arXiv:2303.10192v1 [physics.plasm-ph] 17 Mar 2023

小尺度阿尔fvén波的非线性动力学

Alfred Mallet，[1, 4 12,3 2 1 a)] Seth Dorfman、Mel Abler、Trevor Bowen 和 Christopher H.K. Chen[1)]美国加利福尼亚大学伯克利分校空间科学实验室，美国加利福尼亚州伯克利，邮编 *94720* [2)]空间科学研究所，美国科罗拉多州博尔德，邮编 *80301*[3)]加利福尼亚大学洛杉矶分校，美国加利福尼亚州洛杉矶，邮编 *90095*[4)]伦敦玛丽女王大学物理与天文学系，英国

（日期：2023年3月21日）

我们研究具有 $k_\perp d_i \gtrsim 1$ 的极斜小尺度阿尔fvén波的非线性演化。在这些尺度上，由于方程中的霍尔项，这些波会变得显著压缩，这与磁流体力学中的情况不同。我们证明，当频率远小于离子回旋频率且振幅远小于 1 时，即使 $k_\perp d_i \sim 1$，单独的霍尔项在最低非平凡阶也不会引入新的非线性相互作用。然而，在第二个非平凡阶，我们发现霍尔物理会导致同向传播的阿尔fvén波之间发生缓慢但共振的非线性相互作用，这本质上是一种三维效应。考虑有限温度、有限频率和电子惯性的影响后，只要 $k_\perp \rho_s$、 $k_\perp d_e$ 或 $k_\parallel d_i$ 中有一项变得显著，双流体阿尔fvén波也会呈现色散：对于本文研究的低 β 斜传播波，这种情况可能出现在远小于 d_i 的尺度上。我们表明，双流体阿尔fvén波的一维陡峭化只有在这些更小的色散尺度上才具有显著影响，并推导出主波驱动谐波振幅的表达式。重要的是，这两种新效应在陀螺动力学和其他常用的约化双流体模型中都不存在。我们的计算有助于解读实验室阿尔fvén波实验，也能增进对太阳日冕和内太阳风中湍流物理的理解；在那里，反向传播波之间占主导地位的非线性相互作用受到抑制，使这些新效应得以变得重要。

I. 引言

在广泛的天体物理与空间等离子体物理场景中，都存在大振幅电磁涨落；对于后者，我们如今已通过地球磁层[1], 太阳风[2], 乃至最近进入太阳日冕的航天器（帕克太阳探测器，以下简称 PSP）[3]，获得了越来越精确的原位观测。这些涨落在太阳风中、尤其是在日冕中，常常具有高度精确的偏振特性（尺度远大于离子回旋半径），与阿尔芬波（AW）十分相似，并沿磁场朝远离太阳的方向传播[4,5]。帕克太阳探测器的观测尤其揭示了极大振幅（$\delta B/B \gtrsim 1$）阿尔芬波的斑块，它们被称为“磁场反转结构”，因为它们甚至能够反转背景磁场的方向。这些磁场反转结构的边界通常异常陡峭[6]，这表明非线性陡化可能是其演化和／或生成过程中的一个重要机制。

阿尔芬波可能在日冕加热中发挥关键作用[7,8], ，这是由于阿尔芬速度的大尺度非均匀性引发的反射所驱动的湍流所致 $v_\mathrm{A} = B_0/\sqrt{4\pi n_{0i} m_i}$。在磁流体力学湍流标准模型中，使湍流阿尔芬级联得以发生的非线性相互作用，发生在反向传播的阿尔芬波之间 $\boldsymbol{z}^\pm = \boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{z}^\pm$是 Elsasser 变量，而 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{b}$ 分别是以速度单位表示的速度涨落和磁场涨落[9,10]。然而，帕克太阳探测器的观测表明[5] ，向内传播的波的通量————与占主导地位的向外传播阿尔芬波的通量相比极小。这种不平衡湍流的动力学可能与两个方向上的阿尔芬波通量相当的平衡湍流存在根本差异，使得不同的物理过程可能主导系统的动力学。例如，一项重要的理论进展近期表明，广义螺度守恒会导致不平衡湍流在离子尺度出现湍流能量通量屏障[11], ，从而产生振幅极大的涨落，并使等离子体能够通过高频离子回旋加热[12], ，进而实现为驱动快速太阳风所必需的垂直离子加热。这为重新审视小尺度阿尔芬波的物理机制提供了一些依据，包括非线性陡化和同向传播的非线性相互作用。

阿尔芬波也常在大型等离子体装置（LAPD）的实验室实验中激发。该装置为圆柱形，可产生长达 16.5 m 的静止磁化等离子体柱[13]。通过放置在柱体两端的天线，可以激发具有各种参数的波；研究人员利用 LAPD 对阿尔芬波的线性[14–17] 和非线性[18–23] 特性进行了广泛实验。在太阳日冕和地球极光中存在的小尺度波，可能与激发这些波的等离子体状态相似： $k_\perp d_i \gg 1$ 当 $k_\parallel d_i \lesssim 1$时，$k_\perp \rho_\tau \sim k_\perp d_e \lesssim 1$，这意味着 $k_\parallel/k_\perp \ll 1$和 $\beta \sim Z m_e/m_i \ll 1$；其中 $k_\parallel$（$k_\perp$）分别是波数 k 平行于（垂直于）平均磁场的分量， $d_i = v_\mathrm{A}/\Omega_i$为离子惯性长度， $\rho_\tau = c_s/\Omega_i$ 为离子声回旋半径，$d_e = \sqrt{Z m_e/m_i} d_i$ 为电子惯性长度，且 $\beta = c_s^2/v_\mathrm{A}^2$，阿尔芬速度为 $v_\mathrm{A} = B_0/\sqrt{4\pi n_{0i} m_i}$,

[a)]电子邮 件联系地址：alfred.mallet@berkel ey.edu

章节	ω/Ω_i	$k_\perp d_i$	$k_\perp \rho_s$	$k_\perp d_e$	β	$k_\parallel/k_\perp$	$\delta B/B_0$
II	ϵ	1	0	0	0	ϵ	ϵ
III	1	ϵ^{-1}	1	1	ϵ^2	ϵ	ϵ
附录 B	ϵ	ϵ^{-1}	1	1	ϵ^2	ϵ^2	ϵ^2

表 I. 各章节所研究物理状态的总结。在每种情况下，$\epsilon \ll 1$ 是一个小参数，双流体方程按该参数展开。

声速 $c_s = \sqrt{(T_i + ZT_e)/m_i}$，离子回旋频率为 $\Omega_i = ZeB_0/m_i c$。与日冕不同，该装置中的电子—离子碰撞频率可能相当高，$\nu_{ei} \sim \omega$ 其中 $\omega \sim k_\parallel v_\mathrm{A}$ 为波的频率；因此，在这种情况下，保留欧姆电阻率 $\eta = \nu_{ei} d_e^2$十分重要。有趣的是，在 LAPD 的阿尔芬波实验中经常观测到谐波[23–25]，即使没有反向传播波也是如此，这表明要理解实验结果以及前述的日冕湍流，需要改进对阿尔芬波非线性行为的建模。

在可压缩磁流体力学（MHD）的框架内，阿尔芬波是一种精确的非线性解，其速度涨落和磁场涨落满足 $\delta \boldsymbol{u} = \pm \delta \boldsymbol{B}/\sqrt{4\pi\rho}$，且磁场强度、密度和压力在时空中均为常数。这种情形称为球面偏振，因为磁场矢量沿球面运动：应注意，这意味着大振幅阿尔芬波明确地不是单色波[26,27]。这种构型以 v_A 传播，垂直涨落不会发生陡化，无论其振幅或三维结构如何[26]。存在平行涨落 $\delta B_\parallel = -\delta B_\perp^2/2B_0$，它们是维持 $|\boldsymbol{B}|$在时空中恒定所必需的，并以垂直涨落的谐波形式出现[27,28]：然而，在此解中它们不随时间变化，其振幅远小于本文将推导出的谐波振幅。对于磁流体力学阿尔芬波，只有在存在反向传播波时才会发生非平凡的非线性相互作用。

即使振幅很大，磁流体力学阿尔芬波也严格不可压缩。超越磁流体力学框架，将霍尔效应纳入欧姆定律（相关方程的简要推导见附录A）后，极斜传播的（$k_\perp \gg k_\parallel$）阿尔芬波会产生密度涨落[29]，

$$\frac{\delta n_i}{n_{0i}} \sim -i k_\perp d_i \frac{\delta B}{B_0}, \tag{1}$$

随 $k_\perp d_i$ 缩放，并伴有相应的压缩流（离子极化漂移）。只有当 $k_\perp \rho_\tau$、$k_\perp d_e$、$k_\parallel d_i$ 中的某一项变得显著时，波才会呈现色散特性：在适当极限下，包含电阻阻尼效应的线性双流体色散关系为（见附录A和 Hollweg 1999[29]）

$$(1 + k_\parallel^2 d_i^2 + k^2 d_e^2)\omega^2 + i\eta k^2 \omega - k_\parallel^2 v_\mathrm{A}^2 (1 + k^2 \rho_\tau^2) = 0, \tag{2}$$

其解为

$$\omega = -i\gamma_0 \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma_0^2}, \tag{3}$$

其中

$$\omega_0 = k_\parallel v_\mathrm{A} \sqrt{\frac{1 + k^2\rho_\tau^2}{1 + k_\parallel^2 d_i^2 + k^2 d_e^2}}, \quad \gamma_0 = \frac{1}{2} \frac{\eta k^2}{1 + k_\parallel^2 d_i^2 + k^2 d_e^2}. \tag{4}$$

虽然双流体系统并非总是准确（例如，动力学效应变得重要时；更多讨论见附录A），但它由此为研究色散阿尔芬波提供了一个最简模型。对于低β下的斜传播波，色散项只会在远小于 d_i[29]的尺度上变得显著，因此，若（例如） $k_\perp \rho_\tau$是这些色散参数中最大的一个，那么在 $\rho_\tau \ll 1/k_\perp \lesssim d_i$ 之间，波虽具有压缩性，但色散效应并不显著（这一结论适用于碰撞性不过强的系统，$\nu_{ei} \lesssim \omega$，因为此时只有当 $k_\perp d_e \sim 1$时才会出现电阻阻尼）。由于密度涨落，一旦 $k_\perp d_i \sim 1$，局域阿尔芬速度 $v'_A = B/\sqrt{4\pi n_i m_i}$ 便会随波的相位而变化：在振幅足够大时，人们可能自然会认为，霍尔项会驱动新的非线性相互作用和陡化，甚至发生在同向传播波之间。这些新的相互作用正是本文的研究主题。

首先，在第二节中，我们推导出一组方程，用于描述 $k_\perp d_i \sim 1$的极度倾斜阿尔芬波的三维动力学，并假设 $\rho_s = d_e = 0$ 和$\omega/\Omega_i \ll 1$，因此（在这一倾斜极限下）线性色散关系就是 $\omega = \pm k_\parallel v_\mathrm{A}$。由此得到霍尔磁流体方程的约化展开。在最低的非平凡阶，我们重现了经典的约化磁流体力学（RMHD）方程，其中非线性只发生在反向传播的阿尔芬波之间，尽管存在显著的密度涨落：这是一个已有的结果（例如参见 Zocco & Schekochihin 2011[30], 或附录 B）。因此，在这一阶，霍尔效应不会影响动力学。然而，在我们的渐近展开的下一阶，即使这一阶的线性色散关系仍未改变，同向传播波之间确实存在三维非线性相互作用。由于这一效应只在下一阶出现，与该相互作用相关的时间尺度比阿尔芬时间尺度 $\tau_A = (k_\parallel v_\mathrm{A})^{-1}$更长。此外，如果两个相互作用波的垂直波矢对齐，这种相互作用就会消失，例如在一维系统中。

当阿尔芬波开始呈现色散时（例如，当 $k_\perp\rho_\tau$ 或 $k_\perp d_e$ 不再可以忽略时），同向传播波之间即使在小振幅、低频条件下也可能发生非线性相互作用，这一点早已为人所知[30–32]：具有不同 $k_\perp$ 的波会彼此“追上”并发生相互作用。这种广为人知的非线性并非本文的主要关注点，但我们在附录 B 中系统推导了相关方程。同样，如果母波的垂直波矢对齐，这种非线性相互作用就会消失。

上述两种非线性相互作用在一维中都会消失。我们将在第 III 节说明，双流体阿尔芬波的一维陡化相当不同寻常：它要求密度涨落幅度较大，且显著的色散项同时起作用。如果所有色散项和电阻率都可以忽略，即使密度涨落幅度较大（$k_\perp d_i \gg 1$），一维中的压缩流也会恰好抵消局部阿尔芬速度的变化，因此不会产生净陡化。我们推导了由色散陡峭化驱动的基频阿尔芬波谐波表达式，可将其与 LAPD[25] 实验室实验中观测到的谐波进行比较。

在反向传播阿尔芬波通量相等的情况下，第二节和第 III 节发现的新非线性相互作用对于 $k_\perp d_i \sim 1$ 将处于次要地位。这两种过程的时间尺度都随密度涨落幅度而变化（式 1）。然而，在太阳日冕的高度不平衡状态下，反向传播波之间的相互作用会受到抑制，而且 $\beta \ll 1$：这可能使这些效应在惯性区湍流与动理学区湍流之间的过渡过程中变得重要，其机制是与不平衡程度 $R_E = \delta z^-/\delta z^+$ 及密度涨落幅度较小这一特点相竞争。此外，这些相互作用的存在意味着，在解读于 LAPD 上研究非线性阿尔芬波相互作用的实验室实验[20,25] 时必须谨慎；在该实验中，$k_\perp d_i \gg 1$，这会缩短与这些新过程相关的非线性时间尺度。

