arXiv:2303.10258v1 [math.RA] 17 Mar 2023

¨Cotor 的 Künneth 公式。

A. SALCH

Abstract. 我们研究如何计算余模张量积的余张量积，以及更一般地，如何计算其导出余张量（即 Cotor）群。特别是，我们确定了 Cotor 存在 K¨unneth 公式的条件。我们证明，当且仅当某个适当的系数余模具有平凡余作用时，Cotor 群才存在一个简单的 K¨unneth 定理。此结果是我们构造的一个谱序列的应用，该谱序列用于计算余模张量积的 Cotor。最后，对于某些特别具有拓扑自然性的非平凡余模族，我们推导出零阶 Cotor 群（即余张量积）存在 K¨unneth 公式的充要条件。我们给出拓扑应用，包括关于谱的楔积的 Adams 谱序列的 E_2 项，以及谱的楔积的 Hurewicz 像的推论。

Contents

1. 引言。1 2. 基本思想及对双代数的限制。4 3. 一个余模平凡的情形。6 4. 余模的本原滤过。8 5. Cotor 的 K¨unneth 谱序列计算示例。15 6. 何时存在 Cotor^0 的 K¨unneth 公式？16 7. 拓扑应用。19 参考文献 22

1. 引言

经典且广为人知的 K¨unneth 公式给出了

- 阿贝尔群链复形张量积的同调[1]，并用各个链复形同调的（导出）张量积来表示，
- 类似地，拓扑空间笛卡尔积的同调可用各个空间同调的（导出）张量积来表示。
- 上一个例子的稳定同伦版本：谱的楔积的同调，可以用各个谱的同调的（导出）张量积来描述。

[1]或者，更一般地，对于任意交换环 R 上的模链复形，若愿意考虑 K¨unneth 谱序列的话。

更一般地，在任何具有某种上同调概念和某种张量积的情形下，我们都期望该情形中的“K¨unneth 公式”能够给出张量积的上同调，并将其表示为各个因子的上同调的（导出）张量积。

现在设 Γ 是某个基环 A 上的双代数，或者更一般地说，是双代数胚。在 Γ-余模的范畴中，通常的上同调概念由 $\mathrm{Cotor}^*_\Gamma(A,-)$ 给出，它是余张量积 $\mathrm{Cotor}^0_\Gamma(A,-) \cong A\square_\Gamma -$ 的导出函子。利用 Γ 上的乘法，我们在 Γ-余模范畴上得到一个张量积 $\otimes_A$。因此，我们想知道，是否存在适用于余张量积，或更一般地适用于 Cotor 的良好 K¨unneth 公式。现有文献中似乎没有讨论这类 K¨unneth 公式的地方。本文旨在填补文献中的这一“空白”。

在解释本文的主要结果之前，我们先说明，为什么期待 Cotor 中存在某种 K¨unneth 公式既合理又不合理。给定某个域 k 上的代数群 G，G 的表示（这里取广义意义，不要求有限维）等价于其表示 Hopf代数 kG 上的余模。这些余模的 Cotor 群可以恢复这些表示的上同调群。当然，对于任意表示 ρ_1 和 ρ_2，期待 $H^*(G;\rho_1)$ $H^*(G;\rho_2)$ 与 $H^*(G;\rho_1\otimes_k\rho_2)$ 之间存在简单关系是不现实的！从这类例子可以清楚看出，若不对双代数胚或相关余模施加某种限制性假设，Cotor 中不可能存在直接的 K¨unneth 公式。

另一方面，我们来考察 Cotor 在代数拓扑中的应用。本文属于纯代数领域，但其动机源于拓扑学问题，因此希望读者能谅解我们在此稍作拓扑学方面的探讨。给定一个满足标准条件 E_* [2]，的广义同调理论，其在 E_*-同调上的稳定余运算环 E_*E 构成一个双代数胚（E_*, E_*E）。对于任意谱 X，我们得到广义 Adams 谱序列

$$E_2^{*,*} \cong \mathrm{Cotor}^{*,*}_{E_*E}(E_*, E_*(X)) \Rightarrow \pi_*\left(\hat{X}_E\right).$$

