arXiv:2303.10246v1 [math.CV] 17 Mar 2023

Lohwater-Pommerenke 定理的推广

P.V.DOVBUSH

Abstract. 本文应用 $\mathbb{C}^n$中的 Zalcman 引理，给出了多复变全纯函数正规性的一个充分条件，该条件推广了 A.J. Lohwater 和 Ch. Pommerenke [4,定理 1]中已知的一维判据。

一种归因于 Andr´e Bloch 的“启发式原理”指出：在区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 中具有共同性质 P 的全纯函数族，若整个复平面上不存在具有性质 P 的非恒定全纯函数，那么该函数族 [往往是 Ω 中的] 正规族。 $\mathbb{C}$这种性质的一个例子是“统一有界性”。 []

1975 年，Zalcman [5]对此给出了严格的表述和证明。Zalcman 的工作受到 Lohwater 和 Pommerenke [4]结果的启发。他们的定理讨论的是正规函数，而不是正规族，但证明几乎完全相同。

本文旨在推广 Lohwater 和 Pommerenke 关于定义在 $\mathbb{C}^n$ 的有界域上的正规函数的结果。 [4]

众所周知，正规性的概念可以通过多种方式推广到高维情形。这里我们采用 Cima 和 Krantz [1, 第 305] 页的定义。

设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个有界域。我们用 $B(a,r)$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 中以 a 为中心、半径为 r 的球。因此， $B(a,r)$ 由所有满足 $|z-a|<r$ 的 $z \in \mathbb{C}^n$ 组成。

对于每个属于 $C^2(\Omega)$ 类的函数 φ ，我们在每个点 $z \in \Omega$ 处定义一个厄米形式

$$L_z(\varphi, v) := \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_k \partial \overline{z}_l}(z) v_k \overline{v}_l$$

并称其为函数 φ 在 z 处的 Levi 形式。对于 Ω 中的全纯函数 f ，令

$$f^\sharp(z) := \sup_{|v|=1} \sqrt{L_z(\log(1+|f|^2), v)}. \tag{0.1}$$

由于对于所有 $z \in \Omega$，Levi 形式 $L_z(\log(1+|f|^2)\ v)$ 均为非负，因此量 $f^\sharp(z)$ 定义良好。

设 U 为 $\mathbb{C}$中的一个单位圆盘。Ω 上的 Kobayashi 无穷小度量定义为$K_\Omega(z, v) = \inf\{\alpha : \alpha > 0$ 且 $\exists g : \Omega \to U$ 全纯， $g(0) = z$ 且 $g'(0) = v/\alpha\}$ 定义 0.1. 若存在常数 C, $0 < C < \infty$，使得全纯函数 $f: \Omega \to \mathbb{C}$ 满足以下条件，则称其为正规函数：

$$L_z(\log(1+|f|^2), v) \le C \cdot K_\Omega^2(z, v) \tag{0.2}$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 32A18.*Key words and phrases.* Marty 判别准则，Zalcman 引理，正规族，多复变数的正规全纯函数。

对所有 $(z,v) \in \Omega \times \mathbb{C}^n$均成立。

定理 0.2. 若函数 f 在 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上全纯且非恒定，并且存在序列 $z_j \in \Omega$, $\rho_j = 1/f^\sharp(z_j) \to 0$, 使得序列

$$g_j(\zeta) = f(z_j + \rho_j \zeta)$$

在 $\mathbb{C}^n$ 中局部一致收敛到一个满足$g^\sharp(\zeta) \leq g^\sharp(0) = 1$的非恒定整函数 g 。

证明. 设 $\{p_j\}$ 是 Ω 中任意一个点序列，则 $B(p_j, \delta_j) \subset \Omega$, 其中$\delta_j = dist(p_j, \partial\Omega)$。根据 Kobayashi 度量的距离缩减性质

$$K_\Omega(z,v) \leq K_{B(p_j,\delta_j)}(z,v)$$

对所有 $(z,v) \in B(p_j,\delta_j) \times \mathbb{C}^n$均成立。 $B(p_j,\delta_j)$ 的 Kobayashi 度量为

$$K_{B(p_j,\delta_j)}(z,v) = \frac{[(\delta_j^2 - |z-p_j|^2)|v|^2 + |(z-p_j,v)|^2]^{1/2}}{\delta_j^2 - |z-p_j|^2}$$

