arXiv:2303.10205v5 [math.GN] 2 Aug 2024

齐性ANR-空间的局部结构

V. Valov

Abstract. 我们研究有限维齐性局部紧 ANR-空间在多大程度上具有与拓扑流形相同的性质。特别地，我们描述了齐性 ANR-空间的局部结构。利用这一描述，我们肯定地解决了这样一个问题：每个有限维齐性度量 ANR-紧致空间 X 是否都具有维数满值性，即对于任意度量紧空间 Y，$\dim\ X \times Y\ = \dim X + \dim\ Y$。

1. 引言

本文所说的空间是局部紧的可分度量空间，映射均为连续映射。下文处处考虑系数取自阿贝尔群 G的约化 Čech 同调 $H_n(X;G)$和上同调群 $H^n(X;G)$。若对任意两点 x、$y \in X$，都存在一个将 X 映到其自身的同胚 h，使得 $h(x) = y$，则称空间为齐性的。X 的齐性蕴含局部齐性，即对任意 x、$y \in X$，都存在一个同胚 h，将 x 的某个邻域映到 y 的某个邻域，并且 $h(x) = y$。

研究齐性 ANR-空间的动机之一，是著名的 Bing-Borsuk [1] 猜想：每个有限维齐性度量 ANR-紧致空间都是拓扑流形。根据 Jacobsche [14], ，该猜想若在维数三的情形得到肯定解，将意味着著名的 Poincar´e 猜想成立。J. Bryant 和 S. Ferry [4] 去年宣布，对于每个$n \geq 6$，该猜想都存在无穷多个拓扑上彼此不同的反例（Bryant-Ferry 结果首次发表于 2018 年）。

日期：2024年8月5日。2000 年数学主题分类。主要分类号 55M15；次要分类号 55M10。关键词和短语：绝对邻域收缩、上同调维数、上同调群、齐性空间。作者获得 NSERC 资助项目 261914-19 的部分资助。1

有关 Bing-Borsuk 猜想的更多背景，可参阅综述 [15]。

尽管已有反例推翻了 Bing-Borsuk 猜想，研究有限维齐性 ANR-空间在多大程度上具有与拓扑流形相同的性质，仍然很有意义。我们证明，齐性 ANR-空间确实具有一些拓扑流形的典型性质。对于具有有限上同调维数 $\dim_G X = n$ 的齐性 ANR-紧致空间，其局部结构已在 [29, 定理 1.1], 中确立，其中G 是带单位元的可数主理想整环，且 $n \geq 2$。本文通过考察局部紧致齐性 ANR-空间，并将主理想整环推广为可数群，改进了 [29] 中的结果。此外，我们还给出了齐性 ANR或局部齐性 ANR的一些新性质。

下一个定理描述了齐性 ANR-空间的局部结构，并展示了它们与拓扑流形的相似性:

定理 1.1. 设 X 是一个齐性连通 ANR-空间，且 $\dim_G X = n \geq 2$, 其中 G 是一个可数群。那么，每个点$x \in X$ 都有一个由连通开集 $U \subset X$ 组成的基 $\mathcal{B}_x$ ，其中每个开集都有紧闭包，并满足以下条件:

(1) 在 $\overline{=}$ U 中， $\overline{U}$ 的边界 $\mathrm{bd}\,\overline{U}$ 连通，且其在 X 中的补集恰有两个连通分支；(2) $H^{n-1}(\mathrm{bd}\,\overline{U};\, G) \neq 0$, $H^n(\overline{U};\, G) = H^{n-1}(\overline{U};\, G) = 0$，并且 $\overline{U}$ 是一个张成于 $\mathrm{bd}\,\overline{U}$ 上的 $(n-1)$-上同调膜，适用于任意非零的$\gamma \in H^{n-1}(\mathrm{bd}\,\overline{U};\, G)$；(3) $\mathrm{bd}\overline{U}$ 是一个 $(n-1, G)$-泡。

˘ 回忆一下，对于任意非平凡阿贝尔群 G ，Čech 上同调群 $H^n(X; G)$ 同构于从 X 到 $K(G, n)$ 的映射的带基点同伦类群，其中 $K(G, n)$ 是一个类型为 (G, n) 的 CW-复形，见 [17]。上同调维数 $\dim_G X$ 是最大的数 n，使得存在一个闭集 $A \subset X$，满足 $H^n(X, A;\, G) \neq 0$。等价地，对于度量空间 X，当且仅当对于其中任意闭对 $A \subset B$，由包含映射 $A \hookrightarrow B$诱导的同态 $j^n_{B,A}\colon H^n(B; G) \to H^n(A; G)$ 是满射时，$\dim_G X \leq n$；见 [10]。这意味着每个从 A 到 $K(G, n)$ 的映射都可以延拓到 B 上。若 X 是有限维空间，那么对于每个 G，都有 $\dim_G X \leq \dim_{\mathbb{Z}} X = \dim X$ [22]。另一方面，存在一个紧致空间 X[8]，满足 $\dim X = \infty$ 且 $\dim_{\mathbb{Z}} X = 3$。若空间 A 满足 $H^k(A; G) \neq 0$，但对于A的每个真闭子集 B，都有 $H^k(B; G) = 0$，则称其为 (k, G)-泡。

齐性 ANR具有以下重要性质，见 [1],[2]: 若 (K, A) 是 X 的一个紧对，且 K 是某个 $\gamma \in H^{n-1}(A; G)$ 的一个 $(n-1)$-上同调膜，则 $(K \setminus A) \cap \overline{X \setminus K} = \varnothing$。我们称此性质为 n-上同调膜性质。回忆一下，若对于元素 $\gamma \in H^k(A; G)$， K 被称为是张成于闭集 $A \subset K$ 上的一个 k-上同调膜，是指 γ 不能延拓到 K上，但可以延拓到K 中每个包含 A的真闭子集上。这里， $\gamma \in H^k(A; G)$ 不能延拓到 K 上，意味着 γ 不属于像 $j^k_{K,A}\big(H^k(K; G)\big)$。

以下各处， $\mathcal{B}_x$ 表示点 $x \in X$处的一个局部基。若存在 $W \in \mathcal{B}_x$ ，使得对每个满足 $U \subset W$的 $U \in \mathcal{B}_x$，同态 $j^n_{U,W}: H^n(X, X \setminus U; G) \to H^n(X, X \setminus W; G)$ 都非平凡，则称空间 X 在点 $x \in X$ [22] 处具有一个 n维 G障碍。Kuzminov [22], [21], 证明，每个满足 $\dim_G X = n$ 的紧致空间 X都包含一个紧集 Y，使得 $\dim_G Y = n$，并且 X 在 Y的一个稠密子集的每一点处都具有一个 n维 G障碍。根据下一个定理， n维齐性空间在每一点都有障碍，且相应的同态都是满射。

定理 1.2. 设 X 是一个局部齐性的 ANR-空间，满足 $\dim_G X = n$，其中 G 是一个可数群。那么有以下结论:

(i) X 具有（$n-1$）-上同调膜性质；(ii) X 在每个 $x \in X$处都有一个 n维的 G-障碍。此外，存在 $W \in \mathcal{B}_x$ ，使得对于任意满足$\overline{U} \subset V \subset \overline{V} \subset W$的 U、 $V \in \mathcal{B}_x$，同态$j^n_{U,\,V}$ 都是满射。

这是局部齐性 ANR和拓扑流形的另一个常见性质。

推论 1.3. 设 X 如定理 1.2 中所述。若 $U \subset X$ 是开集且$f\colon U \to X$是一个单射，则 $f(U)$在 X中也是开集。

关于齐性 ANR，一个重要问题是：每个有限维齐性 ANR-紧致空间是否都是维数满值的。回顾一下，若对任意紧空间 Y，都有 $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$，则称局部紧空间 X 为维数满值。值得注意的是，存在并非维数满值的度量 ANR-紧致空间，参见 [7] 和 [9]。关于齐性 ANR- 紧致空间是否具有维数满值性的问题可追溯至 [3] ，并且也曾在 [5] 和 [13] 中讨论。对于三维空间，这一问题已在 [29] 中得到肯定回答。现在，我们将彻底解决这一问题。

定理 1.4. 设 X 是一个有限维局部齐性 ANR-空间。则有以下结论:

(i) X 是维数满值的; (ii) 若 X 是齐性且连通的, 则每个 $x \in X$ 都有一个邻域 W_x , 使得对于所有满足 $\overline{U} \subset W_x$的 $U \in \mathcal{B}_x$, $\mathrm{bd}\overline{U}$ 都是维数满值的。

2. The cohomology membrane property

如果在 k-上同调膜性质的定义中, 进一步要求 K 是一个可缩于 X的真子集中的紧集, 那么我们称 X 具有弱 k-上同调膜性质。我们将看到, 定理 1.1 的证明主要基于这一性质。本节证明, 任何满足 $\dim_G X = n$、且 G 可数的局部齐性空间 X , 都具有 $(n-1)$-上同调膜性质。我们还给出这一性质的一些推论。

若空间 X 满足: 对于每个真闭子集 $B \subset X$, 都有$j^k_{X,\ B}(\gamma) = 0$, 则称其为非平凡元素 $\gamma \in H^k(X; G)$的 $(k,\ G)$-载体。

