arXiv:2303.10208v1 [math.RA] 9 Feb 2023

ℓ群与 MV-代数的谱问题：一种范畴论方法

Giuseppina Gerarda Barbieri、Antonio Di Nola、Giacomo Lenzi

2023年3月21日

摘要

作为主要结果，我们刻画了阿贝尔格序群的素谱。此外，我们引入了一些基于谱空间、格和 Priestley 空间的范畴，并通过函子将这些范畴彼此联系起来，也将它们与有表示的 MV-代数范畴联系起来。接下来，我们讨论格，并对以下对象给出简单刻画：1）Stone 对偶保持闭集的映射；2）分配格之间的闭满同态及其 Stone 对偶。我们刻画了由 Chang MV-代数生成的簇，并对该簇进行研究。随后，我们将结果推广到每个由 Komori 链生成的簇。最后，我们讨论 MV-代数中的齐次多项式。

ACM 分类：06D05、06D20、06D35、06D50。

1 引言

MV-代数的谱问题是指用纯粹的拓扑术语刻画 MV-代数的素理想谱。这个问题出现在 [33] 的开放问题列表中。请注意，根据 Mundici Γ 函子 [32], , MV-代数范畴与带强单位的阿贝尔格序群（ℓ-群）范畴之间的对应关系，这个问题等价于研究后者的素谱。另一个与该问题相关的函子是 Δ 函子 [20] ，它连接 ℓ-群与完美 MV-代数。下面回顾一些与该问题相关的文献。

这一主题的开创性工作是 Stone 的论文 [39], ，他在文中证明，布尔代数及其同态构成的范畴，等价于紧致豪斯多夫零维空间（称为 Stonean 空间或布尔空间）及其

连续映射构成的范畴的对偶。一年后，Stone 本人于 [40] 又得出了有界分配格与谱空间范畴及所谓谱映射之间的对偶。另一种对偶，即 Priestley 对偶，涉及有界分配格与 Priestley 空间，由 H. Priestley 建立（见 [38]）。

后来，在这一研究方向上， [27]Hochster 刻画了含幺交换环的素谱，并证明它们与谱空间相同。

在 [12] 中，研究了群谱，并为群定义了合适的素子群概念及其素谱。

在 [23, 定理 3.12] 中，我们建立了 MV-代数范畴与一个 MV-代数层范畴之间的范畴对偶，其中基空间是 MV-代数的素谱，茎为 MV-链。在这一层表示中，茎的性质已得到充分理解，但基空间由 MV-代数的谱给出；这类空间当时尚未得到充分理解（如今 [16] 对这一情况作了更清晰的阐释）。

同样，在 [24, 定理 2.22] 中，我们建立了 MV-代数范畴与一个 MV-代数层范畴之间的范畴等价，其中基空间是 MV-代数的极大谱（即紧豪斯多夫空间），茎为局部 MV-代数。与 [23], 相反，在这一表示中，基空间的性质是清楚的，但茎则取自一个范围广泛的类别，例如局部 MV-代数。

我们注意到， [23] 和 [24] 都为 MV-空间这一直观概念提供了可能的实现方式，类似于代数几何中的环化空间概念。文献中尚不存在 MV-代数所对应的环化空间，这可能是因为局部化这一概念通常难以在 MV-代数中实现。

在 [25]中，我们发现了 MV-代数的一种推广与带有适当附加结构的 Priestley 空间之间的对偶。请注意，分配格的 Priestley 空间可以通过多种方式实现，例如，我们可以取该格的素理想集合，并赋予其包含序和 patch 拓扑（而非 Zariski 拓扑）。

论文 [41] 和 [42] 从逻辑的角度深入研究了谱问题。在 [41] 中，作者证明，作为 MV-代数的素谱的第二可数谱空间可以用一个简单的一阶公式刻画；而在 [42] 中，作者证明，任何无穷一阶逻辑都无法表达 MV-代数的素谱。其他相关信息见 [43]。

论文 [16] 可视为本文的前身。在 [16] 中，我们刻画了那些与某个 MV-代数的素谱同胚的拓扑空间 X

。，其刻画方式是借助 X的紧开集所构成的格 K（X）。除了 X的谱性（这是一个众所周知的

。已知的必要条件是， $K(X)$ 必须是某个集合Y（可能是无限集）所对应的 $[0,1]^Y$“柱状有理多面体”格的闭满同态像。这里的闭性是对半格同态施加的一项技术条件（例如， [41] 中的原始定义略显复杂，但我们在定理 6.1 中给出了一个简单的刻画）。这里的柱状有理多面体是指某个麦克纳顿函数的零点集，是对可能具有无限维的有理多面体的自然推广。

本文的另一个前身是 [29], ，其中针对 MV-代数为半单代数的特殊情形给出了一种对偶。 [29] 的对偶所涉及的拓扑空间恰好是紧豪斯多夫空间。

1.1 本文的贡献

本文的主要目标有两个。首先，我们希望研究重要子类的 MV-代数或 ℓ-群的素谱，同时也利用 [16]中给出的任意 MV-代数的谱刻画。其次，我们提出了一些看似新颖的函子，它们涉及所有 MV-代数组成的类，并在一定程度上建立在经典对偶之上。

我们列出本文的主要结果。

我们对 MV-代数和 ℓ-群都感兴趣，因为二者关系密切，而且各自都有学术社群。例如，对于 ℓ-群，通过 Riesz 空间这一特殊情形，我们可以看到泛函分析领域的学术社群；对于 MV-代数，则有量子力学领域的学术社群。从 ℓ-群的角度来看，本文最重要的结果如下。

设 T是一个基于柱形扇的拓扑空间；事实上，它是一个谱空间，并且对于某个基数 k（可能是无限基数）， T 的紧开集格与$\Delta(\mathbb{R})^k$ 中的柱形扇格反同构（见定义 9.2）。

定理 1.1. 拓扑空间 X 是阿贝尔 ℓ-群G 的谱，当且仅当存在基于柱形扇的空间 T 的一个闭子集 Y，使得 $X = Y \setminus \{M\}$，其中 M 是 Y 中的唯一闭点。

这个结果将在第 11 节中，利用 Δ 与 [20]之间 ℓ-群和完美 MV-代数的等价性来证明。回顾一下，当一个 MV-代数由其无穷小元生成时，它就是完美的。请注意，该定理

并未假设 G 具有强单位，而许多关于 ℓ-群的结果都要求有强单位。

作为关于 ℓ-群的另一项范畴论结果，我们提到，在 [1] Ab- badini 中，Marra 和 Spada 证明了度量完备的 ℓ-群范畴与 a-正规空间及其间的 a-映射范畴对偶等价。他们将赋有一个函数（称为分母映射）的拓扑空间称为算术空间（简称 a-空间），该函数的取值范围为自然数集合；他们将满足某个分离公理的紧致豪斯多夫算术空间称为 a-正规空间。

在定理 3.8 中，我们证明，若 $A = Free(k)$ 是由 k 个生成元生成的自由 MV-代数，那么格

$_{\circ}K(Spec(A))$ 的紧开子集格与 $[0,1]^k$ 的柱状有理多面体格之间存在格同构。

在定理 4.2 中，我们给出自由 MV-代数的素谱的刻画；在定理 4.4 中，我们给出自由 MV-代数的极大谱（即超立方体）的部分类似刻画。

在定理5.4中，我们建立了一个从有表示的 MV-代数范畴到范畴 SIC（“语境中的谱”）的函子。该范畴的对象是三元组 (X, C, m)，其中 X 是一个自由 MV-代数的谱，C 是另一个谱空间，而 m 是从 C 到 X 的适当函数。

在定理 5.12 中，我们基于 Stone 对偶建立了 SIC 与范畴 LIC（“上下文中的格”）之间的对偶；LIC 与 SIC 类似，但涉及格对及格映射。类似地，在定理 5.15 中，我们基于 Priestley 对偶建立了 LIC 与另一个范畴 PIC （“ 上下文中的 Priestley”）之间的对偶；PIC 涉及 Priestley 空间对及 Priestley映射。

在定理 6.1 中，我们刻画了有界分配格之间的闭满射映射（依照 [16] 和 [41] 的意义）。

在定理 8.2 中，我们根据理想刻画了由 Chang代数生成的簇 $\mathbb{V}(C)$ 中的代数；在定理 8.7 中，我们对局部 MV-代数也做了同样的刻画。

在定理9.7中，我们讨论 $\mathbb{V}(C)$ 中自由 MV-代数的谱；在定理 10.2 中，我们对 $\mathbb{V}(K_m)$ 也进行了同样的讨论，其中 K_m 是第 m 个 Komori 代数。

1.2 论文概要

我们从第 2 节的预备内容开始。第 3 节回顾 MV-代数谱的基本性质。第 4 节刻画自由 MV-代数的谱，第 5 节介绍一些函子。第 6 节刻画分配格之间的闭满同态。第

7 节回顾完美 MV-代数和完美理想。第 8 节研究$\mathbb{V}(C)$-代数，第 9 节研究$\mathbb{V}(C)$中的自由 MV-代数的谱。第 10 节研究 Komori 簇$\mathbb{V}(K_m)$这一更一般的情形。第 11 节讨论 ℓ-群的谱。第 12 节描述从 $\Delta(\mathbb{R})^n$ 到 $\Delta(\mathbb{R})$的函数的零点集，这些函数可以解释为 $\mathbb{V}(C)$中麦克纳顿函数的类似物。第 13 节研究齐次 McNaughton 函数。第 14 节拓展 Mundici 关于模型论/理论联系的思想。第 15 节总结全文。

2 预备知识

回顾一下，MV-代数（例如参见 [11]）是一个结构 $(A, \oplus, 0, \neg)$，满足 $(A, \oplus, 0)$ 是一个幺半群（必然是交换的），$\neg\neg x = x$, $x \oplus \neg 0 = \neg 0$,$\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$。

每个 MV-代数都是一个格，其中 $x \vee y = \neg(\neg x \oplus y) \oplus y$ 且 $x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$。

在这个序中，0 是最小元，而 $1 = \neg 0$ 是最大元。

MV-代数 A 的理想是一个非空集合 $I \subseteq A$，对 $\oplus$闭合，并且满足：若 $x \in I$ 且 $y \leq x$，则 $y \in I$。

理想 P是素的，当且仅当 $P \neq A$ 且 $x \wedge y \in P$蕴含 $x \in P$或 $y \in P$。

MV-代数 A 的素谱是其素理想的集合 $Spec(A)$。$Spec(A)$带有 Zariski 拓扑，该拓扑由开集$O(a) = \{P \in Spec(A) | a \notin P\}$生成，其中 $a \in A$。$O(a)$的补集是$V(a) = \{P \in Spec(A) | a \in P\}$，更一般地，对于集合 $I \subseteq A$，我们令$V(I) = \{P \in Spec(A) | I \subseteq P\}$。

若 A 是 MV-代数且 $S \subseteq A$，我们用 $ideal(S)$表示由 S生成的理想。

由于 MV-代数的公理是等式公理，MV-代数构成一个簇，因此存在自由对象。由 k 个元素生成的自由 MV-代数（其基数k 可能是无限的） $Free(k)$由从 $[0,1]^k$ 到 $[0,1]$, 的麦克纳顿函数构成，也就是说，它由具有整数系数的连续分段线性函数构成。我们用 $Z(f)$表示函数 f的零点集。

与泛代数中的通常情形一样，每个 MV-代数都是自由 MV-代数的满态射像。由于 MV-代数同态的核都是理想，因此每个 MV-代数都是自由 MV-代数模某个理想的商。

本文的另一个关键概念是 ℓ-群，即格序阿贝尔群。也就是说，我们有一个阿贝尔群 $(G+, 0, -)$，并配备格序 $\leq$，使得 $x \leq y$蕴含 $x + z \leq y + z$。ℓ-群被视为

签名 (+,0, −, ∧, ∨) 上的代数结构。 ℓ-多项式是用这一签名写成的多项式。 ℓ-群也是一个簇。

ℓ-群 G 的强单位是指 G 中的一个元素 u，满足对于每个$x \in G$，都存在 n 使得 $x \leq nu$。

我们回顾 Mundici 函子 Γ、函子 Δ 以及 MV-代数的 Komori 簇。

Γ 是一个函子，从带有强单位的 ℓ-群范畴映到 MV-代数范畴。

设 (G, u) 是一个配备固定强单位 u的 ℓ-群。那么，MV-代数 $\Gamma(G, u) = ([0, u], \oplus, \neg, 0)$ 定义如下:

- $[0, u] = \{a \in G : \ 0 \leq a \leq u\}$
- $a \oplus b = (a + b) \wedge u$
- $\neg a = u - a$
- 0是 G 的加法恒等元。

对于态射，给定 $f : (G, u) \to (H, v)$，它是带强单位的 ℓ-群的一个态射， f 限制为一个 MV-代数态射 $\Gamma(f) : \Gamma(G, u) \to \Gamma(H, v)$。

由此可得， Γ 是带强单位的 ℓ-群范畴与 MV-代数范畴之间的等价。

现在，若 G 是一个 ℓ-群，我们令

$$\Delta(G) = \Gamma(\mathbb{Z}\ lex\ G, (1, 0)),$$

其中 lex 表示群的字典序积。给定一个 ℓ 群同态 $f : G \to H$，我们有群同态 $i : Z\ lex\ G \to Z\ lex\ H$，其定义为 $i(z, g) = (z, f(g))$。注意到 $i(1, 0) = (1, 0)$，且 $(1, 0)$ 是 ℓ-群 $\mathbb{Z}\ lex\ G$ 和 $\mathbb{Z}\ lex\ H$中的强单位，因此我们可以将Γ 函子应用于 $(\mathbb{Z}\ lex\ G, (1, 0))$。

