [3, 72]。这为认知—教育螺旋增添了一个新的循环。

参考文献

[1] Miguel Ab´anades、Francisco Botana、Zoltan Kov´acs 与 Csilla S´olyom-Gecse（2016）：*GeoGebra* 中自动推理工具的开发。*ACM*《计算机代数通讯》50(3)，第 85–88 页，doi:10.1145/3015306.3015309。[2] John Abbott 与 Anna M. Bigatti（2010）：*CoCoALib*：一个用于++ 交换代数计算……及其他领域的 *C* 库。载于 Hoeven K.、Joswig J.v.d. 与 Takayama and M.（编）：数学软件——*ICMS 2010*，6327，Springer，柏林、海德堡，第 73–76 页，doi:10.1007/978-3-642-15582-6 15。[3] Mich`ele Artigue（2002）：在计算机代数系统环境中学习数学：关于工具化的反思之形成，以及技术工作与概念工作之间的辩证关系。《数学学习计算机国际期刊》7，第 245–274 页，doi:10.1023/A:1022103903080。[4] Mich`ele Artigue 与 Luc Trouche（2021）：透过技术视角重新审视法国教学法传统。数学9(6)，第 629 页，doi:10.3390/math9060629。

[5]Anna Barbosa、Isabel Vale、Simona Jablonski 与 Matthias Ludwig（2022）：通过主题式（移动）数学路径探索代数思维。教育科学 12(5)，第 346 页，doi:10.3390/educsci12050346。[6] Simon Barlovits、Morritz Baumann-Wehner 与 Matthias Ludwig（2020）：借助 Math-CityMap 开展课程学习：创建主题式数学路径。载于：《数字时代的数学教育》（MEDA）——会议论文集，奥地利林茨，约翰内斯·开普勒大学，第 143–150 页。[7] M. Berger（2009）：几何学。第 2 版，Springer。[8] Jiri Blazek 与 Pavel Pech（2017）：使用 GeoGebra 搜索点的轨迹。《国际数学教育技术杂志》27，第 143–147 页，doi:10.1564/tme v24.3.06。[9] Francisco Botana（2003）：将点的轨迹自动确定为代数曲面。Springer Berlin Heidelberg，doi:10.1007/3-540-44860-8 91。[10] Francisco Botana 与 Miguel Ab´anades（2014）：（动态）几何中的自动演绎：轨迹计算。《计算几何》47(1)，第 75–89 页，doi:10.1016/j.comgeo.2013.07.001。[11] Francisco Botana 与 Miguel A. Ab´anades（2012）：使用 Sage 在动态几何中进行自动演绎。载于：ThEdu'11，EPTCS，79，开放出版协会，第 49–62 页，doi:10.4204/EPTCS.79.3。[12] Francisco Botana、Zoltan Kov´acs 与 Tom´as Recio（2018）：迈向自动几何学家。《计算机科学讲义》11110，第 215–220 页，doi:10.13140/RG.2.2.36788.71042。[13] Francisco Botana 与 Tom´as Recio（2017）：在动态几何环境中计算包络线。AMAI（数学与人工智能年刊）80(1)，第 3–20 页，doi:10.1007/s10472-016-9500-3。[14] Francisco Botana 与 Tom´as Recio（2019）：自动计算平面曲线族包络线的方案。《系统科学与复杂性杂志》32(1)，第 150–157 页，doi:10.1007/s11424-019-8341-7。[15] Francisco Botana 与 Jos´e L. Valcarce（2004）：在图形环境中自动确定包络线及其他导出曲线。《数学与计算机模拟》67(1-2)，第 3–13 页，doi:10.1016/j.matcom.2004.05.004。[16] Guy Brousseau（1997）：数学中的教学情境理论。Kluwer，多德雷赫特。[17] Guy Brousseau 与 Virginia Warfield（2014）：数学教育中的教学情境。载于 S Ler-man（编）：《数学教育百科全书》，施普林格·荷兰，多德雷赫特，第 163–170 页，doi:10.1007/978-94-007-4978-8 47。[18] James W. Bruce 与 Peter J. Giblin（2012）：曲线与奇点。剑桥大学出版社，doi:10.1017/CBO9781139172615。