在特殊情形下，当 E 是经典模 p 同调时，$E_* \cong \mathbb{F}_p$集中于零次，并且有 $E_*E \cong A_*$，即模 p Steenrod 对偶代数，它是 $\mathbb{F}_p$上的交换双代数。当 X 是每个维数中都只有有限个胞腔的 CW复形时，该谱序列具有如下形式

$$E_2^{*,*} \cong \mathrm{Cotor}^{*,*}_{A_*}(\mathbb{F}_p, H_*(X;\mathbb{F}_p)) \Rightarrow \left(\pi_*^{st}(X)\right)^\wedge_p,$$

其中 $(\pi_*^{st}(X))^\wedge_p$ 是 X的稳定同伦群的 p-进完备化，即 $(\pi_*^{st}(X))^\wedge_p \cong \lim_{n\to\infty} \pi_*^{st}(X)/p^n\pi_*^{st}(X)$。

现在设 X 和 Y 是谱，并将 $\pi_*^{st}(X\wedge Y)^\wedge_p$ 记为楔积 $X\wedge Y$ 的 p-进完备稳定同伦群。Hurewicz 同态的像

$$\pi_*^{st}(X\wedge Y)^\wedge_p \to H_*(X\wedge Y;\mathbb{F}_p) \cong H_*(X;\mathbb{F}_p)\otimes_{\mathbb{F}_p} H_*(Y;\mathbb{F}_p)$$

恰好是 Adams E_∞-页中的 0线，也就是其中的那些元素：

$$\mathbb{F}_p\square_{A_*}\left(H_*(X;\mathbb{F}_p)\otimes_{\mathbb{F}_p} H_*(Y;\mathbb{F}_p)\right)$$

它们在 Adams谱序列中存活。

[2]这里的标准参考文献是 [1]和 [17]的附录1。

模 p 同调确实满足 K¨unneth 公式。模 p 同调中的 Hurewicz像 是否满足 K¨unneth 公式，这个问题几乎[3]等同于询问 Cotor^0，（即余张量积）是否满足 K¨unneth 公式

$$\mathbb{F}_p\Box_{A_*}\left(H_*(X;\mathbb{F}_p)\otimes_{\mathbb{F}_p}H_*(Y;\mathbb{F}_p)\right)\cong\left(\mathbb{F}_p\Box_{A_*}H_*(X;\mathbb{F}_p)\right)\otimes_{\mathbb{F}_p}\left(\mathbb{F}_p\Box_{A_*}H_*(Y;\mathbb{F}_p)\right).$$

一个乐观得不受拘束的人甚至可能会期待，在更高阶的 Cotor 群中也存在某种 K¨unneth 定理，从而能够用 Adams 和 的 Adams E_2-页来表示整个 Adams E_2-页

$$\mathrm{Cotor}^{*,*}_{A_*}\left(\mathbb{F}_p,H_*(X;\mathbb{F}_p)\otimes_{\mathbb{F}_p}H_*(Y;\mathbb{F}_p)\right)$$

对于 $X\wedge Y$，用 X 和 Y 的 Adams E_2 页表示。

拓扑学考量使人觉得，在适当的假设下，Cotor^0，或许可以存在 K¨unneth 公式，也可能是 Cotor^*。另一方面，表示论考量却让人觉得这不太可能。我们希望读者现在已经想知道事情最终如何发展；这正是本文的主题。

我们的发现概述如下：

- 第 2 节回顾余模范畴的基本概念。主要结果是一个简单的观察，即命题 2.1：除非双代数胚Γ 的左右单位映射 η_L、η_R 满足 Γ 彼此相等，否则余模不可能存在 K¨unneth 公式；换言之，该双代数胚 Γ 实际上是一个双代数。因此，本文余下部分将只讨论双代数上的余模。

- 第 3 节回顾其中一个余模为平凡余模的情形，即它的所有元素都是本原元。这是最简单的情形；据作者所知，第 3 节中的结果基本上都可由一个引理推出，该引理最早见于 Al-Takhman 于2002年发表的一篇论文 [3]。第 3 节的主要结果是推论 3.4，它证明，当 N 是一个平坦于基环 A上的平凡 Γ-余模时，有如下同构：