引理 2.1. 设 $A \subset X$ 为紧集, γ 为 $H^n(A; G)$ 的一个非零元素。

(i) 若 γ 不能延拓到包含 A 的紧集 $P \subset X$ 上, 则存在一个 n-上同调膜 $K \subset P$, 它由 A 张成, 用于 γ; (ii) 存在一个闭集 $B \subset A$, 使得 B 是 $j^n_{A,\ B}(\gamma)$ 的载体。

证明。 (i) 考虑由所有包含 A 的 P 的闭子集 F 组成的族 $\mathcal{F}$, 其中 γ 不能延拓到 F 上。设 $\{F_\tau\}$ 是 $\mathcal{F}$ 的一个递减子族, 且 $F_0 = \bigcap_\tau F_\tau$。假设 γ 可延拓到 $\widetilde{\gamma} \in H^n(F_0; G)$。将 $\widetilde{\gamma}$ 视为从 F_0 到 $K(G, n)$ 的映射, 并考虑到 $K(G, n)$ 是可度量化空间 $[19],$ 的一个绝对邻域, 我们便可将 $\widetilde{\gamma}$ 延拓到 P 中 F_0 的一个邻域 W 上。但这是不可能的, 因为 W 包含某个 F_τ。因此, 根据佐恩引理, $\mathcal{F}$ 有一个极小元 K , 它是一个 n-上同调膜, 由 A 张成, 用于 γ 。

(ii) 现在, 设 $\mathcal{F}$ 是 A 的闭子集族 F , 满足$j^n_{A,\ F}(\gamma) \neq 0$, 并设 $\{F_\tau\}$是 $\mathcal{F}$的递减子族, 且满足 $F_0 = \bigcap_\tau F_\tau$。若 $\gamma_0 = j^n_{A,\ F_0}(\gamma) = 0$, 则存在一个同伦 $H\colon F_0 \times [0,1] \to K(G, n)$, 连接恒等映射与 γ_0。再次利用 $K(G, n)$ 是度量空间上的绝对邻域伸张体这一性质, 我们可以找到 F_0 在 A中的一个闭$\widetilde{}$邻域 W, 以及一个同伦 $H\colon W \times [0,1] \to K(G, n)$, 连接 $j^n_{A,\ W}(\gamma)$ 与恒等映射。这就产生了矛盾

因为 W 包含某个 F_τ。因此， $\mathcal{F}$ 有一个极小元 B，它是$j^n_{A,\ B}(\gamma)$的载体。□

我们还需要 Effros 定理的以下适用于局部紧空间的版本，参见 [31, 定理 2.5]）：

定理 2.2. 设 X 是一个齐性空间，且 ρ 是 X的一点紧化上的度量。那么，对于任意 $a \in X$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对于每个满足 $\rho(x, a) < \delta$ 的 $x \in X$，都存在一个同胚 $h\colon X \to X$，满足 $h(x) = a$ 且 $\rho(h(y)\ y) < \varepsilon$，对所有 $y \in X$均成立。

命题 2.3. 设 X 是一个齐性 ANR-空间，且 $\dim_G X = n$，其中 G 是任意群。那么，对于任意真紧集 $P \subset X$， $H^n(P;\ G) = 0$。

证明. 当 X 是紧空间时，这已在 [28] 中借助以下命题得到证明，参见 [28, 命题 2.3]: 若 X 是一个维数为 $\dim_G X = n$的度量紧致空间， $A \subset X$ 是$H^n(X; G)$中一个非平凡元素的载体，并且存在映射 $f\colon X \to X$，它与 X的恒等映射 id_X 同伦，则 $A \subset f(A)$。若 X 是一个维数为 $\dim_G X = n$的 ANR-空间， A是 $H^n(Q; G)$中一个非平凡元素的载体，其中 $Q \subset X$ 是紧空间，并且存在同伦$F\colon A \times [0, 1] \to X$，满足 $F(x, 0) = x$ 且 $F(x, 1) = f(x)$， $x \in A$，则该结论仍然成立。

取 ρ 上的度量 X，使其生成相应的拓扑，并假设存在一个真紧集 $P \subset X$，满足 $H^n(P;\ G) \neq 0$。因此，根据引理 2.1(ii)，P 包含一个紧集 K，使得 K 是 $j^n_{P,K}(\alpha)$ 的载体，其中$\alpha \in H^n(P;\ G)$ 非平凡。取两个包含 P 的开集 $U, V \subset X$，它们在 X 中的紧闭包满足$\overline{U} \subset V$。由于 $X \in ANR$，存在 X 的一个开覆盖 ω，使得任意两个 ω-近的映射 $f_1, f_2\colon \overline{U} \to X$ 都同伦。将 ω 限制在 $\overline{V}$ 上，我们可找到 $\varepsilon > 0$，使得任意映射 $f_1, f_2\colon \overline{U} \to X$，只要满足 $\rho(f_1(x)\ f_2(x)) < \varepsilon$, $x \in \overline{U}$，便同伦。此外，我们可以假设 $\varepsilon < \min\{\rho(P, X\backslash U)\ \rho(\overline{U}, X\backslash V)\}$。接下来，从 X 中 K 的边界 $\mathrm{bd}\ K$ 上取一点 a，并取一点 $b \notin K$，使得$\rho(a, b) < \delta$，其中 $\delta > 0$ 是对应于 ε 和点 a 的 Effros 数。因此，存在同胚 $h\colon X \to X$，使得 $h(a) = b$，且对所有 $x \in X$，都有 $\rho(x, h(x)) < \varepsilon$。于是， $h(K) \subset U$，且$h(\overline{U}) \subset V$。由于 h 生成同构 $h^*\colon H^n(h(P);\ G) \to H^n(P;\ G)$，集合 $A = h(K)$ 是 $j^n_{h(P),h(K)}(\beta)$ 的载体，其中 $\beta = (h^*)^{-1}(\alpha)$。考虑映射 $g = h^{-1}|\overline{U}\colon \overline{U} \to h^{-1}(\overline{U})$。注意，对所有 $x \in \overline{U}$，$\rho(g(x)\ x) < \varepsilon$。因此， g 与 $\overline{U}$ 上的恒等映射 $\mathrm{id}_{\overline{U}}$ 同伦。特别地，存在同伦 $F\colon g(A) \times [0, 1] \to X$，使得 $F(x, 0) = x$，且 $F(x, 1) = g(x)$， $x \in g(A)$。因此，我们

可以应用上文所述命题 2.3] 的修改形式，得出 $A \subset g(A)$。由于 $b = h(a) \in A$，最后一个包含关系推出 $b \in g(A) = K$，矛盾。□

注记。若 P 是在 X 中可缩的闭集，则命题 2.3 在不要求 X 具有齐性的情况下仍然成立。

当 $H^n(X;G) = 0$ 时，这一结论成立，因为 $\dim_G X \leq n$。若 $H^n(X;G) \neq 0$, 这一结论也成立。事实上，由于 $\dim_G X \leq n$，每个 $\alpha \in H^n(P;\ G)$ 都可延拓为 $\widetilde{\alpha} \in H^n(X;G)$。另一方面， P 在 X 中可缩，因此每个这样的 $\widetilde{\alpha}$ 都是零。

若紧对 $A \subset K$ 关于非平凡元素 $\gamma \in H_k(A;\ G)$ 是张成于 A 上的 k-同调膜，则称之为 k-同调膜: $i^k_{A,K}(\gamma) = 0$，但对于任何包含 A 的 K 的真闭子集 B，都有 $i^k_{A,B}(\gamma) \neq 0$。这里， H_* 表示 Čech 同调，而 $i^k_{A,K}$: $H_k(A;G) \to H_k(K;G)$ 是由包含映射 $A \hookrightarrow K$ 诱导的同态。根据 Bing-Borsuk [1], ，若 $A \subset K$ 是一个紧对，且 $\gamma \in H_k(A;G)$ 是在 K 中与零同调的非平凡元素，则存在一个包含 A 的闭集 $B \subset K$，使得 $A \subset B$ 是一个关于 γ、张成于 A 上的 k-同调膜。Bing-Borsuk [1] 研究了 Vietoris 同调；在度量紧空间范畴中，它与 Čech 同调同构。因此，在度量紧空间类中，关于 Čech 同调的同调膜总是存在。

命题 2.4. 任意维数为 $_G X = n$ 的局部齐性 ANR-空间，若 G 是可数群，则具有弱 $(n-1)$-上同调膜性质。

证明. 假设存在一个紧对 $A \subset K$，使得 K 在 X 的某个真子集中可缩，并且对于某个非平凡的 $\gamma \in H^{n-1}(A;G)$， K 是一个 $(n-1)$-上同调膜，但 $(K \setminus A) \cap \overline{X \setminus K} \neq \varnothing$。由于 G 是可数群，我们使用以下结果，参见 [18, viii 4G]: 对于任意度量紧空间 Y，同调群 $H_{n-1}(Y;G^*)$ 同构于 $H^{n-1}(Y;G)^*$。这里， G^* 和 $H^{n-1}(Y;G)^*$ 分别是 G 和 $H^{n-1}(Y;G)$ 的特征群，并视为离散群。这意味着，对于某个非平凡的 $\beta \in H_{n-1}(A;\ G^*)$， K 是一个由 A 张成的 $(n-1)$-同调膜，参见 [29, 命题 2.1] 的证明。因此，按照 [1, 定理 8.1], 的证明，我们可以找到一个紧集 $P \subset X$，它在 X 中可缩，且满足 $H_n(P;\ G^*) \neq 0$。所以， $H^n(P;\ G) \neq 0$，这与命题 2.3 后的注记矛盾。□