[19] Bruno Buchberger（1985）：Gr¨obner 基：多项式理想理论中的一种算法方法。载于 N. K. Bose（编）：《多维系统理论》，施普林格·荷兰，多德雷赫特，荷兰，第 184–232 页，doi:10.1007/978-94-009-5225-6 6。[20]S. Chiruguru（2020）：21st 世纪课堂的核心技能（4C技能），doi:10.13140/RG.2.2.36190.59201。[21] Shang Ching Chou（1988）：几何定理机械化证明。D. Reidel出版公司，多德雷赫特，荷兰（1988。[22] Waldemar Cie´slak、Andrzej Miernowski 与 Witold Mozgawa（1991）：闭严格凸曲线的等视曲线、整体微分几何与整体分析。《数学讲义》1481，第 28–35 页，doi:10.1007/BFb0083625。[23] David A. Cox、John Little 与 Donal O'Shea（1992）：《理想、簇与算法》。施普林格·纽约，施普林格出版社，纽约，doi:10.1007/978-1-4757-2181-2。[24] Thierry Dana-Picard（2005）：参数积分与函数对称性。《数学与计算机教育》39(1)，第 5–12 页。[25] Thierry Dana-Picard（2005）：将技术作为理论知识不足的替代途径。《数学教育技术国际期刊》11(3)，第 101–109 页。

[26] Thierry Dana-Picard（2006）：关于计算机代数系统辅助定理证明的一些思考。《国际数学教育技术杂志》12(4)，第165–171页。[27] Thierry Dana-Picard（2020）：游乐园中的安全区：包络线、等距曲线与马耳他十字的新构造。载于《亚洲数学技术会议》ACTM 2020电子论文集，编辑：数学与技术；ISSN（在线版本），第1940–4204页。[28] Thierry Dana-Picard（2021）：两条代数平面曲线的包络线与等距曲线：探索其异同。《计算机科学中的数学》15(4)，第757–774页，doi:10.1007/s11786- 021-00504-5。[29] Thierry Dana-Picard与Sara Hershkovitz（2020）：STEAM教育：技术技能、学生的文化背景与新冠疫情危机。《开放教育研究》2(1)，第171–179页，doi:10.1515/edu-2020- 0121。[30] Thierry Dana-Picard与Sara Hershkovitz（2023）：从太空到数学，再到艺术：以行星轨道为主题的太空虚拟艺术。技术报告，预印本，2023年。[31] Thierry Dana-Picard与Zolt´an Kov´acs（2018）：利用动态几何自动确定等视曲线。载于W. Farmer Rabe、G. Passmore与A. Youssef编，《计算机科学讲义》，施普林格国际出版公司，Springer，第60–75页，doi:10.1007/978-3-319-96812-4 6。[32] Thierry Dana-Picard与Zoltan Kov´acs（2021）：技术联网：计算机代数系统与动态几何系统之间的对话。《数学与技术电子期刊》15(1)，第43–59页。[33] Thierry Dana-Picard与Zoltan Kov´acs（2022）：卡西尼卵形线的等距曲线。《数学与技术电子期刊》16(1)，第25–39页。[34] Thierry Dana-Picard与Zolt´an Kov´acs（2023）：¯ 利用动态着色对平面曲线的等视曲线进行实验研究。《计算机科学中的数学》17(1)，doi:10.1007/s11786-022-00555-2。261-280。[35] Thierry Dana-Picard、Giora Mann与Nurit Zehavi（2011）：从圆锥曲线交点到环面交点：椭圆等视曲线的情形。《蒙大拿数学爱好者》9(1)，第59–76页。[36] Thierry Dana-Picard与Witold Mozgawa（2020）：自动探索椭圆的内等光曲线。《几何学杂志》111(2)，第34页，doi:10.1007/s00022-020-00546-3。[37] Thierry Dana-Picard、Aharon Naiman、Witold Mozgawa与Waldemar Cie´slak（2019）：利用动态几何系统和计算机代数系统探索仿射平面中的费马曲线等视曲线。《计算机科学中的数学》14(1)，第45–67页，doi:10.1007/s11786-019-00419-2。[38] Thierry Dana-Picard与Malka Schaps（1993）：一个计算机辅助项目：代数分类。《计算代数几何与交换代数》（科尔托纳，1991），剑桥大学出版社，剑桥。71–83。[39] Thierry Dana-Picard与Malka Schaps（1996）：一般代数的分类：局部情形。