此外， Δ 也是 ℓ 群范畴与完美 MV-代数范畴之间的等价；完美 MV-代数是指由其无穷小元生成的 MV-代数。

设 $m \in \mathbb{N}$。我们用 $\mathrm{L}_m = \Gamma(\mathbb{Z}, m)$ 表示唯一的 $m + 1$ 元 Łukasiewicz有限链，用 $K_m = \Gamma(\mathbb{Z}\ lex\ \mathbb{Z}, (m, 0))$ 表示第 m 个 Komori 链。

我们用 MV 表示所有 MV-代数构成的簇。若 $\emptyset \neq X \subseteq MV$，则$\mathbb{V}(X)$ 是由 X 生成的 MV 子簇。

Komori 在 [28] 中证明，MV-代数簇的每个真子簇 $\mathbb{V}$ 都具有如下形式

$$(*) \quad \mathbb{V} = \mathbb{V}(Ł_{m_1}, \ldots, Ł_{m_r}, K_{t_1}, \ldots, K_{t_s})$$

对于某些有限集合 $I = \{m_1, \ldots, m_r\}$ 和 $J = \{t_1, \ldots, t_s\}$，且二者不全为空。

回顾一下，若拓扑空间 X 是广义谱的，即它是 sober 的（也就是说，每个不可约闭集都是某个唯一单点集的闭包），并且 X 的所有紧开子集构成 X 的拓扑基，且对任意两个成员的交封闭，则称之为广义谱空间。此外，如果 X 还是紧致的，则称其为谱空间。

3 MV-代数的谱

Belluce 证明了 MV-代数的谱是谱空间（见 [2, 7]）—— [23, 的推论 8 中也包含了这一事实的另一种证明。尽管如此，为求完整起见，我们在此给出自由 MV-代数这一经典结果的完整证明，见定理 3.8（对于任意 MV-代数，该结论将是一个推论）。

引理 3.1. 若 I_α 是任意一族理想，则 $\cap_\alpha V(I_\alpha) = V(\oplus_\alpha I_\alpha)$

证明. 注意到 $\oplus_\alpha I_\alpha$ 是包含每个 I_α的最小理想。

若 $P \in V(\oplus I_\alpha)$，由于 $I_\alpha \subseteq \oplus_\alpha I_\alpha \subseteq P$，我们可以得出 $P \in \cap V(I_\alpha)$。为证明反方向，假设 $P \in \cap V(I_\alpha)$。

因此，对于任意 α，理想 I_α 包含于 P。于是 $I_\alpha \subseteq \oplus I_\alpha \subseteq P$。因此，$P \in V(\oplus I_\alpha)$。 □

命题 3.2. 设 A是一个 MV-代数。则 $Spec(A)$是 sober 的。

证明. 设 $F = V(I)$是 $Spec(A)$的不可约闭子集。

我们不妨设 I 是一族 Y 素理想的交。若 $|Y| > 1$，则可写成 $Y = Y' \cup Y''$，其中 $Y' \neq Y$ 且 $Y'' \neq Y$。于是 $F' = V(\cap_{P \in Y'} P)$ 和 $F'' = V(\cap_{P \in Y''} P)$ 是 F 和 $F = F' \cup F''$ 的真闭子集，因为 $I = (\cap_{P \in Y'} P) \cap (\cap_{P \in Y''} P)$，这与 F 不可约矛盾。因此 $|Y| = 1$ 且 $F = V(P)$。 □

设 A 是一个 MV-代数，且 $f \in A$。回顾

$$O(f) = \{P \text{ prime ideal of } A \text{ s.t } f \notin P\}$$

引理 3.3. 设 $f, g \in A$，则 $O(f \oplus g) = O(f) \cup O(g)$

证明. 由于理想向下闭集，我们有 $O(f)\ O(g) \subseteq O(f \oplus g)$。反过来，由于理想对和封闭，若 P 是一个素理想且满足 $f \oplus g \notin P$，则 $f \in P$ 和 $g \in P$ 不能同时成立。

□

命题 3.4。设 $f \in A$，则 $O(f)$ 是紧致的。

证明。设

$$O(f) \subseteq \cup O(f_i)$$

是 $O(f)$ 的一个开覆盖。于是

$$V(f) = A \setminus O(f) = A \setminus \cup O(f_i) = \cap V(f_i) = V(I)$$

其中 I 是由 f_i 生成的理想。因此 $f = \oplus_{n=1}^{k} f_n$，并且由引理 3.3

$$O(f) \subseteq \cup_{n=1}^{k} O(f_n)$$

□

反之，我们有：

命题 3.5。如果开集 $O(I)$ 是紧致的，那么对于某个 f，有 $O(I) = O(f)$。

证明。假设 $O(I)$是紧致的。那么我们有覆盖 $O(I) = \bigcup_{i \in I} O(i)$，并且可以从 I 中取出有限子集 F，使得 $O(I) = \bigcup_{g \in F} O(g)$。现在取 $f = \oplus_{g \in F} g$。

□

命题 3.6。设 $A = Free(k)$是由 k 个生成元生成的自由 MV-代数。设 $f \in A$和 $Z(f)$分别是 f在 $[0,1]^k$中的零点集。设 ϕ是从 $Spec(A)$的紧开集格到 $Free(k)$中麦克纳顿函数的零点格的映射，且 ϕ：$O(f) \mapsto Z(f)$。那么 ϕ是良定义的，即它不依赖于 f的选取；并且相对于包含关系，它是一个格同构。

证明。设 f、g 是两个麦克纳顿函数。已知 f 的主理想是所有包含 f的素理想的交。因此，$O(f)$包含于 $O(g)$，当且仅当 f 属于 g的主理想。此外，$Z(f)$包含于 $Z(g)$，当且仅当 g 属于 f 的主理想（沃伊奇基定理，见 [29]）

□

回顾一下，$[0,1]^X$ 中的有理单形是由有限个仿射无关的有理点构成的凸包，其中 X 是一个有限集合。有理多面体是有限个有理单形的有限并。

[16] 的结果表明，变量有无限多个、但可能是有限公理化的理论具有重要意义。为了处理无限维对象，我们给出以下取自 [16]的定义：

定义 3.7。设 X 为一个集合，且可能是无限集。我们将超立方体 $[0,1]^X$ 中的柱面（有理）多面体定义为 $[0,1]^X$ 的一个具有以下形式的子集

$$C_X(P_0) = \{f \in [0,1]^X \mid f|_Y \in P_0\}$$

其中， Y 是 X 的有限子集， $P_0 \subseteq [0,1]^Y$ 是有理多面体。这里， $f|_Y$表示函数 f 在 Y 上的限制，即 $f|_Y = f \circ j$，其中$j: Y \to X$ 是包含映射。

正如有限维情形中的有理多面体是麦克纳顿函数的零点集一样，柱状有理多面体是可能处于无限维情形中的麦克纳顿函数的零点集。

现在我们可以给出自由 MV-代数的谱的以下性质。

定理 3.8. 设 $A = Free(k)$ 是由 k 个生成元生成的自由 MV-代数。则 $Spec(A)$ 是谱的。此外，存在一个格同构，使得

。紧开子集的格 $K(Spec(A))$ 与 $Spec(A)$ 以及 $[0,1]^k$ 的柱状有理多面体的格之间存在同构。

证明。(i) 我们将证明 $Spec(A)$ 是紧致的。

如果 I_α 是 A 的一组理想，其中 $\cap V(I_\alpha) = \emptyset = V(A)$，那么由引理 3.1

$$\oplus I_\alpha = A$$

由于 $1 \in A$，我们有 $1 = i_{\alpha_1} \oplus i_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus i_{\alpha_k}$，其中 $i_{\alpha_i} \in I_{\alpha_i}$，对于$i = 1, \ldots, k$。由此可得 $1 \in \oplus I_{\alpha_i}$，或者等价地

$$V(\oplus_{i=1}^k I_{\alpha_i}) = \cap_{i=1}^k V(I_{\alpha_i}) = V(A) = \emptyset$$

由此完成证明。

(ii) 它有一个由开紧致子集组成的基：见命题 3.4。

(iii) 由 (i)-(ii) 和命题 3.2 可得 $Spec(A)$ 是谱的。

(iv) 最后一个断言由命题 3.6 得出 □

为了处理商映射，我们将使用以下内容：

记号 3.9. 设 I 是 A的一个理想，则 h_I 表示从 A 到 A/I 的典范对应，使得 $x \mapsto x/I$。

引理 3.10. (i) 设 h: $A \to B$ 是两个 MV-代数之间的满同态，且 I 是一个理想，则 $h(I)$是一个理想。

(ii) 设 h : $A \to B$ 是两个 MV-代数之间的同态，且 P' 是 B 的一个素理想，则 $h^{-1}(P')$ 是 A 的一个素理想。

(iii) 设 h 是满射， P 是 A 的一个包含 $Kerh$ 的素理想，则 $h(P)$ 是 B 的一个素理想。

证明。(i) 显然， $h(I)$ 关于和运算封闭。

现在证明向下封闭性：若 $x \in B, y \in h(I)$ 且 $x \leq y$，则 $x \in h(I)$。

由于 $y \in h(I)$，存在 $i \in I$ 使得 $y = h(i)$。由于 h 是满射，存在 $j \in A$ 使得 $x = h(j)$。

由 $h(j) \leq h(i)$，可得 $x = h(j) = h(j \wedge i)$，其中 $j \wedge i \in I$，由此得证。

(ii) 显然， $h^{-1}(P')$ 是一个理想。我们证明理想 $h^{-1}(P')$ 是素理想。

假设对于 $a, b \in A$，有 $a \wedge b \in h^{-1}(P')$。于是我们得到 $h(a \wedge b) \in P'$。由于 h 是一个同态，我们得到

$$h(a) \wedge h(b) = h(a \wedge b) \in P'.$$

由于 P' 是一个素理想，因此要么 $h(a) \in P'$，要么 $h(b) \in P'$。因此，我们有 $a \in h^{-1}(P')$ 或 $b \in h^{-1}(P')$。这证明理想$h^{-1}(P')$ 是素理想。

(iii) 首先注意，由于 h 是一个满同态，且 P 是一个理想，因此 $h(P)$ 是一个理想。

现在我们证明理想 $h(P)$ 是素理想。

假设对于 $r, s \in B$，有 $r \wedge s \in h(P)$。由 h 的满射性可知，对于某些 $a, b \in A$，有 $r = h(a)$ $s = h(b)$。现在，对于某个$c \in P$，有 $h(a) \wedge h(b) = h(c)$，而这就变成了 $(a \wedge b) \ominus c \in kerh$。由于 $P \supseteq kerh$，我们可以得出 $(a \wedge b) \ominus c \in P$；但是 $a \wedge b \leq c \oplus ((a \wedge b) \ominus c)$，且右边属于 P，所以 $a \wedge b \in P$也成立。由于 P是素理想，要么 $a \in P$，要么 $b \in P$。由此可得，要么$r \in h(P)$，要么 $s \in h(P)$。这证明理想 $h(P)$ 是素理想。

□

命题 3.11. (i) 设 J 是 MV-代数 A 的一个理想。那么映射$I \to h_J(I)$ 在包含 J 的 A 的理想与商 MV- 代数 A/J 的理想之间建立了一个保持包含关系的一一对应关系。

(ii) 逆映射也保持包含关系。

(iii) $Spec(A/J)$ 和 $V(J)$ 均赋予 Zariski 拓扑，且二者同胚。

证明。(i)、(ii) 前两个陈述见 [31, 命题 1.15]。

(iii) 对于最后一个结论：由于 A/J 的素理想恰好是 P/J，其中 P/J 是 $P \in V$ （ J ）的素理想，因此结论成立。 □

映射

$$h_* : Spec(G/J) \to Spec(F/I)$$

对每个素理想 P，定义为 h_*（P）：$= h^{-1}$（P），它是连续的。

事实上，若 V（T）是 $Spec$（F/I）的某个闭集，则 h_*^{-1}（V（T））$=V$（h（T））， 且后一个集合也是闭集。

我们来证明最后一个等式:

$$h_*^{-1}(V(T)) = \{P \in Spec(G/J) : h_*(P) \in V(T)\}$$
$$= \{P \in Spec(G/J) : T \subseteq h_*(P)\} = \{P \in Spec(G/J) : h(T) \subseteq P\} =$$
$$V(h(T)).$$

4 自由 MV-代数的谱刻画

本节将刻画自由 MV-代数的谱。通过这种方式，我们能够刻画任意 MV-代数的谱，因为 MV-代数的谱恰好是自由 MV-代数的谱的闭子集（借助命题 3.11 中引入的同胚）。在下一个定理中，我们将纯粹从拓扑角度刻画自由 MV-代数的谱。为此，我们引入一类特设的拓扑空间，称为柱基空间。

定义 4.1. 拓扑空间 X 称为柱基空间，当且仅当:

1. X 是谱的;
2. 格 $K(X)$ 与 $[0,1]^k$ 上柱状有理多面体的格 $Cypol(k)$ 反同构，其中基数 k 可以是无限的。

现在我们可以给出以下关于自由 MV-代数的谱的刻画。

定理 4.2. 一个拓扑空间 X 同胚于某个 k 的 $Spec(Free(k))$，当且仅当它是柱基的。

证明。根据定理 3.8，谱 Spec 是谱的，其紧开集构成的格与格 $Cypol(k)$ 反同构。

反过来，假设空间 X 满足这两个条件。根据谱空间与格之间的 Stone 对偶，见 [40], ，两个紧开集格同构的谱空间彼此同胚。因此 $X \cong Spec(Free(k))$。