(1.1) $\mathrm{Cotor}^n_\Gamma(L,M\otimes_A N)\cong\mathrm{Cotor}^n_\Gamma(L,M)\otimes_A N\cong\mathrm{Cotor}^n_\Gamma(L,M)\otimes_A(A\Box_\Gamma N)$

对所有 n和 L均成立。

- 鉴于同构 (1.1) 在 N 为平凡余模时可视为一个合理的 K¨unneth 型定理，我们可以通过对 N 作滤过，使其过滤商为平凡余模，从而处理 M、N 均非平凡的情形。第 4 节将实现这一思路。具体而言，在定义-命题 4.1 中，我们定义了这样一种典范滤过，即“本原滤过”；若给定余模 N 的该滤过是穷尽的，则可在 N上得到一个典范分次结构。在命题4.2 中，我们证明，当 Γ 是连通分次双代数时，所有有下界的分次 Γ-余模都具有穷尽的本原滤过；由于 Steenrod 对偶代数是连通且分次的，因此在本文研究所涉及的拓扑学例子中，本原滤过都是穷尽的。

结果是一个谱序列

$$E_1^{s,t}\cong\mathrm{Cotor}^s_\Gamma(L,M)\otimes_A N^t\Rightarrow\mathrm{Cotor}^s_\Gamma(L,M\otimes_A N),\tag{1.2}$$

在定理 4.6 中构造。关于此谱序列存在所需的条件，以及

[3]此处的“几乎”是指“除从 0 线出发的 Adams 谱序列微分之外”。

描述 E_1-页时 N 上相关分次的定义，请参见该定理。此谱序列存在带来的若干推论中，最重要的是推论 4.10：如果典范映射

$$(L\square_\Gamma M)\otimes_A (A\square_\Gamma N)\to L\square_\Gamma(M\otimes_A N)$$

是一个同构，并且如果典范映射

$$\mathrm{Cotor}^1_\Gamma(L,M)\otimes_A (A\square_\Gamma N)\to \mathrm{Cotor}^1_\Gamma(L,M\otimes_A N)$$

具有平凡余作用。这是一个负面结果：它告诉我们，除非其中一个张量因子是具有平凡余作用的余模，否则我们无法期待同时适用于 Cotor^0 和 Cotor^1 的任何合理形式的 K¨unneth 公式。关于这一结果所需的较弱假设，见推论 4.10。

- 在第5节中，我们通过一系列例子对谱序列 (1.2) 进行了非常具体的研究，这些例子中存在多个长度的非平凡微分。特别是，第5节中的谱序列计算表明，谱序列 (1.2) 不一定在 E_1 或 E_2 处退化，而且确实可能存在任意长的非零微分。
- 第6节讨论余张量积的 K¨unneth 定理何时成立的问题，即 Cotor^0。鉴于推论 4.10 的负面结果，除非相关余模之一是平凡的，否则对于 Cotor^0，K¨unneth 定理已是所能期待的最好结果。定理 6.2 是第6节的主要结果：它证明，当 M 是 Γ 的子余模时，存在 K¨unneth 同构 $(A\square_\Gamma M)\otimes_A(A\square_\Gamma N)\to A\square_\Gamma(M\otimes_A N)$，当且仅当对于任何满足 $\psi_N(n)\in M\otimes_A N\subseteq\Gamma\otimes_A N$ 的 $n\in N$，n 都是本原元。这里，$\psi_N\colon N\to\Gamma\otimes_A N$ 是余模 N 的余作用映射。定理 6.4 及其推论将这一结果推广到 M 是 Γ 的有限个副本的有限直和（或在分次情形下，有限型直和）的子余模的情形。
- 最后，在第7节中，我们给出一些拓扑推论。在推论 7.2 和 7.4 中，我们给出谱 Y满足何种必要且充分条件时，$X\wedge Y$ 的 Adams E_2-页中的 0线可分解为 X 的 Adams E_2-页中的 0线与 Y的 Adams E_2-页中的 0线的张量积；在$X=BP$、$BP\langle n\rangle$、ku、ko和 tmf这些情形下，判据尤其明确。