《休斯敦数学杂志》22(4)，第749–773页。[40] Thierry Dana-Picard与Nurit Zehavi（2016）：微分几何经典主题的复兴：在计算机环境中探索包络线。《国际科学与技术数学教育杂志》47(6)，第938–959页，doi:10.1080/0020739X.2015.1133852。[41]Thierry Dana-Picard、Nurit Zehavi与Giora Mann（2014）：双曲线的双等视曲线。《国际科学与技术数学教育杂志》45(5)，第762–781页，doi:10.1080/0020739X.2013.877608。[42] Thierry Dana-Picard与David Zeitoun（2016）：探索与土力学问题相关的参数积分。《国际科学与技术数学教育杂志》48(4)，第617–630页，doi:10.1080/0020739X.2016.1256445。[43] Thierry Dana-Picard与David G. Zeitoun（2012）：参数广义积分、沃利斯公式与卡塔兰数。《国际科学与技术数学教育杂志》43(4)，第515–520页，doi:10.1080/0020739X.2011.599877。

[44] Thierry Dana-Picard与David G. Zeitoun（2017）：基于信息与通信技术研究参数积分的框架。《计算机科学中的数学》11(3-4)，第285–296页，doi:10.1007/s11786-017-0299-z。[45] R´egis Debray（2001）：D.ieu，一段旅程。Editions Odile Jacob，巴黎。´Paul Drijvers（1995）：重新审视白箱/黑箱。《Derive国际期刊》2(1)，第3–14页。[46] Paul Drijvers（2000）：学生在使用计算机代数系统时遇到的障碍。《数学学习计算机国际期刊》5(3)，第189–209页，doi:10.1023/A:1009825629417。[47] Raymond Duval（2017）：理解数学思维方式——符号表征的类别。施普林格国际出版公司，doi:10.1007/978-3-319-56910-9。[48] Herbert Gelernter（1963）：几何定理证明机器的实现。载于J. Feldman Feigenbaum编，《计算机与思维》，McGraw-Hill，纽约，第134–152页。[49] Anders Kock（2007）：包络线——概念与确定性。《代数与几何论丛》48，第345–350页。[50] Zoltan Kov¨acs、Thierry Dana-Picard与Tom[51] as Recio（2022）：抛物线的内等光曲线。载于：会议：第五届克罗地亚几何与图形会议，杜布罗夫尼克，第4–8页。´Zoltan Kov´acs与Bernard Parisse（2015）：Giac与GeoGebra——改进的Gr[52] obner基计算。载于：《计算机科学讲义》，Springer，第126–138页。《计算机代数与多项式》。´Zoltan Kov¨acs与Tom[53] as Recio（2020）：户外数学的自动增强现实。载于《数字时代的户外STEM教育研究》，WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien，Münster，2020，doi:10.37626/GA9783959871440.0。´Zolt´an Kov¨acs、Tom¨as Recio、Philippe R. Richard、Steven Van Vaerenbergh与M. Pilar V[54] elez（2020）：构建计算机支持几何推理的生态系统。《国际科学与技术数学教育杂志》53(7)，第1701–1710页，doi:10.1080/0020739X.2020.1837400。´Maria Alessandra Mariotti（2001）：在Cabri环境中进行论证与证明。《数学学习计算机国际期刊》6(3)，第257–281页，doi:10.1023/A:1013357611987。´Anfrzej Miernowski与Witold Mozgawa（1997）：关于等视曲线凸性的一些几何条件。《都灵大学与理工学院数学研讨会报告》55。´Antonio Montes（2018）：局部闭集上的I-正则函数。载于：《Gr´obner覆盖》，27，施普林格国际出版公司，第67–77页，doi:10.1007/978-3-030-03904-2 4。《数学中的算法与计算》。[55] Richard Noss与Celia Hoyles（1996）：数学意义之窗。施普林格·荷兰，doi:10.1007/978-94-009-1696-8。[56] Pavel Pech（2007）：几何学精选主题：经典证明与计算机证明的比较。World Scientific Publishers，doi:10.1142/6556。[57] Helmut Pottmann与Martin Peternell（2000）：包络线——计算理论与应用。