□

由前一个定理，我们得到以下判据。

定理 4.3. 一个拓扑空间是某个 MV-代数的谱，当且仅当它是一个柱基空间的闭子集。

值得注意的是， $Max(Free(k))$ 是一个不同于 $Spec(Free(k))$ 的空间（例如，它是豪斯多夫的），但它具有同构的开集基，该基由麦克纳顿函数零点集的补集构成。然而，根据 Stone 对偶，紧开集基同构的谱空间彼此同胚。

我们可以部分仿照定理 4.2，对 $Max(Free(k))$ 作如下刻画：

定理 4.4. 一个拓扑空间 X 与 $Max(Free(k))$ 同胚 $=$，当且仅当：

- X 具有开基 B，它与格 $Cypol(k)$ 反同构。

- 我们用 C 表示 B的补集组成的集合。若 Y 是C 中的一个理想，且 $c \in C$，则 $\bigcap Y \subseteq c$ 成立，当且仅当对于每个满足$c \cap g = \emptyset$ 的 $g \in B$，都存在 $y \in Y$ 使得 $y \cap g = \emptyset$。

X 中元素的单点集与 B中元素补集的非空极小交集相同。

证明。我们来证明 $[0,1]^k$ 满足这三个条件。

第一点成立，因为 B 是 $[0,1]^k$中麦克纳顿函数的零点集的补集组成的集合。

为证明第二点，固定 Y 和 c。
假设 $\bigcap Y \subseteq c$ 和 $c \subseteq \neg g$，也就是说 $c \cap g = \emptyset$。
那么 $\bigcap Y \subseteq \neg g$。由紧致性可知，存在 $y \in Y$使得 $y \cap g = \emptyset$。
反过来，假设对于每个 $g \in B$，只要满足 $c \cap g = \emptyset$，就存在 $y \in Y$ 使得 $y \cap g = \emptyset$。那么 $g = \neg c$ 给出某个 $y \in Y$，使得 $y \cap \neg c = \emptyset$，因此$\bigcap Y \cap \neg c = \emptyset$。

为证明第三点，每个单点集都是基本闭集的交；反过来，基本闭集的极小非空交是一个单点集，否则，若有两个点，由于空间 $Max(Free(k))$ 是豪斯多夫的，我们可以用一个基本闭集将它们分开。

反过来，设 X 是一个具有上述三种性质的拓扑空间。我们定义 X 与 $Max(Free(k))$之间的一个同胚 $=[0,1]^k$.

令 $B = \{b_f\}$ 为由 $f \in Free(k)$标记的 X的基。令 $Y \subseteq Free(k)$。同胚 h: $X \to Max(Free(k))$将 X 中的任意元素p映射到满足以下条件的 Max 中的元素 $B = \{b_f\}(X)$:

$$\{p\} = \bigcap_{f \in Y} \neg b_f$$

映射到 Max 中的元素 $h(p)$，使得

$$\{h(p)\} = \bigcap_{f \in Y} Z(f).$$

首先注意，函数 h 定义良好。事实上，更一般地，对于每个 Y、Z、Y'、Z'，若

$$\bigcap_{f \in Y} \neg b_f = \bigcap_{f \in Y'} \neg b_f$$

属于 X，则

$$\bigcap_{f \in Y} Z(f) = \bigcap_{f \in Y'} Z(f)$$

属于 $Max(Free(k))$，反之亦然。这由第三点可知。因此， h 的定义不依赖于将 p 的单点集表示为基本闭集的交的方式。此外，设 $\bigcap_{f \in Y} \neg b_f$ 是一个单点集。根据第三点，它是基本闭集的非空极小交。因此，相应的交 $\bigcap_{f \in Y} Z(f)$也是基本闭集的非空极小交。

由于 $Max(Free(k))$ 中的两点总能被两个基本闭集分开，因此后者是 $Max(Free(k))$ 中的单点集。所以函数 h 唯一确定，并将单点集映射为单点集。

此外，根据前面的等式可知， h 是单射，而h 也是满射；因此 h 是双射。事实上，$Max(Free(k))$中的每个单点集都具有$\bigcap_{f \in Y} Z(f)$的形式，并且是基本闭集的非空极小交。因此，根据第三点， $\bigcap_{f \in Y} \neg b_f$ 也是一个非空极小交。因此，根据第三点，后一个交是一个单点集。

此外， $Z(f)$的原像是 $\neg b_f$ ，反之亦然，因此基本闭集在 h 下的原像仍是基本闭集，像也同样如此。所以 h和 h^{-1} 是连续的，而 h 是一个同胚。 □

5 关于 MV-代数的谱与函子

根据前述对偶，MV-代数的谱与自由 MV-代数的谱的闭集相一致。因此，若 I 是 $Free(k)$的一个理想，则商 MV-代数 $Free(k)/I$ 的谱同构于 $V(I)$，前一节的定理也可推广到理想 $I \subseteq Free(k)$。

定理 5.1. 拓扑空间 X 同胚于 $Spec(Free(k)/I)$，当且仅当：

- X 是谱的；
- $\overset{\circ}{K}(X)$与格 $Cypol(k, I)$反同构；该格由 $[0,1]^k$ 的柱多面体与 $Z(I)$的交集构成。

证明。 $Spec((Free(k))/I)$与 $V(I)$同胚，而 $V(I)$的基本开集形式为 $O(f) \cap V(I)$，其中 $f \in Free(k)$。该同构将 $O(f) \cap V(I)$映至 $Z(f) \cap Z(I)$。 □

推论 5.2. 设 I, J 是 $Free(k)$ 的理想。则以下条件等价：

- $I \subseteq J$；
- $V(J) \subseteq V(I)$。

证明。由 $V(I)$ 是包含 I 和 $I = \bigcap V(I)$ 的素理想集合这一事实可得。 □

5.1 一些函子

设 MV_p 为有表示的 MV-代数范畴，即其对象是形如 (F, I) 的有序对的范畴，其中 F 是自由生成的 MV-代数， I 是 F 的理想；态射 $f: (F, I) \to (G, J)$ 是一个 MV-代数同态，它将 F 映至 G ，并将 I 映至 J。注意，从 F 到 G 的 MV-代数同态与 MV-多项式元组一致，因为 F 和 G 是自由的。

直观地说，数对（F， I）是 MV-代数 F/I 的一种表示。请注意，每个 MV-代数都存在这样的表示。另请注意，范畴 MV_p 与 MV 等价（假设选择公理成立），参见 [29]。

现在我们希望将 MV_p 与一个建立在谱空间之上的范畴联系起来。目标范畴就是我们所称的“语境中的谱”范畴 SIC 。直观地说，我们有两个谱空间，其中一个对应于自由 MV-代数的谱，另一个则嵌入其中。然而，我们不采用包含关系，而是考虑某种特定类型的单态射。这将使我们能够构造一些范畴等价。

形式上，SIC 的对象是三元组 (X, C, m)，其中 X 是柱基拓扑空间，C 是谱空间，而 $m\colon C \to X$ 是一个保持闭集的单射谱映射。从 (X, C, m) 到 (Y, D, n) 的态射是一对谱映射 $s\colon X \to Y$, $t\colon C \to D$，使相应的方块交换。

回顾一下，柱基空间与自由 MV-代数的谱相一致，见定理 4.2。MV_p 与 SIC 的关系如下。

引理5.3. SIC 中的每个对象 (X, C, m) 都同构于 $(X, m(C)\ j)$，其中 j 是从 $m(C)$ 到 X的包含映射。

证明。给出该同构的一对箭头为 (m, id_X)，其中 id_X是 X上的恒等映射。□

定理5.4. 存在一个反变函子 α ，从范畴 MV_p到范畴 SIC，它在对象上是单射，并且在同构意义下是满射。

证明。设 (F, I) 是 MV_p 的一个对象，则 $\alpha(F, I) := (Spec(F)\ V(I)\ j)$，其中 j 是从 $V(I)$ 到 $Spec(F)$ 的包含映射。注意，若 $Spec(F) = Spec(F')$，则 $F = F'$；若 $V(I) = V(I')$，则 $I = \bigcap V(I) = \bigcap V(I') = I'$。

最后，α 在对象上本质满，因为 SIC 的每个对象都同构于形如 $(Spec(F)\ V(I)\ j)$ 的对象。□

将我们的函子 α 与 [29] 进行比较很有意义。在那篇论文中，忽略记号上的差异，范畴 MS_1 与范畴 MS_2 之间本质上存在对偶；其中，MS_1 的对象是表示的半单MV-代数的数对 (F, I)，满足 F 是自由的且 F/I 是半单的；而 MS_2 是 $[0,1]^k$ 的闭子集构成的范畴。$[0,1]^k$ 是一个与 $Free(k)$ 的极大谱同胚的拓扑空间（见[31, 命题 4.2]）。因此，MS_1 的对象是数对 $(Free(k)\ I)$，其中 I 是 $Free(k)$ 的理想，且 $Free(k)/I$ 是半单的；等价地，I 是 $Free(k)$ 的极大理想之交。

范畴 MS_1与 MV_p类似，而范畴 MS_2与 SIC 部分类似。函子 α 与将 $(Free(k)\ I)$ 映射为 $(Max(Free(k))\ V(I) \cap Max(Free(k)))$ 的函子类似。

注记 5.5. 设 $h\colon (F, I) \to (G, J)$ 是 MV_p 中的一个态射。根据命题 3.11 及其中引入的同胚，我们得到

$$\alpha(h) : \alpha(G, J) \to \alpha(F, I)$$

给出一个连续函数，从赋予诱导 Zariski 拓扑的 $V(J) \subseteq Spec(G)$ 到赋予诱导 Zariski 拓扑的 $V(I) \subseteq Spec(F)$。

最后注意，我们可以将从 MV_p 到 SIC 的函子 α 与 Mundici 函子 Γ （至多再复合一个从 MV 到 MV_p 的等价）复合，从而得到一个从带单位的阿贝尔 ℓ-群到 SIC 的函子。

5.2 表示的 lu-群

在上一小节中，我们定义了一个由表示的 MV-代数组成的范畴 MV_p，以及一个从该范畴到另一个与谱空间相关的范畴 SIC 的函子。鉴于 MV-代数与 ℓu-群之间的 Mundici 等价，我们可以对 ℓu-群进行类似的构造，即带有强单位 u 的 ℓ-群。为此，我们引入由表示的 ℓu-群组成的范畴 Lu_p。令 $G_k = \Gamma^{-1}(Free(k))$，其中 $Free(k)$ 是由 k 个元素生成的自由 MV-代数，而 Γ^{-1} 是逆 Mundici 函子。Lu_p 的对象是形如 (G_k, I) 的对，其中 I 是 G_k 的一个 ℓ-理想。

直观地说，(G_k, I) 表示 ℓ-群 G_k/I；由于含幺群对商封闭，因此它是含幺的。

从 (G_k, I) 到 (G_h, J) 的态射，是从G_k 到 G_h 的含幺 ℓ-群态射，它将 I 映射到 J。

与 MV-代数的情形类似，我们有：

引理 5.6. 每个 ℓu-群都有一个表示。

证明。设 (G, u) 是一个 ℓu-群，且 $A = \Gamma(G, u)$。设 $A = Free(k)/I$ 是 MV-代数 A 的一个表示。设 $\pi : Free(k) \to Free(k)/I$ 为商映射。注意，π 是满射。因此，根据 [11, 引理 7.2.1]，$\Gamma^{-1}(\pi) : \Gamma^{-1}(Free(k)) \to \Gamma^{-1}(A)$ 也是满射。所以 (G, u) 是 $\Gamma^{-1}(Free(k))$ 的一个满态射像，并且有一个表示。□

推论 5.7。范畴 MV_p 和 Lu_p 等价。

证明。该等价将 $(Free(k)\ I)$ 映射到 $(\Gamma^{-1}(Free(k))\ \Gamma^{-1}(I))$。□

推论 5.8。从 Lu_p 到 SIC 存在一个在对象上为单射的函子。

。5.3 关于函子 β、 Id_c、 $Spec$ 和 K

设 A 是一个 MV-代数。令 $\beta(A)$ 为由 [10] 得到的 A 的 Belluce 格；也就是说， $\beta(A) = A/\sim$，其中 $x \sim y$ 当且仅当 x 和 y 属于相同的素理想。此外，令 $Id_c(A)$ 为 A的主理想格。 β 和 Id_c都可扩展为从 MV-代数范畴到有界分配格范畴的函子。

有趣的是，格 $\beta(A)$ 的素理想与素

。MV-代数 A 的理想一致（参见第 375] 页的 $[10,$ ）。此外，设 $K(X)$ 是谱空间 X 的紧开集格。我们有：

。引理 5.9。（参见 *[41]*）对于每个 MV-代数 A， $K(Spec(A)) \cong Id_c(A)$。

引理 5.10。 $Id_c(A) \cong \beta(A)$。

证明。此结论成立，因为 A 中的两个元素属于同一个素理想，当且仅当它们生成同一个理想。 □

。推论 5.11。 $K(Spec(A)) \cong \beta(A)$。

。可以问这三个函子 $\beta, Id_c, K \circ Spec$ 是否自然同构。

由 [16] 可得：

- 当 $A = Free(k)$ 是自由的时， $\beta(A)$ 是$[0,1]^k$中的柱多面体格；
- 对于任意的 A ，格 $\beta(A)$ 恰好是某个 k 的闭满态射像 $\beta(Free(k))$。

5.4 一个新的格范畴

我们定义了两个范畴 MV_p：一个以 MV-代数为基础，另一个 SIC 以谱空间为基础。很自然，我们会尝试借助格的 Stone 对偶和 Priestley 对偶，将这些范畴与格和 Priestley 空间的类似范畴联系起来。我们定义了两个范畴 MV_p：一个以 MV-代数为基础，另一个 SIC 以谱空间为基础。很自然，我们会尝试借助格的 Stone 对偶和 Priestley 对偶，将这些范畴与格和 Priestley 空间的类似范畴联系起来。

