arXiv:2303.10229v1 [math.CO] 17 Mar 2023

实数集$\mathbf{R}^3$中二次曲线与正交曲线之间的不同距离*

Toby Alda pe†、Jingyi Liu‡、Gregory Pylypovych§、Adam Sheffer¶、Minh-Quan Vo‖

摘要

我们研究实数集$\mathbf{R}^3$中两条曲线上的点集之间的不同距离的最小数量。假设一条曲线上有 m 个点，另一条曲线上有 n 个点。我们的主要结果如下：

（a）当曲线是圆锥曲线时，我们刻画了所有距离数量为 $O(m+n)$的情形。这包括针对两条抛物线、两个椭圆，以及一个椭圆和一条双曲线上的点的新构造。在其他所有情形中，距离数量为 $\Omega(\min\{m^{2/3}n^{2/3}, m^2, n^2\})$。

(b) 当曲线不一定是代数曲线，但为光滑曲线且包含在垂直平面内时，我们刻画了距离数量为 $O(m+n)$ 的所有情形。这包括一种令人惊讶的新构造：其中的非代数曲线涉及对数。在所有其他情形中，距离数量为 $\Omega(\min\{m^{2/3}n^{2/3}, m^2, n^2\})$。

1 引言

Erd˝os [7] 于 1946 年提出了不同距离问题，该问题推动了离散几何和加性组合学领域的重大数学发展。对于给定的 n，该问题要求找出由 $\mathbf{R}^2$ 中的 n 个点确定的不同距离的最小数量。给定一个有限点集 $\mathcal{P}$，我们将 $D(\mathcal{P})$ 定义为由其中点对确定的不同距离的数量。不同距离问题要求求出 $\min D(\mathcal{P})$，其中最小值取遍 $\mathbf{R}^2$ 中所有由 n 个点组成的集合 $\mathcal{P} \subset$ 。Erd˝os 发现了一个满足 $D(\mathcal{P}) = O(n/\sqrt{\log n})$. 的集合 $\mathcal{P}$ 。Guth 和 Katz [8], 基本上彻底解决了这一问题，他们证明每个由 n 个点组成的集合 $\mathcal{P}$ 都满足$D(\mathcal{P}) = \Omega(n/\log n)$。

上述问题是众多不同距离问题中的一种，其中大多数也由 Erd˝os 提出（例如，参见 Sheffer [14]）。在二部不同距离问题中，我们有两个点集 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$，并关注由 $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$中的点对确定的不同距离。我们将这个数量记为 $D(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$。在一类二部不同距离问题中，我们假设存在曲线[1] C_1, C_2, 使得 $\mathcal{P}_1 \subset C_1$ 和 $\mathcal{P}_2 \subset C_2$。Purdy 猜想，当 $|\mathcal{P}_1| = |\mathcal{P}_2| = n$ 和 C_1, C_2 是既不平行也不正交的直线时， $D(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ 是

*本研究作为 2021 年 Polymath Jr 项目的一部分开展，并得到美国国家科学基金会 DMS–2113535 项目的部分资助。

†美国得克萨斯州奥斯汀市德克萨斯大学奥斯汀分校数学系。 *tmaldape@utexas.edu*。

‡美国新泽西州普林斯顿大学计算机科学系。 *jl1606@princeton.edu*。§美国马萨诸塞州麻省理工学院数学系。 *gpylypov@mit.edu*。

¶美国纽约州纽约市纽约市立大学巴鲁克学院数学系。 *adamsh@gmail.com*。获美国国家科学基金会 DMS-1802059 项目资助。

‖越南胡志明市越南国家大学科学大学数学与计算机科学系。 *mqmath0000@gmail.com*。[1]除非另有说明， *curves* 指常复杂度不可约一维簇。有关这些概念的技术定义，请参见第2节。

关于 n 呈超线性增长（例如，参见 [4, 第 5 节5]）。Pach 和 de Zeeuw [13] 证明了以下更一般的结果。

定理 1.1. 设 C_1 和 C_2 是实数集$\mathbf{R}^2$ 中的曲线，且它们不是平行直线、正交直线或同心圆。设 $\mathcal{P}_1$ 是 C_1 中的一个 m 点集，$\mathcal{P}_2$ 是 C_2中的一个 n 点集。那么

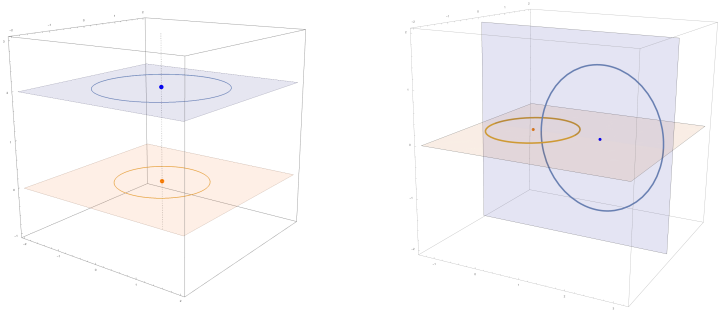
$$D(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \Omega(\min\{m^{2/3}n^{2/3}, m^2, n^2\}).$$

当 C_1 和 C_2 是平行直线、正交直线或同心圆时，我们可以选择 $\mathcal{P}_1$和 $\mathcal{P}_2$，使得 $D(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \Theta(m+n)$。人们猜想定理 1.1 的界并非紧确。最近，Solymosi 和 Zahl [20]将两条直线情形的界改进为 $\Omega(\min\{m^{3/4}n^{3/4}, m^2, n^2\})$。

我们将一对曲线（C_1，C_2）称为一个构型。如果每个有限的 $\mathcal{P}_1 \subset C_1$ 和 $\mathcal{P}_2 \subset C_2$ 都满足以下条件，则称该构型张成许多距离

$$D(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \Omega(\min\{|\mathcal{P}_1|^{2/3}|\mathcal{P}_2|^{2/3}, |\mathcal{P}_1|^2, |\mathcal{P}_2|^2\}).$$

定理 1.1 指出，除非一个构型由平行直线、正交直线或同心圆组成，否则它会产生许多距离。我们称一个构型产生少量距离，如果对于每个 m 和 n，都存在 $\mathcal{P}_1 \subset C_1$ 和 $\mathcal{P}_2 \subset C_2$，使得 $|\mathcal{P}_1| = m$、$|\mathcal{P}_2| = n$ 和$D(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = O(m+n)$。由上可知，$\mathbf{R}^2$ 中的任意两条曲线，要么产生少量距离，要么产生许多距离。换言之，对于任意两条不会产生许多距离的曲线，都存在能够产生线性数量不同距离的点集。



(a) 共线圆。　　(b) 垂直圆。

图 1：产生少量距离的圆对。

Mathialagan 和 Sheffer [12] 研究了 C_1 和 C_2 是$\mathbf{R}^3$中的圆的情形。圆 $C \subset \mathbf{R}^3$ 的轴 是经过该圆中心且垂直于包含C的平面的直线。若两个圆共用同一条轴，则称它们共线 。见图 1(a)。从某种意义上说，$\mathbf{R}^3$ 中共线圆的情形推广了$\mathbf{R}^2$中同心圆的情形。特别地，通过调整$\mathbf{R}^2$,中同心圆的构造可知，共线圆产生少量距离。

令人惊讶的是，实数集$\mathbf{R}^3$ 中还存在另一种能形成少量距离的圆构型。实数集$\mathbf{R}^3$ 中的两个平面若夹角为 $\pi/2$，则垂直 。设 H_1 和 H_2 分别为包含 C_1 和 C_2的平面。若圆 C_1 和 C_2 垂直，则

- H_1 包含 C_2.的中心
- H_2 包含 C_1.的中心
- 平面 H_1 和 H_2 互相垂直。

参见图 1(b)。Mathialagan 和 Sheffer [12]证明了以下定理。

定理 1.2. 令 C_1 和 C_2 为实数集$\mathbf{R}^3$中的两个圆。

(a) 假设 C_1 和 C_2 共线或垂直。那么存在一个由 m个点组成的集合 $\mathcal{P}_1 \subset C_1$，以及一个由 n 个点组成的集合 $\mathcal{P}_2 \subset C_2$，使得

$$D(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \Theta(m+n).$$

(b) 假设 C_1 和 C_2 既不共线也不垂直。设 $\mathcal{P}_1 \subset C_1$ 是一个由 m 个点组成的集合，$\mathcal{P}_2 \subset C_2$ 是一个由 n 个点组成的集合。那么

$$D(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \Omega(\min\{m^{2/3}n^{2/3}, m^2, n^2\}).$$

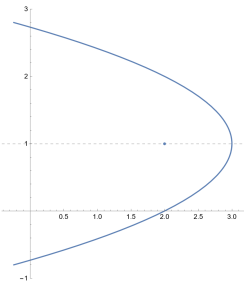
定理 1.2 指出，$\mathbf{R}^3$ 中的两个圆会产生许多不同距离，除非它们共线或垂直；在这种情况下，它们产生的不同距离较少。

我们的首个结果：圆锥曲线。承接 Mathialagan 和 Sheffer 的工作，我们针对 $\mathbf{R}^3$中曲线之间的不同距离，建立了两个新结果。我们的首个结果将定理 1.2 推广到了所有非退化圆锥曲线。也就是说，现在每条曲线都可以是圆、抛物线、双曲线或椭圆。为了陈述这一结果，我们首先需要定义几个新的构型。

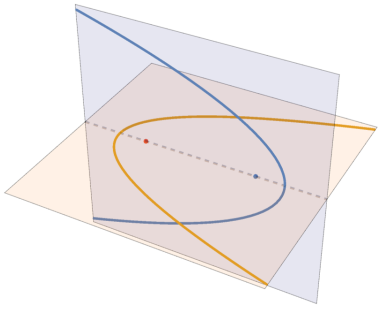
抛物线的轴 是同时经过该抛物线顶点和焦点的直线。例如，参见图 2(a)。若抛物线 C_1, C_2 在**实数集**^{3} 中满足以下条件，则称它们全等且垂直相对：

- 我们可以通过平移和旋转 C_1得到 C_2。
- 抛物线 C_1 和 C_2 具有相同的轴。
- 包含 C_1 和 C_2 的平面互相垂直。
- 对于每条抛物线，考虑从其顶点指向焦点的向量。这两个向量方向相反。

例如，参见图 2(b)。简而言之，我们将这样一对抛物线称为*CPO* 抛物线。



(a) 抛物线的轴抛物线。



（b）CPO 抛物线。

图 2：全等且垂直相对（CPO）抛物线。

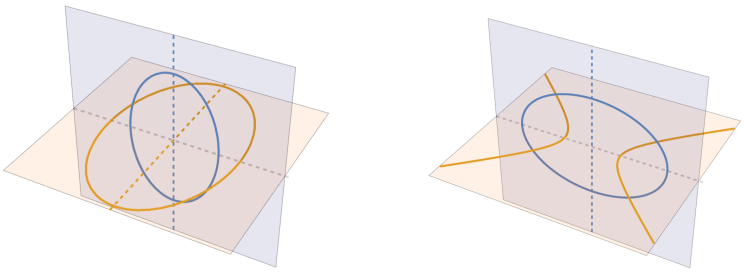
对于 a，$m > 0$ 和 $b \neq 0$，使得 $m \neq 1$，我们考虑如下构型

$$C_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ mx^2 + y^2 = a, \ z = 0\right\} \quad \text{and} \tag{1}$$

$$C_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \frac{m}{m-1}x^2 + z^2 = b, \ y = 0\right\}. \tag{2}$$

我们注意到，对于每个 $m > 0$，C_1 都是椭圆。另一方面，当 $m > 1$时，C_2 是椭圆；当 $0 < m < 1$ 时，则是双曲线。我们忽略 $b < 0$ 且 $m > 1$的情形，因为此时 C_2 是

空的。如果两条曲线是通过旋转和平移（1）和（2）的构型，在某些 a、b、m取值下得到的，那么它们就匹配。也就是说，两个椭圆可以匹配（图3(a)），一个椭圆和一个双曲线也可以匹配（图3(b)）。我们可以通过改变 a、b、m的取值，对（1）和（2）进行缩放。



(a) 两个椭圆。　　(b) 椭圆与双曲线。

图3：匹配曲线。

定理 1.3 (圆锥曲线之间的少量距离)。 设 $C_1, C_2 \subset$ **实数集**^{3} 为非退化圆锥曲线。

(a) 假设 C_1 和 C_2 是垂直圆、对齐圆、*CPO* 抛物线或匹配曲线。那么(C_1, C_2) 张成少量距离。

(b) 如果(C_1, C_2) 是 *n* 若不属于 *(a)* 部分中的构型之一，则 (C_1, C_2) 产生许多距离 .

我们注意到，与$\mathbf{R}^2$ 中的情形以及$\mathbf{R}^3$, 中的圆类似，每种圆锥曲线构型都会产生少量或许多不同距离。

定理 1.3 不包括至少一条曲线为直线的情形。正如下述结果的证明所示，这种情形要简单得多。在本文中，“圆柱”一词特指正圆柱。也就是说，圆柱是通过平移、旋转和缩放$\mathbf{v}(x^2 + y^2 - 1)$得到的曲面。圆柱的轴 S 是包含在 S中的所有圆的公共轴。

引理 1.4. 设 $\ell \subset \mathbf{R}^3$ 是一条直线， $C \subset \mathbf{R}^3$ 是一条曲线。

(a) 若 C 包含于一个与 ℓ 正交的平面内，或包含于一个以 ℓ为中心的圆柱内，则 (C, ℓ) 产生少量距离。

(b) 如果(C, ℓ) *i s* 不是 *(a)* 部分中的某种构型，那么(C, ℓ) 会产生许多距离 .

关于一个点集位于直线上的另一种有趣变体，请参见 Bruner 和 Sharir [6]。

我们的第二个结果：垂直平面上的曲线。如果存在一个平面包含曲线 $C \subset \mathbf{R}^3$ ，则称该曲线为平面的。定理 1.1 对包含平面平行时产生少量距离的平面曲线对进行了分类。特别是，在这种情况下，唯一产生少量距离的构型是平行直线、正交直线和共线圆。见下文引理 3.1。

我们的第二个结果对包含平面垂直时产生少量距离的所有平面曲线对进行了分类。

定理 1.5 (垂直平面间的少量距离)。设 C_1 和 C_2 是包含在$\mathbf{R}^3$ 中垂直平面上的曲线。

(a) 假设 C_1 和 C_2 是以下情况之一：

- 一条直线 ℓ 和一条包含在与 ℓ正交的平面内的曲线，
- 平行直线，
- 一条直线 ℓ 和一个包含在以 ℓ为中心的圆柱内的椭圆，
- *CPO* 抛物线，
- 匹配曲线，
- 垂直圆。

那么 (C_1, C_2) 跨越少量距离。

(b) 如果 (C_1, C_2) 不是 ***(a)*** 部分中的某种构型，那么 (C_1, C_2) 会张成许多距离。

定理 1.5 的证明首先研究不一定是代数的集合（见定理 6.1）。证明的这一部分导出了一个令人惊讶的非代数构型，它张成的距离很少。现在我们来描述这个构型。

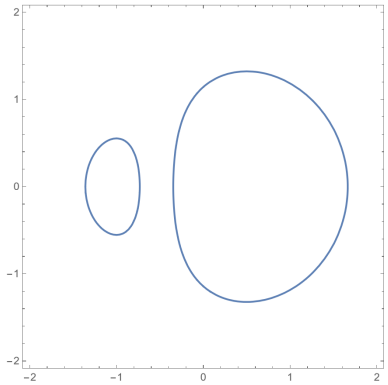


图 4：对数圆 $x^2 + y^2 = 2 + \ln|x + \frac{1}{2}|$。

对于 $A, B, D \in$ **实数集**，我们考虑实数集 **实数集**^{3} 中由下式定义的集合

$$x^2 + y^2 = D + A \ln|x - B| \quad \text{and} \quad z = 0. \tag{3}$$

我们将对数圆 定义为上述集合经过平移和旋转后得到的集合，其中 $A, B, D \in$ **实数集** 均可取任意值。例如，见图 4。令 $A = 0$，可知对数圆族包含所有标准圆。

对于 $A, B, D, D' \in$ **实数集**，考虑这两个对数圆

$$\begin{aligned} &\left\{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3 \ : \ (x - B)^2 + y^2 = D + A \ln|x|\right\}, \\ &\left\{(x, 0, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x^2 + z^2 = D' + A \ln|x - B|\right\}. \end{aligned} \tag{4}$$

第一个对数圆包含在 xy-平面中，第二个包含在 xz-平面中。也就是说，它们是包含在垂直平面中的一维集合。如果两个对数圆可以通过旋转、平移和缩放上述构型得到（其中 A， B， D， $D' \in$ **实数集**），我们就称它们匹配。参见图 5。这是对对齐圆的一种非代数推广。

定理 1.6。 设 C_1 和 C_2 是匹配对数圆。那么(C_1, C_2) 产生少量距离。

我们的方法。 我们的分析从证明 Mathialagan 和 Sheffer 的 [12]，开始，但对该证明进行了大幅推广。下面简要介绍我们分析中的一个主要工具。

我们称集合 $S \subset$ **实数集**^{3} 为一条弧，如果存在一个光滑双射映射 $\gamma : (0, 1) \to S$。我们也称 γ 为 S的参数化。有关更多信息，例如光滑性的定义，

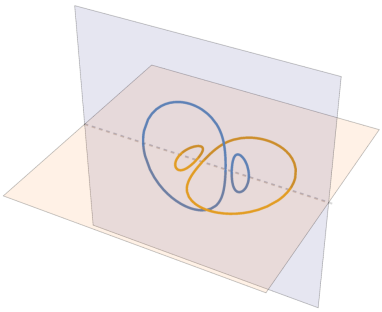


图 5：匹配对数圆。

请参见第2节。我们以直接的方式将跨越许多距离和跨越少量距离的性质推广到弧对。也就是说，我们不再考虑两条曲线的点集，而是考虑两条弧上的点集。

考虑弧 $A_1, A_2 \subset$ **实数集**^{3}，其对应的参数化为 γ_1, γ_2。对于 $s \in (0,1)$，我们将 $\gamma_i(s)$ 的三个坐标记为 $\gamma_{i,x}(s)$、$\gamma_{i,y}(s)$ 和 $\gamma_{i,z}(s)$。γ_1 和 γ_2 的距离函数为

$$\rho(s,t) = (\gamma_{1,x}(s) - \gamma_{2,x}(t))^2 + (\gamma_{1,y}(s) - \gamma_{2,y}(t))^2 + (\gamma_{1,z}(s) - \gamma_{2,z}(t))^2. \tag{5}$$

距离函数从每条弧上各取一个点，并使用参数化 γ_1 和 γ_2。该函数返回这两个点之间距离的平方。

若存在开区间 $I_1, I_2, I_3 \subset$ **实数集** 以及光滑函数 $\phi_1 : I_1 \to$ **实数集** $\phi_2 : I_2 \to$ **实数集** $\phi_3 : I_3 \to$ **实数集** 满足以下条件，则称函数 $f :$ **实数集**$^2 \to$ **实数集** 具有特殊形式：对于每个 $s \in I_1$ 和 $t \in I_2$，都有 $\phi_1(s) + \phi_2(t) \in I_3$，并且

$$f(s,t) = \phi_3(\phi_1(s) + \phi_2(t)). \tag{6}$$

下面的引理是 Mathialagan 和 Sheffer 一个引理的推广 [12]，，而该引理又改编自 Raz [15] 的一个结果。

引理 1.7。设 A_1、$A_2 \subset$ **实数集**^{3} 是弧，其参数化分别为 γ_1、γ_2。设 $\rho(s, t)$ 是 γ_1 与 γ_2的距离函数。那么以下至少有一项成立。
(a) 构型(A_1, A_2) 产生许多距离。*(b)* 函数 $\rho(s, t)$
具有特殊形式。

证明引理 1.7 后，接下来要研究距离函数 $\rho(s, t)$ 何时具有特殊形式。为此，我们借助下面的导数检验。这里，ρ_s 和 ρ_t 分别是 ρ 关于 s 和 t的一阶偏导数。

引理 1.8 (导数检验)。设 $\rho : (0,1)^2 \to$ **实数集** 是具有特殊形式的光滑函数，并且在**实数集**^{2}的每个开邻域中，$\rho_s \neq 0$ 和 $\rho_t \neq 0$。那么存在一个开邻域**实数集**^{2}，使得

$$\frac{\partial^2(\ln|\rho_s/\rho_t|)}{\partial s \partial t} \equiv 0.$$

在证明中，当 $\rho(s, t)$ 是式 (5) 中的距离函数时，我们研究引理 1.8 中的表达式。借助 Wolfram Mathematica [18]，，我们证明该表达式并非恒等于零

在任何开邻域中。因此，由引理 1.8 的逆否命题可知， $\rho(s,\ t)$ 不具有特殊形式。因此，我们必定处于引理 1.7 的情形 (a)。

我们还推导出以下有用的结果。

定理 1.9。 在**实数集**^{3} 中的任意一对曲线所张成的距离，要么很少，要么很多 .