载于：春季计算机图形会议，Comenius大学，布拉迪斯拉发，第3–23页。¨Pedro Quaresma（2020）：几何学中的自动推演与知识管理。《计算机科学中的数学》14(4)，第673–692页，doi:10.1007/s11786-020-00489-7。[58] Tom[59] as Recio、Rafael Losada、Zoltan Kov[60] acs与Carlos Ueno（2021）：发现几何不等式：GeoGebra Discovery、动态着色与Maple工具的协同。《数学》9(20)，第2548页，doi:10.3390/math9202548。[61] Tom[62] as Recio、Piedad Tolmos Rodr´ıguez-Pi´nero、Ana Cid-Cid与Rocio Guede-Cid（编）（2021）：STEAM教师教育：问题与建议。《数学》（特刊）。可访问：https://www. mdpi.com/journal/mathematics/special[63] issues/STEAM´Teacher´Education。˜E. Roanes-Lozano、E. Roanes-Mac_ıas与M. Villar-Mena（2003）：动态几何与计算机代数之间的桥梁。《数学与计算机建模》37(9-10)，第1005–1028页，doi:10.1016/S0895- 7177(03)00115-8。

[65] Eugenio Roanes-Lozano（2002）：通过合作提升动态几何系统与计算机代数系统的几何应用潜力。载于 H. Kautschitsch Borovcnik（编）：数学教学技术。ICTMT-5 会议录，Schrifrenreihe Didaktik der Mathematik 25。¨obv & hpt，维也纳（2002年），第335–348页。[66] Vladimir Rovenski（2000）：《曲线与曲面的几何：使用 MAPLE》。Birkh¨auser，2000年。[67] Tino Schultz 与 Bert J¨uttler（2011）：利用近似隐式化计算平面上的包络线。《工程、沟通与计算中的应用代数》22(4)，第265–288页，doi:10.1007/s00200- 011-0149-1。[68] Juan Refael Sendra、Franz Winkler 与 Sonia Perez-Diaz（2008）：《有理代数曲线》。Springer Berlin Heidelberg，doi:10.1007/978-3-540-73725-4。[69] Joseph Steiner 与 Thierry Dana-Picard（2004）：课堂札记：数学积分教学：人类计算技能与计算机代数。《国际科学与技术数学教育杂志》35(2)，第249–258页，doi:10.1080/00207390310001615570。[70] Dominik Szał（2005）：kowski（2005）：开玫瑰线的等光曲线。《玛丽亚·居里-斯克沃多夫斯卡大学学报》LIX卷A辑，第119–128页。[71] Ren´e Thom（1962年）：论包络线理论。《纯粹与应用数学杂志》XLI(2)，第1962页。[72] Luc Trouche（2005）：工具发生：个体与社会层面。载于 Ruthven D.、Trouche 和 K.（编）：数学教育文库，Springer-Verlag，第197–230页，doi:10.1007/0-387-23435-7 9。[73] 列夫·维果茨基（1978）：《社会中的心智：高级心理过程的发展》。哈佛大学出版社，马萨诸塞州剑桥。[74] R. A. Walker（2010）：《动机中的社会文化问题》。载于：《国际教育百科全书》，Elsevier，第712–717页，doi:10.1016/b978-0-08-044894-7.00629-1。[75] 吴文俊（1986）：几何学机械化定理证明的基本原理。《自动推理杂志》2(3)，第221–252页，doi:10.1007/BF02328447。[76] Wen ts¨un Wu（1994）：《几何定理机械化证明》。Springer Vienna，doi:10.1007/978-3- 7091-6639-0。[77]Wen-Ts¨u Wu（1984）：几何学机械化定理证明的若干最新进展，doi:10.1090/conm/029/13。《当代数学》29。[78] D. Zeitoun 与 Th. Dana-Picard（2010）：准确可视化两个实变量函数的图像。《国际计算与数学科学杂志》4(1)，第1–11页。可在 http:// www.waset.org/journals/ijcms/v4/v4-1-1.pdf 获取。[79] David Zeitoun 与 Thierry Dana-Picard（2017）：用于准确绘制两个实变量函数的缩放算法。《数学与统计学会议录》（PROMS）198），Springer。第499–515页。