我们还需要以下关于上同调膜的性质，分别参见 [29], 中的推论 2.2 和引理 2.4。

引理 2.5. 对于具有弱（$n-1$）上同调膜性质的任意空间 X，以下条件成立：

(i) 若 K 是由集合$A \subset K$ 张成的$(n-1)$-上同调膜，对某个 $\gamma \in H^{n-1}(A;G)$而言，其中 K 是可缩于 X的某个真子集中的紧致空间，则 $K \setminus A$ 是 X的连通开子集；(ii) 设 $A \subset P$ 是一个紧对，使得 P 可缩于 X 的某个真子集中，并且存在一个非零的 $\gamma \in H^{n-1}(A;G)$，无法延拓到 P上。那么 A 分离每个将 P 作为真子集包含在内的集合 $\Gamma \subset X$。

设(X,ρ)是一个度量空间。若对每个x、$y \in X$，都存在一条弧 $A \subset X$，其端点为 x 和 y，且 A 配备度量 ρ 的限制后与实数直线上的区间$[0,\rho(x,y)]$ 等距（其中实数直线采用通常的度量），则称 ρ 为凸的。根据 [27], ，每个连通的局部连通空间都存在一个凸度量。

命题 2.6. 设 G 是一个可数群，X 是一个局部齐性的 ANR-空间，且 $\dim_G X = n$。则有：

(1) 每个满足 $\dim_G P = n$ 的闭集 $P \subset X$ 都有非空内部；(2) 每个 $x \in X$ 都有一个邻域 W，使得任何满足 $U = \mathrm{int}U \subset W$ 的连通$U \in \mathcal{B}_x$ 都满足以下条件：(i) $H^n(\overline{U};G) = 0$, $H^{n-1}(\mathrm{bd}\,\overline{U};G) \neq 0$，并且它包含一个不能延拓到$\overline{U}$上的元素；(ii) 对于任何不能延拓到 $\overline{U}$上的非平凡 $\alpha \in H^{n-1}(\mathrm{bd}\,\overline{U};G)$，$\overline{U}$都是一个张于 $\mathrm{bd}\,\overline{U}$ 的 $(n-1)$-上同调膜。

证明。（1）当 X 是紧齐性 ANR 时，这一点已在 [29, 推论 2.3] 中得到证明。对于覆盖维数 dim 和局部齐性 ANRs，这一点已在 [25, 定理 A] 中得到证明（另见 [24]，其中给出了比局部齐性更强的一种性质）。设 $P \subset X$ 是一个满足 $\dim_G P = n$ 的闭集。那么 P 是可数个紧集 F_j 的并，且每个紧集都在 X 的某个真子集中可缩。根据 $\dim_G$ 的可数和定理，对于至少一个 j，有 $\dim_G F_j = n$。因此，我们可以假设 P 是一个在 X 的某个真子集中可缩的紧集。由于 $\dim_G P = n$，存在一个闭集 $A \subset P$ 和一个元素 $\gamma \in H^{n-1}(A;G)$，它不能延拓到 P 上。于是，根据引理 2.1(i)，存在一个闭集 $K \subset P$，使得 K 是由 A 张成的 γ 的一个 $(n-1)$-上同调膜。由于 X 具有弱 $(n-1)$-上同调膜性质，$(K \setminus A) \cap \overline{X \setminus K} = \varnothing$。

这意味着 $K \setminus A$ 在 X 中是开集。最后，包含映射 $K \setminus A \subset P$ 完成证明。

(2) 由于 X 是可数个紧集的并，且这些紧集都包含在 X 的某个真子集中可缩，因此如上一段所述，存在一个紧对 $A \subset K$，使得 $\dim_G K = n$，K 对某个 $\gamma \in H^{n-1}(A; G)$ 是一个由 A 张成的 $(n-1)$-上同调膜，并且 K 包含在 X 的某个真子集中可缩。于是每个 $K \setminus A$ 都是 X 中的连通开集，见引理 2.5(i)。令 $x \in K \setminus A$，并令 $W \in \mathcal{B}_x$，其中$\overline{W} \subset K \setminus A$。

令 $U \in \mathcal{B}_x$ 连通，且 $U =$intU $\subset$ W。$\overline{\ }$这样的集合 U 存在。事实上，由于 X 局部连通，其每个连通分支 X_c 都是开集；并且根据 [27], ，存在一个生成 X_c 拓扑的凸度量。另一方面，若 d 是凸度量，则每个开球 $B(x, \delta) = \{y \in X_c : d(x, y) < \delta\}$ 都是连通的，并且 intB(x $\overline{\ \delta)\ } =$B(x δ)。

由于每个$\overline{U}$都可缩于 X的真子集中，故 $H^n(\overline{U}; G) =$0。我们断言，H^{n-1}(bd $\overline{U}$; G) $\neq 0$，且其中包含一个不能延拓到$\overline{U}$上的元素。事实上，$K \setminus U$ 是包含 A的 K的真闭子集。因此，γ可以延拓到 $\widetilde{\gamma} \in H^{n-1}($ $K \setminus U$; G)。于是$\gamma_U = j^{n-1}_{K\setminus U}$，bd $\overline{v}(\widetilde{\gamma})$ 是 H^{n-1}(bd $\overline{U}$; G) 的非零元素（否则 γ便可以延拓到 K上）。因此，γ_U 不能延拓到 $\overline{U}$上。下面证明，对于每个不能延拓到$\overline{U}$上的 $\alpha \in H^{n-1}$(bd U; G)，$\overline{U}$都是一个张成于 bd$\overline{U}$ 上的 $(n-1)$-上同调膜。根据引理 2.1，对于任意这样的 α，存在一个为 α而设、张成于 bd$\overline{U}$上的 $(n-1)$-上同调膜 $K_\alpha \subset \overline{U}$。因此，$(K_\alpha \setminus$bd $\overline{U}) \cap \overline{X \setminus K_\alpha} = \varnothing$。特别地，$K_\alpha \setminus$bd$\overline{U}$在 U中是开集。因此，$K_\alpha = \overline{U}$；否则，U将是两个非空不相交开集 $U \setminus K_\alpha$与 $K_\alpha \setminus$bd $\overline{U}$的并。最后，由于 X 是局部齐性的，每个 $x \in X$ 都有一个满足条件 (2) 的邻域 W。□

引理 2.7. 设 X 是一个局部齐性的 ANR-空间，且 $x \in X$。如果 G 是一个可数群，并且对于所有足够小的邻域 $U \in \mathcal{B}_x$，H^{n-1}(bd$\overline{U}$; G) $\neq 0$，那么 $\dim_G X \geq n$。

证明。假设 $\dim_G X \leq n-1$。由于 bd$\overline{U}$ 的内部为空，对所有 $U \in \mathcal{B}_x$，都有 $\dim_G$ bd$\overline{U} \leq n-2$。根据上同调维数的定义，这意味着 H^{n-1}(bd $\overline{U}$; G) $= 0$，矛盾。

□

3. Proof of Theorem 1.1

下一个引理已在 [6, Theorem 8] 中针对局部连通连续统证明。通过对 X 作一点紧化，同一证明也适用于局部连通且连通的空间 X。

引理 3.1. 设 X 是一个连通且局部连通的空间，并且$\{K_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 是一个由互不相交的连续统组成的不可数族，使得对于每个 α，集合 $X \setminus K_\alpha$ 有多于一个连通分支。那么存在 $\alpha_0 \in \Lambda$，使得 $X \setminus K_{\alpha_0}$ 恰有两个连通分支。

定理 1.1 的证明由下面的命题 2.6 和命题 3.2 推出。

命题 3.2. 设 X 是一个齐性连通的 ANR-空间，且 $\dim_G X = n \geq 2$, 其中 G 是一个可数群。那么每个点$x \in X$ 都有一个开连通集 $\mathcal{B}_x$ 的基 U，其中每个集合的闭包都是紧的，并满足以下条件：

(i) $H^{n-1}(\overline{U}; G) = 0$且 $X \setminus \mathrm{bd}\ \overline{U}$恰有两个连通分支；(ii) $\mathrm{bd}\overline{U}$是一个$(n-1, G)$-泡。