显然满足不等式:

$$K_{B(p_j,\delta_j)}(z,v) \leq \frac{\delta_j |v|}{\delta_j^2 - |z-p_j|^2}.$$

若 f 在 Ω 中正规，则由 (0.2) 可得

$$f^\sharp(p_j + \delta_j\zeta) \leq \frac{\sqrt{C}\delta_j}{\delta_j^2 - |\delta_j\zeta|^2}. \tag{0.3}$$

令 $g_j(\zeta) := f(p_j + \delta_j\zeta)$。由 Levi 形式在双全纯映射下的不变性可知,

$$L_\zeta(\log(1+|g_j|^2), v) = L_{p_j+\delta_j\zeta}(\log(1+|f_j|^2), \delta_j v)$$

因此

$$g_j^\sharp(\zeta) = \delta_j f^\sharp(p_j + \delta_j\zeta).$$

由 (0.3) 可得

$$g_j^\sharp(\zeta) \leq \frac{\sqrt{C}}{1-|\zeta|^2}$$

对所有 j 以及所有 $\zeta \in B(0,1)$ 均成立。根据 Marty 判别准则（定理 [2, 定理 2.1]），族 $\{g_j(\zeta)\}$ 在单位球 $B(0,1)$ 中正规。

因此，若 f 在 Ω 中不是正规函数，则存在 Ω 中的一个序列 $\{p_j\}$ ，使得 $\{g_j(\zeta) := f(p_j + \delta_j\zeta)\}$ 在某点处不是正规序列，不妨设该点为 ζ_0,$\zeta_0 \in B(0,1)$。由 Zalcman 引理 [2, 定理 3.1] 可知，存在$\zeta_j \to \zeta_0$, $\rho_j = 1/g_j^\sharp(\zeta_j) \to 0$, 使得序列

$$g_j(\zeta) = f_j(p_j + \delta_j(\zeta_j + \rho_j\zeta))$$

在 $\mathbb{C}^n$ 中局部一致收敛到一个非常数整函数 g ，满足$g^\sharp(\zeta) \leq g^\sharp(0) = 1$。简单计算可得 $\delta_j\rho_j = 1/f^\sharp(p_j + \delta_j\zeta_j)$, 因此

$$g_j(\zeta) = f_j(p_j + \delta_j\zeta_j + \zeta/f^\sharp(p_j + \delta_j\zeta_j))$$

在 $\mathbb{C}^n$ 中局部一致收敛到一个非常数整函数 g ，满足 $g^\sharp(\zeta) \leq g^\sharp(0) = 1$。由此可得 $z_j = p_j + \delta_j\zeta_j$, $\rho_j = 1/f^\sharp(p_j + \delta_j\zeta_j)$ 起到了关键作用。定理 0.2 的证明至此完成。□

下一个结果与前面的定理密切相关，本质上是对 (0.2) 的重新表述。

定理 0.3。设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个有界域。如果 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 是一个正规全纯函数，那么对于 Ω 中任意选取的序列 $\{p_j\}$ 以及 $\{r_j\}, r_j > 0$，若 $\lim_{j\to\infty} r_j/\delta_j = 0$，其中 $\delta_j = dist(p_j, \Omega)$，则序列 $\{f(p_j + r_j\zeta)\}$ 在 $\mathbb{C}^n$ 中局部一致收敛于一个常值函数。

证明。令 $R_j = \delta_j/r_j$。显然 $R_j \to \infty$。不失一般性，假设 $R_j > j$。那么对于所有满足 $|\zeta| < j$ 的 $\zeta \in \mathbb{C}^n$，有

$$|p_j + r_j\zeta - p_j| = r_j|\zeta| < \delta_j$$

因此 $p_j + r_j\zeta \in B(p_j, \delta_j) \subset \Omega$。所以 $g_j(\zeta) := f(p_j + r_j\zeta)$ 是球 $B(0, j) = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta| < j\}$ 上的全纯函数。

由定义可立即得出，由于 f 是正规函数，因此存在一个正数常数 C，使得

$$L_z(\log(1 + |f|^2), v) \le C \cdot K_\Omega^2(z, v)$$

对所有 $(z, v) \in \Omega \times \mathbb{C}^n$均成立。

由于 $B(p_j, \delta_j)$ 包含于Ω，根据距离缩减性质可得

$$K_\Omega(z, v) \le K_{B(p_j,\delta_j)}(z, v)$$

对所有 $(z, v) \in B(p_j, \delta_j) \times \mathbb{C}^n$均成立。由于

$$K_{B(p_j,\delta_j)}(z, v) = \frac{[(\delta_j^2 - |z - p_j|^2)|v|^2 + |(z - p_j, v)|^2]^{1/2}}{\delta_j^2 - |z - p_j|^2}.$$