开放问题。 目前一个主要的未解决问题是刻画**实数集**^{3}中所有张成少量距离的曲线对。有鉴于此，我们提出以下问题:

> 判断正误：如果**实数集**^{3} 中的两条平面曲线张成少量距离，那么包含这两条曲线的平面要么平行，要么垂直。

如果上述说法成立，那么定理 1.5 和引理 3.1 就刻画了**实数集**^{3} 中所有张成少量距离的平面曲线对。

最近，Solymosi 和 Zahl [20] 将两条直线之间不同距离数量的下界从 $\Omega(\min\{m^{2/3}n^{2/3}, m^2, n^2\})$ 提高到 $\Omega(\min\{m^{3/4}n^{3/4}, m^2, n^2\})$。似乎有理由相信，定理 1.1、定理 1.2 以及本文的结果也可以通过类似方式改进。这种潜在的改进并不会取代本文的证明，而是在我们的证明基础上进一步加强所得的界。

我们还建议研究两条不一定是代数曲线上的点在**实数集**^{3} 中的不同距离。当两条曲线包含在垂直平面内时，定理 6.1指出，存在少量距离且其中一条曲线不是代数曲线的情形只有:

- 一条曲线是直线，另一条曲线包含在平行或垂直的平面内。
- 匹配对数圆。
- 包含正弦或余弦的周期函数。

定理 6.1未涵盖第三个要点，因为周期曲线不一定是有限条弧和点的并集。换言之，问题是:

> 在**实数集**^{3} 中，是否存在一对曲线，它们产生的距离很少、不包含在垂直平面内、不是周期曲线、不是直线，并且至少有一条不是代数曲线?

论文结构。 第2节简要综述了全文所用的实代数几何基础知识。第3节给出了两个易于证明的初步不同距离结果，后续各节将依赖这些结果。第4节研究特殊形式的函数，这些函数也将在后续各节中用到。第5节研究具有较少不同距离的构型。第6节证明定理 1.5。第7节证明定理 1.3。最后，在附录 A 和 B 中，我们介绍证明定理 1.3 所需的 Mathematica 计算。

致谢。 我们衷心感谢 Surya Mathialagan 提供的宝贵交流与支持。我们也感谢 Polymath Jr项目的导师和工作人员，是他们使这一研究项目得以实现。

2 实代数几何预备知识

本节简要综述实代数几何中的记号和结果。读者可以先略读本节，并在需要时再回来查阅。

有关参考文献及更多信息，请参见例如 [3, 9]。对于多项式 $f_1, \ldots, f_k \in$**实数集**$[x_1, \ldots, x_d]$，由 $f_1, \ldots, f_k$ 定义的代数簇为

$$\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_k) = \left\{ p \in \mathbf{R}^d \ :\ f_1(p) = f_2(p) = \cdots = f_k(p) = 0 \right\}.$$

如果存在 $f_1, \ldots, f_k \in$ **实数集**$[x_1, \ldots, x_d]$，使得 $U =$**v**$(f_1, \ldots, f_k)$，我们就称集合 $U \subset$ **实数集**^{d} 是一个代数簇。虽然在某些其他域上这一点并不成立，但在**实数集**^{d} 上，每个代数簇都可以用一个多项式定义。若不存在两个代数簇 $U_1, U_2 \subsetneq U$ 使得 $U = U_1 \cup U_2$，则代数簇 U 是不可约的。不可约代数簇 U 的维数记为 $\dim U$，它是满足以下条件的最大整数 d_U：存在非空不可约代数簇 $U_0, U_1, \ldots, U_{d_U}$，使得

$$U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \ldots \subsetneq U_{d_U} = U.$$

现在我们提及关于**实数集**^{d}中代数簇交集的两个经典结果。

定理 2.1（贝祖定理）。设 f 和 g 是**实数集**$[x, y]$ 中的多项式，其次数分别为 k_f 和 k_g。若 f 和 g 没有公因子，则$\mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)$ 至多由 $k_f \cdot k_g$个点组成。

定理 2.2（米尔诺–汤姆 [11, 21]）。设 $f_1, \ldots, f_m \in$ **实数集**$[x_1, \ldots, x_d]$ 的次数至多为 k。那么$\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_m)$ 的连通分支数至多为

$$k(2k-1)^d.$$

我们注意到定理 2.2 的以下简单推论。

推论 2.3。设 $C \subset$ **实数集**^{3} 是一条曲线，$U \subset$ **实数集**^{3} 是一个代数簇。若 $C \cap X$ 是无限的，则 $C \subset X$。

证明。令 $W = C \cap U$，并假设 W 是无限的。根据定义，W 是一个代数簇。若 $\dim W = 0$，则该代数簇有无限多个连通分支。由于这与定理 2.2 矛盾，因此 $\dim W \geq 1$。由于 C 不可约且维数为一，我们得出 $C = W \subset X$。

□

与$\mathbf{C}^d$中的情况不同，$\mathbf{R}^d$中代数簇的次数有几种不等价的定义。为避免这一问题，我们称代数簇 $U \subset \mathbf{R}^d$ 的**复杂度** 为满足以下条件的最小整数 D：存在 $k \leq D$ 个多项式 $f_1, \ldots, f_k \in \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_d]$，每个多项式的次数至多为 D，使得 $U = \mathbf{V}(f_1, \ldots, f_k)$。过去十年间，复杂度这一概念越来越常用。例如，参见 [5, 19]。

关于以下结果，参见例如 [17, 第 4] 章。在 $O_{k,d}(\cdot)$ 记号中，隐藏常数可能依赖于 d 和 k。

定理 2.4。设 $U \subset \mathbf{R}^d$ 是一个复杂度为 k 的代数簇。那么 U 是 $O_{k,d}(1)$ 个不可约代数簇的并集。

我们将**曲线** 定义为维数为一的不可约常复杂度代数簇。在定理 1.3 和定理 1.5 中，我们隐含地考虑了由 m 个点和 n 个点构成的集合，这些点确定 $\Omega(\min\{m^{2/3}n^{2/3}, m^2, n^2\})$ 个不同距离。在此背景下，曲线具有常复杂度意味着可以假设 m 和 n 相对于曲线的复杂度任意大。$\Omega(\cdot)$ 记号中的隐藏常数可能依赖于曲线的复杂度。

设 $S \subset$ **实数集**^{d}。S 的**扎里斯基闭包** 记为 $\overline{S}$，它是包含 S 的最小代数簇。具体而言，每个包含 S 的代数簇也包含 $\overline{S}$。集合 $S \subset$**实数集**^{d} 是**半代数的**，当且仅当存在一个布尔函数 $\Phi(y_1, \ldots, y_t)$ 和多项式 $f_1, \ldots, f_t \in$ **实数集**$[x_1, \ldots, x_d]$，使得

$$p \in S \qquad \text{if and only if} \qquad \Phi(f_1(p) \geq 0, \ldots, f_t(p) \geq 0) = 1.$$

$\overline{S}$ 的维数为 $\dim S$。

标准投影是一种线性映射 π :**实数集**$^n \to$ **实数集**^{m}，它保留坐标中的前 m 个（共 n 个）。代数簇的投影未必是代数簇，但它具有其他良好性质。

定理 2.5。 设 $U \subset$ **实数集**^{n} 是一个维数为 d 的代数簇，且 π : **实数集**$^n \to$**实数集**^{m} 是一个标准投影。那么

(a) 投影 $\pi(U)$ 是一个维数至多为 d 的半代数集。

(b) 设 $d' =$维数 $\pi(U)$。那么存在一个维数小于 d' 的代数簇 $W \subset$**实数集**^{m}，满足以下条件：对于每个 $p \in \pi(U) \setminus W$，集合 $\pi^{-1}(p) \cap U$都是维数至多为 $d - d'$ 的半代数集。

关于 (a)，例如参见 [2, 第 11 节。3]。关于 (b)，例如参见 [1, 第 7 节。1]。

如果函数 f :**实数集**$^d \to$ **实数集** 的所有阶偏导数都存在，我们就称其为光滑的 。我们将函数 g :**实数集**$^d \to$ **实数集**^{e} 视为从**实数集**^{d} 到**实数集** 的若干个独立函数，并称 g 是光滑的 ，如果这些 e 独立分量各自都是光滑的。

我们回顾一下，如果存在一个光滑映射 $\gamma : (0,1) \to S$，那么 $S \subset$ **实数集**^{3} 就是一条弧 。我们称 γ 为 S的参数化 。关于下面的引理，例如参见 [15].[2]

引理 2.6。 设 $C \subset$**实数集**^{n} 是一条曲线。那么 C 是有限条弧和点的并集 .

3 第一部分：不同距离界

本节研究两个关于不同距离的初步结果。这些结果的证明较短，且不依赖引理 1.7 等复杂工具。

引理 3.1。 设 $C_1, C_2 \subset$ **实数集**^{3} 是包含在平行平面中的平面曲线。

(a) 若 C_1 和 C_2 是平行直线、正交直线或共线圆，则 (C_1, C_2) 产生少量距离。

(b) 如果 (C_1, C_2) 不是 第 *(a)* 部分中的某种构型，那么(C_1, C_2) 确定许多距离 .

证明。 (a) 关于平行直线、正交直线和共线圆确定少量距离这一点，可参见例如 [12]。

(b) 令 H_1 和 H_2 分别为包含 C_1 和 C_2的平面。我们对**实数集**^{3} 进行旋转和平移，使 H_1 变为平面 $\mathbf{V}(z)$。于是存在 $d \in$ **实数集** 使得 $H_2 = \mathbf{V}(z - d)$。注意，旋转和平移不会影响距离。

我们考虑点 $a = (a_x, a_y, 0) \in C_1$ 和 $b = (b_x, b_y, d) \in C_2$。我们还考虑标准投影 $\pi(x, y, z) = (x, y)$。 a 与 b之间距离的平方等于 $\pi(a)$ 与 $\pi(b)$ 之间距离的平方加上 d^2。由于所有距离的平方都发生相同的变化，我们得到 $D(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = D(\pi(\mathcal{P}_1)\ \pi(\mathcal{P}_2))$。

根据定理 1.1，如果它们是平行直线、正交直线或同心圆，则 $(\pi(C_1)\ \pi(C_2))$ 产生少量距离。否则，$(\pi(C_1)\ \pi(C_2))$ 产生许多距离。如果 $\pi(C_1)$ 和 $\pi(C_2)$ 是平行直线或正交直线，那么 C_1 和 C_2 也如此。如果 $\pi(C_1)$ 和 $\pi(C_2)$ 是同心圆，那么 C_1 和 C_2 是对齐圆。 □

接下来我们证明引理 1.4。首先回顾该引理的陈述。

引理 1.4。 设 $\ell \subset$**实数集**^{3} 是一条直线，设 $C \subset$**实数集**^{3} 是一条曲线。

(a) 如果 C 包含在与 ℓ 正交的平面内，或包含在以 ℓ为中心的圆柱内，那么 (C, ℓ) 产生少量距离。

[2]我们不详细阐述这个引理的简单证明，因为这需要引入许多额外定义。简而言之：C 有有限个奇点。去掉这些点后，每个连通分支都与**实数集** 或 S^1 微分同胚。同样，弧通常更常被称为连通一维光滑流形。

(b) 如果 (C, ℓ) 不属于 *(a)* 部分中的某种构型，那么 (C, ℓ) 产生许多距离。

证明。 对于 (a) 部分，见下文的引理 5.1 和 5.2。对于 (b) 部分，我们假设 C 不包含在与 ℓ 正交的平面内，也不包含在以 ℓ为中心的圆柱内。通过旋转 $\mathbf{R}^3$, ，我们可以假设 ℓ 是 z-轴，且不改变任何距离。我们考虑一个多项式 $f \in \mathbf{R}[x, y, z]$ ，使得$\mathbf{V}(f) = C$。

我们考虑一个点 $p \in \mathbf{R}^3$ ，并注意到存在一个圆 C_p ，它包含 p 且以 ℓ为轴。沿着 C_p 移动 p 不会改变 p 与 ℓ中各点之间的距离。特别地，我们可以将 $p = (p_x, p_y, p_z)$ 替换为点 $\left(\sqrt{p_x^2 + p_y^2}, 0, p_z\right)$。因此， ℓ 与C 之间的距离，与 ℓ 和集合之间的距离相同

$$C' = \{(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z) \ : \ f(x, y, z) = 0\}.$$

由于 ℓ 和 C' 包含在平面$\mathbf{V}(y)$中，我们希望应用定理 1.1。然而， C' 可能不是曲线。

我们将$\mathbf{R}^4$ 的坐标记为 X， Y， Z， W，并考虑代数簇

$$U = \mathbf{V}(W^2 - X^2 - Y^2, f(X, Y, Z)) \subset \mathbf{R}^4.$$

由于 f 在 $\mathbf{R}^3$ 中定义了一条曲线，且 X， Y 将 W 确定到一个符号，我们得到 $\dim\ U = 1$。

我们定义标准投影 $\pi_2(X, Y, Z, W) = (Z, W)$。注意，当且仅当点 $(z, \pm x)$ 属于 $\pi_2(U)$ 时，点 $(x, 0, z)$ 才属于C'。由于 C 不包含在与ℓ正交的平面中，推论 2.3 表明， C 与这样的平面相交于 $O(1)$ 个点。因此， $\pi_2(U)$ 中的每个点都有 U 投影到该点的 $O(1)$ 个点。定理 2.5 表明， C' 是一维代数簇。由于 C' 可能是可约的，因此它可能不是曲线。

由于 C 包含来自每个与 ℓ正交的平面的 $O(1)$ 个点，因此 C' 不包含与 ℓ正交的直线。由于 C 不包含在以 ℓ为中心的圆柱中，推论 2.3 表明， C 与这样的圆柱相交于 $O(1)$ 个点。这进而表明 C' 不包含与 ℓ平行的直线。

考虑 C上的一个由 n 个点组成的集合 $\mathcal{P}$ 。令 $\mathcal{P}'$ 为按照上述方法将 $\mathcal{P}$ 上的点映射到 C' 后得到的点集。由于 C 中的 $O(1)$ 个点被映射到 C'上的同一个点，因此有 $|\mathcal{P}'| = \Theta(n)$。定理 2.4 表明 C' 由有限个分支构成。因此， C' 存在一个不可约分支，其中包含 $\mathcal{P}'$的 $\Theta(n)$ 个点。分别对 ℓ 和 C'的每个一维不可约分支应用定理 1.1，即可完成证明。

□

4 特殊形式的函数

本节研究（6）中定义的特殊形式的函数。我们首先证明引理 1.8，该引理提供了一种检验函数是否不属于特殊形式的方法。先回顾该引理的陈述，其中 ρ_s 是 ρ 关于 s 的一阶偏导数。

引理 1.8。 设 $\rho : (0,1)^2 \to$ **实数集** 是一个具有特殊形式的光滑函数，使得在 **实数集**^{2} 中的每个开邻域内都有 $\rho_s \neq 0$ 和$\rho_t \neq 0$ 。那么存在 **实数集**^{2} 中的一个开邻域，使得

$$\frac{\partial^2(\ln|\rho_s/\rho_t|)}{\partial s \partial t} \equiv 0.$$

证明。 根据定义，存在开区间 I_1, I_2, I_3 以及光滑函数 $\phi_1: I_1 \to$ **实数集** $\phi_2: I_2 \to$ **实数集**,$\phi_3: I_3 \to$ **实数集**，使得每个 $(s,t) \in I_1 \times I_2$ 都满足

$$\rho(s,t) = \phi_3(\phi_1(s) + \phi_2(t)).$$

根据对 ρ_s 和 ρ_t 的假设，存在一个开集 $U \subset I_1 \times I_2$，其中 ρ_s 和 ρ_t 始终不为零。在 U 中，我们有

$$\rho_s = \frac{\partial[\phi_3(\phi_1(s) + \phi_2(t))]}{\partial s} = \phi_3'(\phi_1(s) + \phi_2(t)) \cdot \phi_1'(s),$$

$$\rho_t = \frac{\partial[\phi_3(\phi_1(s) + \phi_2(t))]}{\partial t} = \phi_3'(\phi_1(s) + \phi_2(t)) \cdot \phi_2'(t).$$

由这些方程可得

$$\frac{\partial^2(\ln|\rho_s/\rho_t|)}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2(\ln|\phi_1'(s)/\phi_2'(t)|)}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2(\ln|\phi_1'(s)| - \ln|\phi_2'(t)|)}{\partial s \partial t} = 0,$$

对所有 $(s,\ t) \in U$. □

接下来，我们利用特殊形式研究仅张成少量距离的构型。回顾一下，两个弧的参数化所对应的距离函数定义于式 (5)。

引理 4.1（特殊形式蕴含少量距离）。 设 $A_1, A_2 \subset$ **实数集**^{3} 为弧，γ_1, γ_2 分别为这些弧的参数化。若 γ_1 和 γ_2 的距离函数具有特殊形式，则 (A_1, A_2) 仅张成少量距离。

证明。设 $\rho(s,t)$ 为 γ_1 和 γ_2 的距离函数。设 $I_1, I_2, I_3 \subseteq (0,1)$ 和 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 如定义 $\rho(s,t)$ 具有特殊形式时所述。根据定义，$\phi_1(I_1)$ 和 $\phi(I_2)$ 是实数集中的非空区间。我们首先考虑 $\phi_1(I_1)$ 是单点的情形。在这种情形下，从 $\gamma_1(I_1)$ 中选择哪个点，都不影响它与 $\gamma_2(I_2)$ 中任一点之间的距离。因此，$\gamma_1(I_1)$ 中的 m 个点与 $\gamma_2(I_2)$ 中的 n 个点之间至多有 n 种不同距离。对称地，当 $\phi_2(I_2)$ 是单点时，至多有 m 种距离。