因此，我们引入范畴 LIC（上下文中的格），它类似于此前引入的范畴 SIC。

也就是说，LIC 是由三元组构成的范畴

$$(\beta(Free), L, f)$$

其中，β 表示 Belluce 函子，L 是一个格，且 f：β(Free) $\to L$ 是一个格满同态，使得 f 的 Stone 对偶保持闭集。从 (β(Free$_1$) L_1, f) 到 (β(Free$_2$) L_2, g) 的态射是一对格同态 s：β(Free$_1$) $\to$ β(Free$_2$)、t：$L_1 \to L_2$，使相应的交换图成立。

现在我们可以陈述:

定理 5.12。范畴 SIC 和 LIC 互为对偶。

证明。存在一个对偶 γ，它将 LIC 中的每个对象 (β(Free) L, f) 指派为 SIC 中的一个对象，即
γ(β(Free) L, f)=(X=Stone 对偶 β(Free), C=Stone 对偶 L, m=Stone 对偶 f)

事实上，根据定理 4.2，β(Free) 的 Stone 对偶是一个柱基拓扑空间；根据 Stone 对偶，C 是一个谱空间，而 m 是一个保闭集的单态射谱映射。

此外，γ将一个从 (β(Free$_1$) L_1, f) 到 (β(Free$_2$) L_2, g) 的态射指派为一个从 ($X = \beta$(Free$_1$) 的 Stone 对偶，$C = L_1$ 的 Stone 对偶，$m = f$ 的 Stone 对偶) 到 ($Y = \beta$(Free$_2$) 的 Stone 对偶，D =L_2 的 Stone 对偶，$n = g$ 的 Stone 对偶) 的态射。

γ 由于 Stone 对偶的性质，是一种对偶。 □

注意以下对偶中涉及的函数 f 的刻画:

引理 5.13. 设 $f : L \to L'$ 是一个格同态。f 的 Stone 对偶保持闭集，当且仅当对于每个 L 的素理想 P 以及每个 L' 的理想 I，都有:

$$P \supseteq f^{-1}(I) \Rightarrow P = f^{-1}(Q) \ for \ some \ prime \ Q \supseteq I. \qquad (5.1)$$

证明. 为了使记号更简洁，我们可以写 VI，而不写 $V(I)$。

用 $\overline{X}$ 表示 $Spec(L)$ 或 $Spec(L')$ 中一个集合的闭包。注意 $\overline{X} = V \bigcap X$。设 $\to Spec$: $Spec(L') \to Spec(L)$ 是 f的 Stone 对偶。注意，m 保持闭集，当且仅当对于每个 $X \subseteq Spec(L)$，都有:

$$(1) m(\overline{X}) = \overline{m(X)}$$

其中 $m(X)$ 是 X 在 m 作用下的像。

现在，(1) 等价于

$$(2)m(V\bigcap X)=V\bigcap m(X)$$

或者也

$$(3)m(V\bigcap X)=V\bigcap_{y\in X}m(y)$$

并且由于 $m=f^{-1}$ 与交运算可交换，我们有

$$(4)m(V\bigcap X)=Vm(\bigcap_{y\in X}y)=Vm(\bigcap X)=Vf^{-1}(\bigcap X).$$

现在， $I=\bigcap X$ 是 L'的一个理想，而且所有理想都具有这种形式，即 $I=\bigcap V(I)$。因此，我们可以将 $\bigcap X$ 替换为 I，并且对于所有理想 I，都有

$$(4)m(V(I))=V(f^{-1}(I)).$$

因此，(4) 意味着这两个成员包含相同的 L的素理想 P，所以

$$(5)P\in V(f^{-1}(I))\Rightarrow P\in m(V(I))$$

也就是说

$$(6)P\in V(f^{-1}(I))\Rightarrow P=m(Q),Q\supseteq I$$

或者，将 m 替换为 f^{-1}，并根据 V的定义，

$$(7)P\supseteq f^{-1}(I)\Rightarrow P=f^{-1}(Q),Q\supseteq I$$

这与陈述中的公式等价（注意，式（7）的逆命题显然成立）。

□

5.5 Priestley 空间的新范畴

另一个函子（见 [10], ）从 MV-代数范畴映至 Priestley 空间范畴; Priestley 空间是某类偏序拓扑空间。更准确地说，Priestley 空间是一个有序拓扑空间 $(X,\tau,\leq)$，满足 (X,τ) 是紧致的，并且若 x 不小于 y，则存在一个闭开上集 U，使得 $x\in U$ 且 $y\notin U$。格 L 的 Priestley 对偶是 L 的素谱，配备包含序和 patch 拓扑，其基本开集为 $\{P\in Spec(L)|a\in P\}$ 和 $\{P\in Spec(L)|a\notin P\}$，其中 $a\in L$。对于态射，同态 $f\colon L\to L'$ 的 Priestley 对偶为 $f^{-1}\colon Spec(L')\to Spec(L)$。

[10] 的思路是，先应用函子 β，将 MV-代数映至有界分配格，其中 $\beta(A)$ 是 A 的 Belluce 格，然后再应用 Priestley 对偶。不过需要注意的是，在撰写 [10] 时，函子 β 的值域尚无刻画；而如今情况已得到澄清，例如可见 [16]。

在前几小节中，我们引入了一个与格相关的范畴 LIC。类似地，我们可以引入一个与 Priestley 空间相关的范畴 PIC（语境中的 Priestley）。对象是三元组 (Ξ_1, Ξ_2, g)，其中 Ξ_1 是自由 MV-代数的 Belluce 格的 Priestley 对偶，Ξ_2 是另一个 Priestley 空间，而 $g : \Xi_2 \to \Xi_1$ 是一个保持闭上集的单射 Priestley 映射。

PIC 中从 (Ξ_1, Ξ_2, g) 到 (Ξ_1', Ξ_2', g') 的态射是由两个 Priestley 映射组成的有序对，它们使相应的图表可交换。

下面的引理揭示了 LIC 与 PIC 之间的关系。

引理 5.14. 设 L是一个格。$Spec(L)$ 的 patch 拓扑中的闭上集，与 $Spec(L)$ 的 Zariski 拓扑中的闭集一致。

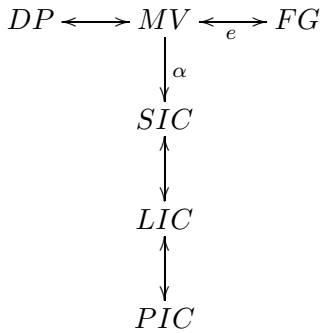
证明。由 Priestley 空间范畴与谱空间范畴之间众所周知的同构可得，参见 [8]。□

由此引理可知，从 $Spec(L)$到 $Spec(L')$的映射在 $Spec(L)$的 Zariski 拓扑中保持闭集，当且仅当它在 $Spec(L)$的 patch 拓扑中保持闭上集。

现在，我们可以像在定理 5.12 中使用 Stone 对偶那样应用 Priestley 对偶，得到:

定理 5.15. Priestley 对偶在 LIC 和 PIC之间给出一种对偶。

为了总结前面的结果，我们绘制了以下图表，其中 MV 表示 MV-代数范畴，FG 表示包含在 [24] 中的“MV-空间”范畴，DP 表示 [23]，中的“MV-空间”范畴，而 $\longleftrightarrow^e$ 表示等价，$\longleftrightarrow$ 表示对偶，α 则是定理 5.4 中描述的函子。



6 格同态的更多内容

前面几节中，我们反复使用了格及其映射（同态）。本节将进一步讨论格同态，并根据 [41]，给出闭满射格同态的刻画；这类同态在 [16] 中发挥着重要作用。

6.1 闭满射同态的刻画

本小节将给出一种简单的刻画，用来描述 [16] 和 [41] 意义下的闭格同态满射。

若 S 是格的一个子集，我们用 DS 表示 S 的下集。若 B、C 是格的子集，我们也用 $B \vee C = \{b \vee c | b \in B, c \in C\}$ 表示。

定理 6.1. 有界分配格之间的满同态 $f : L \to L'$ 是闭集，当且仅当对于每个 b、$c \in L'$，我们都有

$$f^{-1}(Db \vee Dc) \subseteq f^{-1}(Db) \vee f^{-1}(Dc)$$

证明. 由 [41] 可知，$f : L \to L'$ 在以下情形下是闭集：

如果 1) $f(a_0) \leq f(a_1) \vee c$

那么 2) 存在 $x \in L$，使得 $a_0 \leq a_1 \vee x$ 且 $f(x) \leq c$。

用下集来表述，闭性等价于：

$$f^{-1}(D(f(a_1) \vee c) \subseteq \{y | \exists x \; y \leq a_1 \vee x \; AND \; f(x) \leq c\}$$

或者等价地，在右侧使用并集，

$$f^{-1}(D(f(a_1) \vee c)) \subseteq \bigcup_{x \in f^{-1}(Dc)} D(a_1 \vee x)$$

如果 f 是满射，那么每个元素 $b \in L'$ 对某个 $a_1 \in L$ 都是 $f(a_1)$，因此我们可以对 $b \in L'$ 进行量化：

$$f^{-1}(D(b \vee c)) \subseteq \bigcup_{x \in f^{-1}(Dc)} \bigcup_{a_1 \in f^{-1}(b)} D(a_1 \vee x)$$

或者更紧凑地说

$$f^{-1}(D(b \vee c)) \subseteq \bigcup_{x \in f^{-1}(Dc)} D(f^{-1}(b) \vee x)$$

$$f^{-1}(D(b \vee c)) \subseteq D(f^{-1}(b) \vee f^{-1}(Dc))$$

下一个引理是分配格的一项性质：

引理 6.2. $D(b \vee c) = Db \vee Dc$。

证明。设 $x \in D(b \vee c)$。则 $x \leq b \vee c$，因此 $x = x \wedge (b \vee c) = (x \wedge b) \vee (x \wedge c)$，所以 $x \in Db \vee Dc$。反向包含显然。 □

取并集可得，对于任意两个集合 B, C：

推论 6.3. $D(B \vee C) = DB \vee DC$。

利用前一个推论，我们有

$$f^{-1}(Db \vee Dc) \subseteq D(f^{-1}(b)) \vee Df^{-1}(Dc)$$

现在有一个关键步骤：

引理 6.4. $D(f^{-1}(Db)) = f^{-1}(Db)$。也就是说，$f^{-1}(Db)$ 是一个下集。

证明。令 $x \in f^{-1}(Db)$。取 $y \leq x$。则 $f(x) \leq b$ 且 $f(y) \leq b$，因此 $y \in f^{-1}(Db)$。 □

根据前面的结果，该包含关系变为：

$$f^{-1}(Db \vee Dc) \subseteq f^{-1}(Db) \vee f^{-1}(Dc).$$

□

请注意，这一刻画完全以下集和逆像的形式给出。此外，元素 $b \in L'$ 的下集是所有包含 b 的素理想的交，因此我们可以说，该条件是以素理想和逆像的形式给出的。

事实上，证明对任意下集都成立，而不仅限于主下集，因此我们有：

推论 6.5. 有界分配格之间的满同态 $f : L \to L'$ 是闭集，当且仅当对于每个 $B, C \subseteq L'$，我们都有

$$f^{-1}(DB \vee DC) \subseteq f^{-1}(DB) \vee f^{-1}(DC)$$

证明。假设 f是闭集。令 $x \in f^{-1}(DB \vee DC)$。则 $f(x) \in DB \vee DC$，因此存在某个 $c \in C$，$b \in B$使得 $f(x) \in Db \vee Dc$，于是 $x \in f^{-1}(Db \vee Dc)$，并且根据定理，$x \in f^{-1}(Dc) \vee f^{-1}(Db)$，因此 $x \in f^{-1}(DC) \vee f^{-1}(DB)$。反向包含显然。

□

注意，包含关系可以替换为等式：

推论 6.6. 有界分配格之间的满同态 $f: L \to L'$ 是闭集，当且仅当对于每个 $B, C \subseteq L'$，都有

$$f^{-1}(DB \vee DC) = f^{-1}(DB) \vee f^{-1}(DC).$$

证明。第一个包含关系由前一个推论得出。我们来证明第二个包含关系。注意，$f^{-1}(DC \vee DB)$ 是一个理想，因为 $DC \vee DB$ 是理想，而 f^{-1} 保持理想。因此，由显然的包含关系 $f^{-1}(DB) \subseteq f^{-1}(DC \vee DB)$ 和 $f^{-1}(DC) \subseteq f^{-1}(DC \vee DB)$，可得 $f^{-1}(DB) \vee f^{-1}(DC) \subseteq f^{-1}(DB \vee DC)$。

□

推论 6.7. 有界分配格之间的满同态 $f: L \to L'$ 当且仅当对于 L' 的任意两个理想 I, J，都有

$$(*) f^{-1}(I \vee J) = f^{-1}(I) \vee f^{-1}(J).$$

证明。根据前面的结果，f 是闭集的，当且仅当 (*) 对每个下集都成立，或者等价地，对每个主下集都成立。但每个理想都是下集，每个主下集都是理想，因此 f 是闭集的，当且仅当 (*) 对理想成立。

□

6.2 闭映射对偶的刻画

我们可以简洁地刻画格之间闭满同态的 Stone（或 Priestley）对偶映射。

定理 6.8. 设 L、L' 为分配格，且 $g: Spec(L') \to Spec(L)$。那么，当且仅当满足以下条件时，g 是闭满同态映射 f 从 L 到 L' 的 Stone（或 Priestley）对偶:

- g 与任意并和交运算相容;
- g 将理想映为理想;