本文研究的不同物理状态总结于表 I。这里的三种序关系方案旨在分别分离三类不同的同向传播非线性相互作用：三维霍尔驱动相互作用（第二节）、一维陡峭化（需要密度涨落和波都具有色散，见第 III 节），以及纯粹由色散驱动的非线性（附录 B；例如，早已在先前的简化流体[31] 和/或陀螺动理学模型[30,32]中得到研究）。综合来看，我们的结果为实验室和空间等离子体中的阿尔芬波物理带来了新的认识，并可能与现有实验，以及日冕和太阳风中极度不平衡湍流与磁场反转结构的演化相关。

II. 约化霍尔磁流体力学的下一阶：三维非线性相互作用

如引言中所指出的，对于 $\beta \ll 1$、$\nu_{ei} \lesssim \omega$ 和 $k_\parallel/k_\perp \ll 1$，在 $k_\perp d_i \sim 1$ 处，阿尔芬波会因霍尔项而变得具有压缩性；这一尺度远大于线性色散关系（2）偏离理想磁流体力学的尺度。其非线性性质是否也同样不受影响？本节将探讨这一问题。

尽管从一开始我们就完全忽略了动理学和惯性阿尔芬波的色散项以及电阻率（在方程 A17–A20 中，令 $c_s/v_A \to 0$、$m_e/m_i \to 0$ 和 $\eta \to 0$），但关键的新物理仍将显现出来，留下的只有可压缩霍尔磁流体力学方程：

$$\partial_t n = -\nabla\cdot(n\boldsymbol{u}), \tag{5}$$

$$\mathrm{d}_t\boldsymbol{u} = \frac{1}{n}(\nabla\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b}, \tag{6}$$

$$\partial_t\boldsymbol{b} = \nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{b}) - d_i\nabla\times\mathrm{d}_t\boldsymbol{u}, \tag{7}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{b} = 0, \tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{u}$ 是离子速度，$n = n_i/n_{0i}$，而以阿尔芬单位表示的磁场为 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}/\sqrt{4\pi n_{0i}m_i}$。我们写作

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_\perp + \hat{\boldsymbol{z}}b_z + \hat{\boldsymbol{z}}v_\mathrm{A}, \quad n = 1+\tilde{n}, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_\perp + \hat{\boldsymbol{z}}u_z. \tag{9}$$

其中，阿尔芬速度 $v_\mathrm{A} = B_0/\sqrt{4\pi n_{0i}m_i}$ 是（直线）平均磁场的大小，该磁场取沿 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 方向，而 $\boldsymbol{b}_\perp$、b_z、$\tilde{n}$、$\boldsymbol{u}_\perp$ 和 u_z 是涨落。我们假设波具有很强的斜向传播特性，并采用以下展开参数

$$\epsilon \sim \frac{\partial_z}{\nabla_\perp} \ll 1. \tag{10}$$

我们还假设，涨落的线性时间尺度具有阿尔芬型特征，且与非线性时间尺度相当，

$$\partial_t \sim v_\mathrm{A}\partial_z \sim \boldsymbol{u}_\perp\cdot\nabla_\perp \sim \boldsymbol{b}_\perp\cdot\nabla_\perp, \tag{11}$$

由此可得

$$\frac{u_\perp}{v_\mathrm{A}} \sim \frac{b_\perp}{v_\mathrm{A}} \sim \epsilon. \tag{12}$$

这意味着临界平衡参数[33]

$$\chi = \frac{k_\perp b_\perp}{k_\parallel v_\mathrm{A}} \sim 1 \tag{13}$$

可以取为 1 量级。最后，我们还假设涨落的垂直尺度与 d_i 相当

$$d_i\nabla_\perp \sim 1, \tag{14}$$

这意味着频率相较于 Ω_i 较小，

$$d_i\partial_z \sim \frac{1}{\Omega_i}\partial_t \sim \epsilon. \tag{15}$$

其中一些阶次在约化磁流体力学中或许比较熟悉[32,34]。对于其他涨落，我们写作

$$\tilde{n}\sim\epsilon^{\alpha_n},\quad \frac{\nabla_\perp\cdot\boldsymbol{u}_\perp}{\Omega_i}\sim\epsilon^{\alpha_\xi},\quad \frac{b_z}{v_\mathrm{A}}\sim\epsilon^{\alpha_b},\quad \frac{u_z}{v_\mathrm{A}}\sim\epsilon^{\alpha_u}, \tag{16}$$

我们将在接下来的分析中推导出 α_n、α_ξ、α_b、α_u 的取值。每个方程中，我们将保留最低的两个非平凡阶项。请注意，由有限 ω/Ω_i（等价于有限 $k_\parallel d_i$）导致的线性阿尔芬波频率的色散修正为 $\sim(\omega/\Omega_i)^2k_\parallel v_\mathrm{A}\sim\epsilon^3\Omega_i$（见式 2），因此将予以忽略。这意味着，在我们的系统中，最低两阶的线性色散关系就是 $\omega=\pm k_\parallel v_\mathrm{A}$。

现在我们对方程中的各项进行阶次分析；方程下方所示的阶次是通过将时间按 Ω_i^{-1} 归一化、将以阿尔芬单位表示的速度和磁场按 v_A 归一化，以及将长度按 $d_i=v_\mathrm{A}/\Omega_i$ 归一化得到的。

式 (6) 的垂直分量为

$$\begin{aligned}&\underbrace{\partial_t\boldsymbol{u}_\perp}_{\epsilon^2}+\underbrace{\boldsymbol{u}_\perp\cdot\nabla_\perp\boldsymbol{u}_\perp}_{\epsilon^2}+\cancel{\underbrace{u_z\partial_z\boldsymbol{u}_\perp}_{\epsilon^{2+\alpha_u}}}\\&=\frac{1}{n}\left[\underbrace{v_\mathrm{A}\partial_z\boldsymbol{b}_\perp}_{\epsilon^2}+\underbrace{\boldsymbol{b}_\perp\cdot\nabla_\perp\boldsymbol{b}_\perp}_{\epsilon^2}+\cancel{\underbrace{b_z\partial_z\boldsymbol{b}_\perp}_{\epsilon^{2+\alpha_b}}}\right.\\&\qquad\left.-\nabla_\perp\left(\underbrace{\frac{1}{2}b_\perp^2}_{\epsilon^2}+\underbrace{b_zv_\mathrm{A}}_{\epsilon^{\alpha_b}}+\cancel{\underbrace{b_z^2}_{\epsilon^{2\alpha_b}}}\right)\right],\end{aligned} \tag{17}$$

根据上一段中的归一化方式，每一项下方所示的阶次均相对于 Ω_iv_A 而言。为了使 $\nabla_\perp b_zv_\mathrm{A}$ 项不大于其他所有项，$\alpha_b\geq2$，因此我们取

$$\frac{b_z}{v_\mathrm{A}}\sim\epsilon^2, \tag{18}$$

这使我们能够忽略式（17）中一些预先划掉的项。式（6）的$\hat{\boldsymbol{z}}$分量为

$$\begin{aligned}&\underbrace{\partial_tu_z}_{\epsilon^{1+\alpha_u}}+\underbrace{\boldsymbol{u}_\perp\cdot\nabla_\perp u_z}_{\epsilon^{1+\alpha_u}}+\cancel{\underbrace{u_z\partial_zu_z}_{\epsilon^{1+2\alpha_u}}}\\&=\frac{1}{n}\left[\underbrace{\boldsymbol{b}_\perp\cdot\nabla_\perp b_z}_{\epsilon^3}+\cancel{\underbrace{b_z\partial_zb_z}_{\epsilon^5}}-\underbrace{\partial_z\left(\frac{1}{2}b_\perp^2\right)}_{\epsilon^3}\right].\end{aligned} \tag{19}$$

这意味着 $\alpha_u\geq2$，因此我们取

$$\frac{u_z}{v_\mathrm{A}}\sim\epsilon^2, \tag{20}$$

这使我们能够进一步忽略式（17）和（19）中一些被划掉的项。（7）式的 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 分量给出

$$\begin{aligned}\underbrace{\nabla_\perp\cdot\boldsymbol{u}_\perp}_{\epsilon^{\alpha_\xi}}=&-\underbrace{\frac{1}{\Omega_i}\nabla_\perp\times\mathrm{d}_t\boldsymbol{u}_\perp}_{\epsilon^2}\\&+\underbrace{\frac{1}{v_\mathrm{A}}\nabla_\perp\cdot(u_z\boldsymbol{b}_\perp-b_z\boldsymbol{u}_\perp)}_{\epsilon^3}-\frac{1}{v_\mathrm{A}}\underbrace{\partial_tb_z}_{\epsilon^3},\end{aligned} \tag{21}$$

我们可以推断出 $\alpha_\xi\geq2$，因此取

$$\frac{\nabla_\perp\cdot\boldsymbol{u}_\perp}{\Omega_i}\sim\epsilon^2. \tag{22}$$

于是，式（5）中的各项按如下顺序排列：

$$\underbrace{\partial_t\tilde{n}}_{\epsilon^{1+\alpha_n}}+\underbrace{\boldsymbol{u}_\perp\cdot\nabla_\perp\tilde{n}}_{\epsilon^{1+\alpha_n}}+\cancel{\underbrace{u_z\partial_z\tilde{n}}_{\epsilon^{3+\alpha_n}}}+n(\underbrace{\nabla_\perp\cdot\boldsymbol{u}_\perp}_{\epsilon^2}+\underbrace{\partial_zu_z}_{\epsilon^3})=0, \tag{23}$$

因此 $\alpha_n\geq1$，我们取

$$\tilde{n}\sim\epsilon. \tag{24}$$

接着，我们可以舍去式（23）中划掉的项，因为它比主导项低两个阶。

现在注意，式（8）给出

$$\underbrace{\nabla_\perp\cdot\boldsymbol{b}_\perp}_{\epsilon}+\underbrace{\partial_zb_z}_{\epsilon^3}=0. \tag{25}$$

由于第二项比第一项低两个阶次，我们可以写成

$$\boldsymbol{b}_\perp=\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_\perp\psi+O(\epsilon^3v_\mathrm{A}), \tag{26}$$

如式（B21）所示，因此在我们的展开式最低的两个阶次上

$$\nabla_\perp\cdot\boldsymbol{b}_\perp=0,\quad \nabla_\perp\times\boldsymbol{b}_\perp=\nabla_\perp^2\psi. \tag{27}$$

我们也发现，将 $\boldsymbol{u}_\perp$ 的两个独立分量分解为以下形式会很方便

$$\boldsymbol{u}_\perp=\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_\perp\phi+\nabla_\perp\xi, \tag{28}$$

因此

$$\nabla_\perp\cdot\boldsymbol{u}_\perp=\nabla_\perp^2\xi,\quad \nabla_\perp\times\boldsymbol{u}_\perp=\nabla_\perp^2\phi. \tag{29}$$

用这些标量变量表示，保留到第二个非平凡阶次时，我们有

$$\mathrm{d}_tf=\underbrace{\partial_tf+\{\phi,f\}}_{\epsilon}+\underbrace{\nabla_\perp\xi\cdot\nabla_\perp f}_{\epsilon^2}, \tag{30}$$

$$\boldsymbol{b}\cdot\nabla f=\underbrace{v_\mathrm{A}\partial_zf+\{\psi,f\}}_{\epsilon}, \tag{31}$$

其中 $\{f,g\}=\nabla_\perp f\times\nabla_\perp g$、$f$ 和 g 是任意函数，阶次是相对于 Ω_if 而言的。

对 (17) 作用 $\nabla_\perp\times$，得到

$$\begin{aligned}&\underbrace{\partial_t\nabla_\perp^2\phi+\{\phi,\nabla_\perp^2\phi\}}_{\epsilon^2}+\underbrace{\nabla_\perp\cdot(\nabla_\perp^2\phi\nabla_\perp\xi)}_{\epsilon^3}\\&=\underbrace{v_\mathrm{A}\nabla_\perp\cdot\left(\frac{1}{n}\partial_z\nabla_\perp\psi\right)+\left\{\psi,\frac{1}{n}\nabla_\perp^2\psi\right\}}_{\epsilon^2}+\underbrace{\left\{v_\mathrm{A}b_z,\frac{1}{n}\right\}}_{\epsilon^3}.\end{aligned} \tag{32}$$

改为对 (17) 作用 $\nabla_\perp\cdot$，得到

$$\begin{aligned}&\underbrace{\partial_t\nabla_\perp^2\xi}_{\epsilon^3}+\frac{1}{2}\nabla_\perp^2\left(\underbrace{|\nabla_\perp\phi|^2}_{\epsilon^2}+\cancel{|\nabla_\perp\xi|^2}\right)\\&-\underbrace{\nabla_\perp\cdot\left(\nabla_\perp^2\phi\nabla_\perp\phi\right)}_{\epsilon^2}+\underbrace{\nabla_\perp^2\{\phi,\xi\}+\{\xi,\nabla_\perp^2\phi\}}_{\epsilon^3}\\&=\underbrace{v_{\mathrm{A}}\left\{\partial_z\psi,\frac{1}{n}\right\}}_{\epsilon^3}-\underbrace{\nabla_\perp\cdot\left(\frac{1}{n}\nabla_\perp^2\psi\nabla_\perp\psi+\frac{1}{n}\nabla_\perp b_z v_{\mathrm{A}}\right)}_{\epsilon^2}.\end{aligned}\tag{33}$$

对 (7) 的垂直分量作用$\nabla_\perp\times$，可得

$$\nabla_\perp^2\mathrm{d}_t\psi=v_{\mathrm{A}}\partial_z\nabla_\perp^2\phi+d_i[\nabla_\perp^2\partial_t u_z-\partial_z\nabla_\perp\cdot\mathrm{d}_t\boldsymbol{u}_\perp].\tag{34}$$