2. Basic ideas, and the restriction to bialgebras.

我们回顾一些关于余模的基本事实；关于余代数情形的优秀参考资料包括 [9], 中的专著式论述，而关于双代数胚情形，可参见 [17]的附录1。给定一个余代数或双代数胚（A，Γ），左 Γ-余模是一个左 A-模 M，配备一个余结合、余单位的左 A-模映射 ψ：$M\to\Gamma\otimes_A M$。若 Γ 是一个双代数胚[4] 且在 A上平坦，则我们有一个阿贝尔范畴

[4]我们讨论双代数胚上的余模，而不讨论更一般的余代数胚上的余模，因为要定义 A 上的 Γ-余模的张量积，就需要在 Γ 上有一个乘法。这个论证与熟知的对偶论证相同：若 R 是一个 k-代数，且M、N是 R-模，那么为了在 $M\otimes_k N$上得到自然的 R-模结构，我们需要在 R 上有一个 k-线性的余乘法。明确地说，[9]第 3.8 节中关于余代数上余模张量积的内容，讨论的是一个 Γ-余模与一个 A-模的张量积，而非两个 Γ-余模的张量积。

Comod(Γ)，其对象为左 Γ-余模，配备由关于 A的张量积给出的幺半积；相对内射的左 Γ-余模是形如 $\Gamma \otimes_A M$ 的对象的直缩，其中 A是某个 M-模；这类余模称为扩张余模。扩张余模函子 E： Mod(A) →Comod(Γ)是遗忘函子 G： Comod(Γ) → Mod(A)的右伴随。本文中的所有导出函子都是相对于这样一个容许类的相对导出函子，其内射对象为相对内射对象。关于一般相对同调代数的优秀教材式论述，参见 [13] 的第IX章；关于当前语境下的入门介绍，即针对余模上这个特定容许类的相对导出函子，可参见 [17] 的附录1（侧重于广义Adams谱序列）或 [15] 的第10.11节（侧重于Eilenberg-Moore谱序列）[5]。

基本问题是：在什么条件下，余模本原元会有 K¨unneth 公式？使这一问题更精确的初步尝试如下：给定左 Γ-余模 M 和 N，我们要问在什么条件下可能存在一个同构

$$A\square_\Gamma (M \otimes_A N) \cong (A\square_\Gamma M) \otimes_A (A\square_\Gamma N). \tag{2.3}$$

最明显的要求是，$(A\square_\Gamma M) \otimes_A (A\square_\Gamma N)$ 必须确实有定义。因此，$A\square_\Gamma M$ 和 $A\square_\Gamma N$ 必须是 A-模。相关的观察如下：

命题 2.1. 设 (A, Γ) 是一个双代数胚。则以下条件等价：

(1) 子群包含

$$M\square_\Gamma N \hookrightarrow M \otimes_A N \tag{2.4}$$

对于每个右 Γ-余模 M 和左 Γ-余模 N，该映射都是 A-线性的。

(2) 子群包含

$$A\square_\Gamma M \hookrightarrow M \tag{2.5}$$

对所有左余模 M 都是 A-线性的。

(3) 双代数胚 (A, Γ) 是一个双代数。也就是说，(A, Γ) 的左单位映射 η_L 和右单位映射 η_R 相同，即 $\eta_L = \eta_R$。

证明。

1 推出 2：显然。2 推出 3：令 $M = A$。于是 $1 \in A\square_\Gamma A$，因此 (2.5) 特别推出

$$\begin{aligned}\eta_R(a) \otimes 1 &= 1 \otimes a \\ &= \psi(a \cdot 1) \\ &= a\psi(1) \\ &= a(1 \otimes 1) \\ &= \eta_L(a) \otimes 1 \in \Gamma \otimes_A A,\end{aligned}$$

[5]对于不愿处理相对同调代数的读者，值得欣慰的是，当双代数胚 (A, Γ) 的基环 A 是域时，这些相对导出函子与通常导出函子一致。因此，除非基环 A 不是域，否则完全不必提及相对同调代数。