证明。由命题 2.6，$x \in X$ 中的每一点都有一个邻域 W_x，其紧闭包满足如下条件：$U = \mathrm{intU} \subset \mathrm{W_x}$中的任意连通邻域 x均满足：$H^n(\overline{U}; G) = 0$，$H^{n-1}(\mathrm{bd}\ \overline{U}; G)$ 含有不能延拓到 $\overline{U}$ 上的元素 γ，且对每个这样的 γ，集合$\overline{U}$都是在 $\mathrm{bd}\ \overline{U}$ 上由 γ 张成的一个 $(n-1)$-上同调膜。我们还假设，$\overline{W}_x$ 是一个连通集，且可缩于 X的一个真子集中，并且存在 $\alpha_x \in H^{n-1}(\mathrm{bd}\,\overline{W}_x; G)$，使得 $\overline{W}_x$是一个在 $\mathrm{bd}\,\overline{W}_x$ 上由 α_x 张成的 $(n-1)$-上同调膜。固定 $x \in X$，令 $\mathcal{B}'_x$ 为 x 的所有开连通邻域 U 组成的族，其中 $U =\mathrm{intU}$，且 $\overline{U}$ 可缩于 W_x。

断言 1。对每个 $U \in \mathcal{B}'_x$，存在一个非零的 $\gamma_U \in H^{n-1}(\mathrm{bd}\,\overline{U}; G)$，使得 γ_U可延拓到 $\overline{W}_x \setminus U$上，并且 $\overline{U}$是一个在 $\mathrm{bd}\,\overline{U}$ 上由 γ_U 张成的 $(n-1)$-上同调膜。

事实上，由于 $\overline{W}_x$ 是在 $\mathrm{bd}\ \overline{W}_x$ 上张成的 α_x 的 $(n-1)$-上同调膜，α_x 不能延拓到 $\overline{W}_x$ 上，但它可以延拓到包含 $\mathrm{bd}\ \overline{W}_x$ 的 $\overline{W}_x$ 的每个真闭子集上。因此，α_x 可以延拓为元素 $\widetilde{\alpha}_x \in H^{n-1}(\overline{W}_x \setminus U; G)$，而元素 $\gamma_U = j^{n-1}_{\overline{W}_x \setminus U,\ \mathrm{bd}\,\overline{U}}(\widetilde{\alpha}_x) \in H^{n-1}(\mathrm{bd}\,\overline{U}; G)$ 不能延拓到 $\overline{U}$ 上（否则 α_x 就可以延拓到 $\overline{W}_x$ 上），特别是 $\gamma_U \neq 0$。因此，根据 [29,引理 2.6]，$\overline{U}$ 是在 $\mathrm{bd}\,\overline{U}$ 上张成的 γ_U 的 $(n-1)$-上同调膜。

令 $\mathcal{B}''_x$ 为所有满足以下条件的 $U \in \mathcal{B}'_x$ 的族：$\mathrm{bd}\, U$ 包含一个连续统 F_U，使得 $X \setminus F_U$ 恰有两个连通分支，且 F_U 是 $j^{n-1}_{\mathrm{bd}\, U,\ F_U}(\gamma_U)$ 的 $(n-1, G)$- 载体。

断言 2. $\mathcal{B}''_x$ 是 x处的局部基。

由于 X 弧连通且局部弧连通，存在一个凸度量 d，它生成 X的拓扑，见 [27]。我们固定 $W_0 \in \mathcal{B}'_x$，并对每个 $\delta > 0$，用 $B(x,\delta)$表示 X 中以x 为中心、半径为 δ的开球。存在 $\varepsilon_x > 0$，使得对所有 $\delta \le \varepsilon_x$，$B(x,\delta) \subset W_0$。我们在命题 2.6(2)的证明中已经注意到，任意 $B(x,\delta)$ 都是连通的，且 int(B(x δ)) =B(x δ)。此外，$B(x,\delta)$在 W_x中可缩。因此，所有 $U_\delta = B(x,\delta)$，$\delta \le \varepsilon_x$，都属于 $\mathcal{B}'_x$。于是，根据断言 1，对每个 δ，存在一个非零$\gamma_\delta \in H^{n-1}(\mathrm{bd}\ \overline{U}_\delta;\ G)$，使得 $\overline{U}_\delta$是由 $\mathrm{bd}\,\overline{U}_\delta$张成的 γ_δ的$(n-1)$-上同调膜，并且 γ_δ可延拓到 $\overline{W}_x \setminus U_\delta$上。根据引理 2.1(ii)，存在 $\mathrm{bd}\,\overline{U}_\delta$的一个闭子集 F_δ，它是 $\gamma^*_\delta = j^{n-1}_{\mathrm{bd}\, U_\delta, F_\delta}(\gamma_\delta)$的载体。由于 $n \ge 2$且 F_δ是 $\gamma^*_\delta \in H^{n-1}(F_\delta;\ G)$的载体，$F_\delta$是一个连续统，见 [29, 引理 2.7]。下面证明族 $\{F_\delta : \delta \le \varepsilon_x\}$不可数。由于函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$, $f(y) = d(x,y)$是连续的，且 W_0连通，$f(W_0)$是一个包含 $[0,\varepsilon_x]$的区间，并且 $f^{-1}([0,\varepsilon_x)) = B(x,\varepsilon_x) \subset W_0$。因此，对所有$\delta \le \varepsilon_x$，$f^{-1}(\delta) = \mathrm{bd}\ \overline{U}_\delta \ne \varnothing$。所以族 $\{F_\delta :\ \delta \le \varepsilon_x\}$ 不可数，且由互不相交的连续统组成。此外，γ^*_δ 是 $H^{n-1}(F_\delta; G)$的一个非零元素，不能延拓到$\overline{W}_x$ 上，因为 F_U 在 $\overline{W}_x$中可缩。因此，根据引理 2.5(ii)，F_δ 分离 X。所以，每个 $X \setminus F_\delta$ 至少有两个连通分支。于是，根据引理 3.1，存在 $\delta_0 \le \varepsilon_x$，使得$X \setminus F_{\delta_0}$ 恰有两个连通分支。因此，$U_{\delta_0} = B(x,\delta_0) \in \mathcal{B}''_x$，且它包含于 W_0中。至此，断言 2 得证。

~现在，令 $\mathcal{B}_x$为所有满足 $H^{n-1}(\mathrm{bd}\,\overline{U};\ G) \ne 0$的 $U \in \mathcal{B}''_x$ 所构成的族，使得 U 和 $X \setminus \overline{U}$ 都是连通的。

~断言 3. $\mathcal{B}_x$ 是 x处的局部基。

令 U_0为 x 的任意邻域，使得 $\overline{U}_0$在 W_x中可缩~。我们将找出 $\mathcal{B}_x$ 中包含于 U_0的一个元素。为此，令 ρ 为生成 X的一点紧化之拓扑的度量，并令 $\varepsilon = \rho(x, X \setminus U_0)$。根据定理 2.2，存在与 $\varepsilon/2$ 及点 x 对应的 $\eta > 0$（即，对于每个满足 $\rho(y,x) < \eta$的$y \in X$，存在一个同胚 $h\colon X \to X$，使得$h(y) = x$，且对所有 $z \in X$，都有 $\rho(h(z)\ z) < \varepsilon/2$）。现在，取 x 的一个连通邻域 W，使得$\overline{W} \subset B_\rho(x, \varepsilon/2)$ 且 $\rho - \mathrm{diam(W)} < \eta$。最后，取 $U \in \mathcal{B}''_x$，使得 U 在 W中可缩。

存在一个连续统 $F_U \subset \mathrm{bd}\,\overline{U}$，使得 $X \setminus F_U$ 恰有两个连通分支，且 F_U是 $\gamma_U^* = j^{n-1}_{\mathrm{bd}\,U,F_U}(\gamma_U)$ 的一个 $(n-1,G)$-载体。~如果 $F_U = \mathrm{bd}\,\overline{U}$，那么 U就是 $\mathcal{B}_x$中所需的元素。事实上，由于 $X \setminus bd\overline{U} = U \cup X \setminus \overline{U}$满足 $U \cap (X \setminus \overline{U}) = \varnothing$，且 U是连通的，因此 $X \setminus \overline{U}$ 也应当是连通的（回想一下，$X \setminus F_U$ 恰有两个连通分支）。