剩下的情形是，$\phi_1(I_1)$ 和 $\phi_2(I_2)$ 都是含有无穷多个点的区间。设 $p \in \phi_1(I_1)$ 和 $q \in \phi_2(I_2)$ 分别为这些区间的内点。按照下文所述，令 $\varepsilon > 0$ 足够小。对于 $1 \le i \le m$，我们设 $x_i = p + i\varepsilon$。对于 $1 \le i \le n$，我们设 $x_i' = q + i\varepsilon$。当 ε 足够小时，我们有 x_1、.....、$x_m \in \phi_1(I_1)$ 和 x_1'、.....、$x_n' \in \phi_2(I_2)$。令 $s_i \in I_1$ 满足 $\phi_1(s_i) = x_i$，并令 $t_j \in I_2$ 满足 $\phi_2(t_j) = x_j'$。于是

$$\rho(s_i, t_j) = \phi_3(\phi_1(s_i) + \phi_2(t_j)) = \phi_3(x_i + x_j') = \phi_3((x + x') + (i + j)\varepsilon).$$

注意到，表达式 $i + j$ 有 $m + n - 1$ 个不同的取值。这意味着 $\rho(s_i,\ t_j)$ 至多有 $m + n - 1$ 个不同的取值。由此可得，集合 $\mathcal{P}_1 = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset A_1$ 和 $\mathcal{P}_2 = \{x_1', \ldots, x_n'\} \subset A_2$ 张成了 $O(m+n)$ 个不同距离。

□

当两条弧包含于曲线中时，引理 4.1 的逆命题成立。

引理 4.2。 设 $A_1, A_2 \subset \mathbf{R}^3$ 是弧，γ_1, γ_2 分别是这些弧的参数化。设 C_1 和 C_2 分别是包含 A_1 和 A_2 的曲线。如果 γ_1 和 γ_2 的距离函数不具有特殊形式，那么 (A_1, A_2) 张成许多距离。

为证明引理 4.2，我们依赖 Raz、Sharir 和 de Zeeuw 的以下结果 [16, 第 2.1 节和第 2.3] 节。另见 Raz [15,引理 2.4]。

定理 4.3。 设 $F \in \mathbf{R}[x,y,z]$ 为一个常数次数不可约多项式，且其所有一阶偏导数 F 均不恒等于零。则以下两种情形至少有一种成立。

(i) 对所有 A、$B \subset$ **实数集**，若满足 $|A| = m$ 和 $|B| = n$，则有

$$\left|\left\{(a,a',b,b') \in A^2 \times B^2 \mid \exists c \in \mathbf{R} : F(a,b,c) = F(a',b',c) = 0\right\}\right| \;=\; O\left(m^{4/3}n^{4/3} + m^2 + n^2\right).$$

(ii) 存在一个次数为 $O(1)$ 的一维代数簇 $Z^* \subset \mathbf{V}(F)$，满足以下性质。对于每个 $p \in \mathbf{V}(F) \setminus Z^*$，都存在开区间 I_1、I_2、$I_3 \subset$ **实数集** 以及具有解析逆函数的实解析函数φ_1、φ_2、φ_3，使得 $p \in I_1 \times I_2 \times I_3$，并且对于所有$(x、\ y、\ z) \in I_1 \times I_2 \times I_3$，有

$$(x,y,z) \in \mathbf{V}(F) \quad \textit{if and only if} \quad \varphi_1(x) + \varphi_2(y) + \varphi_3(z) = 0.$$

引理 *4.2* 的证明。 假设 γ_1 和 γ_2 的距离函数不具有特殊形式。我们对**实数集**^{3} 进行旋转，使得 C_1 和 C_2 不包含在与 yz-平面平行的平面内。旋转不会改变**实数集**^{3}中的距离。因此，旋转不会改变距离函数是否具有特殊形式。

由于实数集$\mathbf{R}^d$中的每个代数簇都是一个多项式的零点集，因此存在 $f_1, f_2 \in \mathbf{R}[x,y,z]$，使得 $C_1 = \mathbf{V}(f_1)$ 和 $C_2 = \mathbf{V}(f_2)$。我们考虑点 $p = (p_x, p_y, p_z) \in C_1$ 和 $q = (q_x, q_y, q_z) \in C_2$，它们之间的距离为 $\delta \in \mathbf{R}$。令 $\Delta = \delta^2$，得到

$$\begin{aligned} f_1(p_x,p_y,p_z) &= 0, \\ f_2(q_x,q_y,q_z) &= 0, \\ (p_x-q_x)^2 + (p_y-q_y)^2 + (p_z-q_z)^2 &= \Delta. \end{aligned}$$

将 $p_x, p_y, p_z, q_x, q_y, q_z, \Delta$ 视为七维空间 $\mathbf{R}^7$ 的坐标时，上述方程组定义了一个代数簇 $U \subset \mathbf{R}^7$。由于 f_1 定义了一条曲线，该方程组的第一个方程定义了 p_x, p_y, p_z的一维取值集合。同样，该方程组的第二个方程定义了 q_x, q_y, q_z的一维取值集合。当 $p_x, p_y, p_z, q_x, q_y, q_z$ 的值固定时，第三个方程唯一确定 Δ。这意味着 $\dim(U) = 2$。

令 π :**实数集**$^7 \to$ **实数集**^{3} 为如下定义的投影

$$\pi(p_x,p_y,p_z,q_x,q_y,q_z,\Delta) = (p_x,q_x,\Delta).$$

我们断言，U_3 中的每个点都有 $O(1)$ 个 U 上的点投影到它。事实上，回想一下，C_1 不包含在与 yz-平面平行的平面中。定理 2.2 表明，C_1 与这样的平面相交于 $O(1)$ 个点。也就是说，C_1 上具有相同 x坐标的点的数量为 $O(1)$。对 C_2也有对称的论证。因此，每个三元组 $(p_x,\ q_x,\ \Delta) \in U_3$对应于 U上的 $O(1)$ 个点。由于 $\dim\ U = 2$，定理 2.5 表明，U_3是一个维数为二的半代数集。令 $F \in$ **实数集**$[p_x, q_x, \Delta]$ 满足$\mathbf{Z}(F) = U_3$。

研究 F。 现在我们证明，F涉及全部三个变量 p_x，q_x，Δ。回想一下，固定的 p_x对应于 $O(1)$ 个点 $p \in C_1$，而固定的 q_x 对应于 $O(1)$ 个点 $q \in C_2$。这意味着，对于固定的 p_x，q_x，有 $O(1)$ 个 Δ 的取值满足 $(p_x,\ q_x,\ \Delta) \in U_3$。换言之，每条平行于 Δ-轴的直线都与 U_3 相交于 $O(1)$ 个点。因此，Δ出现在 F的定义中。

若 C_1 是圆，且 C_2 是 C_1 的轴，那么 $\rho(s,\ t)$ 不依赖于 s。这意味着 $\rho(s,\ t)$ 具有特殊形式。交换 C_1 和 C_2的角色时，也会出现相同情况。由于 γ_1 和 γ_2 的距离函数不具有特殊形式，因此 C_1 和 C_2 不是一个圆及其轴。

考虑 p_x 和 Δ 的固定值，使得有无穷多个 q_x 的取值满足 $(p_x, q_x, \Delta) \in U_3$。由于 p_x 对应于 $O(1)$ 个点 $p \in C_1$，因此存在这样一个点 p，它到无穷多个点 $q \in C_2$ 的距离为 $\sqrt{\Delta}$。设 S 为以 p 为中心、半径为 $\sqrt{\Delta}$ 的球面。由此可知，C_2 与 S 有无限交集。根据推论 2.3，$C_2 \subset S$。假设存在 $(p'_x, \Delta') \neq (p_x, \Delta)$，使得有无穷多个 q_x 的取值满足 $(p'_x, q_x, \Delta') \in U_3$。那么存在一个 p'，其 x 坐标为 p'_x，使得以 p' 为中心、半径为 $\sqrt{\Delta'}$ 的球面 S' 包含 C_2。我们有 $p_x \neq p'_x$，否则 $S \cap S' = \emptyset$。因此，C_2 是圆 $S \cap S'$。

接续上一段，接下来我们假设存在无穷多个对 (p_x, Δ)，每一对都对应无穷多个满足 $(p_x, q_x, \Delta) \in U_3$ 的 q_x 值。与前面一样，这意味着 C_2 是一个圆，并且每一对 (p_x, Δ) 都对应一个不同的 p_x。若对应的点 $p \in C_1$ 要与 C_2 上的无穷多个点等距，则点 p 必须位于 C_2 的轴上。也就是说，C_1 上有无穷多个点位于 C_2 的轴上。推论 2.3 表明，C_1 是 C_2 的轴。这与上述“C_1 和 C_2 不是一个圆及其轴”的说法相矛盾。由此可知，满足上述条件的对 (p_x, Δ) 数量有限。换言之，U_3 包含一条与 q_x 轴平行的 $O(1)$ 直线。因此，q_x 出现在 F 的定义中。对 p_x 也有对称的论证。

由于 F 的定义涉及全部三个坐标，因此 F 的任何一阶偏导数都不恒为零。因此，我们可以将定理 4.3 应用于 F。我们根据定理中成立的情形对证明的其余部分进行分类。

情形 (i)。我们首先假设定理 4.3 的情形 (i) 成立。设 $\mathcal{P}_1 \subset A_1$ 和 $\mathcal{P}_2 \subset A_2$ 满足 $|\mathcal{P}_1| = m$ 和 $|\mathcal{P}_2| = n$。令 $\mathcal{P}_{1,x}$ 和 $\mathcal{P}_{2,x}$ 分别为 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 中各点的 x 坐标集合。我们定义

$$Q = \left\{(a, a', b, b') \in \mathcal{P}_1^2 \times \mathcal{P}_2^2 \mid \exists \Delta \in \mathbf{R} : F(a_x, b_x, \Delta) = F(a'_x, b'_x, \Delta) = 0\right\},$$

$$Q_x = \left\{(a_x, a'_x, b_x, b'_x) \in \mathcal{P}_{1,x}^2 \times \mathcal{P}_{2,x}^2 \mid \exists \Delta \in \mathbf{R} : F(a_x, b_x, \Delta) = F(a'_x, b'_x, \Delta) = 0\right\}.$$

定理 4.3 的情形 (i) 意味着

$$|Q_x| = O\left(m^{4/3}n^{4/3} + m^2 + n^2\right).$$

由于每个 x 坐标在 C_1 和 C_2 中都出现 $O(1)$ 次，因此四元组 $(a_x, a'_x, b_x, b'_x) \in Q_x$ 对应于 Q 的 $O(1)$ 个四元组。这进而意味着

$$|Q| = O(|Q_x|) = O\left(m^{4/3}n^{4/3} + m^2 + n^2\right). \tag{7}$$

对于 $\delta \in$ **实数集**，令 m_δ 表示在 $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ 中距离为 δ 的点对数。满足 $|ab| = |a'b'| = \delta$ 的四元组 $(a,\ a',\ b,\ b') \in Q$ 的数量为 m_δ^2。因此 $|Q| = \sum_\delta m_\delta^2$.。我们还注意到，每个 $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ 点对恰好贡献一个 m_δ。这意味着 $\sum_\delta m_\delta = mn$。将这些观察与柯西–施瓦茨不等式结合，可得

$$|Q| = \sum_{\delta \in \mathbf{R}} m_\delta^2 \geq \frac{(\sum_\delta m_\delta)^2}{D(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)} = \frac{m^2 n^2}{D(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)}.$$

将此结果与 (7) 结合，可得

$$\frac{m^2 n^2}{D(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)} = O\left(m^{4/3}n^{4/3} + m^2 + n^2\right), \quad \text{or} \quad D(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \Omega\left(\min\left\{m^{2/3}n^{2/3}, m^2, n^2\right\}\right).$$

换言之，A_1 和 A_2 张成了许多距离。

情形（ii）。现在我们假设定理 4.3 的情形（ii）成立。我们设

$$Z = \{(\gamma_{1,x}(s), \gamma_{2,x}(t), \rho(s,t)) \ : \ s,t \in (0,1)\}.$$

根据定义， Z 包含于 U_3中。它是一个连续二维半代数集。直观地说，我们可以将 Z 想象成曲面 U_3的一块。

设 Z^* 如定理 4.3 的情形（ii）所述。我们考虑 $v \in Z \setminus Z^*$。这样的 v 是存在的，因为 Z 是二维的，而 Z^* 是一维的。根据定理 4.3，存在开区间I_1， I_2， $I_3 \subset \mathbf{R}$ 以及实解析函数 $\phi_1 \colon I_1 \to \mathbf{R}$ $\phi_2 \colon I_2 \to \mathbf{R}$ $\phi_3 \colon I_3 \to \mathbf{R}$，它们具有解析逆函数，使得 $v \in I_1 \times I_2 \times I_3$，并且每个（$p_x$， q_x， Δ） $\in I_1 \times I_2 \times I_3$ 都满足

$$(p_x, q_x, \Delta) \in \mathbf{V}(F) \quad \text{if and only if} \quad \phi_1(p_x) + \phi_2(q_x) + \phi_3(\Delta) = 0.$$

令 ϕ_1'（p_x） $= -\phi_1$（p_x）以及 ϕ_2'（q_x） $= -\phi_2$（q_x）。那么，我们可以将 ϕ_1（p_x） $+ \phi_2$（q_x） $+ \phi_3$（Δ） $= 0$重新整理为 $\Delta = \phi_3^{-1}$（ϕ_1'（p_x） $+ \phi_2'$（q_x））。结合上述结果可得

$$(p_x, q_x, \Delta) \in \mathbf{V}(F) \quad \text{if and only if} \quad \Delta = \phi_3^{-1}(\phi_1'(p_x) + \phi_2'(q_x)). \tag{8}$$

我们记作 $v = (p_{x,0}, q_{x,0}, \Delta_0)$。由于 $v \in Z$，存在满足条件的 $s_0, t_0 \in (0,1)$：

$$(\gamma_{1,x}(s_0), \gamma_{2,x}(t_0), \rho(s_0,t_0)) = (p_{x,0}, q_{x,0}, \Delta_0).$$

存在开区间 $S \subset (0,1)$ 和 $T \subset (0,1)$，使得 $s_0 \in S$, $t_0 \in T$, $\gamma_{1,x}(S) \subset I_1$, $\gamma_{2,x}(T) \subset I_2$，并且 $\rho(S,T) \subset I_3$. 考虑 $s \in S$和 $t \in T$，使得 $\rho(s,t) = \Delta$。于是，$(\gamma_{1,x}(s)\, \gamma_{2,x}(t)\ \Delta) \in \mathbf{V}(F)$。将此与 (8) 结合可得

$$\rho(s,t) = \phi_3^{-1}\big(\phi_1'(\gamma_{1,x}(s)) + \phi_2'(\gamma_{2,x}(t))\big).$$

由于这对任意的 $s \in S$和 $t \in T$都成立，我们得出 $\rho(s,t)$ 具有特殊形式。这个矛盾意味着情形（ii）不可能发生。 □

结合引理 4.1 和引理 4.2，我们得到定理 1.9。我们先回顾该定理的陈述。

定理 1.9. 实数集$\mathbf{R}^3$ 中的任意一对曲线，要么确定少量距离，要么确定大量距离。

证明. 考虑两条曲线 $C_1, C_2 \subset$ **实数集**^{3}。根据引理 2.6，每条曲线都是 $O(1)$ 条弧和点的并。我们首先假设存在两条弧，每条分别来自一条曲线，且其参数化的距离函数具有特殊形式。在这种情况下，引理 4.1 表明这两条弧确定少量距离。由此可知，(C_1, C_2)确定少量距离。

接下来，我们假设 C_1 和 C_2 的任意两条弧都没有特殊形式的距离函数。设 $\mathcal{P}_1 \subset C_1$ 为一个由 m 个点组成的集合， $\mathcal{P}_2 \subset C_2$ 为一个由 n 个点组成的集合。由于 C_1 是由 O条弧和点组成的并集，因此存在一条 $A_1 \subset C_1$ 的弧，其中包含 $\mathcal{P}_1$中的 $\Theta(m)$ 个点。同理，存在一条 $A_2 \subset C_2$ 的弧，其中包含 $\mathcal{P}_2$中的 $\Theta(n)$ 个点。引理 1.7 指出

$$D(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) \geq D(\mathcal{P}_1 \cap A_1, \mathcal{P}_2 \cap A_2) = \Omega\left(\min\left\{m^{2/3}n^{2/3}, m^2, n^2\right\}\right).$$

□

5 跨越少量距离的构型

本节中，我们研究张成少量距离的构型。为证明一个构型张成少量距离，我们证明其距离函数具有特殊形式，然后应用引理 4.1。请注意，在本文中，我们只考虑正圆柱。

引理 5.1。设 $\ell \subset$**实数集**^{3} 是**实数集**^{3} 中的一条直线，C 是一条包含在以 ℓ为中心的圆柱内的曲线。那么(ℓ, C) 跨越少量距离。

证明。我们对空间进行平移和旋转，使 ℓ 成为 z轴。然后对**实数集**^{3} 进行均匀缩放，使 C 包含在以 ℓ为中心、半径为一的圆柱内。这些变换不会改变点集之间距离的数量。首先假设 C上的所有点具有相同的 z坐标。在这种情况下，C 必定是包含在垂直于ℓ的平面内的一个圆。ℓ 上的一个固定点与 C上的每个点形成相同的距离。因此，ℓ 上的 m 个点与 C 上的 n 个点之间的不同距离数量至多为 m。

接下来，假设 C 不是垂直于 ℓ的平面内的圆。在这种情况下，C 上各点的z坐标构成一个无限闭区间 $[z_1, z_2] \subset$ **实数集**。我们将ℓ参数化为 $\gamma_1(s) = (0, 0, s)$。对于 $t \in (z_1, z_2)$，点$(0, 0, s)$与 C 上 z坐标为 t 的点之间的距离函数为

$$\rho(s, t) = 1 + (s - t)^2.$$

令 A 为一条弧，它属于由其 z 坐标参数化的 C。由于 $\rho(s, t)$ 具有特殊形式，由引理 4.1 可知，A 和 ℓ 确定少量距离。 □

在引理 5.1 中，将 C 替换为任何包含一条弧的集合并不困难。也就是说，引理 5.1 可以推广到非代数集。

引理 5.2。设 $L \subset$ **实数集**^{3} 是一条直线，且 C 是一条包含在与 L 正交的平面内的曲线。那么 (L, C) 确定少量距离。

证明。我们对空间进行旋转和平移，使 ℓ 成为 z 轴，并使 C 包含在 xy 平面内。这些变换不会改变点与点之间的距离。我们将点 $(x, y, z) \in$ **实数集**^{3} 的径向坐标定义为 $\sqrt{x^2 + y^2}$。如果 C 的所有点具有相同的径向坐标，那么 C 是一条以 ℓ 为轴的圆。这种情况由引理 5.1 涵盖。

接下来，假设 C 中的点具有多个径向坐标。在这种情况下，径向坐标的集合是一个闭的无限区间 $[r_1, r_2]$。将 ℓ 参数化为$\gamma_1(s) = (0, 0, s)$。对于 $t \in (r_1, r_2)$，点 $(0, 0, s)$ 与 C 中径向坐标为 t 的点之间的距离函数为

$$\rho(s, t) = s^2 + t^2.$$

设 A 是 C 的一段弧，并以其径向坐标为参数进行参数化。由于 $\rho(s, t)$ 具有特殊形式，引理 4.1 表明，A 和 ℓ 产生少量距离。 □

A结合引理 5.1，将引理 5.2 推广到非代数集并不困难 .