我们有

$$K_{B(p_j,\delta_j)}(z, v) \le \frac{\delta_j|v|}{\delta_j^2 - |z - p_j|^2}.$$

因此

$$K_\Omega(z, v) \le \frac{\delta_j|v|}{\delta_j^2 - |z - p_j|^2}$$

对所有 $(z, v) \in B(p_j, \delta_j) \times \mathbb{C}^n$。因此，

$$\sqrt{L_{p_j+r_j\zeta}(\log(1 + |f_j|^2), v)} \le \frac{\sqrt{C}\delta_j|v|}{\delta_j^2 - |r_j\zeta|^2}$$

对所有 $(\zeta, v) \in B(0, j) \times \mathbb{C}^n$。对两边关于 $|v| = 1$ 取上确界，得到

$$f^\sharp(p_j + r_j\zeta) \le \frac{\sqrt{C}\delta_j}{\delta_j^2 - |r_j\zeta|^2} \tag{0.4}$$

由 Levi 形式在双全纯映射下的不变性可知，

$$L_\zeta(\log(1 + |g_j|^2), v) = L_{p_j+r_j\zeta}(\log(1 + |f_j|^2), r_j v)$$

因此

$$g_j^\sharp(\zeta) = r_j f^\sharp(p_j + r_j\zeta). \tag{0.5}$$

由 (0.4)、(0.5) 和 $\delta_j/r_j > j$，我们注意到

$$g_j^\sharp(\zeta) \le \frac{\sqrt{C}r_j\delta_j}{\delta_j^2 - |r_j\zeta|^2} \le \frac{\sqrt{C}/j}{1 - (1/j)^2|\zeta|^2}$$

对所有充分大的 j 以及所有 ζ、$|\zeta| < j$。

对每个 $m \in N$，根据马蒂定理（定理 [2, 定理 2.1]），序列 $\{g_j\}_{j>m}$ 在 $|\zeta| < m$ 中是正规的。众所周知的康托尔对角线法给出一个子序列 $\{g_k = g_{j_k}\}$，它在每个球 $|\zeta| < R$上都一致收敛。极限函数 g 是全纯的，并满足 $g^\sharp(\zeta) = 0$，由此得到： $dg(\zeta) = 0$ 对所有$\zeta \in \mathbb{C}^n$都成立，即 $g(\zeta) \equiv$在 $\mathbb{C}^n$中为常数。□

定理 0.3 可改述如下。

推论 0.4. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个有界域。若 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 是一个全纯函数，且存在序列 $\{p_j\}$ 属于 Ω 以及 $\{r_j\}, r_j > 0$，满足 $\lim_{j\to\infty} r_j/\delta_j =$0，其中 $\delta_j = \delta_\Omega(p_j)$，使得 $\{f(p_j + r_j\zeta)\}$在 $\mathbb{C}^n$中局部一致收敛到一个非常值全纯函数，则 f 是非正规的。

注记 0.5. 在 [3], 定理 0.3 中，证明了单位球在 $\mathbb{C}^n$中的情形。定理 0.3 的逆命题对于 $n \geq 2$未必成立。Lohwater 和 Pommerenke [4, 定理 1] 最初陈述定理时，并未对 $\rho_n \to 0$的速度作出限制。在证明定理时，他们断言：“如果 f 是正规的，且 $f(z_n + \rho_n\zeta) \to g(\zeta)$局部一致收敛，那么 $\rho_n/(1 - |z_n|) \to 0$”。引号中的陈述是错误的，这可由 $f(z) = z$, $z_n = 1 - n^{-3}$, $\rho_n = n^{-2}$, $g(\zeta) \equiv 1$看出。

这很可能是 Lohwater-Pommerenke 定理无法真正推广到高维域的原因之一。

References

[1] J. A. Cima 和 S. G. Krantz（1983）多复变数正规函数的 Lindel¨of 原理，《杜克数学杂志》50，303-328，MR700143[2] P. V. Dovbush（2020） C^n中的 Zalcman 引理。《复变函数与椭圆方程》65:5，796-800，MR4071476[3] Kyong T. Hahn（1986）。正规亚纯函数若干经典定理的高维推广。载于：《复变函数理论与应用》6.2-4，第109–121页。ISSN：0278 1077 10 1080 17476938608814163 -。DOI：。/ A. J. Lohwater 和 C. Pommerenke（）。关于正规亚纯函数，《芬兰科学院年刊》A辑第550号，1-12，MR0338381[5] L. Zalcman（1975）复函数论中的启发式原理。《美国数学月刊》82，813-818，MR379852 [4] 1973