假设 F_U 是 $\mathrm{bd}\,\overline{U}$ 的真子集。由于 F_U（作为 $\overline{U}$ 的子集）可在紧集 $\Gamma \subset W$ 中缩至一点，γ_U^* 无法延拓到 Γ 上。因此，我们可以应用引理 2.5(ii)，得出 F_U 分离 $\overline{W}$。于是，对于某些互不相交的非空开子集 V_1、$V_2 \subset \overline{W}$，有 $\overline{W} \setminus F_U = V_1 \cup V_2$。由于 U 是 $\overline{W} \setminus F_U$ 的连通子集，U 包含于集合 V_1、V_2 之一，不妨设为 $U \subset V_1$。因此，$F_U \cup \overline{V}_2 \subset \overline{W}_x \setminus U$。由于 γ_U 可延拓到 $\overline{W}_x \setminus U$ 上（见断言 1），γ_U^* 也可延拓到 $\overline{W}_x \setminus U$ 上，特别是 γ_U^* 可延拓到 $F_U \cup \overline{V}_2$ 上。另一方面，γ_U^* 无法延拓到 $\overline{W}$ 上，因为 F_U 可在 $\overline{W}$ 中缩至一点。结合这一事实以及等式 $(F_U \cup \overline{V}_1) \cap (F_U \cup \overline{V}_2) = F_U$，可知 γ_U^* 无法延拓到 $F_U \cup \overline{V}_1$ 上。令 $\beta = j^{n-1}_{F_U,F'}(\gamma_U^*)$，其中 $F' = \overline{V}_1 \cap F_U$（注意，由于 $\overline{W}$ 连通，故 $F' \neq \varnothing$）。如果 F' 是 F_U 的真子集，那么 $\beta = 0$，因为 F_U 是 γ_U^* 的载体。因此，β 可延拓到 $\overline{V}_1$ 上，这意味着 γ_U^* 可延拓到 $F_U \cup \overline{V}_1$ 上，矛盾。因此，$F' = F_U \subset \overline{V}_1$，且 γ_U^* 无法延拓到 $\overline{V}_1$ 上。由此，存在一个以 F_U 为支撑、对应于 γ_U^* 的 $(n-1)$-上同调膜 $P_\beta \subset \overline{V}_1$。根据引理 2.5(i)，$V = P_\beta \setminus F_U$ 是 X 中的连通开集，其边界为集合 $F'' = \overline{X \setminus P_\beta} \cap \overline{P_\beta \setminus F_U} \subset F_U$。如上所述，利用 γ_U^* 无法延拓到 P_β 上这一事实以及 $j^{n-1}_{F_U,Q}(\gamma_U^*) = 0$ 对任意真闭子集 $Q \subset F_U$ 均成立，我们可以证明 $F'' = F_U$ 和 $\mathrm{bd}\,\overline{V} = F_U$。总结 V 的性质可知，$\overline{V}$ 可在 W_x 中缩至一点（因为 $\overline{U}_0$ 也如此），$V = \mathrm{int(V)}$（因为 $F_U = \mathrm{bd}\overline{V}$），且 $\overline{V}$ 连通。此外，由于 $X \setminus F_U$ 是互不相交的非空开集 V 和 $X \setminus P_\beta$ 的并，其中 V 连通，而 $X \setminus F_U$ 恰有两个连通分支，因此 $X \setminus \overline{V}$ 也连通。最后，由于 F_U 是非平凡 γ_U^* 的一个 $(n-1,G)$-载体，$H^{n-1}(\mathrm{bd}\,\overline{V};\ G) \neq 0$。因此，若 V 包含 x，则 V 是 $\mathcal{B}_x$ 的一个 ~ 成员。

如果 V不包含 x，我们取一点 $y \in V$，使得 $\rho(x,y) < \eta$。这是可能的，因为 $V \subset \overline{W}$且 $\rho\text{–diam(W)} < \eta$。因此，根据 η的选择，存在一个定义在 X 上的同胚 h，使得对所有 $z \in X$，$h(y) = x$ 且$\rho(z, h(z)) < \varepsilon/2$。于是 $h(V) \subset U_0$（这一包含关系源于 ε 的选择，以及 h 在 X上与恒等映射是 $(\varepsilon/2)$-近的这~~一事实~~）。因此，$h(V)$在 W_x中是可缩的。由于其余性质

根据 $\mathcal{B}_x$ 的定义，$\widetilde{\ }$在同胚下保持不变，因此 $h(V)\widetilde{\ }$是 $\mathcal{B}_x$中所需的成员，由此证明了断言 3。

下面的断言完成命题 3.2 的证明。

断言 4. $H^{n-1}(\overline{U};\, G) = 0$和 $\operatorname{bd} \overline{U}$对每个$\sim U \in \mathcal{B}_x$都是一个$(n-1, G)$-泡。

$\widetilde{\ }$由于每个 $\overline{U}$, $U \in \mathcal{B}_x$ 在 $\overline{W}_x$ 中都是可缩的，任何非平凡的 $\gamma \in H^{n-1}(\overline{U};\, G)$ 都不能延拓到 $\overline{W}_x$ 上。由于 $\overline{W}_x$在 X 的某个真子集中可缩，根据引理 2.5(ii)，若 $H^{n-1}(\overline{U};\, G) \neq 0$，则 $\overline{U}$ 将分离 X。另一方面，每个 $X \setminus \overline{U}\widetilde{\ }$ 都是连通的。因此，对所有 $U \in \mathcal{B}_x$，都有 $H^{n-1}(\overline{U};\, G) = 0$。假设存在一个真闭子集 $F \subset \operatorname{bd}\overline{U}$ 和一个非平凡元素$\alpha \in H^{n-1}(F;\, G)$。由于 $H^{n-1}(\overline{U};\, G) = 0$, α不能延拓到$\overline{U}$上。因此，存在一个以 F 为支撑的、关于 α 的$(n-1)$-上同调膜 $K_\alpha \subset \overline{U}$。因此，$(K_\alpha \setminus F) \cap \overline{X \setminus K_\alpha} = \varnothing$。特别地，$K_\alpha \setminus F$在 $\overline{U} \setminus F$ 中是开集。另一方面，$K_\alpha \setminus F$在 $\overline{U} \setminus F$ 中也是闭集。由于 $\overline{U} \setminus F$ 是连通的（回忆一下，U 是 $\overline{U} \setminus F$ 的稠密连通子集），我们得到 $K_\alpha = \overline{U}$。最后，注意 $\operatorname{bd} \overline{U} \setminus F$ 中的任意一点都属于 $(K_\alpha \setminus F) \cap \overline{X \setminus K_\alpha}$，这就产生了矛盾。因此，$\operatorname{bd} \overline{U}$是一个$(n-1, G)$-泡。□

4. Proof of Theorem 1.2 and Corollary 1.3

定理 1.2 的证明。(i) 假设 K 是张成于 A 上的一个$(n-1)$-上同调膜，其中某个 $\gamma \in H^{n-1}(A; G)$，且存在一点$a \in (K \setminus A) \cap \overline{X \setminus K}$。取满足 $\overline{V} \cap A = \varnothing$的 $V \in \mathcal{B}_a$，其中 $\mathcal{B}_a$是 a 处满足命题 2.6(2)假设的局部基。由于 $K \setminus V$是包含 A的 K 的真子集，γ 可延拓至$\gamma^* \in H^{n-1}(K \setminus V;\, G)$。于是$\alpha_V = j^{n-1}_{K\setminus V}$, $_{K\cap}\operatorname{bd}_{\overline{V}}(\gamma^*)$不能延拓到 $K \cap \overline{V}$上（否则 γ 就能延拓到 K上）。特别地，α_V是 $H^{n-1}(K \cap \operatorname{bd} \overline{V};\, G)$的一个非零元素。由于 $\operatorname{bd} \overline{V}$在 X中的内部为空，$\dim_G \operatorname{bd}\overline{V} \leq n-1$，见命题 2.6(1)。因此，$\alpha_V$可延拓至 $\widetilde{\alpha}_V \in H^{n-1}(\operatorname{bd} \overline{V};\, G)$。此外，由于 α_V不能延拓到$K \cap \overline{V}$上，$\widetilde{\alpha}_V$不能延拓到 $\overline{V}$上。最后，利用$\overline{V}$是张成于 $\operatorname{bd} \overline{V}$上的一个$(n-1)$-上同调膜这一事实，其中 $\widetilde{\alpha}_V$，并且由于 $a \in (K \setminus A) \cap \overline{X \setminus K}$意味着 $\operatorname{bd} \overline{V} \cup (K \cap \overline{V})$是包含 $\operatorname{bd} \overline{V}$的$\overline{V}$的真闭子集，我们可以找到 $\beta \in H^{n-1}(\operatorname{bd} \overline{V} \cup (K \cap \overline{V});\, G)$来延拓 $\widetilde{\alpha}_V$。因此，α_V可延拓到$K \cap \overline{V}$上，矛盾。故 X 具有$(n-1)$-上同调膜性质。

(ii) 我们需要以下结果 [21, 定理 1]: 对于每个满足 $\dim_G K = n$ 的度量紧空间 K，都存在一个闭集 $Y \subset K$ 和一个

稠密集 $D \subset Y$，使得 $\dim_G Y = n$，并且 K 在每个 $y \in D$ 处都有一个 n 维 G 障碍。在我们的情形中，取一个满足 $\dim_G K = n$ 的紧集 $K \subset X$，并找出相应的集合 $D \subset Y \subset K$。由于 $\dim_G Y = n$，intY $\neq \varnothing$（命题 2.6(1)），且存在 $y \in D \cap$intY。由于 K 在 y 处有一个 n 维 G 障碍，我们可以找到 y 的一个邻域 $W \subset K$，使得对于其中任意一个开邻域 $V \subset W$（K） of y，同态 $H^n(K, K \setminus V; G) \to H^n(K, K \setminus W; G)$ 都是平凡的。这意味着，对于 y 的任意开邻域 U, V（K），只要 $\overline{U} \subset V$，同态 $H^n(K, K \setminus U; G) \to H^n(K, K \setminus V; G)$ 也非平凡。由于 $y \in$intY，我们可以假设 $W \in \mathcal{B}_y$，使得 $\overline{W}$ 在 X 中可缩，并满足命题 2.6(2) 的假设。于是，根据切除公理，对于所有满足 $\overline{U} \subset V \subset \overline{V} \subset W$ 的 $U, V \in \mathcal{B}_y$，群 $H^n(K, K \setminus U; G)$ 和 $H^n(K, K \setminus V; G)$ 分别同构于 $H^n(X, X \setminus U; G)$ 和 $H^n(X, X \setminus V; G)$。因此，对于所有满足 $\overline{U} \subset V \subset \overline{V} \subset W$ 的 $U, V \in \mathcal{B}_y$，$j_{U,V}\colon H^n(X, X \setminus U; G) \to H^n(X, X \setminus V; G)$ 是一个非平凡同态。最后，由于 X 是局部齐性的，它在每个 $x \in X$ 处都有一个 n 维 G 障碍。