对于 $Spec(L')$ 的任意 C、D 闭子集，• 都满足等式

$$(1) \overline{g(C \cap D)} = \overline{g(C)} \cap \overline{g(D)}.$$

其中，$\overline{X}$ 是集合 X 的拓扑闭包，而 $g(X)$是X 在 g下的像。

证明。由于 g 与f^{-1}一致，因此它必须与并集和交运算交换。此外，(1)可通过简单计算得出。事实上，首先注意，对每个集合 $X \subseteq Spec(L')$，都有 $\overline{X} = V(\bigcap X)$。因此，该等式等价于

$$(2)V\bigcap g(C \cap D) = V\bigcap \hat{g}(C) \cap V\bigcap g(D).$$

根据^g (2)的定义，得到

$$(3)V \bigcap_{P \in C \cap D} g(P) = V \bigcap_{P \in C} g(P) \cap V \bigcap_{P \in D} g(P)$$

根据 V 的性质，得到

$$(4)V \bigcap_{P \in C \cap D} g(P) = V \bigcap_{P \in C} g(P) \vee \bigcap_{P \in D} g(P)$$

其中， $X \vee Y$是由 $X \cup Y$生成的理想。

由于 C、 D 是闭集，因此对于某些理想 I、 J，有 $C = VI$和 $D = VJ$，于是（4）变为

$$(5)V \bigcap_{P \in VI \cap VJ} g(P) = V \bigcap_{P \in VI} g(P) \vee \bigcap_{P \in VJ} g(P)$$

又由于 g 与交运算可交换，（5）变为

$$(6)Vg(\bigcap V(I \vee J) = V(g\bigcap VI \vee g\bigcap VJ)$$

现在我们对两边取交:

$$(7)\bigcap Vg(\bigcap V(I \vee J) = \bigcap V(g\bigcap VI \vee g\bigcap VJ)$$

现在，对于每个理想 X，我们都有 $X = \bigcap V(X)$；由于 g 保持理想，因此集合 $g(I)$、 $g(J)$ 和 $g(I \vee J)$ 都是理想。因此，我们可以将 (7) 简化如下:

$$(8)g(I \vee J) = g(I) \vee g(J).$$

因此，对于任意两个闭集 C, D ，(1) 成立，当且仅当对于任意两个理想 I, J，(8) 成立。根据推论 6.7， f^{-1} 是闭集，当且仅当对于任意理想 I, J，(8) 成立。

□

6.3 闭映射与闭集保持映射

我们注意到，尽管名称相似，按照 [41] 的含义是闭满射格同态，并不等价于保持闭集的满射同态。事实上，根据定理 6.1，全序格之间的每个满射格同态都是闭的，但有些满射格同态并不保持闭集。

例如，取 $f: \{0,1,2,3\} \to \{0,1\}$，其中有两个带通常序关系的数集，使得 $f(0) = 0$ 和 $f(1) = f(2) = f(3) = 1$。那么 f 是递增且满射的。然而， f 不满足引理 5.13 的条件，因为理想 $\{0,1,2\}$ 包含 $Ker\ f = f^{-1}(0) = \{0\}$，但它不是任何理想的逆像。因此， f 不保持闭集。

7 完美 MV-代数与完美理想

本节受 [3], 启发，专门讨论完美 MV-代数。我们回顾完美 MV-代数的定义，然后给出一种刻画。

定义 7.1. 若对于每个 $x \in A$， x和 $\neg x$中恰有一个是有限阶的，则称 MV-代数 A 为完美 MV-代数。

回顾一下，对于任意 $x \in A$， x 的阶（记作 $ord(x)$）是满足 $nx = 1.$ 的最小自然数 n。若不存在这样的 n，则记作 $ord(x) = \infty$。

完美 MV-代数与无穷小元有关。回顾一下，MV-代数中的无穷小元是满足以下条件的元素 $a \neq 0$：对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $na \leq \neg a$；等价地，当且仅当

$$na \ominus \neg a = na \odot a = 0$$

其中 $a \odot b := \neg(\neg a \oplus \neg b)$ 是卢卡西维奇积。若元素 a 满足 $\neg a$ 是无穷小元，则称其为余无穷小元。对于任意无穷小元 a，序列

$$(0 \leq a \leq 2a \leq 3a \leq \cdots \leq na \leq \dots)$$

严格递增。

在 MV-代数 $[0,1]$ 以及所有取值于 $[0,1]$, 的函数 MV-代数中，都不存在这样的元素。另一方面，Chang MV-代数确实具有无穷小元。

注 7.2. [5] MV-代数是完美的，当且仅当它由其所有极大理想的交生成。更确切地说，MV-代数 A 是完美的，当且仅当它是非平凡的，并且

$$A = RadA \cup \neg RadA$$

其中 $RadA$ 是 A 的根，它是 A和 $\neg RadA = \{x \in A$ 的所有极大理想的交: $\neg x \in RadA\}$。

注意，MV-代数的根中的非零元素恰好是无穷小元。因此，MV-代数是完美的，当且仅当它由其无穷小元生成。例如，Chang MV-代数是完美的。

现在给出一个技术性引理。

引理 7.3.（*[3,* 命题 *5]*）MV-代数 A 是完美的，当且仅当对于每个 $a \in A$, $a^n = 0$ 对于某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立，当且仅当（$\neg a$）$^m \neq 0$ 对于每个$m \in \mathbb{N}$成立。

定义 7.4. 若 MV-代数 A 的理想 I 满足 A/I 是完美 MV-代数，则称其为完美理想。

由前一个引理可得:

推论 7.5. MV-代数 A 的理想 I 是完美的，当且仅当对于每个 $a \in A$，存在某个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $a^n \in I$；当且仅当对于每个 $m \in \mathbb{N}$，$(\neg a)^m \notin I$ 。

8 $\mathbb{V}(C)$-代数的谱与函子

在上一节中，我们研究了完美 MV-代数。本节将研究一个更大的类，即 $\mathbb{V}(C)$-代数，其中 $C = K_1$ 是 Chang 代数，也称为第一 Komori 代数。

具体而言， C 定义在集合

$$C = \{0, c, \ldots, nc, \ldots, 1 - nc, \ldots, 1 - c, 1\}$$

其运算如下（考虑 $0 = 0c$）：

$x \oplus y = (m + n)c$ 当且仅当 $x = nc$ 且 $y = mc$;
$x \oplus y = 1 - (m - n)c$ 若 $x = 1 - nc$ 且 $y = mc$ 且 $0 < n < m$;
$x \oplus y = 1 - (n - m)c$ 若 $x = nc$ 且 $y = 1 - mc$ 且 $0 < m < n$; $x \oplus y = 1$
否则;

$\neg x = 1 - nc$ if $x = nc$, $\neg x = nc$ if $x = 1 - nc$.

现在固定一个基数 k。我们已经看到， $Spec(Free(k))$ 的闭子集与 $Free(k)$ 的 MV-代数商之间存在对应关系。我们可以研究这一对应关系的具体情形。例如，考虑由 Chang代数C生成的簇 $\mathbb{V}(C)$ 中的 MV-代数 A ，我们写出 $A = Free(k)/I$。

我们可以问闭集 $V(I) \subseteq Spec(Free(k))$ 是什么样的。先给出一个引理:

引理 8.1. MV-代数 A 的素理想 P 是完美的，当且仅当包含 P 的极大理想 M_P 是超极大的，即 $A/M_P = \{0, 1\}$。

证明。设 P 是 A 的一个素理想。假设 P 是完美的。那么 A/P 是完美且全序的。由于 $P \subseteq M_P$，我们有一个满同态 $A/P \to A/M_P$。由于 A/P 是完美的且 M_P 是极大理想， A/M_P 属于 $\mathbb{V}(C)$ 且是单的。但唯一的单 $\mathbb{V}(C)$ 代数是 $\{0, 1\}$。

反过来，假设 $A/M_P = \{0, 1\}$。那么 A/P 是全序的，并且存在一个从 A/P 到 $A/M_P = \{0, 1\}$ 的同态 h 。因此 A/P 必定是完美的；否则，存在一个元素 $a \in A/P$ ，满足 $na = 1$ 和 $a^n = 0$，其中某个 n，而以下两者不可能同时成立： $h(a) = 0$ （与 $h(na) = 1$ 矛盾），以及 $h(a) = 1$ （与 $h(a^n) = 0$ 矛盾）。因此， P 是一个完美理想。

□

现在我们可以用理想来刻画 $\mathbb{V}(C)$:

定理 8.2. 设 $A = Free(k)/I$ 是一个 MV-代数。以下条件等价:

- A属于 $\mathbb{V}(C)$;
- A 的每个极大理想都是超极大的（也就是说，其商是$\{0, 1\}$）。
- $Spec(A)$的每个元素都是完美理想。
- $V(I)$的每个元素都是完美的。

证明。我们先证明前两点是等价的。

如果 A 属于 $\mathbb{V}(C)$，那么它模素理想的所有商都属于 $\mathbb{V}(C)$，且都是全序的。注意， B中 $\mathbb{V}(C)$的每个全序 MV-代数都是完美的。事实上，在 $\mathbb{V}(C)$中的每个 MV-代数里，每个元素都无限接近某个布尔元。但在全序 MV-代数中，唯一的

幂等元是 0 和 1，因此 B 的每个元素要么是无穷小元，要么是余无穷小元，所以 B 是完美的。现在，所有极大商都属于 $\mathbb{V}(C)$，且都是单的，因此所有极大商都是 $\{0,1\}$。

反过来，假设 A 的每个极大理想都是超极大的。设 P 是 A 的一个素理想。设 A 的唯一极大理想为 M，且满足 $P \subseteq M$。于是我们有一个从 A/P 到 $A/M = \{0,1\}$ 的满同态。但 A/P 是一个全序 MV-代数，并且由于它有一个满同态映到 $\{0,1\}$，所以它是完美的。因此，A 的所有素商都是完美的，故它们属于 $\mathbb{V}(C)$；而 A 嵌入其素商的直积，因此 A 也属于 $\mathbb{V}(C)$。

现在，根据前面的引理，$Spec(A)$ 中的一个元素是完美的，当且仅当 $Spec(A)$ 中对应的极大理想是超极大的；这又当且仅当 $V(I)$ 中对应的极大理想是超极大的。因此，剩下的两点等价于前两点。

□

定义 8.3. 若 $Spec(A)$ 的一个闭集 K 满足其中每个素理想 $P \in K$ 都是完美理想，则称其为 $\mathbb{V}(C)$-闭集。

由前面的定理，立即可得以下推论：

推论 8.4. 闭集 K 是 $\mathbb{V}(C)$-闭的，当且仅当 K 的每个极大元都是超极大的。

作为前述结果的推论，我们可以考察任意 MV-代数的素谱的根系结构。回顾一下，根系是指满足以下条件的偏序集 P：对每个 $x \in P$，终段 $\{y \in P : y \geq x\}$ 都是全序的；而根是具有最大元 [15] 的根系。

推论 8.5. 设 A 是一个 MV-代数。设 R 是 $Spec(A)$ 的一个根，且 M_R 是 R 的唯一极大理想。那么，M_R 是超极大的，当且仅当 R 的每个元素都是完美理想。

证明。设 M_R 是超极大的。令 $P \subseteq M_R$ 为 A 的一个素理想。那么，A/P 是全序 MV-代数，并存在一个满射映射到 $A/M_R = \{0,1\}$，因此 A/P 是完美的，且 P 是完美的。

反之，如果 R 中的每个元素都是完美的，那么 M_R 就是极大且完美的，因此商 A/M_R 是单且完美的，所以 $A/M_R = \{0,1\}$ 和 M_R 是超极大的。

□

更一般地，刻画 $Max_p(A)$ 会很有意思，其中p 是一个素数，意即满足 $A/M = \mathbb{L}_p$ 的极大理想 M 的集合；这里的链有 p 个元素。

其他值得期待的结果包括回答以下问题：“完美 MV-代数的闭集有哪些? 局部 MV-代数的闭集有哪些？”等等。

回顾一下，局部 MV-代数是只有一个极大理想的 MV-代数，因此该理想包含所有无穷小元。这类代数包括 MV-链和完美 MV-代数。更准确地说，

定义 8.6. 若 MV-代数 A 只有一个极大理想，且该理想与 $\{a \in A | ord(a) = \infty\}$ 重合，则称其为局部的。

等价地，MV-代数 A 是局部的，当且仅当对于每个 $x \in A$，要么 $ord(x) < \infty$，要么 $ord(\neg x) < \infty$.