利用 (33) 和 (19) 的最低阶项，可将其写为

$$\begin{aligned}\underbrace{\nabla_\perp^2\mathrm{d}_t\psi}_{\epsilon^2}=&\underbrace{v_{\mathrm{A}}\partial_z\nabla_\perp^2\phi}_{\epsilon^2}\\&+\underbrace{d_i\nabla_\perp^2\left(\{\psi,b_z\}-\frac{1}{2}\partial_z\left(|\nabla_\perp\psi|^2\right)\right)}_{\epsilon^3}\\&+\underbrace{d_i\partial_z\nabla_\perp\cdot\left(\nabla_\perp^2\psi\nabla_\perp\psi+\nabla_\perp b_z v_{\mathrm{A}}\right)}_{\epsilon^3},\end{aligned}\tag{35}$$

这里忽略了所有高阶项。(21)、(19)、(33)、(32) 和 (35) 构成了关于六个变量 ϕ、ψ、ξ、b_z、u_z、$\tilde{n}$ 的封闭方程组。现在我们将按 ϵ 系统地展开，写作$\phi=\epsilon\phi_1+\epsilon^2\phi_2$，其他变量也依此类推，同时考虑它们的整体阶次，例如 $b_z=\epsilon^2 b_{z1}+\epsilon^3 b_{z2}$。

A. 最低阶：约化磁流体力学+

如果只保留最低阶项，方程 (32) 和 (35) 就简化为约化磁流体力学方程，

$$\partial_t\nabla_\perp^2\phi_1+\{\phi_1,\nabla_\perp^2\phi_1\}=v_{\mathrm{A}}\partial_z\nabla_\perp^2\psi_1+\left\{\psi_1,\nabla_\perp^2\psi_1\right\},\tag{36}$$

$$\partial_t\psi_1+\{\phi_1,\psi_1\}=v_{\mathrm{A}}\partial_z\phi_1,\tag{37}$$

也就是说，在这一阶上，阿尔芬波的动力学不受 $k_\perp d_i\sim 1$ 这一事实的影响。其他方程的最低阶项给出

$$\tilde{n}_1=\frac{1}{\Omega_i}\nabla_\perp^2\phi_1,\tag{38}$$

$$\nabla_\perp^2\xi_1=-\frac{1}{\Omega_i}\mathrm{d}_t\nabla_\perp^2\phi_1,\tag{39}$$

$$\begin{aligned}\nabla_\perp^2 b_{z1}v_{\mathrm{A}}=&\nabla_\perp\cdot\left(\nabla_\perp^2\phi_1\nabla_\perp\phi_1-\nabla_\perp^2\psi_1\nabla_\perp\psi_1\right)\\&-\frac{1}{2}\nabla_\perp^2|\nabla_\perp\phi_1|^2,\end{aligned}\tag{40}$$

$$\mathrm{d}_t u_{z1}=\{\psi_1,b_{z1}\}-\frac{1}{2}\partial_z|\nabla_\perp\psi_1|^2,\tag{41}$$

值得注意的是

$$\phi_1=\phi_1(x,y,z\pm v_{\mathrm{A}}t)=\pm\psi_1\tag{42}$$

在这一阶上构成一个精确的非线性解，即具有任意垂直结构、以群速度 v_{A} 沿背景磁场反平行方向（+）或平行方向（–）传播的阿尔芬波。对于此解，由 (40) 和 (41) 可得

$$b_{z1}=-\frac{b_\perp^2}{2v_{\mathrm{A}}}=\pm u_{z1},\tag{43}$$

且总磁场强度的平方在最低阶为常数，这是对磁流体力学大振幅阿尔芬波[27,28,35]的一种推广。

B. 次阶

为求得次阶方程，我们必须记住要考虑这一事实：$n=1+\epsilon\tilde{n}_1+O(\epsilon^2)$是时间导数 $\mathrm{d}_t f$ 的二阶部分，

$$\left[\partial_t f_2+\{\phi_2,f_1\}+\{\phi_1,f_2\}+\nabla_\perp\xi_1\cdot\nabla_\perp f_1\right],\tag{44}$$

以及前述方程中已明确写出的所有次阶项。无需解出 n_2、ξ_2、b_{z2}和 u_{z2}。在这一阶，最后两个方程（32）和（35）为

$$\begin{aligned}&\partial_t\nabla_\perp^2\phi_2-v_{\mathrm{A}}\partial_z\nabla_\perp^2\psi_2\\&+\{\phi_2,\nabla_\perp^2\phi_1\}+\{\phi_1,\nabla_\perp^2\phi_2\}-\{\psi_2,\nabla_\perp^2\psi_1\}-\{\psi_1,\nabla_\perp^2\psi_2\}\\&=\underbrace{-\nabla_\perp\cdot\left[\nabla_\perp^2\phi_1\nabla_\perp\xi_1+\tilde{n}_1 v_{\mathrm{A}}\partial_z\nabla_\perp\psi_1\right]}_{A}\\&\underbrace{-\{\psi_1,\tilde{n}_1\nabla_\perp^2\psi_1\}+v_{\mathrm{A}}\{\tilde{n}_1,b_{z1}\}}_{B},\end{aligned}\tag{45}$$

$$\begin{aligned}&\partial_t\nabla_\perp^2\psi_2-v_{\mathrm{A}}\partial_z\nabla_\perp^2\phi_2+\nabla_\perp^2(\{\phi_1,\psi_2\}+\{\phi_2,\psi_1\})\\&=\underbrace{d_i\nabla_\perp^2\{\psi_1,b_{z1}\}}_{C}\underbrace{-\nabla_\perp^2\left[\frac{1}{2}d_i\partial_z|\nabla_\perp\psi_1|^2+\nabla_\perp\xi_1\cdot\nabla_\perp\psi_1\right]}_{D}\\&+\underbrace{d_i\left[\partial_z\nabla_\perp\cdot\left(\nabla_\perp^2\psi_1\nabla_\perp\psi_1+\nabla_\perp b_{z1}v_{\mathrm{A}}\right)\right]}_{E}.\end{aligned}\tag{46}$$

ϕ_2 和 ψ_2 的演化仅取决于它们自身及最低阶变量。构成各方程右端的标记项仅取决于最低阶涨落，即它们驱动 ϕ_2 和 ψ_2。利用（39）并结合（36）代入 ξ_1，再利用（38）代入 $\tilde{n}_1$，

$$A=\frac{1}{\Omega_i}\nabla_\perp\cdot\left[\nabla_\perp^2\phi\nabla_\perp\nabla_\perp^{-2}\{\psi_1,\nabla_\perp^2\psi_1\}\right],\tag{47}$$

其中 $\nabla_\perp^{-2}$ 是 $\nabla_\perp^2$的逆算子，并且我们消去了一些项。接下来，

$$\begin{aligned}B=-\frac{1}{\Omega_i}&\left[\nabla_\perp^2\phi_1\left\{\psi_1,\nabla_\perp^2\psi_1\right\}+\nabla_\perp^2\psi_1\left\{\psi_1,\nabla_\perp^2\phi_1\right\}\right.\\&\left.-\left\{\nabla_\perp^2\phi_1,b_{z1}v_{\mathrm{A}}\right\}\right],\end{aligned}\tag{48}$$

C 无需进行任何处理。结合式 (39) 和式 (36) 代入 ξ_1，并消去两项后，我们得到

$$D = \frac{1}{\Omega_i}\nabla_\perp^2\left[\nabla_\perp\psi_1\cdot\nabla_\perp\nabla_\perp^{-2}\left\{\psi_1,\nabla_\perp^2\psi_1\right\}\right] \tag{49}$$

最后，利用（40），我们得到

$$\begin{aligned} E &= d_i\partial_z\nabla_\perp\cdot\left[\nabla_\perp^2\phi_1\nabla_\perp\phi_1-\frac{1}{2}\nabla_\perp|\nabla_\perp\phi_1|^2\right] \\ &= d_i\partial_z\nabla_\perp\cdot\left[(\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_\perp\phi_1)\cdot\nabla_\perp(\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_\perp\phi_1)\right]. \end{aligned} \tag{50}$$

值得注意的是，如果系统中的所有垂直梯度都彼此平行，则 A-E 均为零。 A-D 涉及最低阶阿尔芬波振幅的三次幂（记住， b_{z1} 已经是非线性的，由式 40 给出），而 E 只涉及二次幂；因此，如果我们对 $\chi\ll 1$ （式 13）进行辅助展开， E 将占主导地位；对于 $\chi\sim 1$，所有项都具有可比性。定义 Elsasser [36] 变量

$$\zeta^\pm = \phi\pm\psi, \tag{51}$$

将（45）和（46）相加并相减后，方程可写为

$$\begin{aligned} &\partial_t\nabla_\perp^2\zeta_2^\pm\mp v_{\rm A}\partial_z\nabla_\perp^2\zeta_2^\pm \\ &=-\frac{1}{2}\left[\left\{\zeta_2^-,\nabla_\perp^2\zeta_1^+\right\}+\left\{\zeta_2^+,\nabla_\perp^2\zeta_1^-\right\}+\left\{\zeta_1^-,\nabla_\perp^2\zeta_2^+\right\}+\left\{\zeta_1^+,\nabla_\perp^2\zeta_2^-\right\}\mp\nabla_\perp^2\left(\left\{\zeta_1^+,\zeta_2^-\right\}+\left\{\zeta_2^+,\zeta_1^-\right\}\right)\right] \\ &\quad+\frac{1}{\Omega_i}\left[\nabla_\perp\nabla_\perp^2\phi_1\cdot\nabla_\perp\nabla_\perp^{-2}\left\{\psi_1,\nabla_\perp^2\psi_1\right\}-\nabla_\perp^2\psi_1\left\{\psi_1,\nabla_\perp^2\phi_1\right\}+\left\{\nabla_\perp^2\phi_1,b_{z1}v_{\rm A}\right\}\right] \\ &\quad\pm\frac{1}{\Omega_i}\left[\nabla_\perp^2\left\{\psi_1,b_{z1}v_{\rm A}\right\}-\nabla_\perp^2\left(\nabla_\perp\psi_1\cdot\nabla_\perp\nabla_\perp^{-2}\left\{\psi_1,\nabla_\perp^2\psi_1\right\}\right)+v_{\rm A}\partial_z\nabla_\perp\cdot\left((\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_\perp\phi_1)\cdot\nabla_\perp(\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_\perp\phi_1)\right)\right] \end{aligned} \tag{52}$$

右端第一行只是 $\zeta_2^\pm$和 $\zeta_1^\mp$之间标准的 RMHD 非线性项。右端第二行和第三行描述了对 $\zeta_2^\pm$的非线性驱动。这些项大多是涨落振幅的三次项，但最后一项是二次项，因此当$\chi\ll 1$时占主导。

这一计算结果可概括如下：在约化磁流体力学展开的最低非平凡阶，沿单一方向传播的阿尔芬波允许具有任意三维结构，即使 $d_i\nabla_\perp\sim 1$也是如此。然而，在展开的下一阶，会出现破坏这一非线性解的新项：取 $\zeta_1^-=0$时，这些新的非线性项会同时驱动 ζ_2^+和 ζ_2^-。

C. 同向传播的三波相互作用， $\chi\ll 1$

假设

$$\begin{aligned} &\zeta_1^-=0,\quad \zeta_1^+=\zeta_A^++\zeta_B^+, \\ &\zeta_{A,B}^+=s_{A,B}e^{i(\boldsymbol{k}_{A,B}\cdot\boldsymbol{r}+k_{zA,B}v_{\rm A}t)}+\text{c.c.}, \end{aligned} \tag{53}$$

这是最低阶（即在 RMHD 中）的精确非线性解，其中

$$|s_{A,B}|=\frac{\chi_{A,B}v_{\rm A}k_z}{k_\perp^2}, \tag{54}$$

以及 $\chi_{A,\ B}\ll 1$。在这种弱非线性情形下的二阶近似中，右端 (52) 中除最后一项外的所有项都可以忽略，因为它们小了一个因子 χ，并且由于

我们取了 $\zeta_1^-=0$，因此剩下

$$\begin{aligned} &\partial_t\nabla_\perp^2\zeta_2^\pm\mp v_{\rm A}\partial_z\nabla_\perp^2\zeta_2^\pm \\ &=\pm\frac{1}{4}d_i\partial_z\nabla_\perp\cdot\left((\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_\perp\zeta_1^+)\cdot\nabla_\perp(\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_\perp\zeta_1^+)\right). \end{aligned} \tag{55}$$

请注意，如果 $\zeta_1^-\neq 0$，该项还会包含来自反向传播波的贡献；然而，在存在反向传播波的情况下，这种相互作用在较低阶时将弱于 RMHD 非线性。右端在两个不同的相位函数下具有非零分量

$$(\boldsymbol{k}_A\pm\boldsymbol{k}_B)\cdot\boldsymbol{r}+(k_{zA}\pm k_{zB})v_{\rm A}t, \tag{56}$$

因此我们可以写出共振解 $\zeta_2^\pm=\zeta_{A+B}^\pm+\zeta_{A-B}^\pm$，其中

$$\zeta_{A+B}^\pm=s_{A+B}^\pm e^{i((\boldsymbol{k}_A+\boldsymbol{k}_B)\cdot\boldsymbol{r}+(k_{zA}+k_{zB})v_{\rm A}t)}+\text{c.c.}, \tag{57}$$

$$\zeta_{A-B}^\pm=s_{A-B}^\pm e^{i((\boldsymbol{k}_A-\boldsymbol{k}_B)\cdot\boldsymbol{r}+(k_{zA}-k_{zB})v_{\rm A}t)}+\text{c.c.} \tag{58}$$