为证明条件（ii）的后半部分，取 $U, V \in \mathcal{B}_x$，使得 $\overline{U} \subset V \subset \overline{V} \subset W$。

断言 5. 同态 $j^{n-1}_{\overline{W}\setminus U,\ \overline{W}\setminus V}\colon H^{n-1}(\overline{W}\setminus U; G) \to H^{n-1}(\overline{W}\setminus V; G)$ 是满射，且 $H^{n-1}(\overline{W} \setminus V; G) \neq 0$。

事实上，考虑下面的 Mayer–Vietoris 正合序列，其中省略了系数群 G，

$$H^{n-1}(\overline{W}\setminus U) \xrightarrow{\varphi} H^{n-1}(\overline{V}\setminus U) \oplus H^{n-1}(\overline{W}\setminus V) \xrightarrow{\psi} H^{n-1}(\mathrm{bd}\,\overline{\mathrm{V}})\ldots$$

映射 φ 和 ψ 由 $\varphi(\gamma) = (j^{n-1}_{\overline{W}\setminus U,\overline{V}\setminus U}(\gamma), j^{n-1}_{\overline{W}\setminus U,\overline{W}\setminus V}(\gamma))$ 及 $\psi((\beta, \alpha)) = j^{n-1}_{\overline{V}\setminus U}$,bd V$(\beta) - j^{n-1}_{\overline{W}\setminus V}$,bd V$(\alpha)$ 定义。对于每个 $\alpha \in H^{n-1}(\overline{W} \setminus V; G)$，元素 $\beta'_\alpha = j^{n-1}_{\overline{W}\setminus V}$,bdV$(\alpha) \in H^{n-1}$(bd V; G) 都可延拓为一个元素 $\beta_\alpha \in H^{n-1}(\overline{V} \setminus U; G)$。事实上，有两种可能：要么 β'_α 可延拓到 $\overline{V}$ 上，要么它不能延拓到 $\overline{V}$上。第一种情形显然意味着 β'_α 可延拓到 $\overline{V} \setminus U$上。第二种情形下，由命题 2.6(2)，$\overline{V}$是由 β'_α 在 bd V 上张成的一个 $(n - 1)$-上同调膜。于是，由于 $\overline{V} \setminus U$ 是 $\overline{V}$的真闭子集，β'_α 可延拓到 $\overline{V}\setminus U$上。因此，对于任意 $\alpha \in H^{n-1}(\overline{W} \setminus V; G)$，$\psi(\beta_\alpha, \alpha) = 0$。从而，存在 $\gamma_\alpha \in H^{n-1}(\overline{W}\setminus U; G)$，使得$\varphi(\gamma_\alpha) = (\beta_\alpha, \alpha)$。特别地，$j^{n-1}_{\overline{W}\setminus U,\overline{W}\setminus V}(\gamma_\alpha) = \alpha$，这表明 $j^{n-1}_{\overline{W}\setminus U,\overline{W}\setminus V}$ 是满射。$H^{n-1}(\overline{W} \setminus V; G)$ 的非平凡性可由 Mayer–Vietoris 正合序列得出

$\to H^{n-1}(\overline{V};\, G) \oplus H^{n-1}(\overline{W}\backslash V;\, G) \to H^{n-1}(\overline{\text{bd V; G}}) \to \overline{\text{H}}^{\text{n}}(\text{W; G}) \to$事实上，$\overline{W}$在 X中可缩意味着 $H^n(\overline{W};\, G) = 0$（见命题 2.3 后的注记）。因此，只要 $H^{n-1}(\overline{W}\backslash V;\, G) = 0$，同态 $j_{\overline{V}}^{n-1}$, – $_{\text{bdV}}$ 就会是满射。这将意味着 $H^{n-1}(\text{bdV; G})$ 的每个非平凡元素都可延拓到 $\overline{V}$上，这与命题 2.6(2) 矛盾。

为完成证明，考虑如下交换图，其各行都是正合列的一部分

$$\begin{array}{ccccc} H^{n-1}(\overline{W}\backslash U;G) & \xrightarrow{\delta_U} & H^n(\overline{W},\overline{W}\backslash U;G) & \xrightarrow{i_U} & H^n(\overline{W};G) \\ \downarrow{\scriptstyle j^{n-1}_{\overline{W}\backslash U,\overline{W}\backslash V}} & & \downarrow{\scriptstyle j'_{U,V}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ H^{n-1}(\overline{W}\backslash V;G) & \xrightarrow{\delta_V} & H^n(\overline{W},\overline{W}\backslash V;G) & \xrightarrow{i_V} & H^n(\overline{W};G). \end{array}$$

由于 $H^n(\overline{W};\, G) = 0$， δ_U和 δ_V都是满射。结合$j^{n-1}_{\overline{W}\backslash U}$、$\overline{W}\backslash V$的满射性以及 $H^{n-1}(\overline{W} \setminus V;\, G)$的非平凡性，可知$j'_{U,V}$ 也是满射。最后，根据切除公理，群 $H^n(\overline{W}, \overline{W}\backslash U;\, G)$和 $H^n(\overline{W}, \overline{W}\backslash V;\, G)$分别同构于$H^n(X, X\backslash U;\, G)$和 $H^n(X, X\backslash V;\, G)$。因此，同态$j^n_{U,V}$: $H^n(X, X\backslash U;\, G) \to H^n(X, X\backslash V;\, G)$是满射。

推论 1.3 的证明。对于齐性 ANR-紧致空间 X ，其中 $\dim_G X < \infty$，且 G 是可数主理想整环，推论 1.3 已在 [29]中得证。 [29] 中的论证在我们的情形下同样适用。

该推论蕴含了著名的区域不变性，该性质分别由 [23] 和 [25], 针对紧齐性及局部齐性的 ANR-空间 X（维数为 $X < \infty$）证明。

5. Proof of Theorem 1.4.

(i) 只需证明一点紧化 $bX = X \cup \{b\}$ of X 具有维数满值。为此，我们使用 Dranishnikov 的以下结果 [7, 定理 12.3-12.4]: 若 Y 是有限维的 ANR-紧致空间，则对所有素数p，$\dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} Y = \dim_{\mathbb{Z}_p} Y$。此外，对于任意群 $G \neq 0$，$\dim_{\mathbb{Q}} Y \leq \dim_G Y$，并且存在一个素数 p，使得 $\dim Y = \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} Y = \dim_{\mathbb{Z}_p} Y$。 [7] 中给出的证明在 Y 是一个 ANR-空间的一点紧化时同样适用。这里 $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 是循环群，且 $\mathbb{Z}_{(p)} = \{m/n : \ n$ 不能被 $p\} \subset \mathbb{Q}$整除，其中 $\mathbb{Q}$ 是有理数域。我们还考虑商群 $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}$。众所周知

，所谓的 Bockstein 基由以下群组成$\sigma = \{\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_{(p)}, \mathbb{Z}_{p^\infty} : \ p \in \mathcal{P}\}$，其中 $\mathcal{P}$ 是所有素数的集合。对于任意群（不一定可数），都存在一个族 $\sigma(G) \subset \sigma$，使得对于任意空间 X，$\dim_G X = \sup\{\dim_H X : \ H \in \sigma(G)\}$。

设 X是一个局部齐性 ANR-空间，且维数为 $\dim\ X = n$。根据前面提到的 Dranishnikov 结果，存在$p \in \mathcal{P}$，使得 $\dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} bX = \dim_{\mathbb{Z}_p} bX = n$。若 $\dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} bX = n$，则结论成立。事实上，根据 [7, 引理 2.6], bX 是 p-正则的，即

$$\dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} bX = \dim \mathbb{Z}_{p^\infty} bX = \dim_{\mathbb{Z}_p} bX = \dim_{\mathbb{Q}} bX = n.$$

然后，再次应用 Dranishnikov 结果 [7, 定理 12.3], ，我们得到对于任意群 $G \neq 0$，$\dim_{\mathbb{Q}} bX \leq \dim_G bX \leq n$。因此，对于所有非平凡群 G，都有 $\dim_G bX = \dim bX = n$；由 [22, 定理 11], bX是维数满值的。因此，下述断言完成了定理 1.4(i) 的证明。

断言 6. 若对于某个素数 p，$\dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} bX = \dim_{\mathbb{Z}_p} bX = n$，则 $\dim \mathbb{Z}_{p^\infty} bX = n$。

假设 $\dim \mathbb{Z}_{p^\infty} bX \leq n-1$。根据 Bockstein 不等式（例如参见 [7], 或 [22]），我们有 $\dim_{\mathbb{Z}_p} bX \leq \dim \mathbb{Z}_{p^\infty} bX + 1$，在我们的情形下，这意味着 $\dim \mathbb{Z}_{p^\infty} bX = \dim\ \mathbb{Z}_{p^\infty} X = n - 1$。由于根据[22, 定理 7(1)], $\dim^{\mathbb{Z}_p}(bX)^2 = 2\dim_{\mathbb{Z}_p} X = 2n$，下一个等式（参见 [22, 定理 7(3)]）

$$\dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} (bX)^2 = \max\{2 \dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} bX, \dim_{\mathbb{Z}_p} (bX)^2 - 1\}$$