回顾一下，主理想是满足如下条件的理想 I：若 $xy \in I$，则存在某个 $n \in \mathbb{N}$, 使得$x^n \in I$ 或 $y^n \in I$。现在，作为 $Spec(Free(k))$ 的闭子集与 $Free(k)$ 的 MV-代数商之间对应关系的一个特例，我们来展示闭集与局部 MV-代数之间的对应关系：

定理 8.7。设 $C = V(I)$ 是 $Spec(Free(k))$ 的一个闭子集。以下命题等价：

- C 是某个局部 MV-代数的谱；
- C 只有一个闭点；
- C 的交是一个主理想。

证明。前两个命题等价，因为极大理想是 $Spec$ 中的闭点。

对于第三个命题，我们可以假设 I 是一个理想。于是 $V(I)$ 对应于 MV-代数 A/I。已知 A/I 是局部的，当且仅当 I 是一个主理想（参见 [5, 定理 2.1]）。注意， I 是 $V(I)$ 的交。

□

首先回顾一下，如果一个 MV-代数的极大理想之交为零，则称其为半单；现在，半单情形可以在一定程度上类比局部情形来处理，如下所示：

定理 8.8. $Free(k)/I$ 是半单的，当且仅当 $V(I)$ 的极大元之交为零。

证明。这是因为 MV-代数是半单的，当且仅当其极大理想的交为零。

□

9 V(C) 中自由 MV-代数的谱

我们希望在自由 MV-代数的谱与子簇中自由 MV-代数的谱之间建立类比。

为简单起见，仅考虑簇 $\mathbb{V}(C)$。

由于 $\Delta(\mathbb{R})$ 生成 $\mathbb{V}(C)$，基数为 k 上的自由 $\mathbb{V}(C)$-代数可定义为从 $\Delta(\mathbb{R})^k$ 到 $\Delta(\mathbb{R})$ 的多项式函数所构成的 MV-代数，参见 [17, 定理 8.1]。

在 $Free(\mathbb{V}(C)\ k)$ 的谱中，Zariski 拓扑由基本开集 $O(f) = \{P \in Spec | f \notin P\}$ 生成，其中 $f \in Free(\mathbb{V}(C)\ k)$。它们与紧开集重合。另一方面，对于每个 f，f 的零点集（记作 $Z(f)$）是 $\Delta(\mathbb{R})^k$ 的子集，更准确地说，是我们所称的柱状有理扇。注意，扇通常定义在向量空间中，但我们也可以在 $\Delta(\mathbb{R})^k$ 中按如下方式定义它们。

回顾一下，有限维实向量空间 V 的子集 σ 是一个锥，当且仅当对于每个 $x \in \sigma$ 以及每个标量 $\alpha > 0$，$\alpha x \in \sigma$。若锥 σ 由一组 S（有限多个）线性无关向量生成，则称其为单纯锥。由集合 S 生成的锥的一个面，是由 S 的某个子集生成的锥。

向量空间 V 中的扇 ϕ 是 V中的有限个单纯闭锥组成的集合，满足:

- 若 $\sigma \in \phi$，则 σ 的任意面都属于 ϕ;
- 任意两个 ϕ 中的闭锥的交也是 ϕ中的闭锥。

我们称扇 ϕ 是有理的，如果属于 ϕ 的每个闭锥都由有理系数的线性不等式定义。

更一般地，如果 F 是一个有限集合，则 $\mathbb{R}^F$ 中的扇定义如下。

回顾一下，$\mathbb{R}^F$ 的一个象限是 $\mathbb{R}^F$ 中分量符号给定的向量所构成的集合（$\mathbb{R}^F$ 中共有 2^F 个象限）。

$\mathbb{R}^F$ 中的扇是 $\mathbb{R}^F$ 的一个子集，其中每个根类 r 都与 $\mathbb{R}^F$ 的一个象限存在自然双射 β_r（回想一下，MV-代数的根类是模根的一个等价类）。

现在，我们将 $\Delta(\mathbb{R})^F$ 的扇定义为 $\Delta(\mathbb{R})^F$ 的一个子集，其中每个根类 r 都是通过 β_r 映射得到的，对应于$\mathbb{R}^F$中相应象限内的一个扇。

引理 9.1. $\Delta(\mathbb{R})^F$ 中的 MV-多项式的零点集与扇一致。

证明. 由[17, 定理 3.1] 中给出的 $\Delta(\mathbb{R})^F$ 内 MV-多项式的描述可知， $m = 1$。 □

与 MV-代数的情形一样， [16] 的结果表明，在具有无穷多个变量、且可能是有限公理化的 $\mathbb{V}(C)$ 理论中，存在重要性。为了也处理无限维空间的情形，我们作如下规定:

定义 9.2。设 I 为一个无限集合。我们将超立方体 $\mathbb{R}^I$ 中形如以下形式的子集定义为柱状（有理）扇

$$C_I(P_0) = \{f \in \mathbb{R}^I \mid f|_Y \in P_0\}$$

其中 Y 是 I 的有限子集，且 $P_0 \subseteq \mathbb{R}^Y$ 是一个有理扇。

这里， $f|_Y$ 表示函数 f 在 Y 上的限制，即 $f|_Y = f \circ j$，其中 $j : Y \to I$ 是包含映射。

由引理 9.1 可得:

推论 9.3。设 I 为一个无限集合。$\Delta(\mathbb{R})^I$ 中 MV-多项式的零点集与柱状扇相同。

注意，基本开集关于包含关系构成一个格，事实上$O(f \vee g) = O(f) \cap O(g)$ 且 $O(f \wedge g) = O(f) \cup O(g)$。同样，零点集也构成一个格，因为 $Z(f \oplus g) = Z(f) \cap Z(g)$ 且 $Z(f \wedge g) = Z(f) \cup Z(g)$。此外:

引理 9.4。设 $f, g \in Free(\mathbb{V}(C)\ k)$。以下命题等价:

1. $O(f) \subseteq O(g)$
2. $Z(f) \subseteq Z(g)$
3. $f \in ideal(g)$.

证明。根据定义，3 推出 1。

由 1 推出 3，是因为在每个 MV-代数中，在不包含给定元素的那些理想中，任何极大理想都是素理想。

此外，显然 3 推出 2。

我们还需证明 2 推出 3。但这可由 [17,引理 61]得出。 □

推论 9.5. $Spec(Free(\mathbb{V}(C)\ I))$ 的开集基与 $\Delta(\mathbb{R})^I$ 中有理扇的格反同构。

现在我们希望以类似于自由 MV-代数的方式刻画自由 $\mathbb{V}(C)$-代数的谱。

定义 9.6. 如果拓扑空间 X 满足以下条件，则称其为基于柱形扇的：

1. X 是谱的，

。2. 对于某个基数 k（可以是无限基数）， $K(X)$ 是格 $Cyfan(k)$ 的反同构格，其中 $Cyfan(k)$ 是 $\Delta(\mathbb{R})^k$ 的柱形扇所构成的格。

通过与定理 4.2 类似的证明，我们可以证明：

定理9.7. 拓扑空间 X 同胚于某个 k 的 $Spec(Free(\mathbb{V}(C))(k))$，当且仅当它是基于柱形扇的。

推论 9.8. 拓扑空间是 $\mathbb{V}(C)$-代数的谱，当且仅当它是某个基于柱形扇的空间的闭子集。

9.1 从 $\mathbb{V}(C)$-代数到拓扑空间的函子

在前几节中，我们引入了语境中的谱范畴 SIC，它与有表示的 MV-代数范畴相关。对于每个 Komori MV-代数簇，也可以作同样的构造；不过这里我们仅讨论 $\mathbb{V}(C)$。我们将 $\mathbb{V}(C)_p$ 称为有表示的 $\mathbb{V}(C)$-代数范畴，即由对 (F, I) 组成的范畴，其中 F是自由的 $\mathbb{V}(C)$-代数， I是 F的一个理想。

因此，自然可以考虑范畴 $\mathbb{V}(C)$-SIC，即语境中的 $V(C)$-谱；其对象是三元组 (X, C, m)，其中 X 是基于扇的空间，C 是谱空间，而 m是从 C 到 X的谱单态射，并且保持闭集。注意，基于扇的空间与自由的 $\mathbb{V}(C)$-代数的谱相一致，而基于扇的空间的闭子集与 $\mathbb{V}(C)$-代数的谱相一致。因此，类似于第5.1节，我们有一个从 $\mathbb{V}(C)_p$ 到 $\mathbb{V}(C)$-SIC 的函子。

10 $\mathbb{V}(K_m)$ 的情形

我们对簇 $\mathbb{V}(C)$ 所做的工作，可以推广到每个 m 的每个簇 $\mathbb{V}(K_m)$。特别是，我们在此推广第 9 节。

首先，我们将 $Free(m, k)$ 记作 $\mathbb{V}(K_m)$ 上由 k 个元素生成的自由 MV-代数。接下来，我们将

$$\Delta_m(\mathbb{R}) = \Gamma(\mathbb{Z}\ lex\ \mathbb{R}, (m, 0));$$

这是一个生成 $\mathbb{V}(K_m)$ 的 MV-代数（参见 [17, 定理 2.1]）。我们可以说， $\Delta_m(\mathbb{R})$ 是 K_m 的连续类比。

因此，集合 I 上的自由 $\mathbb{V}(K_m)$ 代数可以定义为从 $\Delta_m(\mathbb{R})^I$ 到 $\Delta_m(\mathbb{R})$ 的 MV-代数多项式函数。

与 $\mathbb{V}(C)$ 中的情形类似，在 $Spec(Free(m,I))$ 上 Zariski 拓扑中的紧开集与 $\Delta_m(\mathbb{R})^I$ 中的多项式零点集之间存在格同构；更准确地说，多项式的零点集可以刻画为我们称之为 m-扇的集合，而 m-扇的定义如下。

如果 F 是有限集合，那么 $\Delta_m(\mathbb{R})^F$ 中的 m-扇定义如下。 $\Delta_m(\mathbb{R})^F$ 的每个根类 r 都与 $\mathbb{R}^F$ 的某个象限并集之间存在自然双射 β_r 。现在， $\Delta_m(\mathbb{R})^F$ 中的 m-扇是一个子集，它在每个根类 r 中，都是通过 β_r 将对应象限并集中的一个扇映射得到的像。

照例，我们可以将柱形 m-扇定义为m-扇在可能无限维情形下的自然推广。引理 9.4 可原样沿用。

定义 10.1. 拓扑空间 X 称为基于 m-扇的，当且仅当：

1. X 是谱的；
2. 紧开集构成一个格，该格与 $mfan(k)$ 的柱形 m-扇格反同构，其中 $\Delta_m(\mathbb{R})^k$。

通过类似于定理 4.2 的证明，我们可以证明：

定理 10.2. 拓扑空间 X 同胚于某个 $Spec(Free(m,k))$，其中 k ，当且仅当它基于 m-扇。

推论 10.3. 一个拓扑空间是某个 $\mathbb{V}(K_m)$-代数的谱，当且仅当它是一个 m-扇基于空间的闭子集。

此外，第 9.1 节也可以推广，并且我们有一个从预先给定的 $\mathbb{V}(K_m)$-代数到范畴 $\mathbb{V}(K_m)$-SIC 的函子，其对象是三元组 (X,C,m)，其中 X 是一个 m-扇基于空间， C 是一个谱空间，且 $m:C\to X$ 是一个保持闭集的单态谱映射。

现在我们给出定理 8.2 的一种等价形式；当我们考虑 Komori 代数 K_m 而非 C 时，该形式仍然成立。

定义 10.4. MV-代数 A 的秩是 $A/Rad(A)$ 的基数，也就是根类的数量。

我们称素理想 $I\in Spec(A)$ 的秩为链 A/I 的秩。

引理 10.5. MV-代数 A 的素理想 P 的秩为 k ，当且仅当包含 P 的极大理想 M_P 的秩为 k。

证明. 设 P 是 A 的一个素理想。假设 P 的秩为 k。那么 A/P 的秩为 k，且为全序。由于 $P \subseteq M_P$，我们有一个满同态 $A/P \to A/M_P$。由于 P 的秩为 k 且 M_P 是极大的，A/M_P 是单的，且其秩为 k。

反之，假设 A/M_P 的秩为 k。由于存在满同态 $A/P \to A/M_P$， A/P 的秩也必为 k。 □

定理 10.6. 设 $A = Free(k)/I$ 是一个 MV-代数，且 $m \in \mathbb{N}$。以下各项等价:

- $A \in \mathbb{V}(K_m)$。
- 每个理想 $P \in Spec(A)$ 的秩的因数都是 m。
- 每个理想 $M \in Max(A)$ 的秩的因数都是 m .
- $V(I)$ 的每个元素的秩的因数都是 m。

证明。我们先证明前两点等价。

若 A 属于 $\mathbb{V}(K_m)$，那么它模素理想的所有商都属于 $\mathbb{V}(K_m)$，且都是全序的。注意， B 属于$\mathbb{V}(K_m)$的每个全序 MV-代数的秩都整除 m。事实上，$B/Rad(B)$是单的，且属于 $\mathbb{V}(K_m)$，因此它有 k 个元素，且 $k|m$。

反过来，假设每个素 P 的秩的因数都是 m。那么 A/P 属于 $\mathbb{V}(K_m)$。现在， A 是 $\mathbb{V}(K_m)$中元素的次直积，因此 A 本身属于 $\mathbb{V}(K_m)$。

由前一个引理，第二点和第三点等价。

第三点和第四点也等价。事实上，$Spec(A)$中的一个元素的秩整除 n ，当且仅当$Spec(A)$中对应的极大元的秩整除 m；而这又当且仅当$V(I)$中对应的极大元的秩整除 m。 □

11 主要结果

本节致力于研究 ℓ-群的素谱：它们是完全正规化的广义谱空间，也就是说，若点 z 的闭包中包含 x 和 y，那么要么 y 的闭包中包含 x ，要么 x 的闭包中包含 y 。Wehrung 证明了上述性质刻画了 ℓ-群的第二可数谱，而且不存在能够公理化那些与 ℓ-群的谱对偶的分配格的一阶公理化。此外，值得注意的是，我们无法从 ℓ-群的谱中还原出 ℓ-群，例如 $\mathbb{Z}$

而且 $\mathbb{R}$ 具有相同的素谱。关于 ℓ-群素谱的另一项研究成果是 Panti [36] 的论文，其中将有限生成自由 ℓ- 群的素理想刻画为从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的、在由向量组确定的锥上取零值的整数系数分段齐次线性函数集合。

这里，利用 [20] 给出的 ℓ-群范畴与完美 MV-代数范畴之间的等价 Δ，我们可以如下刻画 ℓ-群的素谱：

定理 11.1. 一个拓扑空间 X 是某个 ℓ-群 G的谱，当且仅当存在一个完美 MV- 代数的谱 Y，使得 $X = Y \setminus \{M\}$，其中 M 是 Y 中唯一的闭点。