Le理 5.3。设 C_1 和 C_2 是共线圆。那么 (C_1, C_2) 产生少量距离 .

证明。我们对$\mathbf{R}^3$ 进行平移、旋转和缩放，使两个圆的轴均为 z轴，C_1 包含于 xy平面，且 C_2 包含于平面$\mathbf{V}(z - 1)$中。此类变换不会改变两个点集之间的距离数量。于是，C_1 可参数化为

$\gamma_1(s) = (r_1 \cos 2\pi s,\ r_1 \sin 2\pi s,\ 0)$，而 C_2 可参数化为 $\gamma_2(t) = (r_2 \cos 2\pi t,\ r_2 \sin 2\pi t,\ 1)$，其中 $s,\ t \in (0,\ 1)$。这些参数化的距离函数为

$$\begin{aligned}\rho(s,t) &= (r_1\cos 2\pi s - r_2 \cos 2\pi t)^2 + (r_1 \sin 2\pi s - r_2 \sin 2\pi t)^2 + 1 \\ &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2(\cos 2\pi s \cdot \cos 2\pi t + \sin 2\pi s \cdot \sin 2\pi t) + 1 \\ &= (1 + r_1^2 + r_2^2) - 2r_1 r_2 \cos 2\pi(s-t).\end{aligned}$$

由于 $\rho(st)$ 具有特殊形式，引理 4.1 表明 C_1 和 C_2 张成少量距离 s. □

垂直圆的情形包含在下面的对数圆情形中。关于共线圆和垂直圆上点集的显式构造，参见 Mathialagan 和 Sheffer [12]。

引理 5.4。设 C_1 和 C_2 为 *CPO* 抛物线。则（C_1, C_2）张成少量距离。

证明。我们对$\mathbf{R}^3$ 进行平移、旋转和均匀缩放，使 C_1 成为抛物线$\mathbf{V}(y - x^2,\ z)$。这些变换不会影响两个集合之间不同距离的数量。由于它们是 CPO 抛物线，存在 $q \in \mathbf{R}$ 使得 $C_2 = \mathbf{V}(y - q + z^2,\ x)$。我们将 C_1 参数化为 $\gamma_1(s) = (s,\ s^2,\ 0)$，将 C_2 参数化为 $\gamma_2(t) = (0,\ q - t^2,\ t)$。于是，距离函数为

$$\rho(s,t) = s^2 + (s^2 + t^2 - q)^2 + t^2 = ((s^2 + t^2) - q)^2 + (s^2 + t^2).$$

由于 $\rho(\ s,\ t)$ 具有特殊形式，引理 4.1 表明 C_1 和 C_2 产生少量距离 . □

术语匹配曲线 指两个椭圆，或一个椭圆和一条双曲线，其定义见 (1) 和 (2)。特别地，按照我们的定义，匹配对数圆不属于曲线。

引理 5.5. 设 C_1 和 C_2 为匹配曲线。那么 (C_1, C_2) 产生少量距离。

证明. 由 (1) 和 (2)，我们可以将 C_1 参数化为 $\gamma_1(s) = (s,\ \sqrt{a - ms^2},\ 0)$，并将 C_2 参数化为 $\gamma_2(t) = (t,\ 0,\ \sqrt{b - mt^2/(m-1)})$。当 $0 < m < 1$ 时，距离函数为

$$\begin{aligned}\rho(s,t) &= (s-t)^2 + (a - ms^2) + (b - mt^2/(m-1)) \\ &= (a+b) + (1-m)s^2 + \frac{1}{1-m}t^2 - 2st \\ &= (a+b) + \left(\sqrt{1-m}\cdot s - \sqrt{\frac{1}{1-m}}\cdot t\right)^2.\end{aligned}$$

当 $m > 1$ 时，上述计算的最后一行变为

$$\rho(s,t) = (a+b) - \left(\sqrt{m-1}s + \sqrt{\frac{1}{m-1}}t\right)^2.$$

无论哪种情况，$\rho(s,\ t)$ 都具有特殊形式。因此，引理 4.1 表明，C_1 和 C_2 张成的距离种类很少。□

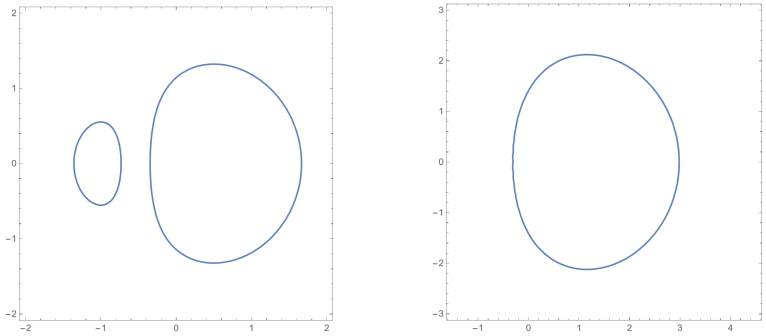
对数圆。回想一下，对数圆定义于（3）中。我们将对数圆的正向弧 定义为由以下条件确定的对数圆子集

$$x^2 + y^2 = D + \ln(x - B).$$

由以下条件确定的子集称为负弧

$$x^2 + y^2 = \ln(B - x).$$

下面我们会看到，这些确实是弧，因为它们具有光滑的参数化。在图6(a)中，正向弧是右侧的连通分支，负弧是左侧的连通分支。对数圆也可能只由一条弧组成。例如，由 $x^2 + y^2 = 2 + 5 \cdot \log |x + 1|$ 定义的对数圆没有负弧（图6(b)）。



(a) $x^2+y^2 = 2+5\cdot\log\ |x+1|$。 (b) $x^2+y^2 = 20+\log\ |x+1|$。

图6：不同类型的对数圆。

现在我们证明定理 1.6。首先回顾该结果的陈述。

定理 1.6。 设 C_1 和 C_2 是匹配对数圆。那么 (C_1, C_2) 张成少量距离。

证明。 根据定义，我们可以对**实数集**[3] 进行旋转、平移和缩放，**使** C_1 和 C_2 如式 (4) 所定义。这些变换不会改变两个点集之间的距离数量。我们先研究 C_1 和 C_2的正向弧。这些弧定义为

$$(x - B)^2 + y^2 = D + A \cdot \ln(x) \quad \text{and} \quad z = 0,$$
$$x^2 + z^2 = D' + A \cdot \ln(x - B) \quad \text{and} \quad y = 0.$$

我们将这两条弧参数化为

$$\gamma_1(s) = \left(s, \sqrt{D + A \cdot \ln(s) - (s - B)^2}, 0\right),$$
$$\gamma_2(t) = \left(t + B, 0, \sqrt{D' + A \cdot \ln(t) - (t + B)^2}\right).$$

这些参数化对应的距离函数为

$$\begin{aligned}\rho(s,t) &= (s - t - B)^2 + \left(D + A \cdot \ln(s) - (s - B)^2\right) + \left(D' + A \cdot \ln(t) - (t + B)^2\right) \\ &= \left(s^2 + t^2 + B^2 - 2st - 2sB + 2tB\right) + \left(D + A \cdot \ln(s) - s^2 + 2sB - B^2\right) \\ &\qquad + \left(D' + A \cdot \ln(t) - t^2 - 2tB - B^2\right) \\ &= -B^2 - 2st + D + D' + A \cdot \ln(s) + A \cdot \ln(t) = -B^2 + D + D' - 2st + A \cdot \ln(st).\end{aligned}$$

由于 $\rho(s,\ t)$ 具有特殊形式，根据引理 4.1，这两条弧张成少量距离。

其他情况的处理方式类似。考虑 C_1的负弧时，我们将 $\log(s)$ 替换为 $\log(-s)$。考虑 C_2 的负弧时，我们将 $\log(t)$ 替换为 $\log(-t)$。在所有情况下，距离函数 $\rho(s,t)$ 都具有特殊形式。

□

6 垂直平面上曲线之间的少量距离

本节中，我们证明定理 1.5。更确切地说，我们证明一个关于垂直平面内弧的更一般结果。

定理 6.1. 设 $A_1, A_2 \subset$ **实数集**^{3} 是分别位于垂直平面内的弧，其参数化分别为 γ_1, γ_2。设 γ_1 与 γ_2 之间的距离函数 $\rho(s,t)$ 具有特殊形式。那么， A_1 与 A_2 中存在非空开子集，它们包含在以下某一对曲线中：

(i) 一条直线 ℓ 和一条位于与 ℓ正交的平面内的曲线；*(ii)* 平行直线；*(iii)* 一条直线 ℓ 和一个位于以 ℓ为中心的圆柱内的椭圆；*(iv)* *CPO* 抛物线；*(v)* 匹配曲线；*(vi)* 匹配对数圆。

在证明定理 6.1 之前，我们注意到定理 1.5 是定理 6.1 的推论。我们先回顾该结果的陈述。

定理 1.5。设 C_1 和 C_2 是分别包含在实数集$\mathbf{R}^3$中的两个垂直平面内的曲线。

(a) 假设 C_1 和 C_2 属于以下情况之一：

- 一条直线 ℓ 和一条包含在与 ℓ正交的平面内的曲线，
- 平行直线，
- 一条直线 ℓ 和一个包含在轴为 ℓ的圆柱内的椭圆，
- *CPO* 抛物线，
- 匹配曲线，
- 垂直圆。

那么(C_1, C_2) 涵盖少量距离。

(b) 如果(C_1, C_2) 不是 *(a)* 部分中的某种构型，那么(C_1, C_2) 涵盖许多距离。

证明。 (a) 这直接由定理 1.6 以及引理 5.1、5.2、5.4 和 5.5 得出。

(b) 考虑一个由 m 个点 $\mathcal{P}_1 \subset C_1$ 组成的集合，以及一个由 n 个点 $\mathcal{P}_2 \subset C_2$组成的集合。根据引理 2.6，存在弧 $A_1 \subset C_1$ 和 $A_2 \subset C_2$，使得 $|\mathcal{P}_1 \cap A_1| = \Theta(m)$ 且 $|\mathcal{P}_2 \cap A_2| = \Theta(n)$。令 $\gamma_1(s)$ 和$\gamma_2(t)$ 分别为 A_1 和 A_2的参数化。反设 (A_1, A_2) 涵盖的距离并不多。根据引理 1.7， $\gamma_1(s)$ 和 $\gamma_2(t)$ 的距离函数 $\rho(s,t)$ 具有特殊形式。

根据定理 6.1，存在非空开子集 $A_1' \subset A_1$ 和 $A_2' \subset A_2$，它们包含在某一对特定集合中。定理 6.1 的陈述中将六种可能的集合对编号为 (i)–(vi)。假设我们处于情形 (i)–(v) 之一，这些情形描述的是不可约曲线对。于是， C_1 和 C_2 各自与对应的曲线有无限交集。定理 2.2 蕴含 C_1 和 C_2 分别与相应的曲线共享连通分支。由于这些曲线是不可约曲线，我们得出结论： C_1 和 C_2 就是定理 6.1 中的那两条曲线。这就产生了矛盾，因为当前定理假设 C_1 和 C_2 都不是这对曲线中的任何一条。

还需考虑定理 6.1 的情形 (vi)。也就是说， A_1 和 A_2 包含在相匹配的对数圆中。由于对数圆的定义方程中包含对数，我们无法像上一段那样使用定理 6.1。不过，按 (3) 定义的集合与一条曲线仍有有界交集。例如，参见 Khovanskiĭ [10]的《第 1 章》。其余论证与上一段相同，并由此得出矛盾。 □

本节余下部分将用于证明定理 6.1。我们先证明三个引理，这些引理是证明该定理所必需的。读者或许可以先略读这些引理，之后如有需要再回来细读。

结合引理 1.4，下面的引理研究包含在圆柱中的椭圆。记号 $\langle u, v\rangle$ 表示 $u, v \in$ **实数集**^{3} 的标准点积。

引理 6.2. 对于非零的 $\mu, D \in$ **实数集**，我们考虑直线

$$\ell = \mathbf{V}(x - \mu z, y) \subset \mathbf{R}^3,$$

以及椭圆

$$C = \mathbf{V}\left(\frac{x^2}{\mu^2+1} + y^2 - D, z\right) \subset \mathbf{R}^3.$$

那么 C 包含在以 ℓ 为中心的圆柱中。

证明. 我们考虑一个沿 ℓ 方向的单位向量:

$$v = \left(\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\right).$$

我们还考虑一个点

$$p = \left(p_x, \sqrt{D - \frac{p_x^2}{\mu^2+1}}, 0\right) \in C.$$

p 在 ℓ 上的正交投影是

$$\langle p, v\rangle \cdot v = p_x \cdot \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \cdot v = \left(\frac{\mu^2 p_x}{1+\mu^2}, 0, \frac{\mu p_x}{1+\mu^2}\right).$$

令 $q = \langle p, v\rangle \cdot v$。 p 与 ℓ 之间的距离等于 p 与 q之间的距离。该距离的平方为

$$\left(p_x - \frac{\mu^2 p_x}{1+\mu^2}\right)^2 + D - \frac{p_x^2}{\mu^2+1} + \left(\frac{\mu p_x}{1+\mu^2}\right)^2$$

$$= D + p_x^2 \cdot \frac{(1+\mu^2)^2 - 2\mu^2(1+\mu^2) + \mu^4 - (1+\mu^2) + \mu^2}{(1+\mu^2)^2} = D.$$

由于这对每个 $p \in C$都成立，因此我们得出 C 包含在以ℓ为中心、半径为 $\sqrt{D}$ 的圆柱内。 —

□

下面的引理刻画了距离函数 $\rho(s,t)$何时不依赖于 s 或 t。回想一下， ρ_s 和 ρ_t 分别是 $\rho(s,t)$关于 s 和 t的一阶偏导数。

引理 6.3。 设 $\gamma_1(s)$ 和 $\gamma_2(t)$ 分别是弧 A_1 和 A_2的参数化。设 $\rho(s,t)$为 $\gamma_1(s)$ 和 $\gamma_2(t)$的距离函数。假设 ρ_s 或 ρ_t 恒为零。那么其中一条弧包含在一个圆 C 中，另一条弧则包含在 C的轴上。

证明。 不失一般性，假设 ρ_s 恒等于零。考虑两个点p_1， $p_2 \in A_2$。根据关于 ρ_s的假设， A_1 上的点到 p_1的距离相等。也就是说， A_1 包含在以 p_1为中心的球面 S_1 上。类似地， A_1 包含在以p_2为中心的球面 S_2 上。由于 $S_1 \cap S_2$ 是一个圆，因此 A_1 包含在圆 C上。圆 C 的一段弧到点 p 的距离相等，当且仅当 p 位于 C的轴上。因此， A_2 包含在C的轴上。

□

我们还需要以下高度专门化的结果。

引理 6.4。 对于非空开区间 $I_1, I_2 \subset$ **实数集**，考虑光滑函数 $f\colon I_1 \to$ **实数集** 和$g\colon I_2 \to$**实数集**，使得

$$\sigma(s,t) = (s-t)^2 + f(s)^2 + g(t)^2.$$

If

$$\frac{\partial^2(\ln|\sigma_s/\sigma_t|)}{\partial s \partial t} \equiv 0, \tag{9}$$

那么存在 $A_1, A_2, A_3 \in$**实数集**，满足以下情形之一：

(i) $f(s)f'(s) = A_1 + A_2 s - s, \quad A_2 \neq 0, \quad and \quad g(t)g'(t) = -A_1/A_2 + t/A_2 - t,$

(ii) $f(s)f'(s) = \frac{A_1}{s+A_2} + A_3 - s \quad and \quad g(t)g'(t) = \frac{A_1}{t-A_3} - A_2 - t.$

证明。 设 $\mu(s) = s + f(s)f'(s)$，且 $\nu(t) = t + g(t)g'(t)$。那么

$$\begin{aligned} \sigma_s &= 2(s-t) + 2f(s)f'(s) = 2(\mu(s) - t), \\ \sigma_t &= 2(t-s) + 2g(t)g'(t) = 2(\nu(t) - s). \end{aligned} \tag{10}$$

Let σ_{st} 是 σ 关于 s 和 t 的二阶导数，并注意到 $\sigma_{st} = -2$.