意味着 $\dim\ \mathbb{Z}_{p^\infty} X^2 = \dim \mathbb{Z}_{p^\infty}(bX)^2 = 2n - 1$。然后，根据命题 2.6(2)，对每个 $z = (x, y) \in X^2$，都存在 z 在 X^2中的一个邻域 W_z，其紧闭包满足：若 $W = U \times V \subset W_z$ 且 $W \in \mathcal{B}_z$，则 $H^{2n-2}(\mathrm{bd}\, \overline{W}; \mathbb{Z}_{p^\infty}) \neq 0$。由于 $\mathrm{bd}\, \overline{W} = (\overline{U} \times \mathrm{bd}\ \overline{V}) \cup (\mathrm{bd}\ \overline{U} \times \overline{V})$，我们有 Meyer-Vietoris 正合序列（以下所有正合列中均省略系数群 Z_{p^∞}）

$$H^{2n-3}(\Gamma_U \times \Gamma_V) \to H^{2n-2}(\Gamma_W) \to H^{2n-2}(\overline{U} \times \Gamma_V) \oplus H^{2n-2}(\Gamma_U \times \overline{V}) \to$$

这里，$\Gamma_U = \mathrm{bd}\, \overline{U}$、$\Gamma_V = \mathrm{bd}\ \overline{V}$和 $\Gamma_W = \mathrm{bd}\ \overline{W}$。K¨unneth 公式给出以下正合序列

$$\sum_{i+j=2n-2} H^i(\overline{U}) \otimes H^j(\Gamma_V) \to H^{2n-2}(\overline{U} \times \Gamma_V) \to \sum_{i+j=2n-1} H^i(\overline{U}) * H^j(\Gamma_V),$$

$$\sum_{i+j=2n-2} H^i(\Gamma_U) \otimes H^j(\overline{V}) \to H^{2n-2}(\Gamma_U \times \overline{V}) \to \sum_{i+j=2n-1} H^i(\Gamma_U) * H^j(\overline{V})$$

and

$$\sum_{i+j=2n-3} H^i(\Gamma_U)\otimes H^j(\Gamma_V) \to H^{2n-3}(\Gamma_U\times\Gamma_V) \to \sum_{i+j=2n-2} H^i(\Gamma_U)*H^j(\Gamma_V).$$

由于 $\dim_{Z_{p^\infty}} \overline{U} \le n-1$ 和 $\dim_{Z_{p^\infty}} \overline{V} \le n-1$，对于所有 $i \ge 1$，群 $H^{n-1+i}(\overline{U};\ Z_{p^\infty})$ 和 $H^{n-1+i}(\overline{V};\ Z_{p^\infty})$ 都是平凡的。另一方面，根据命题 2.6(2)，我们可以假设群 $H^{n-1}(\overline{U};\ Z_{p^\infty})$ 和 $H^{n-1}(\overline{V};\ Z_{p^\infty})$ 也都是平凡的。此外，命题 2.6(1) 意味着 $\dim_{Z_{p^\infty}} \Gamma_U \le n-2$ 和 $\dim_{Z_{p^\infty}} \Gamma_V \le n-2$。因此，对于所有 $i \ge 0$，群 $H^{n-1+i}(\Gamma_U;\ Z_{p^\infty})$ 和 $H^{n-1+i}(\Gamma_V;\ Z_{p^\infty})$ 都是平凡的。由此，所有群 $H^{2n-2}(\overline{U}\times\Gamma_V; Z_{p^\infty})$、$H^{2n-2}(\Gamma_U\times\overline{V}; Z_{p^\infty})$ 和 $H^{2n-3}(\Gamma_U\times\Gamma_V; Z_{p^\infty})$ 都是平凡的，这意味着群 $H^{2n-2}(\Gamma_W;\ Z_{p^\infty})$ 是平凡的，矛盾。因此，$\dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} bX = n$。

(ii) 为证明定理 1.4 的后半部分，设 $\dim X = n$。由于 X 维数满值，根据 [22, 定理 11], ，$\dim_{\mathbb{Q}} X = \widehat{\dim}\, X = n$。用 H_* 表示文献 [26] 中为局部紧空间建立的正合同调。空间Y的同调维数 $h\dim_G Y$是满足以下条件的最大数 n：对于某个闭集$\Phi \subset Y$，有 $H_n(Y,\Phi;\ G) \ne 0$。根据 [16] 和 [26]，$h\dim_G Y$是使得对于某个 $y \in Y$，局部同调群 $\widehat{H}(Y, Y\setminus y;\ G) = \varinjlim_{y\in U} H_m(Y, Y\setminus U;\ G)$ 非平凡的最大 m。此外，对于任意域 F，都有$h\dim_F Y = \dim_F Y$，见 [16]。因此，$h\dim_{\mathbb{Q}} X = \dim_{\mathbb{Q}} X = n$，并且对于所有 $x \in X$，都有 $H_n(X, X\setminus x;\ \mathbb{Q}) \ne 0$。这意味着每个 $x \in X$都有一个邻域 W，使得对于所有包含 x 的开集$U \subset W$，都有 $H_n(X, X\setminus U;\ \mathbb{Q}) \ne 0$。我们假设 W满足定理 1.1 中的条件 (1) – (3)，其中 $G = \mathbb{Z}$ 满足：$\overline{W}$在 X的某个真子集中可缩，并且对于 x的所有邻域 U，都有 $H^{n-1}(\mathrm{bd}\,\overline{U};\ \mathbb{Z}) \ne 0$，且$U \subset W$，见命题 2.6(2)。设 V是 x 的一个邻域，且$\overline{V} \subset W$。

命题 7. 对任意非平凡的 $\gamma \in H_{n-1}(\overline{W}\setminus V;\ \mathbb{Q})$，$\overline{W}\setminus V \subset \overline{W}$ 这一对是由 $\overline{W}\setminus V$ 张成的 $(n-1)$-同调膜。

由于 $H_n(X, X\setminus V;\ \mathbb{Q}) \ne 0$，根据切除公理，$H_n(\overline{W}, \overline{W}\setminus V;\ \mathbb{Q}) \ne 0$。考虑以下正合序列（关于此类序列的存在性，参见 [26] ）

$$\to \widehat{H}_n(\overline{W};\mathbb{Q}) \to \widehat{H}_n(\overline{W}, \overline{W}\setminus V;\mathbb{Q}) \to \widehat{H}_{n-1}(\overline{W}\setminus V;\mathbb{Q}) \to \widehat{H}_{n-1}(\overline{W};\mathbb{Q})$$

and

$$0 \to \mathrm{Ext}(H^{n+1}(\overline{W};\mathbb{Z}),\mathbb{Q}) \to \widehat{H}_n(\overline{W};\mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}(H^n(\overline{W};\mathbb{Z}),\mathbb{Q}) \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Ext}(H^n(\overline{W};\mathbb{Z}),\mathbb{Q}) \to \widehat{H}_{n-1}(\overline{W};\mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}(H^{n-1}(\overline{W};\mathbb{Z}),\mathbb{Q}) \to 0.$$

由于 $H^{n+1}(\overline{W};\mathbb{Z}) = H^n(\overline{W};\mathbb{Z}) = H^{n-1}(\overline{W};\mathbb{Z}) = 0$, $\widehat{H}_n(\overline{W};\mathbb{Q})$ 和 $H_{n-1}(W;\mathbb{Q})$ 均为平凡的。因此，群 $H_{n-1}(\overline{W}\backslash V;\mathbb{Q})$ 非平凡。此外，正合序列

$$\mathrm{Ext}(H^n(\overline{W}\backslash V;\mathbb{Z}),\mathbb{Q}) \to \widehat{H}_{n-1}(\overline{W}\backslash V;\mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}(H^{n-1}(\overline{W}\backslash V;\mathbb{Z}),\mathbb{Q}) \to 0$$

由此可知，$\widehat{H}_{n-1}(\overline{W}\backslash V;\mathbb{Q})$ 同构于 $\mathrm{Hom}(H^{n-1}(\overline{W}\backslash V;\mathbb{Z})\ \mathbb{Q})$，因为根据命题 2.3 后的注记，$H^n(\overline{W}\backslash V;\mathbb{Z}) = 0$。

为完成命题 7 的证明，我们需要证明：若 B 是包含 $\overline{W}\backslash V$ 的 $\overline{W}$ 的真闭子集，则对于每个非平凡的 $\gamma \in H_{n-1}(\overline{W}\backslash V;\mathbb{Q})$，$i^{n-1}_{\overline{W}\backslash V,B}(\gamma) \neq 0$。为此，考虑正合序列

$$0 \to \mathrm{Ext}(H^n(B;\mathbb{Z}),\mathbb{Q}) \to \widehat{H}_{n-1}(B;\mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}(H^{n-1}(B;\mathbb{Z}),\mathbb{Q}) \to 0.$$