证明。给定 G，该等价给出 $A = \Gamma(\mathbb{Z}\ lex\ G, (1, 0))$。存在一个同胚 f，将 G 的（素）ℓ-理想映到 A的（素）真理想，其定义为 $f(L) = \{(0, g) | g \in L\}$。

反之，给定一个完美 MV-代数 A，该等价给出 ℓ-群 $G = \{a - b | a, b \in Rad(A)\}$，并且存在一个同胚 g，将 A的真（素）理想映到 G的素理想，其定义为 $g(P) = \{a - 0 | a \in P\}$。 □

由推论 9.8 可得：

推论 11.2. 一个拓扑空间是完美 MV-代数的谱，当且仅当它是一个只有一个闭点的柱形扇基空间的闭子集。

证明。根据命题 5(5)，MV-代数是完美的，当且仅当它是 $\mathbb{V}(C)$ 且是局部的 [3,]。 □

综上，我们得到引言中宣布的定理：

定理 11.3.（与定理 1.1 相同）一个拓扑空间 X 是阿贝尔 ℓ-群的谱 G，当且仅当存在一个柱形扇基空间 T的闭子集 Y，使得 $X = Y \setminus \{M\}$，其中 M是 Y中的唯一闭点。

12 从自由 MV-代数的谱到逻辑与几何

通过解决如何刻画代数的谱这一问题，可以看出某些几何与某些逻辑密切相关。

我们发现，在具有有限个变量的模型上解释的麦克纳顿函数的零点集，恰好是超立方体 $[0,1]^n$ 的有理多面体；此外，某种卢卡西维奇逻辑也可以视为有理多面体几何的逻辑。

此外，有限生成自由代数的零点集族构成一个分配格，它同构于该自由代数的谱的紧开集格。通过上述同构，有限生成自由代数的谱、有理多面体几何（实际上是一种仿射几何）与卢卡西维奇逻辑之间的关系便显而易见。

上述结果可以推广到具有无限多个变量的自由 MV-代数，只需将有理多面体替换为无限维单位超立方体中的有理圆柱。这一结果已在论文 [16] 中得到证明。

12.1 从簇 $\mathbb{V}(C)$ 的自由 MV-代数的谱到逻辑

与 MV 情形类似，在簇 $\mathbb{V}(C)$ 中，我们可以将自由 $\mathbb{V}(C)$-代数实现为从 $\Delta(\mathbb{R})^n$ 到 $\Delta(\mathbb{R})$ 的函数代数，而 $\mathbb{V}(C)$-多面体将是这些函数的零点集，它们是 $\Delta(\mathbb{R})^n$ 的子集。我们可以探究这些集合是什么样的。

我们可以将 $\Delta(\mathbb{R})^n$ 识别为由元组 $(v_1,x_1)\ldots,(v_n,x_n)$ 构成的集合，其中$v_1,\ldots,v_n\in\{0,1\}$ 和 $x_1,\ldots,x_n$ 属于 $\mathbb{R}^n$ 的正象限。

根据 [17, 定理 3.1] ，从 $\Delta(\mathbb{R})^n$ 到 $\Delta(\mathbb{R})$的每个多项式函数都具有如下形式

$$P((v_1,x_1),\ldots,(v_n,x_n))=(f(v_1,\ldots,v_n),f_{(v_1,\ldots,v_n)}(x_1,\ldots,x_n))$$

其中 $v_1,\ldots,v_n\in\{0,1\}$, $f\colon\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ ，且每个$f_{(v_1,\ldots,v_n)}(x_1,\ldots,x_n)$都是在 $\mathbb{R}^n$的正象限中定义的 ℓ-多项式。

因此， P 的零点集为

$$Z(P)=\{((v_1,x_1),\ldots,(v_n,x_n))|f(v_1,\ldots,v_n)=0\ AND\ f_{(v_1,\ldots,v_n)}(x_1,\ldots,x_n)=0\}.$$

因此， $Z(P)$是 ℓ-多项式的零点集的不交并，每个满足 $f(v_1,\ldots,v_n)=0$ 的元组 $v_1,\ldots,v_n$对应一个零点集。

现在已知， $\mathbb{R}^n$ 的正象限中 ℓ-多项式的零点集，恰好是包含于该象限的有理锥。

因此我们可以写成

(1) $Z(P) = \{((v_1, x_1), \ldots, (v_n, x_n))|(v_1, \ldots, v_n) \in S \; AND \; (x_1, \ldots, x_n) \in C_{(v_1,\ldots,v_n)}\}$,

其中 S 是 $\{0,1\}^n$ 的子集，而 $C_{(v_1,\ldots,v_n)}$ 是一个依赖于 $(v_1, \ldots, v_n)$ 的锥。

反过来，考虑一个形如 (1) 的集合 Z。因此 $S \subseteq \{0,1\}^n$，并且对于每个 $v \in S$, C_v，它都是一个锥。于是 C_v 是一个 ℓ-多项式 f_v 的零点集。因此存在一个 MV-多项式 P: $[0,1]^n \to [0,1]$ （不唯一），使得在 $[0,1]^n$ 中 v 的某个邻域内，如果 $v \in S$，则 $P = (P(v)$ $f_v)$；并且在 $[0,1]^n$ 中 v 的某个邻域内，如果 $v \notin S$，则.....。于是 Z 是 $\Delta(\mathbb{R})^n$ 中 P 的零点集。

综上所述，我们有:

定理 12.1. $\Delta(\mathbb{R})^n$ 中多项式的零点集与形如 (1) 的集合相同。

13 MV-代数中的齐次性

在 [4] 中，作者开始研究 MV-代数中的代数几何，受到 [37] 的泛代数几何的启发。本节则受到域上经典代数几何中的一个问题的启发，即齐次多项式与射影簇。

在 [19] 中证明了，每个麦克纳顿函数都等价于范式 $\phi(x) = \wedge \vee \rho($ $ax + b)$，其中 $\wedge$ 表示有限合取，$\vee$表示有限析取，$\rho(y) = 0 \vee (y \wedge 1)$是截断函数，$a$是整数向量，$b$ 是整数，而 $ax + b$ 是一次多项式，它可能含有 n 个变量（也可能是常数）。

研究麦克纳顿函数的范式在何种意义上是唯一的，将会很有意思。例如，范式中可能存在重复项，而且零函数的两种范式是 0 和 $0 \vee 0$。

我们可以说，范式中的函数 $\phi(x) = \wedge \vee \rho(ax + b)$ 是齐次的，当且仅当每个常数项 b 都为零。因此 $\phi(x) = \wedge \vee \rho(ax)$。

我们希望尽可能深入地探讨齐次麦克纳顿函数与代数几何中通常的齐次多项式之间的类比。

例如，对于每个含有 n 个变量的麦克纳顿函数 $\phi(x) = \wedge \vee \rho(ax + b)$，都存在一个含有 $n+1$ 个变量的齐次（按我们的定义）麦克纳顿函数 $\psi(x, y)$，使得 $\phi(x) = \psi(x, 1)$。也就是说，$\psi(x, y) = \wedge \vee \rho(ax + by)$。这类似于从仿射簇到射影簇的过渡，发生在

通常的代数几何中，人们会添加一个变量，使所有单项式都具有相同的次数。

此外，给定多项式 $\phi(x) = \wedge\vee\rho(ax+b)$ 的零点集 Z，我们能否说多项式 $\phi(x) = \wedge\vee\rho(ax)$ 的零点集就是 Z 的无穷远点集合？这类似于考虑一个簇，即域上一个多项式集合的零点集，并消去所有次数不是最高次数的单项式：剩余齐次多项式的零点在某种意义上就是该簇的无穷远点。

设 $\phi(x)$ 是一个范式中的麦克纳顿函数，即 $\phi(x) = \wedge\vee\rho(ax+b)$。若 $\phi(x)$ 是齐次的，则 $\phi(x) = \wedge\vee\rho(ax)$，因此 $\phi(0) = 0$。反之则不成立：

定理 13.1. 存在一个麦克纳顿函数 $\phi(x)$，使得 $\phi(0) = 0$，但 ϕ 不是齐次的。

证明。我们先给出一个引理：

引理 13.2. 对每个实数 b，我们有 $\rho(b) = 0$ 当且仅当$b \leq 0$。

证明。 $\rho(b) = 0$ 当且仅当 $max(0, min(1, b)) = 0$ 当且仅当 $min(1, b) \leq 0$ 当且仅当 $b \leq 0$。 □

现在我们有了判定条件 $\phi(0) = 0$ 的一个准则：

引理 13.3. 设 $\phi(x)$是一个范式麦克纳顿函数，即$\phi(x) = \wedge\vee\rho(ax+b)$。那么 $\phi(0) = 0$ 当且仅当存在一个析取 D，其中 $b \leq 0$ 对每个 $b \in D$ 都成立。

证明。假设 $\phi(0) = 0$。那么 $\phi(0) = \wedge\vee\rho(b) = 0$。由于对每个 b， $\rho(b) \geq 0$，我们必有对于某个属于 ϕ的析取 D， $\vee\rho(b) = 0$，因此对 D中的每个 b， $\rho(b) = 0$，所以对 D中的每个 b， $b \leq 0$。

反过来，如果存在一个析取 D，使得对于 D 中的每个 b，都有 $b \leq 0$，那么就存在一个析取 D，使得对于每个 $b \in D$，都有 $\rho(b) = 0$，因此 $\vee\rho(b) = 0$ 且$\wedge\vee\rho(b) = 0$，也就是说 $\phi(0) = 0$。 □

对于单变量，我们有：

引理 13.4. 每个单变量齐次 McNaughton 函数要么恒等于零，要么在零点的局部等于 ax，其中 a 为某个正整数。

证明。对于每个整数 a，每个齐次简单函数 $\rho(ax)$ 都具有此性质。事实上，注意到对于每个 $a > 0$， $\rho(ax)$ 在零点的局部 $= ax$，并且当 $a \leq 0$ 时，$\rho(ax) = 0$。这些性质在有限并和交下保持不变，因此它们适用于每个单变量齐次 McNaughton 函数。 □

现在，为了完成定理的证明，举例来说，取 $\phi(x) = x \wedge \rho(2x - 1)$。显然， $\phi(0) = 0$，且 $\phi(x)$ 在 0 处局部为零，但并非恒等于零。因此， ϕ不是齐次的。 □

若要在 n 个变量中，将语义上齐次的 McNaughton 函数与其他 McNaughton 函数区分开来，会很有意思。这里我们将齐次 McNaughton 函数的零点集分类如下。回顾 [33]， $[0,1]^n$ 中的有理多面体恰好是 McNaughton 函数（或有限个 McNaughton 函数组成的系统）的零点集。对于齐次情形，我们首先注意到：

引理 13.5. 集合 P 是有限个齐次函数的零点集，当且仅当它是单个齐次函数的零点集。

证明。原因在于，若 $\phi_1, \ldots, \phi_n$ 是齐次 McNaughton 函数，则 $\phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n$ 等价于一个齐次 McNaughton 函数。 □

回顾一下，根据定义，在$[0,1]^n$ 中经过原点的有理锥是半空间 $ax \leq 0$ 的有限交，其中 a 是一个整数向量。

现在继续探讨：

引理 13.6. 有理多面体 $P \subseteq [0,1]^n$ 是有限个齐次 McNaughton 函数的零点集，当且仅当 P 是有限个经过原点的有理锥的有限并。

证明. 若 P 是上述形式的零点集，则 P 是一个形如 $\wedge\vee\rho(ax)$ 的函数的零点集，因此 P 是形如$\rho(ax) = 0$ 的集合的有限交的有限并，或者等价地，是半空间 $ax \leq 0$ 的有限并。现在，这类半空间的有限交是一个经过原点的有理锥。

反过来，每个经过原点的有理锥都是形如 $\rho(ax) = 0$ 的集合的有限交，因此，每个经过原点的有理锥的有限并都是齐次函数$\wedge \vee \rho(ax)$的零点集。

□

与往常一样，如果满足：只要 $x \in C$、 $\lambda \geq 0$ 和 $\lambda x \in [0,1]^n$，就有 $\lambda x \in C$，我们便称子集 $C \subseteq [0,1]^n$ 为锥。

关于锥，我们还可以说得更多：

推论 13.7. 有理多面体 $P \subseteq [0,1]^n$ 是有限个齐次 McNaughton 函数的零点集，当且仅当 P 是一个锥。

证明。显然，有限个有理锥的并是一个锥。

反过来，假设 P 是一个有理多面体，且是一个锥。 P 是有限个有理单形的并。然而，由有理单形生成的锥是一个有理锥。因此， P 是有限个有理锥的并，也是某个齐次 McNaughton 函数的零点集。 □

我们注意到，所有结果都可推广到无穷多个变量中的有限系统:

推论 13.8。设 I 是一个无限集合。柱状有理多面体$P \subseteq [0,1]^I$ 是有限个齐次 McNaughton 函数的零点集，当且仅当 P 是一个柱状锥。

13.1 局部齐次麦克纳顿函数

显然，在 MV-代数中，多项式的齐次性毫无意义，因为其中没有单项式和次数的概念。

下面的定义给出了麦克纳顿函数的一种性质，它类似于通常多项式的齐次性。

我们称麦克纳顿函数 ϕ 在零点局部齐次，如果存在零点的一个邻域 U，使得当 $n \in \mathbb{N}$、 x 和 nx 属于 U 时， $\phi(nx) = n\phi(x)$；其中右边表示通常意义下的实数乘法。