无须对这两者都求解，因此我们选择 $A+B$。将 ζ_1^+ 代入右端，并使两边的空间依赖关系相匹配，

$$\begin{aligned} &-k_{\perp+}^2\left[\partial_t\zeta_{A+B}^\pm\mp ik_{z+}v_{\rm A}\zeta_{A+B}^\pm\right] \\ &=\pm\frac{1}{2}ik_{z+}d_i|\boldsymbol{k}_{\perp A}\times\boldsymbol{k}_{\perp B}|^2s_As_Be^{i(\boldsymbol{k}_+\cdot r+k_{z+}v_{\rm A}t)}+\text{c.c.}, \end{aligned} \tag{59}$$

其中 $\boldsymbol{k}_+=\boldsymbol{k}_A+\boldsymbol{k}_B$。该解是一个非共振 ζ^-模，其振幅为

$$s_{A+B}^-=\frac{s_As_B}{4\Omega_i}\frac{|\boldsymbol{k}_{\perp A}\times\boldsymbol{k}_{\perp B}|^2}{|\boldsymbol{k}_{\perp A}+\boldsymbol{k}_{\perp B}|^2}, \tag{60}$$

以及一个共振 ζ^+ 模，

$$s^+_{A+B} = -\left[\frac{1}{2}i(k_{zA}+k_{zB})d_i\frac{|\boldsymbol{k}_{\perp A}\times\boldsymbol{k}_{\perp B}|^2}{|\boldsymbol{k}_{\perp A}+\boldsymbol{k}_{\perp B}|^2}s_A s_B\right]t, \tag{61}$$

此解仅在足够早的时刻有效，即$s^+_{A+B}/s_{A,\ B}\ll 1$。将这些量写成矢量 Elsasser 变量 $\boldsymbol{z}^\pm=\boldsymbol{z}\times\nabla_\perp\zeta^\pm$ 的模，

$$\frac{z^-_{A+B}}{v_\mathrm{A}} = \frac{1}{4}\left(\frac{k_{\perp A}k_{\perp B}}{|\boldsymbol{k}_{\perp A}+\boldsymbol{k}_{\perp B}|}\right)d_i\sin^2\alpha\frac{z^+_A z^+_B}{v^2_\mathrm{A}}, \tag{62}$$

$$\frac{z^+_{A+B}}{v_\mathrm{A}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{k_{\perp A}k_{\perp B}}{|\boldsymbol{k}_{\perp A}+\boldsymbol{k}_{\perp B}|}\right)d_i\sin^2\alpha\frac{z^+_A z^+_B}{v^2_\mathrm{A}}(k_{zA}+k_{zB})v_\mathrm{A}t, \tag{63}$$

其中 α 是 $k_{\perp A}$ 与 $k_{\perp B}$之间的夹角。假设两个主波的尺度和振幅大致相近，即 $k_{\perp A}\sim k_{\perp B}\sim k_{\perp+}$、$k_{zA}\sim k_{zB}\sim k_{z+}$，且 $z^+_A\sim z^+_B\sim z^+_1$，用标度关系表示为

$$\frac{z^-_2}{v_\mathrm{A}}\sim k_\perp d_i\sin^2\alpha\left(\frac{z^+_1}{v_\mathrm{A}}\right)^2, \tag{64}$$

$$\frac{z^+_2}{v_\mathrm{A}}\sim k_\perp d_i\sin^2\alpha\left(\frac{z^+_1}{v_\mathrm{A}}\right)^2 k_z v_\mathrm{A}t. \tag{65}$$

当 $z^+_2\sim z^+_1$ 时，计算便不再适用，其时间尺度为

$$\tau_{H2}\sim\tau_A(k_\perp d_i\sin^2\alpha z^+_1/v_\mathrm{A})^{-1}, \tag{66}$$

其中 $\tau_A=1/k_z v_\mathrm{A}$；正如预期的那样，$\tau_{H2}\gg\tau_A$ 缩小了 $1/\epsilon$ 倍。更具体地说，它慢了 $\sim n_1$ 倍，即密度涨落（见式 1）：我们将在第 III 节研究一种允许密度涨落变大的情形。

D. 强非线性，$\chi\gtrsim 1$

当 $\chi\gtrsim 1$（日冕中的湍流很可能就是这种情况）时，式（52）中的三次非线性项不可忽略；此外，受驱动波的振幅足够大，因此式（52）右端第一行中的类 RMHD 项也很重要：对于所有 $n\geq 3$，共振 n 波相互作用都具有相当的影响。通过比较三次非线性项与时间导数项，可以定义另一个非线性时间尺度，

$$\tau_{H3}\sim\left(k_\perp d_i|\sin\alpha|k_\perp(z^+)^2/v_\mathrm{A}\right)^{-1}. \tag{67}$$

注意（忽略 $\sin\alpha$ 中的因子）

$$\frac{\tau_{H2}}{\tau_{H3}}\sim\chi. \tag{68}$$

在这种 $\chi\gtrsim 1$ 情形下，这一过程会占据主导，直到式 52 右端的类 RMHD 项与三次非线性项相当；这一条件出现在

$$\frac{z^+_2}{v_\mathrm{A}}\sim\frac{z^-_2}{v_\mathrm{A}}\sim k_\perp d_i\frac{{z^+_1}^2}{v^2_\mathrm{A}}. \tag{69}$$

E. 日冕湍流与实验室实验

由于这种非线性相互作用比振幅大致相等的反向传播波之间的主要相互作用慢 ϵ 倍，显然只有在 $\zeta^-/\zeta^+\lesssim\epsilon$ 时它才可能变得重要；也就是说，湍流相当不平衡，且“标准”RMHD 非线性受到抑制。尽管色散效应（例如在 $\rho_s\nabla_\perp\sim 1$ 时）也允许同向传播相互作用（见第 III 节和附录 B），但本节所述机制即使在线性化由式 (36)、(37) 和 (52) 构成的封闭系统后得到的是非色散阿尔芬波、且 $\omega=\pm k_\parallel v_\mathrm{A}$ 的情况下，仍然有效。

在日冕中，$\beta\ll 1$，这证明采用 Hall 磁流体力学是合理的；此外，观测到的涨落呈斜向且极不平衡，这正是这种相互作用变得重要的理想条件。而且，最近发现的螺旋度屏障[11,12] 可能会使湍流振幅（因此也使 ϵ）变得相当大，从而增强此处非线性效应的重要性。

另一种可能适用此计算的情形是 LAPD 上的实验室实验，其中$k_\perp d_i\gg 1$，因此密度涨落相对较大。这会使 τ_{H2}（以及 τ_{H3}）相对于 τ_A减小，因此，当在装置中激发偏振未对齐的同向传播波时，这种非线性相互作用可能十分重要。

III. 色散阿尔芬波的一维陡化

在第二节中，同向传播波的非线性是高阶效应，原因在于密度涨落（比较方程 1 和 66）仍然是 O（ϵ）：本节将研究允许其达到 O（1）的情况，方法是令 $k_\perp d_i\gg 1$。令人惊讶的是，我们会发现，仅有较大的密度涨落并不足以导致阿尔芬波陡化：即使密度涨落为 O（1），单个阿尔芬波也只有在一个或多个参数 $k^2_\perp\rho^2_\tau$、$k^2_\perp d^2_e$、$k^2_\parallel d^2_i$ 或 $\eta k^2_\perp/\omega$ 不可忽略时，才会发生非平凡的一维非线性相互作用：这些参数恰恰会使波呈现色散，见方程 2。

A. 基本方程

为了研究非线性陡化，我们可以回归到令人安心的简单一维动力学。与第二节不同，我们假设所有变化都沿x方向发生，并且不失一般性地假设背景磁场位于 $x-z$ 平面内，即完整的磁场矢量为

$$\boldsymbol{b}=(v_\mathrm{A}\cos\theta, b_y, b_z+v_\mathrm{A}\sin\theta), \tag{70}$$

其定义了角度 θ 以及磁场的涨落分量 b_y 和 b_z（磁场的 x 分量

根据磁场高斯定律，磁场是一个常量）。类似地，我们将离子速度涨落写成分量 u_x、u_y、u_z，并再次写出

$$n = 1 + \tilde{n}, \tag{71}$$

因此，$\tilde{n}$ 是归一化密度涨落。将双流体方程（A17-A20）限制在一维情形，可得

$$\partial_t n = -\partial_x (n u_x), \tag{72}$$

$$\mathrm{d}_t u_x = -\frac{1}{n}\partial_x \left(c_s^2 n + \frac{1}{2} b_y^2 + \frac{1}{2} b_z^2 + b_z v_\mathrm{A} \sin\theta \right) - \frac{Z m_e}{m_i} \mathrm{d}_t u_x, \tag{73}$$

$$\mathrm{d}_t u_y = \frac{1}{n} v_\mathrm{A} \cos\theta \partial_x b_y - \frac{Z m_e}{m_i} \mathrm{d}_t u_y - \frac{Z m_e}{m_i} d_i \mathrm{d}_t \frac{\partial_x b_z}{n}, \tag{74}$$

$$\mathrm{d}_t u_z = \frac{1}{n} v_\mathrm{A} \cos\theta \partial_x b_z - \frac{Z m_e}{m_i} \mathrm{d}_t u_z + \frac{Z m_e}{m_i} d_i \mathrm{d}_t \frac{\partial_x b_y}{n}, \tag{75}$$

$$\mathrm{d}_t b_y = v_\mathrm{A} \cos\theta \partial_x u_y - b_y \partial_x u_x + d_i \partial_x \mathrm{d}_t u_z + \eta \partial_x \left(\frac{\partial_x b_y}{n} \right), \tag{76}$$

$$\mathrm{d}_t b_z = v_\mathrm{A} \cos\theta \partial_x u_z - b_z \partial_x u_x - v_\mathrm{A} \sin\theta \partial_x u_x - d_i \partial_x \mathrm{d}_t u_y + \eta \partial_x \left(\frac{\partial_x b_z}{n} \right), \tag{77}$$

其中 $\mathrm{d}_t = \partial_t + u_x \partial_x$：由于是一维传播，现在驱动非线性交互的唯一速度是压缩速度 u_x。

为推导描述非线性色散阿尔芬涨落的方程组，我们按照第二节中的做法，假设波具有很强的斜向性，并采用以下展开参数

$$\epsilon \sim \cos\theta. \tag{78}$$

为保留动理学阿尔芬和惯性阿尔芬的色散项[37] 以及电阻率，我们还将设定阶数

$$\frac{c_s}{v_\mathrm{A}} \sim \sqrt{\frac{Z m_e}{m_i}} \sim \nu_{ei} \sim \epsilon. \tag{79}$$

为保留有限频率效应，我们设定阶数

$$\partial_t \sim v_\mathrm{A} \cos\theta \partial_x \sim \Omega_i, \tag{80}$$

将其与（78）式结合，可得

$$d_i \partial_x \sim \epsilon^{-1}, \tag{81}$$

离子惯性尺度远大于我们所关注的涨落的典型长度尺度。结合上述方程，可得

$$d_i \cos\theta \partial_x \sim \rho_\tau \partial_x \sim d_e \partial_x \sim \eta \partial_x^2 \sim 1, \tag{82}$$

这样，我们保留了式（2）中出现的所有色散效应。要使系统处于强非线性状态，我们要求

$$\partial_t \sim u_x \partial_x (\sim \Omega_i), \tag{83}$$

由此可得

$$\frac{u_x}{v_\mathrm{A}} \sim \epsilon. \tag{84}$$

我们还将从一开始就假设

$$\frac{u_y}{v_\mathrm{A}} \sim \frac{b_y}{v_\mathrm{A}} \sim \epsilon, \tag{85}$$

稍后将在计算中证明这一点是自洽的。

密度涨落 $\tilde{n}$ 的阶次由 (72) 得出；对各项进行阶次估算，

$$\tilde{n} \sim 1, \tag{86}$$

且密度涨落可以很大。最后两个变量 b_z 和 u_z 的阶次（类似于我们在第二节中确定它们大小的方法）可按如下方式推得。在此展开的最低阶下，(73) 化为

$$\mathrm{d}_t u_x = -\frac{1}{n}\partial_x \left(c_s^2 n + \frac{1}{2} b_y^2 + b_z v_\mathrm{A} \right), \tag{87}$$

因此，为与其他阶次一致，$b_z / v_\mathrm{A} \sim \epsilon^2$。[38] 注意，如果可以忽略 $\mathrm{d}_t u_x$ 和 $(1/n) c_s^2 \nabla_\perp \tilde{n}$，它们分别与有限 $k_\parallel d_i$ 和 $k\rho_\tau$ 下的色散有关，那么剩下的就只有磁流体力学表达式 $b_z = -b_y^2 / 2 v_\mathrm{A}$[27, 39]。严格来说，这已经是陡化，因为 b_z 作为 b_y 的一个谐波出现；但是，当色散效应不可忽略时，我们马上要推导的陡化也会发生在 b_y 中，并产生振幅大得多的谐波。

在最低阶下，(75) 为

$$\mathrm{d}_t u_z = \frac{1}{n} v_\mathrm{A} \cos\theta \partial_x b_z + \frac{Z m_e}{m_i} d_i \mathrm{d}_t \frac{\partial_x b_y}{n}, \tag{88}$$