研究 $\mu(s)$ **和** $\nu(t)$。 在 (9) 处对对数中的商进行拆分，可得

$$\frac{\partial^2 \ln|\sigma_s|}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 \ln|\sigma_t|}{\partial s \partial t}.$$

应用对数求导法则可得

$$\frac{\partial(\sigma_{st}/\sigma_s)}{\partial s} = \frac{\partial(\sigma_{st}/\sigma_t)}{\partial t}.$$

将此结果与上述 $\sigma_s, \sigma_t, \sigma_{st}$ 的值结合，得到

$$\frac{\partial(-2/(2(\mu(s)-t)))}{\partial s} = \frac{\partial(-2/(2(\nu(t)-s)))}{\partial t},$$

通过计算上述导数，我们得到

$$\frac{\mu'(s)}{(\mu(s)-t)^2} = \frac{\nu'(t)}{(\nu(t)-s)^2}. \tag{11}$$

假设 (9) 意味着 σ_s 和 σ_t 永不为零。将此结果与 (10) 结合，得到$\mu(s) \neq t$ 和 $\nu(t) \neq s$。因此，(11) 中的分母永不为零。

F对于固定的 $t \in I_2$，令 $C_1 = t$、 $C_2 = \nu'(t)$ 和 $C_3 = \nu(t)$。于是，(11) 变为

$$\frac{\mu'(s)}{(\mu(s)-C_1)^2} = \frac{C_2}{(C_3-s)^2}.$$

两边根据 s 积分可得

$$\frac{1}{\mu(s)-C_1} = \frac{-C_2}{C_3-s} + C_4 = \frac{C_3C_4 - C_4 s - C_2}{C_3-s},$$

对于某个 $C_4 \in$**实数集**。由于该方程的左侧不为零，因此有 $C_3C_4 - C_4s - C_2 \neq 0$。于是我们可以将该方程重新整理为

$$\mu(s) = \frac{C_3 - s}{C_3C_4 - C_4s - C_2} - C_4$$

当 $C_4 = 0$ 时，我们可以将上式改写为 $\mu(s) = B_1 + B_2s$，其中某个 $B_1,\ B_2 \in$ **实数集**。当 $C_4 \neq 0$时，我们可以将上式改写为

$$\mu(s) = \frac{B_1}{B_2 + s} + B_3.$$

我们将 $\mu(s)$的第一种形式称为线性形式，第二种称为有理形式。固定一个 s，用类似的论证可得，要么 $\nu(t) = B_1' + B_2't$，要么 $\nu(t) = \frac{B_1'}{B_2'+t} + B_3'$。 ——

我们将 (11) 改写为

$$\mu'(s)(\nu(t) - s)^2 = \nu'(t)(\mu(s) - t)^2. \tag{12}$$

两个线性形式的情形。我们首先假设 $\mu(s)$ 和 $\nu(t)$ 都具有线性形式。将这些形式代入(12)可得

$$B_2(B_1' + B_2't - s)^2 = B_2'(B_1 + B_2s - t)^2, \quad \text{or equivalently}$$

$$B_2(B_1'^2 + B_2'^2t^2 + s^2 + 2B_1'B_2't - 2B_1's - 2B_2'st) = B_2'(B_1^2 + B_2^2s^2 + t^2 + 2B_1B_2s - 2B_1t - 2B_2st).$$

消去两边相同的最后一项，得到

$$B_2(B_1'^2 + B_2'^2t^2 + s^2 + 2B_1'B_2't - 2B_1's) = B_2'(B_1^2 + B_2^2s^2 + t^2 + 2B_1B_2s - 2B_1t) \tag{13}$$

比较两边 s^2 的系数，可得 $B_2 = B_2^2B_2'$。t^2 的系数表明 $B_2' = B_2(B_2')^2$。结合这两个结论可知，要么 $B_2 = B_2' = 0$，要么$B_2B_2' = 1$。当 $B_2 = B_2' = 0$ 时，$\mu(s)$ 和 $\nu(t)$ 都是常函数，因此引理的情形（ii）中 $A_1 = 0$ 成立。当 $B_2B_2' = 1$ 时，比较 (13) 中 t 的系数可得$B_1' = -B_1B_2'$。我们可以将其改述为 $B_1' = -B_1/B_2$，从而得到 $\nu(t) = -B_1/B_2 + t/B_2$。这就是情形（i）。

一个线性形式的情形。接下来考虑 $\mu(s)$ 是线性形式，而 $\nu(t)$ 是有理形式的情形。在这种情况下，(12) 变为

$$B_2\left(\frac{B_1'}{B_2' + t} + B_3' - s\right)^2 = \frac{-B_1'}{(B_2' + t)^2}(B_1 + B_2s - t)^2.$$

将两边乘以 $(B_2' + t)^2$，得到

$$B_2(B_1' + (B_3' - s)(B_2' + t))^2 = -B_1'(B_1 + B_2s - t)^2.$$

比较两边 s^2t^2 的系数可得 $B_2 = 0$。于是上述方程变为 $0 = B_1'(B_1 - t)^2,$，进而可得 $B_1' = 0$。再次注意到，$\mu(s)$ 和 $\nu(t)$ 都是常数，因此我们处于情形（ii），其中 $A_1 = 0$。

$\mu(s)$ 是有理形式而 $\nu(t)$ 是线性形式的情形，可以用对称的方法处理。

两个有理形式的情形。我们考虑 $\mu(s)$ 和 $\nu(t)$ 都具有有理形式的情形。在这种情形下，(12) 变为

$$\frac{B_1}{(B_2 + s)^2}\left(\frac{B_1'}{B_2' + t} + B_3' - s\right)^2 = \frac{B_1'}{(B_2' + t)^2}\left(\frac{B_1}{B_2 + s} + B_3 - t\right)^2.$$

两边乘以 $(B_2+s)^2(B_2'+t)^2$ 得到

$$B_1(B_1'+(B_3'-s)(B_2'+t))^2 = B_1'(B_1+(B_3-t)(B_2+s))^2.$$

比较 s^2t^2 的系数可得 $B_1 = B_1'$. 。若 $B_1 = B_1' = 0$，则 $\mu(s)$ 和 $\nu(t)$ 是常数，且我们处于情形（ii），其中 $A_1 = 0$。否则，上述方程变为

$$(B_1+(B_3'-s)(B_2'+t))^2 = (B_1+(B_3-t)(B_2+s))^2, \quad \text{or equivalently}$$

$$B_1+(B_3'-s)(B_2'+t) = \pm(B_1+(B_3-t)(B_2+s)).$$

$\pm$ 符号必须替换为加号，否则 st 的系数将不匹配。比较 s 的系数可得 $B_2' = -B_3$。比较 t 的系数可得 $B_3' = -B_2$。由此可得 $\nu(t) = \frac{B_1}{-B_3+t} - B_2$，这就是情形（ii）。

□

我们终于可以证明定理 6.1 了。

定理 *6.1* 的证明。通过旋转和平移**实数集**^{3}, ，我们可以假设 A_1 包含于 xy-平面中，而 A_2 包含于 xz-平面中。也就是说，$\gamma_{1,\ z}(s)$ 和 $\gamma_{2,\ y}(t)$ 均恒等于零。若 γ_1 的 x-坐标在 (0，1) 的某个区间上为常数，则 A_1 包含一条平行于 y-轴的线段。这意味着我们处于情形（i）。当 γ_2 的 x-坐标在 (0，1) 的某个区间上为常数时，类似的论证同样成立。因此，我们可以假设 $\gamma_{1,\ x}$ 和 $\gamma_{2,\ x}$ 在任何区间上都不是常数。

接下来考虑这样的情形：在 $(0,1)^2$ 的某个非空邻域内，$\rho_s \equiv 0$ 或 $\rho_t \equiv 0$。将 A_1' 和 A_2' 定义为相应的子弧后，由引理 6.3 可知我们处于情形 (i)。因此，我们可以假设在每个邻域内，$\rho_s \neq 0$ 和 $\rho_t \neq 0$。根据引理 1.8，存在非空开区间 $I_1, I_2 \subset (0,1)$，使得

$$\frac{\partial^2 \ln|\rho_s/\rho_t|}{\partial s \partial t} \equiv 0 \quad \text{in } I_1 \times I_2.$$

由于 $\gamma_{1,x}$ 和 $\gamma_{2,x}$ 在任何区间内都不是常数，存在 $s_0 \in I_1$ 和 $t_0 \in I_2$，使得 $\gamma_{1,x}'(s_0) \neq 0$ 且 $\gamma_{2,x}'(t_0) \neq 0$. 。根据反函数定理，存在 $\gamma_{1,x}(s_0)$ 的一个邻域 $J_1 \subset \mathbb{R}$，以及 $\gamma_{2,x}(t_0)$ 的一个邻域 $J_2 \subset \mathbb{R}$，在这些邻域内，$\gamma_{1}^{-1},_x$ 和 $\gamma_{2}^{-1},_x$ 均有定义且光滑。我们考虑参数化 $\widetilde{\gamma}_1(s) = \gamma_1 \circ \gamma_1^{-1},_x$ 和 $\widetilde{\gamma}_2(t) = \gamma_2 \circ \gamma_{2\,x}^{-1}, (t)$。注意，当限制在 J_1 上时，$\widetilde{\gamma}_1(s)$ 参数化了 A_1 的一个子弧。同理，当限制在 J_2 上时，$\widetilde{\gamma}_2(t)$ 参数化了 A_2 的一个子弧。

令 $\widetilde{\rho}(s,t)$ 为 $\widetilde{\gamma}_1(s)$ 和 $\widetilde{\gamma}_2(t)$ 的距离函数。这里存在轻微的符号滥用，因为该距离函数的定义域是 $J_1 \times J_2$，而不是 $(0,1)^2$。我们还设 $f(s) = \widetilde{\gamma}_{1,y}(s)$ 和 $g(t) = \widetilde{\gamma}_{2,z}(t)$。由于 $\widetilde{\gamma}_{1,x}(s) = \gamma_{1,x}((\gamma_{1\,x}^{-1}, (s)) = s$ 且 $\widetilde{\gamma}_{2,x}(t) = \gamma_{2,x}(\gamma_{2\,x}^{-1}, (t)) = t$，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{\rho}(s,t) &= (\widetilde{\gamma}_{1,x}(s) - \widetilde{\gamma}_{1,x}(t))^2 + \widetilde{\gamma}_{1,y}(s)^2 + \widetilde{\gamma}_{2,z}(t)^2 \\ &= (s-t)^2 + f(s)^2 + g(t)^2.\end{aligned}$$

由于 $\widetilde{\rho}(s,\ t) = \rho(\gamma_{1\,x,}^{-1}\ (s)\gamma_{2\,x,}^{-1}\ (t))$，我们有

$$\frac{\partial^2 \ln|\widetilde{\rho}_s/\widetilde{\rho}_t|}{\partial s \partial t} \equiv 0 \quad \text{in } J_1 \times J_2.$$

为完成证明，只需证明存在 $\widetilde{\gamma}_1(J_1)$ 和 $\widetilde{\gamma}_2(J_2)$ 的连续开子集，且它们包含于定理陈述中的某一对集合之中。根据上述内容，我们可以将引理 6.4 应用于 $\widetilde{\rho}(s,\ t)$。该引理意味着存在 $A_1,\ A_2,\ A_3 \in$ **实数集**，满足以下情形之一：

(a) $f(s)f'(s) = A_1 + A_2 s - s, \quad A_2 \neq 0,$ 且 $g(t)g'(t) = -A_1/A_2 + t/A_2 - t,$
(b) $f(s)f'(s) = \frac{A_1}{s+A_2} + A_3 - s$ 且 $g(t)g'(t) = \frac{A_1}{t-A_3} - A_2 - t.$

我们注意到

$$(f(s)^2)' = 2f(s)f'(s) \qquad \text{and} \qquad (g(t)^2)' = 2g(t)g'(t).$$

这又意味着

$$f(s)^2 = 2\int f(s)f'(s)\,ds \qquad \text{and} \qquad g(t)^2 = 2\int g(t)g'(t)\,dt. \tag{14}$$

情形 (a). 我们首先假设处于情形 (a)。那么存在 $A_4, A_5 \in$ **实数集** 使得 (14) 变为

$$\begin{aligned} f(s)^2 &= 2A_1 s + s^2(A_2 - 1) + A_4, \\ g(t)^2 &= -2A_1 t/A_2 + t^2(1/A_2 - 1) + A_5. \end{aligned} \tag{15}$$

当 $A_1 = 0$ 且 $A_2 = 1$时， $f(s)$ 和 $g(t)$ 都是常函数。于是， $\widetilde{\gamma}_1(J_1)$ 和 $\widetilde{\gamma}_2(J_2)$ 是平行于 x-轴的线段。因此我们处于定理的情形（ii）。

当 $A_1 \neq 0$ 且 $A_2 = 1$时，我们得到

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma}_1(J_1) &= \{(s, \sqrt{2A_1 s + A_4}, 0) : s \in J_1\}, \\ \widetilde{\gamma}_2(J_2) &= \{(t, 0, \sqrt{A_5 - 2A_1 t}) : t \in J_2\}. \end{aligned}$$

我们注意到， $\widetilde{\gamma}_1(J_1)$ 是抛物线 $\mathbf{V}(z, x - (y^2 - A_4)/2A_1)$ 的一段。同样， $\widetilde{\gamma}_2(J_2)$ 是抛物线 $\mathbf{V}(y, x + (z^2 - A_5)/2A_1)$ 的一段。不难验证，它们是 CPO 抛物线。特别地，两条抛物线的轴都是 **实数集**^{3} 的 x-轴。因此我们处于情形 (iv)。

接下来考虑 $A_2 \neq 1$ 的情形。在这种情形下，存在 $A_4', A_5' \in \mathbf{R}$ ，使得我们可以将 (15) 重写为

$$\begin{aligned} f(s)^2 &= 2A_1 s + s^2(A_2 - 1) + A_4 = (A_2 - 1)\left(s + \frac{A_1}{A_2 - 1}\right)^2 + A_4', \\ g(t)^2 &= -2A_1 t/A_2 + t^2(1/A_2 - 1) + A_5 = \frac{1 - A_2}{A_2}\left(t + \frac{A_1}{A_2 - 1}\right)^2 + A_5'. \end{aligned}$$

仿照上文推导 CPO 抛物线时的分析，我们得到

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma}_1(J_1) &\subset \mathbf{V}\left(z, y^2 - (A_2 - 1)\left(x + \frac{A_1}{A_2 - 1}\right)^2 - A_4'\right), \\ \widetilde{\gamma}_2(J_2) &\subset \mathbf{V}\left(y, z^2 - \frac{1 - A_2}{A_2}\left(x + \frac{A_1}{A_2 - 1}\right)^2 - A_5'\right). \end{aligned}$$

我们沿 x方向平移$\mathbf{R}^3$ 距离 $-A_1/(A_2 - 1)$。令 $m = 1 - A_2$ ，并注意到 $m/(m-1) = (A_2 - 1)/A_2$。根据本情形的假设， $A_2 \neq 0$，因此 $m \neq 1$。于是，上式变为

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma}_1(J_1) &\subset \mathbf{V}\left(z, y^2 + mx^2 - A_4'\right), \\ \widetilde{\gamma}_2(J_2) &\subset \mathbf{V}\left(y, z^2 + \frac{m}{m-1}x^2 - A_5'\right). \end{aligned}$$

令 $k = m/(m-1)$，并注意到 $m = k/(k-1)$。这使 $\widetilde{\gamma}_1(J_1)$与 $\widetilde{\gamma}_2(J_2)$之间具有对称性：要交换这两条曲线，只需交换 m 和 k，以及 y 轴和 z 轴。若 $m < 0$，则 $k > 0$。因此，我们可以在必要时交换 $\widetilde{\gamma}_1(J_1)$和 $\widetilde{\gamma}_2(J_2)$，并假设 $m > 0$。这意味着 $A_4' > 0$，因为否则 $\widetilde{\gamma}_1(J_1)$至多由一个点组成。当 $A_5' \neq 0$时，上述构成一个匹配对，因此我们处于情形 (v)。

剩下的情形是 $A_5' = 0$。我们有 $0 < m < 1$，否则 $\widetilde{\gamma}_2(J_2)$ 至多由一个点组成。将上式改写为

$$x = \pm z \cdot \sqrt{\frac{1-m}{m}}.$$

我们得出，$\widetilde{\gamma}_2(J_2)$ 包含于两条直线的并集中。根据 $\widetilde{\gamma}_2(J_2)$ 的定义，它是这两条直线之一 ℓ 上的一条线段。

令 ℓ 的斜率为 $\mu = \pm\sqrt{\frac{1-m}{m}}$，注意到 $1/(\mu^2+1) = m$。因此，我们可以将引理 6.2 应用于 ℓ 和包含 $\widetilde{\gamma}_1(J_1)$ 的椭圆。引理指出，该椭圆包含在一个以 ℓ 为中心的圆柱内。这就是情形 (iii)。

情形 (b)。现在假设我们处于情形 (b)。那么存在 $A_4, A_5 \in$ **实数集**，使得 (14) 变为

$$f(s)^2 = 2A_1 \ln|s + A_2| + 2A_3 s - s^2 + A_4,$$
$$g(t)^2 = 2A_1 \ln|t - A_3| - 2A_2 t - t^2 + A_5.$$

重复情形 (a) 的分析可得[3]

$$\widetilde{\gamma}_1(J_1) \subset \mathbf{V}\left(z, x^2 + y^2 - 2A_1 \ln|x + A_2| - 2A_3 x - A_4\right),$$
$$\widetilde{\gamma}_2(J_2) \subset \mathbf{V}\left(y, x^2 + z^2 - 2A_1 \ln|x - A_3| + 2A_2 x - A_5\right).$$

重新整理后，我们得到存在 A_4'，$A_5' \subset$ **实数集**，使得

$$\widetilde{\gamma}_1(J_1) \subset \mathbf{V}\left(z, (x - A_3)^2 + y^2 - 2A_1 \ln|x + A_2| - A_4'\right),$$
$$\widetilde{\gamma}_2(J_2) \subset \mathbf{V}\left(y, (x + A_2)^2 + z^2 - 2A_1 \ln|x - A_3| - A_5'\right).$$

上述集合是匹配对数圆。事实上，考虑将**实数集**[3] 沿 x 方向平移距离 A_2 后得到的集合。这就是情形 (vi)。 □

7 圆锥曲线之间的少量距离

本节证明定理 1.3。该定理是第 5 节结果和以下引理的推论。

引理 7.1。以下所有曲线均位于**实数集**[3]中。

(a) 两个既不共线也不垂直的圆产生许多距离。*(b)* 一个圆和一条双曲线产生许多距离。*(c)* 两条不属于 *CPO* 的抛物线产生许多距离。*(d)* 一条抛物线和一个椭圆产生许多距离。

[3]我们稍微滥用一下记号 $\mathbf{V}(\cdot)$，将一个非多项式函数也放入其中。

(e) 一条抛物线和一条双曲线产生许多距离。*(f)* 两条双曲线产生许多距离。*(g)* 一条双曲线和一个不匹配的椭圆产生许多距离。*(h)* 两个不匹配且不是对齐圆的椭圆产生许多距离

s.

证明。(a) 部分已在 [12], 中证明，因此接下来只需考虑 (b)–(h) 这些情形。由于各个证明几乎完全相同，我们将它们一并给出。将两条曲线记为 C_1 和 C_2。首先对**实数集**^{3} 进行旋转、平移和均匀缩放，得到如下结果。

- 若 C_1 是抛物线，则 $C_1 = \mathbf{v}(y - x^2,\ z)$。
- 若 C_1 是双曲线，则 $C_1 = \mathbf{v}(x^2 - \frac{y^2}{c^2} - 1,\ z)$。
- 若 C_1 是椭圆，则 $C_1 = \mathbf{v}(x^2 + \frac{y^2}{c^2} - 1,\ z)$。

此类变换不会改变两组点之间的距离数 s.