引理 13.9. 若 $\phi(x) = \wedge \vee \rho(ax)$，则 ϕ 在零点局部齐次。

证明。对 ϕ 作归纳。若 $\phi(x) = \rho(ax)$，则在零点的某个邻域 U 内，有 $\phi(x) = max(0, ax)$；但 $max(0, nax) = nmax(0, ax)$，因此若 $nax \in U$，则 $\phi(nax) = n\phi(ax)$。 □

命题 13.10. 函数 $\phi(x) = \wedge\vee\rho(ax+b)$ 在零点局部齐次，当且仅当存在一个由 ϕ 构成的析取 D，使得 $b \leq 0$ 属于 D 的每个析取项。

证明。假设存在一个析取，其中 $b \leq 0$ 始终成立。那么局部地， ϕ 是简单的局部齐次函数的格组合（因为非局部齐次简单函数在局部相互抵消），并且是局部齐次的。

否则，每个析取 D 都包含一个简单函数 f_D，满足 $b > 0$；而简单函数 $\rho(ax + b)$ 满足 $b > 0$，在局部（$ax + b$）$\wedge 1$，它是

在零处局部大于 $1/2$ 。现在， ϕ 大于 f_D的析取，因此 ϕ 在零处局部大于 $1/2$ ，且不可能在零处局部齐次。

□

推论 13.11. 函数 $\phi(x) = \wedge \vee \rho(ax + b)$ 在零点局部齐次，当且仅当 $\phi(0) = 0$。

证明。若 ϕ 在零点局部齐次，则显然 $\phi(0) = 0$；否则，它在零点有一个正极限，且 ϕ 不可能在零点的任何邻域内齐次。反之，设 $\phi(0) = 0$。那么必定存在一个由 ϕ 构成的析取 D，使得 $b \leq 0$ 出现在 D 的每个析取项中；否则，如前一个命题的证明所示， $\phi \geq 1/2$ 在零点局部成立，这与假设 $\phi(0) = 0$ 矛盾。因此，根据前一个命题， ϕ 在零点局部齐次。 □

14 模型论/理论联系

Mundici 在 [33] 中确立了一种所谓的模型论/理论联系。一方面，有卢卡西维奇逻辑，它是一种理论，也就是说，是一个公式集合以及公式与公式集合之间的句法后承关系 $\Phi \vdash \phi$ 。通常，理论被定义为演绎闭公式集合，也就是说， $T \vdash \phi$ 蕴含 $\phi \in T$。

另一方面，存在一个所谓的模型集合，以及一个语义后承关系 $m \models \phi$，其中 m 是一个模型， ϕ 是一个公式。于是，我们可以将 $Mod(\phi)$称为公式 ϕ的所有模型组成的集合。

我们注意到，模型和语义关系的选择并非唯一。例如，在 [33], 中，所考虑的模型是 $[0,1]^n$的元素，公式则以变量 x_1，.....， x_n为变量。 $[0,1]$ 事实上，它生成了 MV-代数簇，而这些代数正是卢卡西维奇逻辑的代数。

由此可知，公式的模型与有理多面体相吻合，从这个意义上说，可以认为卢卡西维奇逻辑就是有理多面体的逻辑。我们认为，若能以更形式化的方式表达这一思想，将会很有意义。

然而，在我们的方法中，考虑无穷多个变量的可能性十分重要。因此，对我们而言，模型是 $[0,1]^I$的元素，其中 I是任意集合，而公式则以变量 x_i为变量，且 $i \in I$。由此可知，公式的模型与柱状有理多面体相吻合。因此，从某种意义上说，我们有理由认为，卢卡西维奇逻辑也是柱状有理多面体的逻辑。

注意，模型论/理论联系适用于布尔情形，无论是在有限变量还是无限变量版本中，也适用于经典逻辑。于是，模型

都是 $\{0,1\}^n$ 的元素，而 $\{0,1\}$ 生成布尔代数簇；布尔代数是经典逻辑的代数。

结果表明，含有限多个变量的公式的模型是 $\{0.1\}^n$ 的所有子集。对于无穷多个变量，柱化的思路仍然适用，我们可以将 $\{0,1\}^I$ 的柱有限子集称为 set$\{f \in [0,1]^I | f|_Y \in F\}$，其中 Y 是 I 的有限子集，而 F 是 $[0,1]^Y$ 的任意子集。

这些思路可以通过多种方式加以扩展。例如，我们可以考虑卢卡西维奇逻辑的公理扩张。经典逻辑本质上是卢卡西维奇逻辑加上公理 $x \oplus x = x$。这里，我们关注 MV-代数的 Chang簇 $\mathbb{V}(C)$，它对应于卢卡西维奇逻辑加上公理 $2(x^2) = (2x)^2$。在这种情况下，选择 $m \in \Delta(\mathbb{R})^n$，因为 $\Delta(\mathbb{R})$ 生成 Chang簇，正如 $\{0,1\}$ 生成布尔代数簇，以及 $[0,1]$ 生成 MV-代数簇一样。在这种情况下，我们可以说，对于有限模型，$V(C)$-簇的逻辑就是有理扇的逻辑；对于无限情形，则是柱有理扇的逻辑。当然，通过考察卢卡西维奇逻辑的所有等式扩张，可以进行更全面的分析。

15 结论

正如我们所见，本文的主要目标有两个：构造新的函子，以及研究 MV-代数子类的谱。

本文表明，借助经典对偶，确实可以构造涉及 MV-代数范畴的新函子，从而获得有关该范畴的一些信息。此外，我们认为，刻画 MV-代数子类的谱是一项有趣的研究课题。本文的研究结果表明，我们可以利用 Stone 对偶：两个 MV-代数的谱同胚，当且仅当它们的主理想格同构，因此这一问题可以改写为格论形式。

此外，遵循 Mundici 的观点——他指出卢卡西维奇逻辑是有理多面体的逻辑——我们继续致力于在多面体几何与 MV-代数（以及 ℓ-群）理论之间搭建桥梁。因此，根据前述结果，我们可以得出以下结论：

1） $[0,1]^n$ 的有理多面体是卢卡西维奇逻辑的代数簇；

2） $[0,1]^n$ 的有理锥与 $\mathbb{R}^n$ 的有理锥之间存在双射，而后者是 ℓ-群等式逻辑的代数簇；

3） $[0,1]^I$的柱多面体，其中 I是一个可能为无限的集合，是无穷多个变量的卢卡西维奇逻辑的代数簇，也就是说，是 $[0,1]^I$中单个多项式的零点集；

4）同样，柱形扇是第 2）项中同一逻辑在无穷多个变量下的代数簇；

5） $\Delta(\mathbb{R})^n$ 中的扇是卢卡西维奇逻辑加上 MV-代数公理（$2x$）$^2 = 2$（x^2）的代数簇，该公理刻画了簇 $\mathbb{V}$（C）。

本文可以从许多方向加以拓展。

正如我们所说，Plotkin 在 [37] 中展示了如何在泛代数中进行代数几何。对于 MV-代数簇，这一理论已在 [4], 中得到发展；对于 ℓ-群，则见 [18]。我们还可以进一步考虑 MV-代数的子簇，特别是由 Komori 链生成的簇（其中 Chang 的 MV-代数 C 是最简单的例子）。

参考文献

[1] M.Abbadini, V. Marra, L. Spada, 度量完备格序群的 Stone-Gelfand 对偶，预印本（2022年）[2] L.P. Belluce, 无限值逻辑的半单代数与 bold 模糊集理论，《加拿大数学杂志》38（1986年）1356–1379。[3] L.P. Belluce, A. Di Nola, B. Gerla, 完美 MV-代数及其逻辑。《应用范畴结构》15（2007年），第 1-2 期，135–151。[4] L.P. Belluce, A. Di Nola, G. Lenzi, MV-代数的代数几何，《符号逻辑杂志》79 4（2014年），1061–1091。[5] L.P. Belluce, A. Di Nola, A. Lettieri, 局部 MV-代数。《巴勒莫数学研讨会报告》（2）42（1993年），第 3 期，347–361。[6]L.P. Belluce, A. Di Nola, A. Lettieri, 关于对称 MV-多项式， 26^{th} 林茨模糊集理论研讨会（2005年）[7] L.P. Belluce, A. Di Nola, S. Sessa, MV-代数的素谱，《数学逻辑季刊》40（1994年）331–346。[8] G. Bezhanishvili, 框架、拓扑与对偶理论，TACL 2015 暑期学校，讲义，第 2 讲。[9] C.C. Chang, 卢卡西维奇公理完备性的新证明，《美国数学会汇刊》卷 93，第 1 期（1959年），74–80。

[10] R. Cignoli, A. Di Nola, A. Lettieri, 多值代数的 Priestley 对偶与商格，《巴勒莫数学会汇刊》，第二辑，第 XL 卷（1991年），第 371–384 页。[11] R. L. O. Cignoli, I. M. L. D'Ottaviano, D. Mundici, 多值推理的代数基础。《逻辑学趋势》—《逻辑学研究》丛书，第 7 卷。Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特，2000年。x+231 页。[12] F. de Giovanni, A. Facchini, M. Trombetti,《群、代数与表示论的谱》，在线出版，2022年，https://doi.org/10.1007/s10468-022-10138-1。[13] C.H. Delzell, J.J. Madden, 一个非实谱的完全正规谱空间，《代数杂志》169（1994年），71–77。[14] A. Di Nola, 通过 MV-代数的商进行表示与格化。《数学研究》XL(2)（1991年），291–297。[15] A. Di Nola, R. Grigolia, 与带标记根系对偶的 MV-代数，《离散数学》243（2002年），79–90。[16]A. Di Nola, G. Lenzi，阿贝尔 ℓ群与 MV-代数的谱问题，《普遍代数》81，第 31 期（2020年）https://doi.org/10.1007/s00012-020-00668-4。[17] A. Di Nola, G. Lenzi; G. Vitale, 超 Lukasiewicz 逻辑的几何。《逻辑与计算杂志》32 3（2022年），608–629。[18] A: Di Nola, G. Lenzi, G. Vitale，ℓ群的代数几何。《普遍代数》79（2018年），第 3 期，论文编号 64，共 24 页。[19] A. Di Nola, A. Lettieri，卢卡西维奇逻辑中的范式。《数学逻辑文献》43（2004年），第 6 期，795–823。[20]A. Di Nola, A. Lettieri，完美 MV-代数与阿贝尔 ℓ群范畴等价。《逻辑学研究》卷 53，第 3 期（1994年），417–432。[21] A. Di Nola, I. Leustean：卢卡西维奇逻辑与 Riesz 空间。《软计算》18(12)：2349–2363（2014年）。[22] M. Dickmann, N. Schwartz, M. Tressl，《谱空间》，新数学专著丛书第 35 卷。剑桥大学出版社，剑桥（2019年）。

[23] E. J.Dubuc, Y. A. Poveda，《MV-代数表示理论》，《纯粹与应用逻辑年刊》161 8 (2010), 1024–1046.[24] A. Filipoiu, G. Georgescu, MV-代数的紧致表示与皮尔斯表示。《罗马尼亚纯数学与应用数学评论》40 (1995), no. 7-8, 599–618.[25] W. Fussner, M. Gehrke, S. J. van Gool, V. Marra，MV-代数及其推广的 Priestley 对偶。《数学论坛》33 4 (2021), 899–921.[26] B. Gerla，有理卢卡西维奇逻辑与DMV-代数，《Neural Network World》6 (6), (2012)[27] M. Hochster，交换环中的素理想结构，《美国数学会汇刊》142 (1969) 43–60.[28] W. Komori，超卢卡西维奇命题逻辑，《名古屋数学杂志》第84卷 (1981), 119–133.[29] V. Marra, L. Spada，MV-代数与Tychonoff空间之间的对偶伴随。《逻辑学研究》100 no. 1-2 (2012), 253–278.[30]V. Marra, L. Spada，卢卡西维奇逻辑与MV-代数中的对偶、射影性与合一。《纯粹与应用逻辑年刊》164 (2013), 192-210.[31]D. Mundici，MV-代数导论（可见 http://msekce.karlin.mff.cuni.cz/∼ssaos）。[32] D. Mundici，AF C^*-代数在卢卡西维奇语句演算中的解释，《泛函分析杂志》第65卷，第1期，1986年1月，15–63页。[33]D. Mundici，《高级卢卡西维奇演算与MV-代数》，《逻辑学趋势》—《逻辑学研究文库》第35卷，施普林格，多德雷赫特 (2011).[34] D. Mundici，每个主同余何时都是极大同余的交，载于：《逻辑、代数与真值度》，LATD 2012，北陆先端科学技术大学院大学，日本金泽，2012年9月11–14日。[35] G. Panti，MV-代数簇，《应用非经典逻辑杂志》9 1(1999) 141–157。

[36] G. Panti. 自由 ℓ-群与自由向量格中的素理想。《代数杂志》219(1): (1999), 173–200.[37] B. Plotkin, 《泛代数几何七讲》, 预印本 arXiv:math/0204245.[38] H. A. Priestley. 以有序 Stone 空间表示分配格。《伦敦数学会通报》2 (1970), 186–190.[39] M. H. Stone, 布尔代数的表示理论, 《美国数学会汇刊》74 1(1936), 37–111.[40] M. H. Stone, 分配格与布劳威尔逻辑的拓扑表示, Casopis pro Pe˘stov´an´ı Matematiky a Fysiky 67 (1937), 1–25.[41] F. Wehrung, 可数阿贝尔格序群的谱空间。《美国数学会汇刊》371 no.3 (2019), 2133–2158.[42] F. Wehrung, 从非交换图表到反初等类。《数理逻辑杂志》, 2021, 21 (2), pp.2150011.[43] F. Wehrung, 可数字段上的代数与向量格的实谱和 ℓ-谱, 《纯粹与应用代数杂志》226 no.4 Paper No. 106861 (2022), 25 pp.