并且，为确保与其他阶次一致，$u_z / v_\mathrm{A} \sim \epsilon^2$。

这些阶次意味着，在最低阶下，(77) 可简化为

$$v_\mathrm{A} \partial_x u_x = -d_i \partial_x \mathrm{d}_t u_y. \tag{89}$$

其中我们使用了 $\sin\theta = 1 - O(\epsilon^2)$。[40] 现在积分一次；采用周期性边界条件或衰减边界条件时，积分常数均可设为零，由此得到

$$u_x = -\frac{1}{\Omega_i} \mathrm{d}_t u_y, \tag{90}$$

这表明我们的 $u_x \sim u_y$ (85) 阶次设定是一致的。注意，(90) 表明压缩速度源于极化漂移[29]。在 (74) 中，我们只需保留

$$\mathrm{d}_t u_y = \frac{1}{n} v_\mathrm{A} \cos\theta \partial_x b_y, \tag{91}$$

这表明 $u_y \sim b_y$，正如式 (85) 所预期的。为了使方程更便于分析，我们先将式 (90) 代入式 (91)，得到

$$u_x = -\frac{1}{n} d_i \cos\theta \partial_x b_y, \tag{92}$$

这使色散参数$d_i\cos\theta\partial_x$（即 $k_\parallel d_i$）如何控制 u_x 的大小变得稍微直观一些。将其代入式 (72)，得到密度方程

$$\partial_t n = d_i\cos\theta\partial_x^2 b_y. \tag{93}$$

在 (88) 中代入 (87)，以消去 b_z，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_t u_z =& -\frac{1}{n}c_s^2\cos\theta\partial_x n - \frac{1}{2n}\cos\theta\partial_x b_y^2\\ &-\cos\theta\mathrm{d}_t u_x + \frac{Zm_e}{m_i}d_i\mathrm{d}_t\frac{\partial_x b_y}{n},\end{aligned} \tag{94}$$

然后在 (76) 中代入 (94)，以消去 u_z，

$$\begin{aligned}\partial_t b_y =& v_\mathrm{A}\cos\theta\partial_x u_y - \partial_x(u_x b_y)\\ &- d_i\cos\theta\partial_x\left(\frac{1}{n}c_s^2\partial_x n + \frac{1}{2n}\partial_x b_y^2 + \mathrm{d}_t u_x\right),\\ &+ d_e^2\partial_x\mathrm{d}_t\frac{\partial_x b_y}{n} + \eta\partial_x\frac{\partial_x b_y}{n}.\end{aligned} \tag{95}$$

利用 (92)，

$$\frac{1}{2n}d_i\cos\theta\partial_x b_y^2 = -u_x b_y, \tag{96}$$

并将其代入 (95)，两个非线性项相互抵消，得到

$$\begin{aligned}\partial_t b_y =& v_\mathrm{A}\cos\theta\partial_x u_y - d_i\cos\theta\partial_x\left(\frac{1}{n}c_s^2\partial_x n + \mathrm{d}_t u_x\right)\\ &+ d_e^2\partial_x\mathrm{d}_t\frac{\partial_x b_y}{n} + \eta\partial_x\frac{\partial_x b_y}{n}.\end{aligned} \tag{97}$$

这最后一次抵消消去了通常会产生导数非线性薛定谔（DNLS）型非线性及相关孤子的项；剩余的非线性本质上具有色散性，稍后我们将对此进行说明。

总之，我们推导出了一组封闭的模型方程，可用于研究一维小振幅、强非线性、斜传播、低-β 色散阿尔芬波的物理特性；这组方程为

$$u_x = -\frac{1}{n}d_i\cos\theta\partial_x b_y, \tag{98}$$

$$\partial_t n = d_i\cos\theta\partial_x^2 b_y, \tag{99}$$

$$\mathrm{d}_t u_y = \frac{1}{n}v_\mathrm{A}\cos\theta\partial_x b_y, \tag{100}$$

$$\begin{aligned}\partial_t b_y =& v_\mathrm{A}\cos\theta\partial_x u_y - d_i\cos\theta\partial_x\left(\frac{1}{n}c_s^2\partial_x n\right)\\ &- d_i\cos\theta\partial_x\mathrm{d}_t u_x + d_e^2\partial_x\mathrm{d}_t\frac{\partial_x b_y}{n} + \eta\partial_x\frac{\partial_x b_y}{n}.\end{aligned} \tag{101}$$

Seyler & Lysak (1999年)[41]此前已用不同变量推导出与（98–101）等价的方程。在本文所选用的变量中，产生色散波的各项（本章节中我们将其称为“色散项”）全部集中在（101）的右端：从左到右，右端各项分别对应于：（非色散的）阿尔芬型传播、由有限$k\rho_\tau$、 $k_\parallel d_i$、 kd_e引起的色散，以及电阻阻尼。然而，这些项中的每一项不仅会引入线性色散项，还会引入额外的非线性。

需要特别注意的是，这一流体模型完全忽略了许多动理学现象：例如朗道阻尼和回旋阻尼等波粒相互作用，以及在 $k\rho_i \sim 1$ 之后对离子响应的真实模型。因此，使用该模型时应保持谨慎和怀疑态度。例如，如果 $kd_e \sim k\rho_\tau \sim 1$，真实系统会表现出强朗道阻尼[30]，，甚至我们方程所预测的线性频率实部也是错误的。因此，只有在 $k_\perp\rho_\tau$ 或 $k_\perp d_e$ 中至少有一个很小时，使用这些方程才是合理的。同样，如果 $k_\parallel d_i$ 变得过大，该模型也不再适用；此时真实等离子体会表现出强烈的离子回旋阻尼。

B. 无色散极限

首先，我们将简要考察强非线性但无色散极限下的方程，即将（101）式的最后四项设为零。尝试采用阿尔芬波解，即各变量都是 $x - tv_\mathrm{A}\cos\theta$ 的函数（如果需要，也可以选择相反的符号）；于是，$\partial_t = -v_\mathrm{A}\cos\theta\partial_x$。然后，由（99）式可得，

$$\tilde{n} = -\frac{\partial_x b_y}{\Omega_i}. \tag{102}$$

式 (101) 去掉色散项后得到

$$b_y = -u_y. \tag{103}$$

将 (98) 代入 (100)，利用 $\partial_t = -v_\mathrm{A}\cos\theta\partial_x$ 并重新整理，

$$-v_\mathrm{A}\cos\theta\partial_x u_y = \frac{1}{n}v_\mathrm{A}\cos\theta\left(\frac{\partial_x b_y}{\Omega_i}\partial_x u_y + \partial_x b_y\right) \tag{104}$$

代入 (102) 和 (103) 后，我们发现该方程中的非线性项相互抵消，这表明阿尔芬波实际上是一个有效的非线性解，无论其（一维）空间结构如何。因此，如果色散项足够小，在最低阶近似下[42]，该解就是非线性阿尔芬波，并伴有强烈非线性的压缩流和密度涨落。阿尔芬波在这一状态下仍能如此稳定，与第二节及先前研究[30]得出的结果一致。这项新计算将该结果扩展到了更大的 $k_\perp d_i$（更大的密度涨落），但有一个重要限制：仅适用于一维情况。在 Mallet 等人2023[43], 的研究中，我们表明这一推广实际上可以一直延伸到 $b_y/v_\mathrm{A} \sim 1$。

当然，本计算的主要目标是研究这些方程的非线性行为，而不

忽略色散。我们将证明，一旦色散变得显著，单色 b_y（例如）就不再是精确解，这意味着阿尔芬波会因色散非线性而变陡。

C. 色散陡峭化

我们来研究弱非线性但强色散的情形，设涨落的总振幅比在 ϵ (式 85)[44]，中原始展开的振幅小 $\delta \ll 1$ 倍，同时保持$kd_i \sim \epsilon^{-1}$的排序不变，并令色散参数保持为数量级为 1（式 82）。随后按 δ 的幂次展开:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{1x} + u_{2x} + \ldots, \\ u_y &= u_{1y} + u_{2y} + \ldots, \\ b_y &= b_{1y} + b_{2y} + \ldots, \\ n &= 1 + n_1 + n_2 + \ldots, \end{aligned} \tag{105}$$

其中

$$\epsilon v_{\mathrm{A}} \sim \frac{u_{1x}}{\delta} \sim \frac{u_{2x}}{\delta^2}, \tag{106}$$

其他变量也依此类推。从定性上看，我们已经可以看出将得到的基本结果如下。式 (101) 右端各线性项（δ）与最低阶非线性色散项（δ^2）之比为

$$n_1 \sim k d_i \frac{b_{1y}}{v_{\mathrm{A}}} \sim \delta, \tag{107}$$

这表明谐波振幅将按 kd_i 缩放，而该量很大。我们的数学分析将证实这一点（见下文式 116），这或许可以解释为什么在 LAPD 上观测到的谐波相当显著[25]，远大于磁流体力学的预测[27,39]。

1. $O(\delta)$

在一阶近似下，方程是线性的。因此，我们假设涨落按正弦变化，为 $\propto \exp(i(kx - \omega t))$。由（98-101）可得，

$$u_{1x} = -ik_\parallel d_i b_{1y}, \quad n_1 = -\frac{ikk_\parallel d_i}{\omega} b_{1y}, \quad u_{1y} = -\frac{k_\parallel v_{\mathrm{A}}}{\omega} b_{1y}, \tag{108}$$

$$\begin{aligned} \omega b_{1y} = &-k_\parallel v_{\mathrm{A}} u_{1y} + ikk_\parallel c_s^2 d_i n_1 - i\omega k_\parallel d_i u_{1x} - k^2 d_e^2 \omega b_{1y} \\ &- i\eta k^2 b_{1y}, \end{aligned} \tag{109}$$

其中

$$k_\parallel = k\cos\theta \sim \epsilon k \ll k. \tag{110}$$

将线性关系 (108) 代入 (109)，即可得到（预期的）色散关系 (2)。

2. $O(\delta^2)$

在二阶上，我们必须考虑一阶量的二次非线性。显然，二阶涨落必定与 $\exp(2i(kx-\omega t))$ 成正比，因此通常不满足线性色散阿尔fvén波的色散关系。[45]由 (98-100) 可得

$$u_{2x} = -2ik_\parallel d_i b_{2y} + ik_\parallel d_i n_1 b_{1y}, \tag{111}$$

$$n_2 = -\frac{2ikk_\parallel d_i}{\omega} b_{2y}, \tag{112}$$

$$u_{2y} = -\frac{k_\parallel v_{\mathrm{A}}}{\omega} b_{2y} + \frac{1}{2}\frac{k}{\omega} u_{1x} u_{1y} + \frac{1}{2}\frac{k_\parallel v_{\mathrm{A}}}{\omega} n_1 b_{1y}. \tag{113}$$

将一阶关系 (108) 代入上述方程后，可将上述方程右端写成仅含 b_{2y} 和 b_{1y}^2 的形式，

$$\begin{aligned} u_{2x} &= -2ik_\parallel d_i b_{2y} + \frac{kk_\parallel^2 d_i^2}{\omega} b_{1y}^2, \quad n_2 = -\frac{2ikk_\parallel d_i}{\omega} b_{2y}, \\ u_{2y} &= -\frac{k_\parallel v_{\mathrm{A}}}{\omega} b_{2y}, \end{aligned} \tag{114}$$

其中，在最后一个方程中，来自对流加速度的非线性效应与密度不均匀性相互抵消。方程 (101) 的二阶形式为

$$\begin{aligned} -2i\omega b_{2y} = &2ik_\parallel v_{\mathrm{A}} u_{2y} + 4kk_\parallel d_i c_s^2 n_2 - 2kk_\parallel d_i c_s^2 n_1^2 \\ &- 4\omega k_\parallel d_i u_{2x} + 2kk_\parallel d_i u_{1x}^2 \\ &+ 8i\omega k^2 d_e^2 b_{2y} - 4i\omega k^2 d_e^2 n_1 b_{1y} - 2ik^3 d_e^2 u_{1x} b_{1y} \\ &- 4\eta k^2 b_{2y} + 2\eta k^2 n_1 b_{1y}, \end{aligned} \tag{115}$$

我们利用一阶结果 (108) 和二阶结果 (114)，将方程仅用 b_{2y} 和 b_{1y}^2表示。解出 b_{2y}，并利用 (2) 简化表达式后，得到

$$\frac{b_{2y}}{v_{\rm A}} = ikd_i\frac{k_\parallel v_{\rm A}}{\omega}\left(\frac{k^2\rho_\tau^2 - 3k_\parallel^2 d_i^2 - 3k^2 d_e^2 - \frac{i\eta k^2}{\omega} - 2k^2\rho_\tau^2(k_\parallel^2 d_i^2 + k^2 d_e^2)}{3(k_\parallel^2 d_i^2 + k^2 d_e^2 - k^2\rho_\tau^2) + \frac{i\eta k^2}{\omega} - 2k^2\rho_\tau^2\frac{i\eta k^2}{\omega}}\right)\frac{b_{1y}^2}{v_{\rm A}^2} \tag{116}$$

这个方程有一些有趣的性质。首先，受驱谐波振幅 b_{2y} 当然与 b_{1y}^2成正比，但也随 kd_i变化：在排序方案 (81) 中，这个参数较大，因此或许可以解释在 LAPD 上进行的阿尔芬波实验中观测到的相当显著的谐波[25]。

其次，方括号之间复杂的分式取决于色散和电阻性阻尼，这些影响由参数 $k_\parallel^2 d_i^2$、 $k^2 d_e^2$、 $k^2\rho_\tau^2$ 和 $\eta k^2/\omega$ 表示。在 (98-101) 中，这些参数都被视为量级为一。然而，(116) 表明，即使它们都比较小（只要 δ 展开和 ϵ 展开仍然有效），分子和分母也会由其中最大的参数主导。这样一来，分子和分母中的依赖关系相互抵消，得到的饱和谐波振幅便与色散项的大小无关，即使在弱色散极限下也是如此。

该模型的一个重大局限是它是一维的，因此所有波模都必须具有相同的传播方向 k/k。这意味着不存在类 RMHD 相互作用项。例如，即使将反向传播的波加入主方程 (99-101)，它们的波矢也会完全对齐，因而非线性消失。这也意味着，二次谐波通常不是系统的正常模（如前文所述）。