经过上述变换，我们得到 C_1 的一个良好参数化 $\gamma_1(s)$，可能会缺少一个点：

- 如果 C_1 是抛物线，那么 $\gamma_1(s) = (s, s^2, 0)$。
- 如果 C_1 是双曲线，那么 $\gamma_1(s) = \left(\frac{s^2+1}{2s}, c \cdot \frac{1-s^2}{2s}, 0\right)$。
- 如果 C_1 是椭圆，那么 $\gamma_1(s) = \left(\frac{1-s^2}{1+s^2}, c \cdot \frac{2s}{1+s^2}, 0\right)$。

固定 C_1 后，我们无法变换 $\mathbf{R}^3$，使其也能给出 C_2 的一个简单参数化。为了对 C_2 进行参数化，我们使用一个点 $(p, q, r) \in \mathbf{R}^3$ 以及正交向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{R}^3$：

- 如果 C_2 是抛物线，那么 $\gamma_2(t) = (p, q, r) + t \cdot \mathbf{v}_1 + t^2 \cdot \mathbf{v}_2$。
- 若 C_2 是双曲线，则 $\gamma_2(t) = (p,\ q,\ r) + \frac{t^2+1}{2t}\mathbf{v}_1 + \frac{t^2-1}{2t}\mathbf{v}_2$。
- 若 C_2 是椭圆，则 $\gamma_2(t) = (p,\ q,\ r) + \frac{t^2-1}{t^2+1}\mathbf{v}_1 + \frac{2t}{t^2+1}\mathbf{v}_2$。

与前面一样，这些参数化可能会排除 C_2 中的一个点。

设 $\rho(s,\ t)$ 为 $\gamma_1(s)$ 与 $\gamma_2(t)$ 的距离函数，定义见 (5)。根据引理 1.7，要么 $\rho(s,\ t)$ 具有特殊形式，要么 $(C_1,\ C_2)$ 张成许多距离。我们假设情形是 $\rho(s,\ t)$ 具有特殊形式。若 ρ_s 或 ρ_t 在某个开邻域内恒为零，则引理 6.3 表明 C_1 或 C_2 是一条直线。由于这与定理的假设矛盾，ρ_s 和 ρ_t 在任何开邻域内都不恒为零。

由上可知，我们可以将引理 1.8 应用于 $\rho(s,t)$。该引理表明，存在一个开邻域，使得在**实数集**^{2} 中，

$$\frac{\partial^2(\ln|\rho_s/\rho_t|)}{\partial s \partial t} \equiv 0. \tag{16}$$

细心的读者可能会指出，引理 1.8 针对定义域为 (0,1) 的参数化定义，而上述参数化假设 $s, t \in$ **实数集**。这个技术问题很容易解决。例如，我们可以将上述参数化与 $h(r) = 1/r$ 复合，从而得到曲线的一半，其中 $r \in (0,1)$。另一半则通过将该参数化与 $h(r) = -1/r$ 复合得到。观察式 (6) 可知，将 s 替换为 $\pm 1/s$，并将 t 替换为 $\pm 1/t$，不会改变其特殊形式。

(16) 的左侧是一个有理函数。为此，令 $h(s,\ t) = \rho_s/\rho_t$。由于 $\rho(s,\ t)$ 是关于 s 和 t 的有理函数，因此 $h(s,\ t)$ 也是有理函数。对于每个满足 $\rho_s(s,\ t) \neq 0$ 和 $\rho_t(s,\ t) \neq 0$ 的点 $(s,\ t)$，都存在一个开邻域，使得 $|h(s,\ t)| = c \cdot h(s,\ t)$，其中 $c \in \{-1, 1\}$。无论哪种情况，

$$\frac{\partial}{\partial t}\log|h(s,t)| = \frac{1}{c \cdot h(s,t)} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(c \cdot h(s,t)) = \frac{h_t(s,t)}{h(s,t)}.$$

记 $\mathbf{v}_1 = (x_1,\ y_1,\ z_1)$ 和 $\mathbf{v}_2 = (x_2,\ y_2,\ z_2)$。那么，(16) 的左侧是关于 s 和 t 的有理函数，其系数是关于 $c,\ p,\ q,\ r,\ x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ z_1,\ z_2$ 的有理函数。将此有理函数的分子记作 $\rho_N(s,\ t)$。

根据 (16)，多项式 $\rho_N(s,\ t)$ 在 **实数集**^{2} 的某个开邻域内恒等于零。也就是说，$\rho_N(s,\ t)$ 的所有系数都为零。我们使用 Wolfram Mathematica 计算 $\rho_N(s,\ t)$。接着我们证明，若构型不属于产生少量距离的特殊构型之一，则 $\rho_N(s,\ t)$ 的所有系数不可能同时为零。这一矛盾说明 (C_1, C_2) 产生许多距离，正如所述。Mathematica 计算详见附录 A 和 B。

□

现在我们可以证明定理 1.3 了。首先回顾该结果的表述。

定理 1.3 (圆锥曲线之间的少量距离) 设 $C_1, C_2 \subset$ **实数集**^{3} 为非退化圆锥曲线。

(a) 假设 C_1 和 C_2 是垂直圆、对齐圆、***CPO*** 抛物线或匹配曲线。那么 (C_1, C_2) 产生少量距离。

(b) 如果(C_1, C_2) 不是 ***(a)*** 部分中的某种构型，那么(C_1, C_2) 所张成的距离很多。

证明。 (a) 部分可由引理 3.1、5.3、5.4 和 5.5 直接得出。(b) 部分可由引理 7.1 直接得出。

□

参考文献

[1] S. Bardwell–Evans 和 A. Sheffer，《实数集^{d}上的不同距离问题的一种约化》，**实数集**^{d}，*J.Combinat. Theory A* **166** (2019), 171–225。[2] S. Basu、R. Pollack 和 M.-F. Coste–Roy，《实代数几何中的算法》，Springer Science & Business Media，2007。[3] J. Bochnak、M. Coste 和 M. Roy，《实代数几何》，Springer-Verlag，柏林，1998。[4] P. Brass、W. Moser 和 J. Pach，《离散几何研究问题》，Springer–Verlag，纽约，2005。[5] E. Breuillard、B. Green 和 T. Tao，线性群的近似子群，*Geom. Funct.Anal.* **21** (2011), 774。[6] A. Bruner 和 M. Sharir，共线点集与任意点集之间的不同距离，*Discrete Math.***341** (2018), 261–265。[7] P. Erd˝os，关于 n 点的距离集，*Amer. Math. Monthly* **53** (1946), 248–250。[8] L. Guth 和 N. H. Katz，关于平面上的 Erd˝os 不同距离问题，*Annals Math.***181** (2015), 155–190。[9] J. Harris，《代数几何：入门课程》，Springer，纽约，1992。[10] A. G. Khovanskiĭ，《少项式》，第 88 卷。American Mathematical Soc.，1991。[11] J. Milnor，关于实代数簇的贝蒂数，*Proc. Amer. Math. Soc.***15** (1964), 275–280。[12] S. Mathialagan 和 A. Sheffer，非直纹曲面上以及圆之间的不同距离，*Discrete Comput. Geom.* **69** (2023), 422–452。

[13] J. Pach 和 F. de Zeeuw，平面代数曲线上的不同距离，*Comb. Probab.Comp.* **26** (2017), 99–117。[14] A. Sheffer，《不同距离：开放问题与当前界》，arXiv:1406.1949。[15] O. E. Raz，关于不同距离的一则注记，*Combinat. Probab. Comput.* **29** (2020), 650–663。[16] O. E. Raz、M. Sharir 和 F. De Zeeuw，在笛卡尔积上消失的多项式：重新审视 Elekes–Szab´o 定理，*Duke Math. J.* **165** (2016), 3517–3566。[17] A. Sheffer，《多项式方法与关联理论》，剑桥大学出版社，2022。[18] Wolfram Research, Inc.，Mathematica，13.0 版，伊利诺伊州香槟市（2021）。[19] J. Solymosi 和 T. Tao，高维中的一个关联定理，*Discrete Comput. Geom.***48** (2012), 255–280。[20]J. Solymosi 和 J. Zahl，利用邻近性改进的 Elekes–Szab´o 型估计，arXiv:2211.13294。[21] R. Thom，论实代数簇的同调，载于：S.S. Cairns（编），微分与组合拓扑，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1965，255–265。

Mathematica 计算：两个椭圆的情形

在本附录中，我们使用 Wolfram Mathematica 完成引理 7.1 关于椭圆的证明。具体而言，我们假设 $\rho_N(s,\ t)$ 的所有系数均为零，并证明这种情况只有在两个椭圆重合时才会发生。两个椭圆的情形无疑是最复杂的。此情形涵盖了其他情形中用到的所有思路。在附录 B 中，我们会看到，两个双曲线的情形要简单几个数量级。

最后的准备工作。 在开始编写代码之前，我们进一步简化这一问题。在实数集$\mathbf{R}^2$中，每个以原点为中心的椭圆都可以表示为$\mathbf{V}(ax^2+bxy+cy^2-1)$，其中 $a,\ b,\ c\in\mathbf{R}$。反过来，$\mathbf{V}(ax^2+bxy+cy^2-1)$ 是椭圆，当 $a,\ c>0$ 且 $b^2-ac<0$ 时。若椭圆以原点为中心，且其坐标轴也是实数集$\mathbf{R}^2$的坐标轴，则称其为标准的 。等价地，若其定义方程中满足 $b=0$ ，则该椭圆为标准椭圆。

引理 A.1. *(a)* 考虑一个以原点为中心的椭圆 $E\subset$**实数集**^{2} 。令 p 为 E上具有最小 y 坐标的点。则存在 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in$ **实数集**^{2} ，使得 $\mathbf{v}_1$ 位于 x-轴上，并且

$$E\setminus\{p\}=\left\{\frac{1-s^2}{1+s^2}\cdot\mathbf{v}_1+\frac{2s}{1+s^2}\cdot\mathbf{v}_2\ :\ s\in\mathbf{R}\right\}.$$

(b) 设 $\Pi\subset\mathbf{R}^3$ 是一个经过原点的平面， $E\subset\mathbf{R}^3$ 是一个以原点为中心的椭圆。那么存在 $p\in E$、$\mathbf{v}_1\in\Pi$ 和 $\mathbf{v}_2\in\mathbf{R}^3$ ，使得

$$E\setminus\{p\}=\left\{\frac{1-s^2}{1+s^2}\cdot\mathbf{v}_1+\frac{2s}{1+s^2}\cdot\mathbf{v}_2\ :\ s\in\mathbf{R}\right\}.$$

证明。(a) 记 $E = \mathbf{V}(ax^2 + bxy + cy^2 - 1)$，并考虑变换 $T(x, y) = (x + by/2a, y)$。点 (x, y) 位于 $T(E)$ 上，当且仅当

$$\begin{aligned} 1 &= a\left(x - \frac{b}{2a}y\right)^2 + b\left(x - \frac{b}{2a}y\right)y + cy^2 \\ &= a\left(x^2 - \frac{b}{a}xy + \frac{b^2}{4a^2}y^2\right) + bxy - \frac{b^2}{2a}y^2 + cy^2 = ax^2 + \left(-\frac{b^2}{4a} + c\right)y^2. \end{aligned}$$

由于 $b^2 - ac < 0$，y^2 的系数为正，因此 $T(E)$ 是一个标准椭圆。令$E' = T(E)$，并设 p' 为 E'上具有最小 y 坐标的点。由于 E' 是标准的，存在平行于坐标轴的向量 $\mathbf{v}_1'$，$\mathbf{v}_2' \in \mathbf{R}^2$，使得

$$E' \setminus \{p'\} = \left\{ \frac{1 - s^2}{1 + s^2} \cdot \mathbf{v}_1' + \frac{2s}{1 + s^2} \cdot \mathbf{v}_2' \ : \ s \in \mathbf{R} \right\}.$$

注意到 $T(\cdot)$ 不改变 y 坐标。由于 $E' = T(E)$，令 $\mathbf{v}_1 = T^{-1}(\mathbf{v}_1')$ 和 $\mathbf{v}_2 = T^{-1}(\mathbf{v}_2')$，即可得到引理所述结论。

(b) 设 Π' 为包含 C的平面。不妨设 $\Pi \neq \Pi'$，否则结论已成立。由于这两个平面都包含原点，它们的交集是一条直线 ℓ。我们转而在 Π' 内进行讨论，并改变坐标轴，使 ℓ 成为 x轴。于是，当前引理的 (a) 部分便完成了 (b) 部分的证明。

□

我们采用第 7 节中引理 7.1 证明里的参数化。不过，我们不再要求向量 $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$ 彼此正交，而是应用引理 A.1(b)，使 $\mathbf{v}_2$ 的第三个坐标为 0。（也就是说，在进行一次平移、使 C_2 的中心位于原点之后，我们应用引理 A.1(b)。）于是，存在 $c > 0$ 以及向量 $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,$\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, 0)$，使得

$$\begin{aligned} \gamma_1(s) &= \left(\frac{1 - s^2}{1 + s^2}, c \cdot \frac{2s}{1 + s^2}, 0\right), \\ \gamma_2(t) &= (p, q, r) + \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\mathbf{v}_1 + \frac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{v}_2. \end{aligned} \tag{17}$$

如果 C_1 和 C_2 都是圆，那么由定理 1.2 即可得证。因此，不失一般性，我们可以假设 C_1 不是圆。换句话说，$c \neq 1$。由引理 3.1，我们可以假设C_2 不包含在与 xy-平面平行的平面内。这又意味着 $z_1 \neq 0$。

令 $\rho(s, t)$ 表示 $\gamma_1(s)$ 和 $\gamma_2(t)$ 的距离函数，定义见 (5)。与第 7 节中一样，我们令 $\rho_N(s, t)$ 为 $\partial^2(\ln |\rho_s/\rho_t|)\, \partial s \partial t$ 的分子。回顾一下，~~$\rho_N(s, t)$~~ 是关于 s 和 t 的多项式，其中单项式的系数取决于 $c, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, p, q, r$。为完成证明，我们假设所有这些系数均为零，并证明这仅在 C_1 和 C_2 是匹配椭圆时才会发生。我们将 $s^a t^b$ 在 $\rho_N(s, t)$ 中的系数记为 coeff $[s^a t^b]$。

情形分析。现在我们准备介绍分析中的计算部分，该部分分为若干情形。我们从最一般的情形开始，逐步转向更为特殊的情形。我们附上了前四项 Mathematica 计算的代码图。由于所有情形的代码都非常相似，我们认为四张图就足够了。为便于阅读，在代码中我们分别用 $c1$ 和 $c2$ 表示 γ_1 和 γ_2。函数 $dist[s,t]$ 表示 $\rho(s,\ t)$。变量 $RhoTest$表示 $\rho_N(s,\ t)$。

$p = q = r = 0$ 的情形将在下文“以原点为中心的两个椭圆的情形”一节中单独讨论。我们首先假设 C_2 的中心不在原点。由于匹配椭圆具有相同的中心，因此这种情形下不可能出现匹配椭圆。阅读情形分析时，图7或许会有所帮助。

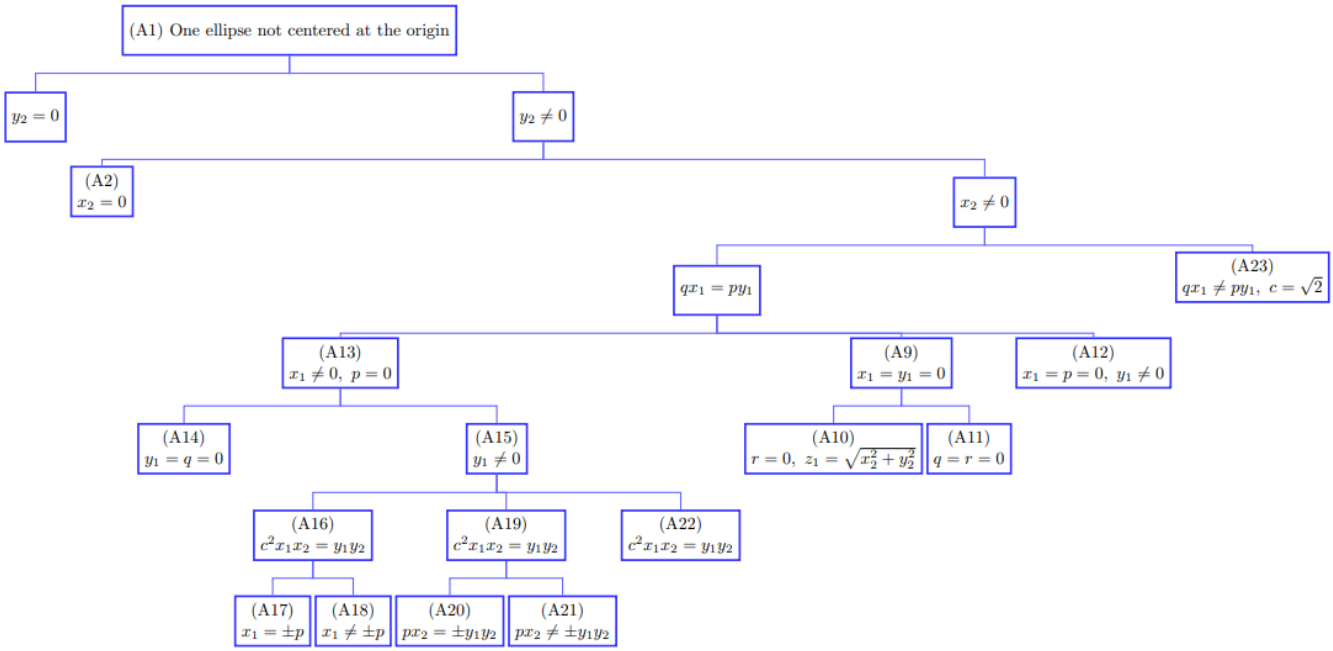


图7：第二个椭圆的中心不在原点时的情形分析路线图。

(A1) 一般情形。 首先，我们计算

$$coeff[st] - coeff[s^9t] = -192c^2(-2 + c^2)x_2(qx_1 - py_1)y_2.$$

见图8。由于 $\rho_N(s,\ t)$ 的每个系数都等于零，因此两个系数之差也等于零。由于 $c > 0$，我们有 $x_2 = 0$，或 $y_2 = 0$，或 $c = \sqrt{2}$，或 $qx_1 = py_1$。

```
In[8]:= v1 = {x1, y1, z1};
        v2 = {x2, y2, 0};
        c1 = {(1 - s^2) / (1 + s^2), c * 2 * s / (1 + s^2), 0};
        c2 = {p, q, r} + v1 * (1 - t^2) / (1 + t^2) + v2 * 2 * t / (1 + t^2);
        dist[s_, t_] := Together[(c1 - c2).(c1 - c2)];
        RhoTest = Numerator[Together[D[D[Log[D[dist[s, t], s] / D[dist[s, t], t]], s], t]]];
        Coefficient[RhoTest, s * t] - Coefficient[RhoTest, s^9 * t] // Factor

Out[14]= -192 c^2 (-2 + c^2) x2 (q x1 - p y1) y2
```

图8：情形 (A1) 的 Mathematica 代码。

如果 $y_2 = 0$，那么我们交换 x 和 y 坐标轴，从而再次得到 $x_2 = 0$ 的情形。在这种情形下$y_2 \neq 0$，因为 $v_2 \neq (0,\ 0,\ 0)$。情形（A2）假设 $x_2 = 0$ 和 $y_2 \neq 0$。情形 (A13) 假设 $x_2,\ y_2 \neq 0$、$qx_1 = py_1$ 和 $x_1 \neq 0$。情形 (A9) 假设 $x_2,\ y_2 \neq 0$、$qx_1 = py_1$ 和$x_1 = y_1 = 0$。情形 (A12) 假设 $x_2,\ y_2 \neq 0$、$x_1 = 0$、$y_1 \neq 0$ 和 $p = 0$。情形 (A23) 假设 $x_2,\ y_2 \neq 0$、$qx_1 \neq py_1$ 和 $c = \sqrt{2}$。这些情形涵盖了所有可能的情况。

(A2) 当 $x_2 = 0$ 且 $y_2 \neq 0$时。 如图9所示，我们计算

$$coeff[s^3t] - coeff[s^5t]/2 = 384(-1 + c)c^2(1 + c)x_1y_2^2.$$

```
In[15]:= v1 = {x1, y1, z1};
         v2 = {0, y2, 0};
         c1 = {(1 - s^2) / (1 + s^2), c * 2 * s / (1 + s^2), 0};
         c2 = {p, q, r} + v1 * (1 - t^2) / (1 + t^2) + v2 * 2 * t / (1 + t^2);
         dist[s_, t_] := Together[(c1 - c2).(c1 - c2)];
         RhoTest = Numerator[Together[D[D[Log[D[dist[s, t], s] / D[dist[s, t], t]], s], t]]];
         Coefficient[RhoTest, s^3 * t] - Coefficient[RhoTest, s^5 * t] / 2 // Factor

Out[21]= 384 (-1 + c) c^2 (1 + c) x1 y2^2
```