由于 B 在 X 中（作为 W 的子集）可缩，$H^n(B;\mathbb{Z}) = 0$。因此，$\widehat{H}_{n-1}(B;\mathbb{Q})$ 同构于 $\mathrm{Hom}(H^{n-1}(B;\mathbb{Z})\ \mathbb{Q})$。因为对于某个开集 $\Gamma \subset V$，$B = \overline{W}\backslash\Gamma$，将 Γ 缩小后，可以假设 Γ 是某个 $y \in V$ 的邻域，且 $\overline{\Gamma} \subset V$ 和 Γ 满足定理 1.1 中的条件 (1) –(3)。接着，命题 5 证明中的论证表明，$H^{n-1}(B;\mathbb{Z}) = H^{n-1}(\overline{W}\backslash\Gamma;\mathbb{Z})$ 非平凡，并且存在满同态 $H^{n-1}(B;\mathbb{Z}) \to H^{n-1}(\overline{W}\backslash V;\mathbb{Z})$。因此，存在一个从 $H_{n-1}(W\backslash V;\mathbb{Q})$ 到 $H_{n-1}(B;\mathbb{Q})$ 的单同态，因为 $H_{n-1}(\overline{W}\backslash V;\mathbb{Q})$ 同构于 $\mathrm{Hom}(H^{n-1}(\overline{W}\backslash V;\mathbb{Z})\ \mathbb{Q})$，而 $\widehat{H}_{n-1}(B;\mathbb{Q})$ 同构于 $\mathrm{Hom}(H^{n-1}(B;\mathbb{Z})\ \mathbb{Q})$。我们已经证明 $\widehat{H}_{n-1}(\overline{W};\mathbb{Q}) = 0$。因此，对于任意非平凡的 $\gamma \in H_{n-1}(\overline{W}\backslash V;\mathbb{Q})$，$\overline{W}\backslash V \subset \overline{W}$ 是一个由 $W\backslash V$ 张成的 $(n-1)$-同调膜（相对于正合同调 H_*）。接下来，我们需要以下结果 [26, 定理 4]：对于空间 Y 及其闭集 A 的任意一对、任意整数 k 以及群 G，存在满射 $T^k_{Y,A}$：$\widehat{H}_k(Y, A;G) \to H_k(Y, A;G)$；当 G 是域时，该满射是同构。因此，在我们的情形下，有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \widehat{H}_{n-1}(\overline{W}\backslash V;\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\widehat{i}^{n-1}_{\overline{W}\backslash V,B}} & \widehat{H}_{n-1}(B;\mathbb{Q}) \\ \downarrow T^{n-1}_{\overline{W}\backslash V} & & \downarrow T^{n-1}_{B} \\ H_{n-1}(\overline{W}\backslash V;\mathbb{Q}) & \xrightarrow{i^{n-1}_{\overline{W}\backslash V,B}} & H_{n-1}(B;\mathbb{Q}) \end{array}$$

使得 $T^{n-1}_{\overline{W}\backslash V}$ 和 T^{n-1}_{B} 是同构，且 $\widehat{i}^{n-1}_{\overline{W}\backslash V,B}$ 是单射。

因此 $i^{n-1}_{\overline{W}\setminus V,B}$也是单射，这意味着 $i^{n-1}_{\overline{W}\setminus V,B}(\gamma) \neq 0$。命题 7 的证明至此完成。

假设 U 是 x 的一个邻域，且满足$\overline{U} \subset V$。由于对于任意非平凡的 $\gamma \in H_{n-1}(\overline{W}\setminus V;\, \mathbb{Q})$，数对$\overline{W}\setminus V \subset \overline{W}$都是张在 $\overline{W}\setminus V$上的$(n-1)$-同调膜，根据 [1]，$H_{n-1}(\mathrm{bd}\ \overline{U};\, \mathbb{Q}) \neq 0$，并且对于某个非平凡的 $\gamma' \in H_{n-1}(\mathrm{bd}\ \overline{U};\, \mathbb{Q})$，$\overline{U}$ 是张在$\mathrm{bd}\,\overline{U}$ 上的$(n-1)$-同调膜。$H_{n-1}(\mathrm{bd}\ \overline{U};\, \mathbb{Q})$的非平凡性意味着 $H_{n-1}(\mathrm{bd}\,\overline{U};\, \mathbb{Z}) \neq 0$，参见 $[30, \text{命题}4.5]$。注意，$H^{n-1}(\mathrm{bd}\,\overline{U};\, \mathbb{Z}) \neq 0$ 推出 $\dim \mathrm{bd}\ \overline{U} = n-1$。最后，根据 $[20, \text{推论}\,]$，$\mathrm{bd}\overline{U}$ 是维数满值的。 □

致谢。作者谨向 A. Dranishnikov、K. Kawamura、A. Koyama 和 E. Tymchatyn 致以诚挚谢意，感谢他们提出的宝贵意见。作者也感谢审稿人的建议，这些建议大大改进了本文。

References

[1] R. H. Bing 和 K. Borsuk，关于拓扑齐性空间的一些评述，Ann. of Math. 81 (1965)，第1期，100–111。[2] K. Borsuk，《收缩理论》，《数学专著》第44卷，PWN，华沙，1967。[3] J. Bryant，对 Bing-Borsuk 猜想的思考，发表于第19届几何拓扑年度研讨会的报告摘要，2002年6月13日至15日，2–3。[4] J. Bryant 和 S. Ferry，关于同调流形的α逼近定理：Bing-Borsuk 猜想的反例，预印本。[5] M. C´ardenas、F. Lasheras、A. Quintero 和 D. Repovˇs，关于具有非齐性因子的流形，《中欧数学杂志》10 (2012)，857–862。[6] J. Choi，n 维紧致空间中的泡性质及 n维 clc^n 紧致空间中$(n-1)$泡的存在性，Topology Proc. 23 (1998)，101–120。[7] A. Dranishnikov，紧致度量空间的上同调维数理论，Topology Atlas 特邀稿件，http://at.yorku.ca/topology.taic.html（另见 arXiv:math/0501523 ）。[8] A. Dranishnikov，关于 P.S. Alexandrov 的一个问题，Math. USSSR Sbornik 63 (1988)，412–426。[9] A. Dranishnikov，同调维数论，Russian Math. Surveys 43 (1988)，11–63。[10]J. Dydak，上同调维数与可度量化空间，《美国数学会会刊》337 (1993)，219–234。[11]E. G. Effros，变换群与 C^*-代数，Ann. of Math. 81 (1965)，38–55。[12] S. Eilenberg 和 N. Steenrod，《代数拓扑基础》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1952。[13] V. Fedorchuk，关于齐性庞特里亚金曲面，《科学院院刊》404 (2005)，601–603（俄文）。

[14] W. Jacobsche，Bing-Borsuk 猜想强于 Poincar ´e 猜想，Fund. Math. 106 (1980)，127–134。[15] D. Halberson 和 D. Repov˘s，Bing-Borsuk 猜想与 Busemann 猜想，Math. Commun. 13 (2008)，163–184。[16] A. Harlap，局部同调与上同调、同调维数及广义流形，Mat. Sb. 96(138) (1975)，347–373（俄文）。[17] P. Huber，同伦上同调与Čech上同调，Math. Annalen 144 (1961)，73–76。[18] W. Hurewicz 和 H. Wallman，《维数论》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1948。[19] Y. Kodama，关于度量空间的绝对邻域伸张体的注记，J. Math. Soc. Japan 8 (1956)，206–215。[20] Y. Kodama，关于 Alexandroff 提出的乘积空间维数问题，J. Math. Soc. Japan 11 (1959)，94–111。[21] V. Kuz'minov，关于连续统，Dokl. Akad Nauk SSSR 139 (1961)，第1期，24–27（俄文）。[22]V. Kuz'minov，同调维数论，Russian Math. Surveys 23 (1968)，第1期，1–45。[23] J. Lysko，关于有限维齐性 ANR空间的一些定理，Bull. Polish Acad. Sci. 24 (1976)，491–496。[24] D. Montgomery，局部齐性空间，Ann. of Math. 52 (1950)，261–271。[25] H. Seidel，局部齐性 ANR空间，Aech. Math. 44 (1985)，79–81。[26] E. Sklyarenko，同调论与正合性公理，Uspehi Mat. Nauk 24 (1969)，第5期（第149号），87–140（俄文）。[27] A. Tominaga 和 T. Tanaka，局部连通广义连续统的凸化，J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A 19 (1955)，301–306。[28] V. Valov，齐性 ANR空间与 Alexandroff流形，Top. Appl. 173 (2014)，227–233。[29] V. Valov，齐性 ANR 紧致空间的局部上同调性质，Fund. Math. 223 (2016)，257–270。[30] V. Valov，同调维数与齐性 ANR 空间，Top. Appl. 221 (2017)，38–50。[31] V. Valov，齐性连通局部紧空间的分离，Proc. Amer. Math. Soc. Series B11 (2024)，36–46。

Department of Computer Science and Mathematics,
Nipissing Uni-versity, 100 College Drive, P.O. Box 5002, North Bay, ON, P1B 8L7,Canada电子邮箱地址：veskov@nipissingu.ca