最后请注意，如果没有电阻阻尼，在阿尔芬波色散消失的点（即正、负色散项相互抵消之处）就会出现共振。对于这一特殊的参数取值， b_{2y} 的系数会消失：这可能会在某些参数取值下导致谐波幅度相当大。探测这一共振将是对该模型的一项有益检验；然而，如前所述，仍需谨慎，因为如果 $k_\perp d_e \sim k_\perp\rho_\tau \sim 1$ 色散关系（2）不准确，而真实系统表现出很强的朗道阻尼，

可以将非线性陡化发生的时间尺度与波的非色散时间尺度进行比较，从而估算前者，即将线性阿尔芬传播的时间尺度（来自式 101 右端的第一项） $\tau_A^{-1} \sim k_\parallel v_{\rm A}$ 与非线性色散项（式 101 右端的最后四项）进行比较。对于每个色散参数 $k^2\rho_\tau^2$、 $k^2 d_e^2$、 $k_\parallel^2 d_i^2$以及电阻率$\eta k^2/\omega$，都可以估算出不同的时间尺度：式 101 中相关的非线性色散项给出的估算结果为

$$\tau_s^{-1} \sim n_1 k_\parallel v_{\rm A} \times \max(k^2\rho_\tau^2, k^2 d_e^2, k_\parallel^2 d_i^2, \eta k^2/\omega), \tag{117}$$

因此，利用估算式 (107)，

$$\frac{\tau_A}{\tau_s} \sim kd_i\frac{b_y}{v_{\rm A}} \times \max(k^2\rho_\tau^2, k^2 d_e^2, k_\parallel^2 d_i^2, \eta k^2/\omega), \tag{118}$$

其中，在上述方程中选取最大的色散参数，它决定陡化时间尺度。因此，如果波具有强色散，即这些参数中最大的一个为 O(1)，那么在这种弱非线性情形下，陡化时间会比线性时间尺度 τ_A 慢 δ 倍。然而，如果所有色散参数也都很小，陡化速度则会慢 δ 倍于最大的色散参数。此时，只有当系统能够在这一缓慢时间尺度上演化时，陡化才可能产生显著影响；也就是说，必须抑制其他竞争效应，例如标准类磁流体反向传播非线性，或第二节和附录 B 中所指出的三维相互作用。我们再次强调，根据式 (116)，随着色散参数变小，饱和谐波振幅趋于有限极限，其标度仅由 kd_i 决定；不过，只有当陡化是波演化过程中最快的过程时，才能达到这一极限。

我们的结果与 Brugman 2007[24]，的公式 (3.136) 有一些相似之处。Brugman 研究了两个偏振方向对齐、同向传播的色散阿尔fvén波之间的非线性相互作用，采用的序阶假设与我们略有不同：其拍波振幅也按 kd_i 缩放，并且在阿尔芬波色散消失处出现共振。与我们的结果不同，我们的共振只有在正、负色散项相互抵消时才会出现，而 Brugman 的表达式错误地预测，即使在无色散极限下也会出现这种共振。这是因为他们没有系统地保留所有相关的非线性项：在这项先前的工作中，第三节B中的项抵消并未发生，因此会错误地预测即使在无色散极限下也会出现非线性陡化。

D. 日冕湍流与实验室实验：与第二节的比较

与第二节中一样，在湍流日冕中，由于极端不平衡，这种效应可能变得重要。在 LAPD 上进行的实验室实验中，即使实频率的色散修正很小，这种效应也可能仍然重要：对于某些参数选择，电阻阻尼仍可能相当大[46]。色散陡峭化（本节）还是三维非线性相互作用（第二节）占主导，取决于波的对齐程度或色散程度：例如，比较（117）与（66），

$$\frac{\tau_s}{\tau_{H2}} \sim \frac{\sin^2\alpha}{\max(k^2\rho_\tau^2, k^2 d_e^2, k_\parallel^2 d_i^2, \eta k^2/\omega)}, \tag{119}$$

因此，由这些非线性效应主导的湍流，其标度很可能高度非普适；共传播非线性相互作用的最快时间尺度可能是 τ_{H2}、 τ_{H3}或 τ_s 之一（伴有任意色散项），具体取决于参数。一般而言，这些相互作用开始起作用的尺度随 $k_\perp d_i$变化，这或许可以解释为何太阳风数据中在低β[47] 处出现了该尺度上的谱折点，不过仍需进一步研究，以建立由这些效应主导的湍流理论。

E. 历史说明：不存在小振幅阿尔芬波孤子。

若电阻率可以忽略不计，可以尝试通过寻找所有变量以速度 v 作为波传播的解，即 $f = f(x - vt)$，来求解原始方程（98–101）的精确解。于是， $\partial_t = -v\partial_x$。精确解可能分为两类：周期波（在小振幅下表现如上文分析所述）和孤立波，其涨落在无穷远处趋于零。历史上，关于这类小振幅阿尔芬波孤子的存在与否一直存在相当大的争论，早期分析认为，动理学阿尔芬波孤子和惯性阿尔芬波孤子在小振幅下是可能存在的[48–50]。事实上，Seyler & Lysak（1999年）[41] 的研究（如前所述，他们未作详细推导便采用了我们的方程 98–101）旨在表明，此前所有研究都忽略了一个重要的非线性项（非线性极化漂移）；纳入该项后，剩下的只有奇异孤立波，而且必然包含一对密度不连续。我们系统的推导有望使感兴趣的读者相信，纳入这一项是正确的。在 Mallet 等人 2023[43], 的研究中，我们将讨论大振幅、微弱色散波的情形，并表明我们不仅能够重现小振幅奇异孤子，还能得到新型的大振幅正则孤子。

IV. 讨论

本文分析了小尺度双流体阿尔芬波的非线性特性。在线性情况下，高度倾斜的双流体阿尔芬波与磁流体力学有两个主要区别。首先，当 $k_\perp d_i \sim 1$ 时，由于霍尔效应，它们会产生显著的密度涨落 [29] ，

$$\frac{\delta n_i}{n_{0i}} \sim -ik_\perp d_i \frac{\delta B}{B_0}, \tag{120}$$

其次，它们会呈现色散，其色散由参数 $k_\perp^2\rho_\tau^2$、 $k_\perp^2 d_e^2$ 和 $k_\parallel^2 d_i^2$ 控制（见方程 2）。我们的非线性分析揭示了由这些新效应引发的两种新颖且有趣的现象。

在第二节中，我们研究 $k_\perp d_i \sim 1$ 在三维中的情形，但考虑无色散阿尔芬波（即，取 $\rho_\tau \to 0$ 和 $d_e \to 0$，且 $\omega/\Omega_i \sim \epsilon$），从而得到可压缩霍尔磁流体力学方程。通过对这些方程进行小振幅、各向异性、低频展开，我们表明，在最低的非平凡阶上，可以得到约化磁流体力学；对于该理论，具有任意空间结构的同向传播阿尔芬波是精确的无色散非线性解。然而，在第二个非平凡阶上，我们表明，波矢不对齐的同向传播波之间存在共振非线性交互作用：尽管线性波仍满足磁流体力学线性色散关系 $\omega = \pm k_\parallel v_{\rm A}$。重要的是，如果系统中的垂直波矢彼此对齐，这种非线性作用就会消失，因此单个正弦波不会通过这一过程与自身发生相互作用。我们估算了这一过程的时间尺度（66 和 67 ）。从这些时间尺度可以看出，控制同向传播交互作用时间尺度的关键参数，是阿尔芬波密度涨落的大小（式 120）。Tenerani等人 2023[51], 最近对二维大振幅阿尔芬波包的衰减进行了数值模拟，观测到的交互作用时间尺度为 $\tau^* \sim \tau_A\,(l/d_i)$ ：这些模拟是在固定的 $\delta B/B_0 \sim l_\perp/l_\parallel \sim 1$ 条件下进行的。将这些固定因子代入我们的时间尺度表达式，可以发现，确实有 $\tau^* \sim \tau_{H2} \sim \tau_{H3}$，因此本文解析推导的交互作用可能适用于大振幅、倾斜角较小的波。

在第三节中，我们采用了不同的排序方案，允许这些密度涨落变得很大， $\delta n/n_0 \sim 1$，同时在双流体模型中保留了最低阶产生色散波的项（方程 2）。我们表明，即使密度涨落如此之大，由于方程中存在巧妙的抵消，若忽略产生色散的项，一维非线性陡化仍不会发生；只有当至少一个此类项不可忽略时，陡化才会变得显著。这一点可由非线性陡化过程的时间尺度表达式（方程 117）看出，该时间尺度与色散参数成反比。我们还推导出一个显式公式（116），给出了这一机制产生的主波谐波振幅；与时间尺度不同，该振幅仅轻微依赖于色散：弱色散波的演化耗时更长，但其饱和谐波振幅相近。谐波振幅和时间尺度的倒数还都与 $k_\perp d_i$ 成正比，因为每种非线性都是由密度涨落驱动的（方程 120）。Mallet 等人 2023[43]提出了一种相关模型，可处理具有 $\delta B/B_0 \sim 1$ 的超大振幅波和孤子。

我们在表 II 中总结了第二节和第三节所识别的新型非线性相互作用的主要物理意义，包括其完全饱和振幅和动力学时间尺度。饱和振幅可能相当大：在第二节中，相互作用是共振的，并会持续到序阶假设失效为止；在第三节中，谐波振幅与 $k_\perp d_i$ 成比例，因而可能很大。相比之下，这两种相互作用的时间尺度通常较慢，

章节	时间尺度符号 τ	τ_A/τ	饱和振幅 $b_{2y}/v_{\rm A}$
第 II 节 C	τ_{H2}	$(k_\perp d_i b_{1y}/v_{\rm A})$ 正弦$^2\,\alpha$ [方程 66]	$b_{1y}/v_{\rm A}$
第 II 节 D	τ_{H3}	$(k_\perp d_i b_{1y}/v_{\rm A})(k_\perp b_{1y}/k_\parallel v_{\rm A})$ 正弦 α [方程 67]	$k_\perp d_i b_{1y}^2/v_{\rm A}^2$ [方程. 69]
第 III 节	τ_s	$k_\perp d_i b_{1y}/v_{\rm A}\times$最大值$(k_\perp^2\rho_\tau^2, k_\perp^2 d_e^2, k_\parallel^2 d_i^2, \eta k_\perp^2/\omega)$ [方程 117]	$k_\perp d_i b_{1y}^2/v_{\rm A}^2$ [方程. 116]

表 II. 文中研究的不同效应对应的近似非线性时间尺度和近似饱和涨落振幅。每个非线性时间尺度均与阿尔fvén时间 $\tau_A = (k_\parallel v_{\rm A})^{-1}$进行比较，而以阿尔芬速度 $b_{2y}/v_{\rm A}$ 归一化的饱和振幅则用主波 b_{1y}的振幅表示。第二节 C 中的相互作用是共振的，只有当振幅达到与主波相当的程度时才会饱和；此时序阶假设便不再成立。第二节 III 中的饱和振幅在技术上还取决于色散参数的取值（见方程 116）；粗略而言，这相当于一个量级为 1 的前因子，用来修正表中的对应项。 α 是相互作用波的垂直波矢之间的典型夹角（见第二节）。

相较于两个振幅大致相等的反向传播的阿尔芬波相互作用所对应的时间尺度，即使在 $k_\perp d_i \sim 1$ 处也是如此。不过，有两种重要应用很可能与这些新的非线性效应密切相关。

首先，此处识别出的非线性相互作用强度随 $k_\perp d_i$ 变化（等价地说，随密度涨落变化）。这意味着，在解读实验室阿尔fvén波实验的结果时必须谨慎：在 LAPD 上通常是 $k_\perp d_i \gg 1$。我们的结果或许能帮助理解 LAPD 上波谐波的产生，以及多个同向传播的阿尔fvén波之间的相互作用。

其次，Parker太阳探测器和太阳轨道器目前正在探测的太阳日冕及内太阳风中的涨落，主要由大振幅、向外传播的阿尔芬波构成，而向内传播的分量相对较小。在大尺度上，这意味着通常的反向传播非线性相互作用受到抑制，而我们在此研究的非线性物理过程可能十分重要，尤其是在尖锐的折返边界处[52]。此外，近期一项令人振奋的理论研究表明，主导的非线性级联还会受到“螺旋度屏障”[11,12], 的进一步抑制；这会使湍流振幅不断增大，直到通常的小振幅各向异性近似失效，从而使此处讨论的效应变得更加显著。未来的研究将探讨第二节中的复杂三维相互作用与第三节中的一维色散陡化之间的相互影响，以及它们在日冕湍流研究中的潜在应用。一个重要之处在于，与磁流体力学中的反向传播相互作用不同，这些非线性过程会使波与更大尺度的 $k_\parallel$ 相耦合；这意味着它们可能有助于湍流获取在 $k_\parallel d_i \sim 1$ 处注入的离子回旋加热，而这种加热被认为对实现加速太阳风所需的离子加热至关重要[53]。

致谢

AM 感谢 C. Chaston、J. Bonnell 和 S. Boldyrev 提供的宝贵讨论。A.M. 获得了美国国家航空航天局拨款 80NSSC21K0462 和美国国家航空航天局合同 NNN06AA01C。S.D. 获得了美国能源部拨款 DE-SC0021237 和美国国家航空航天局拨款 80NSSC18K1235。M.A. 获得了美国能源部拨款 DE-SC0021291 和 DE-SC0023326。T.B. 获得了美国国家航空航天局拨款 80NSSC21K1771。C.H.K.C. 获得了 UKRI 未来领袖奖学金 MR/W007657/1 以及 STFC 综合拨款 ST/T00018X/1。