图9：情形（A2）第一部分的 Mathematica 代码。

由于每个系数都等于 0，因此这个差也等于 0。由于 $c > 0$ 和 $c \neq 1$，我们得出 $x_1 = 0$。

接下来，如图10所示，我们计算

$$coeff[s^3t] + coeff[s^3t^9] = 256c^2py_2^2(3qy_1 + rz_1).$$

由于 c，$y_2 \neq 0$，因此 $p = 0$ 或 $3qy_1 + rz_1 = 0$。情形（A3）假设 $p = 0$。情形（A4）假设 $p \neq 0$ 和 $3qy_1 + rz_1 = 0$。由于 $z_1 \neq 0$，我们可以将 $3qy_1 + rz_1 = 0$ 改写为$r = -3qy_1/z_1$。

```
In[29]:= v1 = {0, y1, z1};
         v2 = {0, y2, 0};
         c1 = {(1 - s^2) / (1 + s^2), c * 2 * s / (1 + s^2), 0};
         c2 = {p, q, r} + v1 * (1 - t^2) / (1 + t^2) + v2 * 2 * t / (1 + t^2);
         dist[s_, t_] := Together[(c1 - c2).(c1 - c2)];
         RhoTest = Numerator[Together[D[D[Log[D[dist[s, t], s] / D[dist[s, t], t]], s], t]]];
         Coefficient[RhoTest, s^3 * t] + Coefficient[RhoTest, s^3 * t^9] // Factor

Out[35]= 256 c^2 p y2^2 (3 q y1 + r z1)
```

图10：情形（A2）第二部分的 Mathematica 代码。

(A3) 情形 $x_1 = x_2 = p = 0$ 且 $y_2 \neq 0$。如图11所示，我们计算

$$10(coeff[s] - coeff[st^{10}]) + coeff[st^6] + coeff[s^5t^4] = -384(-1+c)c^2(1+c)qy_2z_1^2,$$
$$coeff[s] + coeff[st^{10}] = -32(-1+c)c^2(1+c)y_2z_1(qr + y_1z_1).$$

由于 $c > 0$、$c \neq 1$ 和 y_2，$z_1 \neq 0$，上面的第一个表达式推出 $q = 0$。第二个表达式得到 $qr + y_1z_1 = 0$。由于 $q = 0$ 和 $z_1 \neq 0$，我们得出 $y_1 = 0$。
接下来，我们计算 系数 $[st^3] = -8(-1+c)c^2(1+c)ry_2^2z_1$。由于 $c > 0$、$c > 1$ 和 $y_2 \neq 0$，我们得到 $r = 0$。这与 C_2 的中心不在原点这一假设矛盾，因此当前情形不可能发生。

(A4) 当 $x_1 = x_2 = 0$、y_2、$p \neq 0$和 $r = -3qy_1/z_1$ 时。在此情形下，我们计算系数 $[s^3t^5]$ + 系数 $[s^7t^5] = -4096c^2pqy_1^3$。由于 c，$p \neq 0$，因此要么 $q = 0$，要么 $y_1 = 0$。情形（A5）假设 $q = 0$。情形（A8）假设 $q \neq 0$ 和 $y_1 = 0$。在这两种情形下，假设 $r = -3qy_1/z_1$ 变为 $r = 0$。

```
In[56]:= v1 = {0, y1, z1};
         v2 = {0, y2, 0};
         c1 = {(1 - s^2) / (1 + s^2), c * 2 * s / (1 + s^2), 0};
         c2 = {0, q, r} + v1 * (1 - t^2) / (1 + t^2) + v2 * 2 * t / (1 + t^2);
         dist[s_, t_] := Together[(c1 - c2) . (c1 - c2)];
         RhoTest = Numerator[Together[D[D[Log[D[dist[s, t], s] / D[dist[s, t], t]], s], t]]];
         x = Coefficient[RhoTest, s] /. t → 0;
         10 * (x - Coefficient[RhoTest, s * t^10]) + Coefficient[RhoTest, s * t^6] + Coefficient[RhoTest, s^5 * t^4] // Factor
         x + Coefficient[RhoTest, s * t^10] // Factor

Out[63]= -384 (-1 + c) c^2 (1 + c) q y2 z1^2

Out[64]= -32 (-1 + c) c^2 (1 + c) y2 z1 (q r + y1 z1)
```

图11：情形（A3）的 Mathematica 代码。

(A5) 当 $x_1 = x_2 = q = r = 0$ 且 y_2、$p \neq 0$ 时。 在此情形下，我们计算系数 $[s^5] = -32c^2 p y_1 y_2 (2y_2 - z_1)(2y_2 + z_1)$。由于 c，p，$y_2 \neq 0$，可得 $y_1 = 0$ 或 $z_1 = \pm 2y_2$。情形（A6）假设 $y_1 = 0$。情形（A7）假设 $y_1 \neq 0$ 和 $z_1 = 2y_2$。若 $z_1 = -2y_2$，则将**实数集**^{3} 关于 xz-平面作反射。这会得到 $z_1 = 2y_2$，且不会影响其他任何内容。因此，情形（A7）也涵盖 $z_1 = -2y_2$。

(A6) 满足 $x_1 = x_2 = y_1 = q = r = 0$ 且 $y_2, p \neq 0$ 的情形。 在此情形下，我们计算系数 $[s^3 t] = -8c^2 p y_2^2 (y_2 - z_1)(y_2 + z_1)$。由于 $c, p, y_2 \neq 0$，可得 $y_2 = \pm z_1$。不失一般性，我们假设 $y_2 = z_1$。若 $y_2 = -z_1$，则关于 xz-平面对**实数集**^{3} 进行反射。

接下来我们计算 3系数 $[1]$ + 系数 $[s^2] = 6cpz_1$。由于 $c, p, z_1 \neq 0$，该系数非零。这一矛盾表明当前情形不可能发生。

(A7) 满足 $x_1 = x_2 = q = r = 0$, $y_1, y_2, p \neq 0$, 且 $z_1 = 2y_2$ 的情形。 我们计算系数 $[s^3 t] = 384c^2 p y_2^2 (y_1^2 + y_2^2)$。由于 $c, p, y_1, y_2 \neq 0$，该系数不可能为零。这一矛盾表明当前情形不可能发生。

(A8) 当 $x_1 = x_2 = y_1 = r = 0$ 且 y_2，p，$q \neq 0$ 时。 在此情形下，我们计算系数 $[s^5 t^5] = 256c^2 p y_2^2 (y_2 - z_1)(y_2 + z_1)$。由于该系数等于零且 c，p，$y_2 \neq 0$，因此有 $y_2 = \pm z_1$。和之前一样，只需考虑 $y_2 = z_1$ 的情形。另一种情形经关于 xz-平面的反射后与此完全相同。

接下来我们计算 3系数 $[1]$ + 系数 $[s^2] = 24cpz_1$。由于 c，p，$z_1 \neq 0$，上述表达式非零。这一矛盾表明当前情形不可能出现。

(A9) **当 $x_1 = y_1 = 0$ 且 x_2，$y_2 \neq 0$ 时。** 我们计算

$$coeff[st^5] - coeff[s^9 t^5] = -512(-1 + c)c^2(1 + c) r y_2^2 z_1,$$
$$coeff[st^9] = -96c^2 q x_2 y_2 (x_2^2 + y_2^2 + r z_1 - z_1^2).$$

由于 $c > 0$、$c \neq 1$ 和 y_2，$z_1 \neq 0$，上面的第一个计算得出 $r = 0$。由此得到 系数 $[st^9] = -96c^2 q x_2 y_2 (x_2^2 + y_2^2 - z_1^2)$。由于它等于零，因此 $z_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ 或 $q = 0$。我们将前者改写为 $z_1 = \pm\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$。通常，我们可以假设 $z_1 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$，因为另一种情况在关于 xy-平面的反射下是对称的。情形 **(A10)** 假设$z_1 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$。情形 **(A11)** 假设 $q = 0$。

(A10) 情形 $x_1 = y_1 = r = 0$，x_2，$y_2 \neq 0$，且 $z_1 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$。 我们计算系数 $[s^3] = 32(-1 + c)(1 + c)x_2$。由于 $c > 0$、$c \neq 1$ 和 $x_2 \neq 0$，该系数非零。这个矛盾表明当前情形不可能发生。

(A11) 情形 $\boldsymbol{x_1 = y_1 = r = q = 0}$ 且 $\boldsymbol{x_2,\ y_2 \neq 0}$。我们计算

$$coeff[st^6] - coeff[s^9] = -8c^2(-1 + c^2 - p^2)x_2y_2^2,$$
$$coeff[st^6] + coeff[s^9] = 8c^2(-2 + c^2)px_2y_2^2.$$

由于 $c,\ x_2,\ y_2 \neq 0$，第一次计算得到 $p^2 = c^2 - 1$。由于 $c \neq \pm 1$，我们得到$p \neq 0$。由于第二次计算结果为零，我们得到 $c = \sqrt{2}$。将其代入$p^2 = c^2 - 1$，得到 $\bar{p} = \pm 1$。如果 $p = -1$，则将 $\mathbf{R}^3$ 关于 yz-平面反射。因此，不失一般性，我们可以假设 $p = 1$。

接下来我们计算 系数 $[s^5] = 16x_2y_2^2$。由于 $x_2,\ y_2 \neq 0$，这个系数非零。这一矛盾意味着当前情形不可能发生。

(A12) $\boldsymbol{x_1 = p = 0}$ 且 $\boldsymbol{y_1,\ x_2,\ y_2 \neq 0}$**的情形**。我们计算

$$coeff[st] - coeff[st^9] + (coeff[st^3] - coeff[st^7])/2 = -384c^2rx_2y_1y_2z_1.$$

由于 $c,\ y_1,\ z_1,\ x_2,\ y_2 \neq 0$，我们得到 $r = 0$。由于我们假设 C_2 不以原点为中心，这意味着 $q \neq 0$。
接下来我们计算

$$coeff[st^9] - coeff[s^9t] = -192c^2qx_2y_2(x_2^2 - 3y_1^2 + y_2^2 - z_1^2).$$

由于上述结果等于零，我们得到 $z_1 = \pm\sqrt{x_2^2 - 3y_1^2 + y_2^2}$。经过适当的反射后，关于 xy-平面对$\mathbf{R}^3$进行反射，我们可以假设 $z_1 = \sqrt{x_2^2 - 3y_1^2 + y_2^2}$。然后我们计算 系数 $[s^3t^9]$−系数 $[s^7t] = 256qx_2y_1^2y_2$。由于 $q,\ x_2,\ y_1,\ y_2 \neq 0$，这个表达式不为零。这个矛盾表明当前情形不可能发生。

(A13) 情形为 $\boldsymbol{x_1,\ x_2,\ y_2 \neq 0}$ 且 $\boldsymbol{qx_1 = py_1}$。由于 $x_1 \neq 0$，我们可以将 $qx_1 = py_1$改写为 $q = py_1/x_1$。然后我们计算

$$coeff[st] - coeff[st^9] = -192c^2x_1^3x_2y_1(px_1x_2y_1 + 2px_1^2y_2 - px_2^2y_2 + 3py_1^2y_2 - py_2^3 + rx_1y_2z_1 + py_2z_1^2).$$

要使其等于零，要么 $y_1 = 0$，要么 $r = p(-x_1x_2y_1 - 2x_1^2y_2 + x_2^2y_2 - 3y_1^2y_2 + y_2^3 - y_2z_1^2)/(x_1y_2z_1)$。当 $y_1 = 0$时，假设 $q = py_1/x_1$ 意味着 $q = 0$。**(A14)** 情形假设 $y_1 = q = 0$。**(A15)** 情形假设 $y_1 \neq 0$ 且 $r = p(-x_1x_2y_1 - 2x_1^2y_2 + x_2^2y_2 - 3y_1^2y_2 + y_2^3 - y_2z_1^2)/(x_1y_2z_1)$。

(A14) **当** $\boldsymbol{x_1}$、$\boldsymbol{x_2}$、$\boldsymbol{y_2 \neq 0}$ **和** $\boldsymbol{y_1 = q = 0}$**时**。我们计算

$$coeff[s] + coeff[st^{10}] + coeff[s^9] + coeff[s^9t^{10}] = -32c^2px_1x_2y_2^2,$$
$$coeff[s] + coeff[st^{10}] - coeff[s^9] - coeff[s^9t^{10}] = -16c^2(-2 + c^2)x_1x_2y_2^2.$$

由于 x_1、x_2、y_2、$c \neq 0$，第一个表达式得出 $p = 0$，第二个表达式得出 $c = \sqrt{2}$。
接下来我们计算 系数 $[st^2]$ + 系数 $[s^9t^8] = -96rx_2y_2^2z_1$。由于这等于零，我们得到$r = 0$。这不可能，因为我们假设 C_2 的中心不在原点。因此，这种情形不可能出现。

(A15) **当** $\boldsymbol{x_1}$、$\boldsymbol{x_2}$、$\boldsymbol{y_1}$、$\boldsymbol{y_2 \neq 0}$、 $\boldsymbol{q = py_1/x_1}$ **和** $\boldsymbol{r = p(-x_1x_2y_1 - 2x_1^2y_2 + x_2^2y_2 - 3y_1^2y_2 + y_2^3 - y_2z_1^2)/(x_1y_2z_1)}$ **时**。我们计算

$$coeff[s^3t] - coeff[s^3t^9] = -256px_1^3y_2(-x_2y_1 + x_1y_2)(c^2x_1x_2 - y_1y_2)(x_1x_2 + y_1y_2).$$

要使这个表达式为零，必须满足 $p=0$、 $x_2y_1=x_1y_2$、 $c^2x_1x_2=y_1y_2$ 或 $x_1x_2=-y_1y_2$ 中的一种情况。当 $p=0$ 时，这些假设意味着 $q=r=0$。这是不可能的，因为我们假设 C_2 的中心不在原点。情形（A16）假设 $c^2x_1x_2=y_1y_2$。情形（A19）假设 $x_1x_2=-y_1y_2$。情形（A22）假设 $p\neq 0$ 和 $x_2y_1=x_1y_2$。

(A16) **当 x_1、 x_2、 y_1、 $y_2\neq 0$、 $q=py_1/x_1$、 $c^2x_1x_2=y_1y_2$以及 $r=p\,(-x_1x_2y_1-2x_1^2y_2+x_2^2y_2-3y_1^2y_2+y_2^3-y_2z_1^2)\,/\,(x_1y_2z_1)$ 时。** 我们将 $c^2x_1x_2=y_1y_2$改写为 $y_1=c^2x_1x_2/y_2$。然后计算

$$\begin{aligned}coeff[st]=48c^4x_1x_2^2y_2^4(&c^2p^2x_1^2x_2^2+3c^4p^2x_1^2x_2^2-c^2x_1^4x_2^2-3c^4x_1^4x_2^2+2x_1^2y_2^2-2c^2x_1^2y_2^2+2p^2x_1^2y_2^2\\&-2x_1^4y_2^2-2p^2x_2^2y_2^2+2x_1^2x_2^2y_2^2-2p^2y_2^4+2x_1^2y_2^4+2p^2y_2^2z_1^2-2x_1^2y_2^2z_1^2).\end{aligned}$$

由于 c、 x_1、 x_2、 $y_2\neq 0$，括号中的表达式等于零。我们将此表达式改写为

$$\begin{aligned}2y_2^2z_1^2(x_1^2-p^2)=&c^2p^2x_1^2x_2^2+3c^4p^2x_1^2x_2^2-c^2x_1^4x_2^2-3c^4x_1^4x_2^2+2x_1^2y_2^2-2c^2x_1^2y_2^2\\&+2p^2x_1^2y_2^2-2x_1^4y_2^2-2p^2x_2^2y_2^2+2x_1^2x_2^2y_2^2-2p^2y_2^4+2x_1^2y_2^4.\quad(18)\end{aligned}$$

我们将上述方程的右侧记为 G。情形（A17）假设 $x_1=p$。在这种情形下， $G=0$ ，而假设 $q=py_1/x_1$ 意味着 $q=y_1$。情形（A17）中不需要对 r 作出假设，因此我们忽略它。如果 $x_1=-p$ ，那么我们将 $\mathbf{v}_1$，取反，从而再次得到 $x_1=p$。这不会改变当前情形中的其他任何内容，因此 $x_1=-p$也属于情形（A17）。

当 $x_1\neq\pm p$ 时，方程（18）得出 $z_1=\pm\sqrt{G/(2y_2^2(x_1^2-p^2))}$。通过将**实数集**[3] 关于 xy-平面反射，我们可以假设 $z_1=\sqrt{G/(2y_2^2(x_1^2-p^2))}$。这一情形将在情形（A18）中研究。

(A17) **当 $x_1,x_2,y_1,y_2\neq 0$, $p=x_1$, 且 $q=y_1=c^2x_1x_2/y_2$ 时。** 我们计算系数 $[t^{10}]=-(-1+c)c(1+c)x_2^2y_2^7$。由于 $c>0$, $c\neq 1$ 和 $x_2,y_2\neq 0$，该系数非零。这一矛盾表明当前情形不可能出现。

(A18) **当 $x_1,x_2,y_1,y_2\neq 0$, $q=py_1/x_1$, $y_1=c^2x_1x_2/y_2$, $x_1\neq\pm p$,$z_1=\sqrt{G/(2y_2^2(x_1^2-p^2))}$，且 $r=p(-x_1x_2y_1-2x_1^2y_2+x_2^2y_2-3y_1^2y_2+y_2^3-y_2z_1^2)/(x_1y_2z_1)$ 时。** 我们计算系数 $[s^3t]=320(-1+c)c^4(1+c)(p-x_1)^2x_1(p+x_1)^2x_2^2y_2^6$。由于 $c>0$, $c\neq 1$, $x_1\neq\pm p$，且 x_1, $x_2,y_2\neq 0$，该系数非零。这一矛盾表明当前情形不可能出现。

(A19) **情形 x_1, x_2, y_1, $y_2\neq 0$, $q=py_1/x_1$, $x_1x_2=-y_1y_2$, 且 $r=p(-x_1x_2y_1-2x_1^2y_2+x_2^2y_2-3y_1^2y_2+y_2^3-y_2z_1^2)/(x_1y_2z_1)$** 。由于 $x_2\neq 0$，我们可以将 $x_1x_2=-y_1y_2$改写为 $x_1=-y_1y_2/x_2$。我们计算

$$\begin{aligned}coeff[st]=-96c^2x_2^5y_1y_2^3(&p^2x_2^6-p^2x_2^4y_1^2+p^2x_2^4y_2^2-x_2^2y_1^2y_2^2+c^2x_2^2y_1^2y_2^2-p^2x_2^2y_1^2y_2^2\\&-x_2^4y_1^2y_2^2+x_2^2y_1^4y_2^2-x_2^2y_1^2y_2^4+y_1^4y_2^4-p^2x_2^4z_1^2+x_2^2y_1^2y_2^2z_1^2).\end{aligned}$$

由于 c,x_2, y_1, $y_2\neq 0$，括号中的表达式等于零。我们将其改写为

$$\begin{aligned}z_1^2x_2^2(p^2x_2^2-y_1^2y_2^2)=&p^2x_2^6-p^2x_2^4y_1^2+p^2x_2^4y_2^2-x_2^2y_1^2y_2^2+c^2x_2^2y_1^2y_2^2\\&-p^2x_2^2y_1^2y_2^2-x_2^4y_1^2y_2^2+x_2^2y_1^4y_2^2-x_2^2y_1^2y_2^4+y_1^4y_2^4.\end{aligned}$$