附录A：双流体模型

这里，我们讨论构成本文主体计算基础的一组基本双流体方程。我们从电子和离子的等温双流体方程开始，

$$\partial_t n_i + \nabla\cdot(n_i \boldsymbol{u}) = 0, \tag{A1}$$

$$Zm_e n_i(\partial_t \boldsymbol{u}_e + \boldsymbol{u}_e\cdot\nabla\boldsymbol{u}_e) = -Zen_i\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{u}_e\times\boldsymbol{B}}{c}\right) - ZT_e\nabla n_i - \nu_{ei}Zn_i m_e(\boldsymbol{u}_e - \boldsymbol{u}), \tag{A2}$$

$$m_i n_i(\partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}) = Zen_i\left(E + \frac{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}}{c}\right) - T_i\nabla n_i - \nu_{ie}n_i m_i(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_e), \tag{A3}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}, \tag{A4}$$

$$\boldsymbol{J} = Zen_i(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_e), \tag{A5}$$

$$\partial_t\boldsymbol{B} = -c\nabla\times\boldsymbol{E}, \tag{A6}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, \tag{A7}$$

其中，除将离子速度简记为 $\boldsymbol{u}$ 外，其他符号均采用标准记法；我们还假设满足准中性条件， $n_e = Zn_i$。首先，我们利用（A2）得到

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{u}_e\times\boldsymbol{B}}{c} - \frac{m_e}{e}(\partial_t\boldsymbol{u}_e + \boldsymbol{u}_e\cdot\nabla\boldsymbol{u}_e) - \frac{T_e}{e}\nabla\ln(n_i/n_{0i}) + \frac{m_e}{Ze^2 n_i}\nu_{ei}\boldsymbol{J}. \tag{A8}$$

在此方程中，我们接着使用 (A5) 消去 $\boldsymbol{u}_e$，再使用安培定律 (A4) 消去 $\boldsymbol{J}$，以 $\boldsymbol{B}$ 表示，

得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} =& -\frac{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}}{c}+\frac{1}{4\pi Ze}\frac{(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}}{n_i}-\frac{m_e}{e}\mathrm{d}_t\boldsymbol{u}\\&+\frac{cm_e}{4\pi Ze^2}\mathrm{d}_t\left(\frac{\nabla\times\boldsymbol{B}}{n_i}\right)+\frac{cm_e}{4\pi Ze^2}\nu_{ei}\frac{\nabla\times\boldsymbol{B}}{n_i}\\&-\frac{T_e}{e}\nabla\ln(n_i/n_{0i})\\&+\frac{cm_e}{4\pi Ze^2}\frac{\nabla\times\boldsymbol{B}}{n_i}\cdot\nabla\left(\boldsymbol{u}-\frac{c}{4\pi Ze}\frac{\nabla\times\boldsymbol{B}}{n_i}\right),\end{aligned}\tag{A9}$$

其中我们记 $\mathrm{d}_t=\partial_t+\boldsymbol{u}\cdot\nabla$。将 (A9) 代入离子动量方程 (A3)，注意到碰撞阻力项因对称性而消失，因此得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_t\boldsymbol{u} =& \frac{1}{4\pi m_i}\frac{(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}}{n_i}-\frac{Zm_e}{m_i}\mathrm{d}_t\boldsymbol{u}\\&+\frac{cm_e}{4\pi em_i}\mathrm{d}_t\left(\frac{\nabla\times\boldsymbol{B}}{n_i}\right)-c_s^2\nabla\ln(n_i/n_{0i})\\&+\frac{cm_e}{4\pi em_i}\frac{\nabla\times\boldsymbol{B}}{n_i}\cdot\nabla\left(\boldsymbol{u}-\frac{c}{4\pi Ze}\frac{\nabla\times\boldsymbol{B}}{n_i}\right),\end{aligned}\tag{A10}$$

其中

$$c_s^2=\frac{T_i+ZT_e}{m_i}.\tag{A11}$$

利用（A3），并再次使用（A5）和（A4）消去 $\boldsymbol{u}_e$，可得到 $\boldsymbol{E}$ 的另一种表达式，

$$\boldsymbol{E}=\frac{m_i}{Ze}\mathrm{d}_t u-\frac{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}}{c}+\frac{T_i}{Ze}\nabla\ln(n_i/n_{0i})+\frac{\nu_{ie}m_ic}{4\pi Ze^2}\frac{\nabla\times\boldsymbol{B}}{n_i}.\tag{A12}$$

将（A12）代入（A6），

$$\partial_t\boldsymbol{B}=\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})-\frac{m_ic}{Ze}\nabla\times\mathrm{d}_t\boldsymbol{u}-\frac{\nu_{ie}m_ic^2}{4\pi Z^2e^2}\nabla\times\left(\frac{\nabla\times\boldsymbol{B}}{n_i}\right).\tag{A13}$$

方程（A1）、（A10）、（A13）以及（A7）构成了确定演化所需的完整方程组；为使其更加直观，我们按如下方式对密度和磁场进行归一化

$$n=\frac{n_i}{n_{0i}},\quad \boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{B}}{\sqrt{4\pi n_{0i}m_i}}.\tag{A14}$$

此外，利用离子和电子惯性尺度的定义

$$d_i=\frac{c\sqrt{m_i}}{\sqrt{4\pi Z^2e^2n_{0i}}},\quad d_e=\frac{c\sqrt{m_e}}{\sqrt{4\pi e^2n_{0e}}}=\sqrt{\frac{Zm_e}{m_i}}d_i,\tag{A15}$$

以及欧姆电阻率

$$\eta=\nu_{ei}d_e^2=\nu_{ie}d_i^2,\tag{A16}$$

方程可写为

$$\partial_t n=-\nabla\cdot(n\boldsymbol{u}),\tag{A17}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_t\boldsymbol{u}=&\frac{1}{n}\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{b}-\frac{1}{n}\nabla\left(c_s^2n+\frac{1}{2}b^2\right)+\frac{Zm_e}{m_i}d_i\mathrm{d}_t\frac{\nabla\times\boldsymbol{b}}{n}\\&-\frac{Zm_e}{m_i}\mathrm{d}_t\boldsymbol{u}+\frac{Zm_e}{m_i}d_i\frac{\nabla\times\boldsymbol{b}}{n}\cdot\nabla\left(\boldsymbol{u}-d_i\frac{\nabla\times\boldsymbol{b}}{n}\right),\end{aligned}\tag{A18}$$

$$\mathrm{d}_t\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{u}-\boldsymbol{b}\nabla\cdot\boldsymbol{u}-d_i\nabla\times\mathrm{d}_t\boldsymbol{u}-\eta\nabla\times\left(\frac{\nabla\times\boldsymbol{b}}{n}\right),\tag{A19}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{b}=0.\tag{A20}$$

本文各主要章节将分析这些方程在不同极限下的情形。这个流体模型显然忽略了许多重要的等离子体过程，例如导致朗道阻尼／回旋阻尼的波粒相互作用。这意味着我们的模型并非总是适用：例如，当 $k_\parallel d_i\sim 1$ 或当 $k_\perp\rho_i\sim 1$时，情况便是如此；未来的工作将纳入这些效应。

我们聚焦于阿尔芬模，并取

$$\partial_t\sim v_\mathrm{A}\partial_z\lesssim\Omega_i,\tag{A21}$$

这排除了快模，而 $c_s/v_\mathrm{A}=\sqrt{\beta}\ll 1$则消除了慢模。我们还假设波为斜传播波，$\partial_z/\nabla_\perp\ll 1$。在这些假设下，可得色散关系[29]

$$(1+k_\parallel^2d_i^2+k^2d_e^2)\omega^2+i\eta k^2\omega-k_\parallel^2v_\mathrm{A}^2(1+k^2\rho_\tau^2)=0,\tag{A22}$$

其解为

$$\omega=-i\gamma_0\pm\sqrt{\omega_0^2-\gamma_0^2},\tag{A23}$$

其中

$$\omega_0=k_\parallel v_\mathrm{A}\sqrt{\frac{1+k^2\rho_\tau^2}{1+k_\parallel^2d_i^2+k^2d_e^2}},\quad \gamma_0=\frac{1}{2}\frac{\eta k^2}{1+k_\parallel^2d_i^2+k^2d_e^2}.\tag{A24}$$

由于它源自流体模型，这个色散关系在许多重要情形下都无法很好地近似真实情况。例如，当 $k\rho_\tau\sim 1$ 且 $kd_e\sim 1$时，实阿尔芬波会受到强烈的朗道阻尼，而这一效应在该模型中被完全忽略；即使在此情形下，实频率也与这个双流体模型的预测有显著差异[54]。对于 $k\rho_s\sim 1$ 但 $kd_e\ll 1$ 且 $k\rho_i\ll 1$ （流体动理学阿尔芬波），以及 $kd_e\sim 1$ 但 $k\rho_\tau\ll 1$ （流体惯性阿尔芬波）的情形，无碰撞阻尼相对较弱，因此（A22）尚可接受。

附录 B：约化色散阿尔芬波方程

证据表明，太阳风中的小尺度湍流[55] 由动理学阿尔芬波组成；在极光中，不同区域[56]存在惯性阿尔芬波和动理学阿尔芬波。

对这种湍流级联进行建模时，通常假设典型的线性频率和非线性频率远小于 Ω_i[30–32]。为了与现有理论衔接，我们采用以下排序方案。首先，将磁场 b 写为

$$\boldsymbol{b} = v_{\mathrm{A}} + \boldsymbol{b}_\perp + \hat{\boldsymbol{z}} b_z, \tag{B1}$$

其中， v_{A} 是平均阿尔芬速度， $\boldsymbol{b}_\perp$ 和 b_z 是以速度为单位、分别沿垂直方向和 z 方向的小振幅磁场涨落。同样，我们写作

$$n = 1 + \tilde{n}, \tag{B2}$$

其中， $\tilde{n}$ 是归一化密度涨落。

我们假设涨落的垂直尺度远小于平行尺度，并按 $\epsilon \ll 1$展开，其中 $\epsilon \ll 1$定义为

$$\frac{\partial_z}{\nabla_\perp} \sim \epsilon^2 \ll 1. \tag{B3}$$

我们还假设线性时间尺度具有阿尔芬型特征，且与非线性时间尺度和电子—离子碰撞频率相当，即

$$\partial_t \sim v_{\mathrm{A}} \partial_z \sim \boldsymbol{u}_\perp \cdot \nabla_\perp \sim \boldsymbol{b}_\perp \cdot \nabla_\perp \sim \nu_{ei}, \tag{B4}$$

这意味着涨落振幅的排序为

$$\frac{u_\perp}{v_{\mathrm{A}}} \sim \frac{b_\perp}{v_{\mathrm{A}}} \sim \epsilon^2 \ll 1. \tag{B5}$$

我们还将研究范围限制在低 β 和小质量比的情形，取

$$\beta = \frac{c_s^2}{v_{\mathrm{A}}^2} \sim \frac{Z m_e}{m_i} \epsilon^2. \tag{B6}$$

我们希望纳入动理学阿尔芬波和惯性阿尔芬波的色散，因此必须对[57]进行排序

$$\rho_\tau \nabla_\perp \sim d_e \nabla_\perp \sim 1, \tag{B7}$$

这意味着电阻项也必须保留：因为 $\eta = \nu_{ei} d_e^2$,

$$\eta \nabla_\perp^2 \sim \partial_t. \tag{B8}$$

方程 (B7) 还意味着 d_i 相对于垂直尺度较大,

$$d_i \nabla_\perp \sim \epsilon^{-1}, \tag{B9}$$

但相对于平行尺度较小,

$$d_i \partial_z \sim \epsilon, \tag{B10}$$

这是极光涨落以及某些实验室实验中的典型状态。这也意味着，典型时间尺度相对于 Ω_i 较短,

$$\frac{1}{\Omega_i} \partial_t \sim \epsilon. \tag{B11}$$

我们一开始就假设（并将证明这一假设是一致的）， b_z 和 u_z 至少与垂直涨落 $\boldsymbol{u}_\perp$ 和 $\boldsymbol{b}_\perp$ 一样小；我们将从方程推导 $\tilde{n}$ 的阶次，但假设它相对于 1 很小。感应方程 (A19) 的 z 分量在最低阶给出

$$\nabla_\perp \cdot \boldsymbol{u}_\perp = -\frac{1}{\Omega_i} \nabla_\perp \times \mathrm{d}_t \boldsymbol{u}_\perp \sim \epsilon^2 \Omega_i, \tag{B12}$$

这意味着垂直速度仅有轻微的压缩性：其散度比旋度低一个阶数。将这一结果代入连续性方程 (A17)，可得最低阶近似

$$\mathrm{d}_t \tilde{n} = \frac{1}{\Omega_i} \nabla_\perp \times \mathrm{d}_t \boldsymbol{u}_\perp, \tag{B13}$$

由此可得

$$\tilde{n} \sim \epsilon. \tag{B14}$$

现在来看垂直动量方程（A18），在最低阶下，我们得到的只是压力平衡

$$c_s^2 \tilde{n} = -b_z v_{\mathrm{A}}, \tag{B15}$$

由此事实上可知

$$\frac{b_z}{v_{\mathrm{A}}} \sim \epsilon^3. \tag{B16}$$

动量方程（A18）中 z 分量的最低阶项为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_t u_z =& v_{\mathrm{A}} \partial_z b_z + \boldsymbol{b}_\perp \cdot \nabla_\perp b_z + \frac{Z m_e}{m_i} d_i \mathrm{d}_t \nabla_\perp \times \boldsymbol{b}_\perp \\ &+ d_e^2 [\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_\perp b_z] \cdot \nabla_\perp \nabla_\perp \times \boldsymbol{b}_\perp, \end{aligned} \tag{B17}$$