我们将上述方程的右边记作 H。情形（A20）假设 $px_2 = y_1y_2$，因此 $H = 0$。情形（A20）不要求关于 r 的假设，因此我们将其忽略。对$\mathbf{v}_1$取反后， $px_2 = -y_1y_2$ 的情形可化为情形（A20）。情形（A21）假设$px_2 \neq \pm y_1y_2$。~~这意味着$z_1 = \sqrt{H/(x_2^2(p^2x_2^2 - y_1^2y_2^2))}$~~，可能需要将实数集$\mathbf{R}^3$关于 xy-平面反射。

(A20) **情形为 $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2 \neq 0,\ q = py_1/x_1,\ x_1 = -y_1y_2/x_2$，且 $px_2 = y_1y_2$**。由于 $x_2 \neq 0$，我们可以将 $px_2 \neq \pm y_1y_2$ 改写为 $p = y_1y_2/x_2$。计算得

$$coeff[st] = -24(-1+c)c^2(1+c)x_2^7y_1y_2.$$

由于 $c > 0$、$c \neq 1$和 $x_2,\ y_1,\ y_2 \neq 0$，该系数不为零。这一矛盾意味着当前情形不可能发生。

(A21) **情形为 $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2 \neq 0$、$q = py_1/x_1$、$x_1 = -y_1y_2/x_2$、$r = p(-x_1x_2y_1 - 2x_1^2y_2 + x_2^2y_2 - 3y_1^2y_2 + y_2^3 - y_2z_1^2)/(x_1y_2z_1)$、$z_1 = \sqrt{H/(x_2^2(p^2x_2^2 - y_1^2y_2^2))}$，且$px_2 \neq \pm y_1y_2$**。计算得

$$coeff[s^3t] = 64(-1+c)(1+c)(1+6c^2)x_2^5y_1y_2^3(px_2 - y_1y_2)^2(px_2 + y_1y_2)^2.$$

由于 $c > 0$、$c \neq 1$、x_2、y_1、$y_2 \neq 0$和 $px_2 \neq \pm y_1y_2$，该系数非零。这一矛盾意味着当前情形不可能出现。

(A22) **当 x_1、x_2、y_1、y_2、$p \neq 0$、$q = py_1/x_1$、$x_2y_1 = x_1y_2$，且 $r = p(-x_1x_2y_1 - 2x_1^2y_2 + x_2^2y_2 - 3y_1^2y_2 + y_2^3 - y_2z_1^2)/(x_1y_2z_1)$ 时**。由于 $y_2 \neq 0$，我们可以将 $x_2y_1 = x_1y_2$改写为 $x_1 = x_2y_1/y_2$。我们计算

$$coeff[t] + coeff[s^{10}t^9] = 32(-1+c)c(1+c)px_2^4y_1y_2^8(x_2^2 + y_2^2 - z_1^2).$$

由于 $c > 0$、$c \neq 1$和 p、x_2、y_1、$y_2 \neq 0$，我们得出 $z_1 = \pm\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$。我们可以假设 $z_1 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$，必要时对实数集 $\mathbf{R}^3$ 关于 xy-平面作反射。
接下来我们计算

$$coeff[t^5] + coeff[s^{10}t^5] = -512(-1+c)c(1+c)px_2^4y_1^3y_2^4(x_2^2 + y_2^2).$$

由于 $c > 0$, $c \neq 1$, $p, x_2, y_1, y_2 \neq 0$，上述系数非零。这一矛盾意味着当前情形不可能出现。

(A23) **$x_2, y_2 \neq 0$、$qx_1 \neq py_1$ 和 $c = \sqrt{2}$ 所对应的情形**。我们计算

$$coeff[s^3t] - coeff[s^7t] = 2304x_2(qx_1 - py_1)y_2.$$

根据当前情形的假设，上述表达式非零。这一矛盾意味着当前情形不可能出现。

以原点为中心的两个椭圆的情形。还需要考虑 $p = q = r = 0$ 的情形。也就是说，两个椭圆都以原点为中心的情形。在这种情形下，我们改用 C_2 的另一种参数化。根据引理 A.1(b)，存在 $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{v}_2 = (x_2, 0, z_2)$，使得

$$\gamma_1(s) = \left(\frac{1-s^2}{1+s^2}, c\cdot\frac{2s}{1+s^2}, 0\right),$$

$$\gamma_2(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1}\mathbf{v}_1 + \frac{2t}{t^2+1}\mathbf{v}_2. \tag{19}$$

(B1) **一般情形**。我们计算 $coeff[st] = -48c^2x_2y_1^2(x_1x_2 + z_1z_2)$。由于该系数等于零，因此有 $x_2 = 0$，或 $y_1 = 0$，或 $x_1x_2 = -z_1z_2$。(B2) 情形假设 $x_2 = 0$。(B5) 情形假设 $y_1 = 0$。(B6) 情形假设 $x_2, y_1 \neq 0$ 和 $x_1x_2 = -z_1z_2$。

(B2) **情形为 $x_2 = 0$**。由于 $\mathbf{v}_2 \neq 0$，我们有 $z_2 \neq 0$。我们计算

$$coeff[t] = -8(-1 + c)c(1 + c)y_1z_1^2z_2^2.$$

要使这个系数等于零，必须满足 $y_1 = 0$ 或 $z_1 = 0$。情形（B3）假设 $y_1 = 0$。情形（B4）假设 $y_1 \neq 0$ 和 $z_1 = 0$。

（B3）**情形为 $y_1 = x_2 = 0$ 且 $z_2 \neq 0$**。由于 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 张成一个平面，我们有$x_1 \neq 0$。我们计算 系数 $[st] = 16(-1 + c)(1 + c)x_1z_1^2z_2^2$。由于 x_1，$z_2 \neq 0$ 且 $c \neq \pm 1$，可得 $z_1 = 0$。

接下来我们计算

$$2coeff[st] + coeff[st^3] = -64(-1 + c)(1 + c)x_1(c^2x_1^2 + z_2^2 - c^2z_2^2).$$

要使其等于零，必须有 $c^2x_1^2 + z_2^2 - c^2z_2^2 = 0$。我们将其改写为 $z_2^2 = c^2x_1^2/(c^2 - 1)$。

我们声称，在这种情形下，C_1 和 C_2 是匹配椭圆。事实上，考虑到 (19)，我们得到带有 $m = a = c^2$ 的 (1)。根据这种情形的假设，我们得到 $\gamma_2(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1}(x_1, 0, 0) + \frac{2t}{t^2+1}(0, 0, z_2)$。将此与 $z_2^2 = c^2x_1^2/(c^2 - 1)$ 结合，得到带有 $m = c^2$和 $b = z_2^2$ 的 (2)。

(B4) **当 $z_1 = x_2 = 0$ 和 $y_1 \neq 0$ 时的情形**。我们计算

$$2coeff[st] + coeff[st^3] = -128(-1 + c)c^2(1 + c)x_1y_1^2.$$

由于这等于零，我们有 $x_1 = 0$。接着我们计算

$$2coeff[s^2t] + coeff[s^2t^3] = -128(-1 + c)c(1 + c)y_1(y_1^2 - z_2^2 + c^2z_2^2).$$

由于该值等于零，我们得到 $y_1^2 - z_2^2 + c^2z_2^2 = 0$。将其改写为 $z_2^2 = -y_1^2/(c^2 - 1)$。我们声称，在这种情形下，C_1 和 C_2 是匹配椭圆。事实上，我们交换 x 轴和 y轴，并令 $m = 1/c^2$。结合（19），可得带有 $a = 1$ 的（1）（交换坐标轴后）。根据这种情形的假设，我们得到 $\gamma_2(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1}(0, y_1, 0) + \frac{2t}{t^2+1}(0, 0, z_2)$。将此结果与 $z_2^2 = -y_1^2/(c^2 - 1)$ 结合，得到带有 $b = y_2^2$的（2）（交换坐标轴后）。

（B5）**当 $y_1 = 0$ 时**。由于我们还有 $y_2 = 0$，椭圆 C_2 包含在xz-平面内。我们可以在（19）中令 $\mathbf{v}_2 = (x_2, 0, z_2)$，使其与 $\mathbf{v}_1 = (x_1, 0, z_1)$ 正交。经过此变换后，存在一个非零的 $r \in$ **实数集**，使得 $\mathbf{v}_2 = r \cdot (-z_1, 0, x_1)$。我们计算

$$2coeff[st] - coeff[s^3t] = -192(-1 + c)(1 + c)r^2x_1z_1^2.$$

由于上述结果等于零，$x_1 = 0$ 或 $z_1 = 0$。通过交换 x 轴和 z 轴（如有必要），我们可以假设 $z_1 = 0$。于是，$\mathbf{v}_1 = (x_1, 0, 0)$ 和 $\mathbf{v}_2 = (0, 0, z_2)$，其中 x_1，$z_2 \neq 0$。我们计算

$$2coeff[st] + coeff[st^3] = -64(-1 + c)(1 + c)x_1(c^2x_1^2 + z_2^2 - c^2z_2^2).$$

由于 $c > 0$ 和 x_1，$c \neq 1$，我们得到 $c^2x_1^2 + z_2^2 - c^2z_2^2 = 0$。这与情形（B3）中间的情形相同。重复（B3）中的相同分析，我们得到匹配椭圆。

（B6）**当 $x_1x_2 = -z_1z_2$ 且 $x_2,\ y_1 \neq 0$ 时**。我们将 $x_1x_2 = -z_1z_2$ 改写为 $x_1 = -z_1z_2/x_2$。我们计算 系数$[1] = 4cx_2^7y_1(-x_2 + cy_1)(x_2 + cy_1)$。由于该值等于零，我们得到 $x_2 = \pm cy_1$。通过可能将实数集 [3] 关于 yz-平面反射，我们可以假设$x_2 = cy_1$。

在（19）中交换 $\frac{t^2-1}{t^2+1}$ 和 $\frac{2t}{t^2+1}$ 的位置。这只会改变未由（19）参数化的那个点。等价地，我们可以在（19）中互换$\mathbf{v}_1$ 和$\mathbf{v}_2$ 的角色。完成这一交换后，我们计算系数$[1]$ + 系数$[t^{10}] = 2c^6y_1^6z_1^2z_2^2$。由于该表达式等于零，且 $c,\ y_1 \neq 0$，因此有 $z_1 = 0$ 或 $z_2 = 0$。无论哪种情况，假设 $x_1x_2 = -z_1z_2$都会变为 $x_1 = 0$。情形（B7）假设 $z_1 = 0$。情形（B8）假设 $z_2 = 0$。

（B7）**情形 $x_1 = z_1 = 0,\ x_2 = cy_1$，以及 $x_2,\ y_1 \neq 0$**。 与情形（B6）中交换后的$\mathbf{v}_1$和$\mathbf{v}_2$ 不同，我们改用原来的向量。我们计算

$$2coeff[s] - coeff[t] = -24(-1 + c)c^3(1 + c)y_1^3.$$

这是非零的，因为 $y_1 \neq 0$、 $c > 0$ 和 $c \neq 1$。由此产生的矛盾说明当前情形不可能发生。

(B8) 当 $x_1 = z_2 = 0$、 $x_2 = cy_1$ 和 x_2、 $y_1 \neq 0$ 时。 与情形 (B6) 一样，我们交换$\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$的角色。然后计算

$$4coeff[st^3] + coeff[st^5] = 48(-1 + c)c^3(1 + c)y_1^3.$$

这是非零的，因为 $y_1 \neq 0$、 $c > 0$ 和 $c \neq 1$。由此产生的矛盾说明当前情形不可能发生。

在所有情形下，我们要么得到匹配椭圆，要么得到矛盾。因此，除非两个椭圆相匹配或为对齐圆，否则它们可以确定许多不同的距离。

B Mathematica 计算：两个双曲线的情形 s

在本附录中，我们使用 Wolfram Mathematica 完成引理 7.1 关于两个双曲线的证明。具体而言，我们假设 $\rho_N(s,\ t)$ 的所有系数均为零，并证明这意味着这些双曲线确定许多不同的距离。如第 7 节所述，存在 $c > 0$、$p,\ q,\ r \in$ **实数集**，以及向量 $\mathbf{v}_1 = (x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\mathbf{v}_2 = (x_2,\ y_2,\ z_2)$，使得

$$\gamma_1(s) = \left(\frac{s^2+1}{2s}, c \cdot \frac{1-s^2}{2s}, 0\right),$$
$$\gamma_2(t) = (p, q, r) + \frac{t^2+1}{2t} \cdot \mathbf{v}_1 + \frac{t^2-1}{2t} \cdot \mathbf{v}_2.$$

现在，我们按照附录 A 中的方法进行情形分析。图 12 包含情形 (C1) 开始部分的代码。

(C1) 一般情形。作为第一步，我们计算

$$coeff[s^{10}t^8] + coeff[s^{10}t^2] + coeff[s^{10}t^4]/3 + coeff[s^{10}t^6]/3 = 4(1 + c^2)(c \cdot y_2 - x_2)\left((c \cdot x_1 + y_1)^2 + (c \cdot x_2 + y_2)^2 + (z_1^2 + z_2^2)(1 + c^2)\right),$$
$$coeff[s^{10}t^8] - coeff[s^{10}t^2] + coeff[s^{10}t^4]/3 - coeff[s^{10}t^6]/3 = 4(1 + c^2)(c \cdot y_1 - x_1)\left((c \cdot x_1 + y_1)^2 + (c \cdot x_2 + y_2)^2 + (z_1^2 + z_2^2)(1 + c^2)\right).$$

```
In[30]:= v1 = {x1, y1, z1};
         v2 = {x2, y2, z2};
         c1 = {(s^2 + 1) / (2 * s), c * (1 - s^2) / (2 * s), 0};
         c2 = {p, q, r} + v1 * (t^2 + 1) / (2 * t) + v2 * (t^2 - 1) / (2 * t);
         dist[s_, t_] := Together[(c1 - c2) . (c1 - c2)];
         RhoTest = Numerator[Together[D[D[Log[D[dist[s, t], s] / D[dist[s, t], t]], s], t]]];
         Coefficient[RhoTest, s^(10) * t^8] + Coefficient[RhoTest, s^(10) * t^2] + Coefficient[RhoTest, s^(10) * t^4] / 3 +
           Coefficient[RhoTest, s^(10) * t^6] / 3 // Factor
         Coefficient[RhoTest, s^(10) * t^8] - Coefficient[RhoTest, s^(10) * t^2] + Coefficient[RhoTest, s^(10) * t^4] / 3 -
           Coefficient[RhoTest, s^(10) * t^6] / 3 // Factor
```

图 12：情形 (C1) 的 Mathematica 代码。

由于上述表达式等于零，因此要么 $(cx_1+y_1)^2+(cx_2+y_2)^2+(z_1^2+z_2^2)(1+c^2)=0$ 要么$x_1=c\cdot y_1$并且 $x_2=c\cdot y_2$。我们首先假设 $(cx_1+y_1)^2+(cx_2+y_2)^2+(z_1^2+z_2^2)(1+c^2)=0$，这意味着 $z_1=z_2=0$。进而，这意味着双曲线 C_2 包含在一个与 xy-平面平行的平面内。根据引理 3.1，这两条双曲线确定了许多距离。

还需考虑 $x_1=c\cdot y_1$ 和 $x_2=c\cdot y_2$的情形。在这种情形下，我们计算

$$coeff[t^5]=16c(1+c^2)^2r(y_2z_1-y_1z_2).$$

由于上述系数等于零，因此要么 $r=0$ 要么 $y_2z_1=y_1z_2$。情形（C2）假设$y_2z_1=y_1z_2$。情形（C3）假设 $y_2z_1\neq y_1z_2$ 和 $r=0$。

(C2) 情形 $x_1=cy_1$, $x_2=cy_2$, 以及 $y_2z_1=y_1z_2$. 我们首先假设 $y_1=0$。假设 $x_1=cy_1$ 意味着 $x_1=0$。由于 $\mathbf{v}_1$ 非零，我们得到 $z_1\neq 0$。由于$\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 线性无关，因此有 $y_2\neq 0$（注意，$y_2=0$ 也意味着 $x_2=0$）。这与 $y_2z_1=y_1z_2$矛盾，因此 $y_1\neq 0$。

我们设定 $z_2=y_2z_1/y_1$ 并计算

$$coeff[t^2]-coeff[t^4]=-4c(1+c^2)y_1^3\left(y_1^2\cdot(1-c^2)^2+z_1^2(1+c^2)\right).$$

由于该表达式等于零，我们有 $y_1^2\cdot(1-c^2)^2+z_1^2(1+c^2)=0$。然而，$y_1^2\cdot(1-c^2)^2\geq 0$ 以及 $z_1^2(1+c^2)>0$。这一矛盾表明，当前情形不可能发生。

（C3） $x_1=cy_1$、 $x_2=cy_2$、 $y_2z_1\neq y_1z_2$和 $r=0$的情形。我们计算

$$coeff[st^5]=128c^2(1+c^2)(y_1z_2-y_2z_1)(y_1z_1-y_2z_2).$$

由于该系数等于零，我们有 $y_1z_1=y_2z_2$。情形（C4）假设 $y_1=0$。情形（C5）假设 $y_1\neq 0$。

（C4）、 $x_2=cy_2$、 $y_2z_1\neq y_1z_2$、 $y_1z_1=y_2z_2$、 $y_1=r=0$和 $x_1=cy_1$的情形。根据假设 $x_1=cy_1$，我们有 $x_1=0$。由于$\mathbf{v}_1$ 非零，我们有 $z_1\neq 0$。我们还知道 $y_2\neq 0$，因为否则上述论证将推出$\mathbf{v}_1$ 和$\mathbf{v}_2$平行。于是， $y_1z_1=y_2z_2$ 导致 $z_2=0$。

我们计算

$$coeff[s^6]=-6c(1+c^2)y_2(y_2^2(1+c^2)+z_1^2)^2.$$

由于 $y_2\neq 0$ 和 $c\neq 0$，上述系数非零。这个矛盾表明当前情形不可能发生。

(C5)满足以下条件的情形： $\boldsymbol{x_1 = cy_1,\quad x_2 = cy_2,\quad y_2z_1 \neq y_1z_2,\quad r = 0,\quad y_1z_1 = y_2z_2}$**，以及** $\boldsymbol{y_1 \neq 0}$。在这种情形下，我们可以将 $y_1z_1 = y_2z_2$ 写成 $z_1 = y_2z_2/y_1$。假设 $z_2 = 0$。那么$z_1 = y_2z_2/y_1 = 0$，这意味着双曲线 C_2 包含在 xy-平面内。在这种情形下，定理 **1.1** 表明这两条双曲线确定了许多距离。

还需考虑 $z_2 \neq 0$ 的情形。我们计算

$$coeff[s^2] = 2c(y_1 - y_2)^3\left(y_1^2(1+c^2) + z_2^2\right)\left(y_1(1-c^2)^2 + z_2^2(1+c^2)\right).$$

由于上述系数等于零，且 $y_2,\ z_2 \neq 0$，我们得到 $y_1 = y_2$。这又意味着 $y_2z_1 = y_1z_1 = y_2z_2 = y_1z_2$。这与假设 $y_2z_1 \neq y_1z_2$ 矛盾，因此当前情形不可能出现。

上述分析涵盖了所有可能的情形，因此两条双曲线总能确定许多不同的距离。