由此我们可以推得[58]

$$\frac{u_z}{v_{\mathrm{A}}} \sim \epsilon^3. \tag{B18}$$

在最低阶下，垂直感应方程写作

$$\mathrm{d}_t \boldsymbol{b}_\perp = v_{\mathrm{A}} \partial_z \boldsymbol{u}_\perp + \boldsymbol{b}_\perp \cdot \nabla_\perp \boldsymbol{u}_\perp + d_i \hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_\perp \mathrm{d}_t u_z + \eta \nabla_\perp^2 \boldsymbol{b}_\perp, \tag{B19}$$

将（B17）代入其中以消去 u_z，并代入（B15）以用 $\tilde{n}$ 表示 b_z，得到

$$\begin{aligned} \partial_t \boldsymbol{b}_\perp =& v_{\mathrm{A}} \partial_z \boldsymbol{u}_\perp + \nabla_\perp \times (\boldsymbol{u}_\perp \times \boldsymbol{b}_\perp) \\ &- \frac{c_s^2}{\Omega_i} \hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_\perp [v_{\mathrm{A}} \partial_z \tilde{n} + \boldsymbol{b}_\perp \cdot \nabla_\perp \tilde{n}] \\ &- d_e^2 \frac{c_s^2}{\Omega_i} \hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_\perp [\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_\perp \tilde{n} \cdot \nabla_\perp \nabla_\perp \times \boldsymbol{b}_\perp] \\ &+ d_e^2 \hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_\perp \mathrm{d}_t \nabla_\perp \times \boldsymbol{b}_\perp + \eta \nabla_\perp^2 \boldsymbol{b}_\perp. \end{aligned} \tag{B20}$$

为了进一步推进，请注意，由于最低阶的 (A20) 仅为 $\nabla_\perp \cdot \boldsymbol{b}_\perp = 0 + O(\epsilon^3)$，我们可以用磁通函数表示 $\boldsymbol{b}_\perp$

$$\boldsymbol{b}_\perp = \hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_\perp \psi. \tag{B21}$$

同样，由于 $\nabla_\perp \cdot \boldsymbol{u}_\perp$ 很小（参见 B12），在最低阶下，我们可以用流函数表示垂直速度[59]

$$\boldsymbol{u}_\perp = \hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_\perp \phi. \tag{B22}$$

非线性项可用这些标量函数表示为

$$\boldsymbol{u}_\perp \cdot \nabla_\perp f = \{\phi, f\}, \quad \boldsymbol{b}_\perp \cdot \nabla_\perp f = \{\psi, f\} \tag{B23}$$

其中，泊松括号为 $\{f, g\} = \nabla_\perp f \times \nabla_\perp g$。在最低阶近似下，

$$\mathrm{d}_t f = \partial_t f + \{\phi, f, .\} \tag{B24}$$

将 (B13) 用 ϕ 表示，可得

$$\tilde{n} = \frac{1}{\Omega_i} \nabla_\perp^2 \phi, \tag{B25}$$

密度涨落与流动的涡量成正比。将 (B20) 和垂直动量方程 (A18) 的旋度仅用 ϕ 和 ψ 表示，可得到一组关于色散阿尔芬波的封闭非线性方程，

$$\partial_t \nabla_\perp^2 \phi + \{\phi, \nabla_\perp^2 \phi\} = v_\mathrm{A} \partial_z \nabla_\perp^2 \psi + \{\psi, \nabla_\perp^2 \psi\}, \tag{B26}$$

$$\begin{aligned} \partial_t [\psi - d_e^2 \nabla_\perp^2 \psi] =& v_\mathrm{A} \partial_z [\phi - \rho_\tau^2 \nabla_\perp^2 \phi] \\ &+ \{\psi - d_e^2 \nabla_\perp^2 \psi, \phi - \rho_\tau^2 \nabla_\perp^2 \phi\} \\ &+ \eta \nabla_\perp^2 \psi. \end{aligned} \tag{B27}$$

这些“约化色散阿尔芬波”（RDAW）方程与 Seyler & Xu (2003)[31] 用于研究极光涨落的方程完全相同；然而，这些作者并未给出系统的推导[60]。这些方程也与 Zocco & Schekochihin 2011[30] 的约化陀螺动力学方程（又称“KREHM”）相似：不过，该模型要复杂得多，对离子和电子动力学进行了严谨处理。

这里，我们只对上述方程指出两点。首先，如果所有梯度都沿同一方向，泊松括号便全部为零：因此，任意一维场构型都是精确解；也就是说，该系统中没有保留一维波陡化。其次，若同时满足 $\rho_\tau \nabla_\perp \ll 1$ 和 $d_e \nabla_\perp \ll 1$，约化可压缩色散阿尔fvén波方程便退化为约化磁流体力学（RMHD）方程，此时 $\phi = \pm\psi$ 是沿 $\hat{\boldsymbol{z}}$反向传播的精确非线性解，无论其三维结构如何。在这个无色散极限下，只有反向传播波之间才会发生非平凡的非线性相互作用。尽管存在密度涨落（B25），也尽管存在 $d_i \nabla_\perp \gg 1$，情况仍是如此：在这一阶近似下，波的压缩性对非线性动力学没有影响。纳入色散效应后，不同垂直尺度的同向传播波之间也会发生非线性相互作用（前提是它们的垂直波矢也指向不同方向），因为小尺度波会“追上”大尺度波。

[1]R. Torbert, C. Russell, W. Magnes, R. Ergun, P.-A. Lindqvist, O. LeContel, H. Vaith, J. Macri, S. Myers, D. Rau 等，《空间科学评论》199, 105（2016年）。[2]C. H. K. Chen，《等离子体物理学杂志》82, 535820602（2016年）。[3]J. Kasper, K. Klein, E. Lichko, J. Huang, C. Chen, S. Badman, J. Bonnell, P. Whittlesey, R. Livi, D. Larson 等，《物理评论快报》127, 255101（2021年）。[4]S. Bale, S. Badman, J. Bonnell, T. Bowen, D. Burgess, A. Case, C. Cattell, B. Chandran, C. Chaston, C. Chen 等，《自然》576, 237（2019年）。[5]T. A. Bowen, S. T. Badman, S. D. Bale, T. D. de Wit, T. S. Horbury, K. G. Klein, D. Larson, A. Mallet, L. Matteini, M. D. McManus 等，arXiv预印本 arXiv:2110.11454（2021年）。[6]J. Kasper, S. Bale, J. W. Belcher, M. Berthomier, A. Case, B. Chandran, D. Curtis, D. Gallagher, S. Gary, L. Golub 等，《自然》576, 228（2019年）。[7]B. D. Chandran 和 J. V. Hollweg，《天体物理学杂志》707, 1659（2009年）。[8]B. D. Chandran，《等离子体物理学杂志》87（2021年）。[9]A. A. Schekochihin，《等离子体物理学杂志》88, 155880501（2022年）。[10]G. G. Howes，《伦敦皇家学会哲学汇刊A辑》373, 20140145（2015年）。[11]R. Meyrand, J. Squire, A. A. Schekochihin 和 W. Dorland，《等离子体物理学杂志》87（2021年）。[12]J. Squire, R. Meyrand, M. W. Kunz, L. Arzamasskiy, A. A. Schekochihin 和 E. Quataert，arXiv预印本 arXiv:2109.03255（2021年）。[13]W. Gekelman, H. Pfister, Z. Lucky, J. Bamber, D. Leneman 和 J. Maggs，《科学仪器评论》62, 2875（1991年）。[14]D. Leneman, W. Gekelman 和 J. Maggs，《物理评论快报》82, 2673（1999年）。[15]W. Gekelman, S. Vincena, N. Palmer, P. Pribyl, D. Leneman, C. Mitchell 和 J. Maggs，《等离子体物理与受控聚变》42, B15（2000年）。[16]S. Vincena, W. Gekelman 和 J. Maggs，《物理评论快报》93, 105003（2004年）。[17]N. Palmer, W. Gekelman 和 S. Vin- cena，《等离子体物理》12, 072102（2005年），https://doi.org/10.1063/1.1930796。[18]T. A. Carter, B. Brugman, P. Pribyl 和 W. Lybarger，《物理评论快报》96, 155001（2006年）。[19]D. W. Auerbach, T. A. Carter, S. Vincena 和 P. Popovich，《物理评论快报》105, 135005（2010年）。[20]G. G. Howes, D. J. Drake, K. D. Nielson, T. A. Carter, C. A. Kletzing 和 F. Skiff，《物理评论快报》109, 255001（2012年）。[21]S. Dorfman 和 T. A. Carter，《物理评论快报》110, 195001（2013年）。[22]S. Dorfman 和 T. A. Carter，《等离子体物理》22, 055706（2015年），https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.4919275。[23]S. Dorf man 和 T. A. Carter，《物理评论快报》116, 195002（2016年）。[24]B. T. Brugman，《阿尔fvén波非线性相互作用研究》，博士论文，加州大学洛杉矶分校（2007年）。[25]M. Abler，准备中（2023年）。[26]M. L. Goldstein, A. Klimas 和 F. Barish，《太阳风III》，385（1974年）。[27]A. Barnes 和 J. V. Hollweg，《地球物理研究杂志》79, 2302（1974年）。[28]B. J. Vasquez 和 J. V. Hollweg，《地球物理研究杂志：空间物理》103, 349（1998年）。[29]J. V. Hollweg，《地球物理研究杂志：空间物理》104, 14811（1999年）。[30]A. Zocco 和 A. A. Schekochihin，《等离子体物理学》18, 102309（2011年）。[31]C. Seyler 和 T. Xu，《地球物理研究快报》30（2003年）。[32]A. A. Schekochihin, S. C. Cowley, W. Dorland, G. W. Hammett, G. G. Howes, E. Quataert 和 T. Tatsuno，《天体物理学杂志增刊》182, 310（2009年）。[33]P. Goldreich 和 S. Sridhar，《天体物理学杂志》438, 763（1995年）。[34]H. R. Strauss，《流体物理学》19, 134（1976年）。

[35]B. J. Vasquez 和 J. V. Hollweg，《地球物理研究杂志：空间物理》**103**, 335（1998年）。[36]W. M. Elsasser，《物理评论》**79**, 183（1950年）。[37]再者，同时保留这两者会忽略强烈的朗道阻尼；我们的结果实际上只有在 d_e 或 ρ_τ 至少有一个很小时才有效。[38]我们已预先利用这一点忽略了 b_z^2 项；这也对允许的 c_s/v_A、 b_y/v_A和Ω_i 范围施加了一些较弱的限制，这里不作讨论。[39]B. J. Vasquez 和 J. V. Hollweg，《地球物理研究杂志：空间物理》**101**, 13527（1996年）。[40]这应与上一节中的类似方程（21）进行比较。[41]C. Seyler 和 R. Lysak，《等离子体物理》**6**, 4778（1999年）。[42]如果将这一展开形式上延伸至色散参数的更高阶，我们会发现波在更高阶上变陡。[43]A. Mallet，准备中（2023年）。[44]这两个展开可以交换次序，但如果任何色散参数在 δ 中变小，就必须在以下分析中将其舍去。[45]如果在 O（δ）处考虑多个正弦波，也可以求出拍频模，其结果为相位函数之差。对于我们这里的单个 O（δ）波，只会得到$0 = 0$。因此，本文分析不考虑这一情况。[46]S. Bose, T. Carter, M. Hahn, S. Tripathi, S. Vincena 和 D. W. Savin，《天体物理学杂志》**882**, 183（2019年）。[47]C. Chen, L. Leung, S. Boldyrev, B. Maruca 和 S. Bale，《地球物理研究快报》**41**, 8081（2014年）。

[48]A. Hasegawa 和 K. Mima，《物理评论快报》**37**, 690 (1976年)。[49]P. Shukla、H. Rahman 和 R. Sharma，《等离子体物理学杂志》**28**, 125 (1982年)。[50]D.-J. Wu、D.-Y. Wang 和 C.-G. Fälthammar，《等离子体物理》**2**, 4476 (1995年)。[51]A. Tenerani、C. González、N. Sioulas、C. Shi 和 M. Velli，《等离子体物理》**30**, 032101 (2023年)。[52]V. Krasnoselskikh、A. Larosa、O. Agapitov、T. D. de Wit、M. Moncuquet、F. Mozer、M. Stevens、S. Bale、J. Bonnell、C. Fro- ment、等，《天体物理学杂志》**893**, 93 (2020年)。[53]J. V. Hollweg 和 P. A. Isenberg，《地球物理研究杂志：空间物理》**107**, SSH (2002年)。[54]D. Thuecks、C. Kletzing、F. Skiff、S. Bounds 和 S. Vincena，《等离子体物理》**16**, 052110 (2009年)。[55]C. H. K. Chen、S. Boldyrev、Q. Xia 和 J. C. Perez，《物理评论快报》**110**, 225002 (2013年)。[56]K. Stasiewicz、P. Bellan、C. Chaston、C. Kletzing、R. Lysak、J. Maggs、O. Pokhotelov、C. Seyler、P. Shukla、L. Stenflo、等，《空间科学评论》**92**, 423 (2000年)。[57]再次（参见附录A中的讨论），同时保留这两项是个糟糕的近似，但这里我们仍会这样做，以便与先前的工作进行比较。[58]我们利用这一点，在写出 (B17) 时预先舍去了 (A18) 右端中涉及 u_z 的项。[59]我们并未完全忽略速度的压缩部分；它通过 (B12) 决定密度涨落：在第 II 和 III 节中，它在动力学中发挥着更积极的作用，因此必须将其明确纳入。[60]据作者所知，目前似乎尚无相关论文见刊。