所以对所有 $a \in A$, $\eta_R(a) = \eta_L(a)$。这里 ψ 是 M 上的余作用映射。

3 推出 1：回顾一下，左 Γ-余模 M 的结构映射 $\psi\colon M \to \Gamma \otimes_A M$ 必须是左 A-模态射。如果 $\eta_L = \eta_R$，那么 ψ 是左 A-模态射，当且仅当它是右 A-模态射。因此，等化子列中的映射 $\psi_M \otimes N$ 和 $M \otimes \psi_N$

$$M\square_\Gamma N \longrightarrow M \otimes_A N \underset{M\otimes\psi_N}{\overset{\psi_M\otimes N}{\rightrightarrows}} M \otimes_A \Gamma \otimes_A N$$

是 A-模态射，因此包含映射 (2.4) 是 A-线性的。

□

注 2.2. 根据命题 2.1，只有当 (A,Γ) 是双代数而不只是双代数胚时，对于所有 Γ-余模 M, N，我们才可能得到 K¨unneth 同构 (2.3)。但即使将范围限制在双代数上的余模，公式 (2.3) 仍常常不成立。例如，设 $A = k$，其中 k 是某个域；设$\Gamma = k[x]$，其中 x 是本原元；再设 $M = N$ 是 Γ 的子-Γ-余模，由 1 和 x 的 k-线性张成。于是 $A\square_\Gamma M \cong A\square_\Gamma N \cong k$ 由 1 张成，而$A\square_\Gamma(M \otimes_A N) \cong k \oplus k$ 的基为 $\{1 \otimes 1, x \otimes 1 - 1 \otimes x\}$。由于 k-向量空间的维数不同，我们不可能得到恰好具有形式 (2.3) 的同构。不过，命题 2.1 的“要旨”仍然成立：任何关于 Cotor 的 K¨unneth 公式——也就是说，任何一种用 A 上 Cotor-模的张量积来描述 A 上张量积的 Cotor 的方法——首先都要求 A 是双代数，这样才能定义 Cotor-模在 A 上的张量积。

根据命题2.1，本文余下部分将只讨论双代数上的余模。

3. The case where one comodule is trivial.

我们有如下结果给出的张量-余张量关系[6]

命题 3.1. 若 Γ 是交换环 A 上的余代数[7]，M 是右 Γ-余模，N 是左 Γ-余模，且 W 是 A-模，则存在自然的 A-线性映射

$$W \otimes_A (M\square_\Gamma N) \to (W \otimes_A M)\square_\Gamma N, \tag{3.6}$$

$$(M\square_\Gamma N) \otimes_A W \to M\square_\Gamma(N \otimes_A W), \tag{3.7}$$

[6]命题 3.1 很容易证明——事实上，在我所知最早发表该结果的论文中，它只是一个引理，证明仅有五行，[3]——但由于命题 3.1 是文献中最接近 Cotor 的 K¨unneth 定理的结果，我们希望读者能谅解我们略述这个引理的历史。它最初作为引理 3.8 出现在 [3], , 随后作为引理 2.3 出现在 [4], Al-Takhman 的杜塞尔多夫博士论文的出版版本中¨[2], , 该版本比 [3], 更容易找到；最后，它作为第 10.6 节出现在著作 [9]中。[7]同构 (3.6) 和 (3.7) 看起来涉及在 A上对 Γ-余模取张量积，然而 Γ 只是一个余代数，并非双代数。尽管 Γ 上没有乘法，这些张量积仍有意义，并且是 Γ-余模；原因在于每种情形下，其中一个张量因子都是一个 *trivial* 余模。

其中 $W \otimes_A M$ 和 $N \otimes_A W$ 均赋予平凡的 Γ-余模结构，即余作用映射为

$$\begin{aligned} W \otimes_A M &\to W \otimes_A M \otimes_A \Gamma \\ w \otimes m &\to w \otimes \psi_M(m), \quad and \\ N \otimes_A W &\to \Gamma \otimes_A N \otimes_A W \\ n \otimes w &\to \psi_N(n) \otimes w, \end{aligned}$$

其中， ψ_M : $M \to M \otimes_A \Gamma$ 和 ψ_N : $N \to \Gamma \otimes_A N$ 分别是 M 和N的余作用映射。

此外，以下条件等价:

- 映射 (3.6) 是一个同构。
- 映射 (3.7) 是一个同构。
- 典范包含 $M\square_\Gamma N \hookrightarrow M \otimes_A N$ 在应用函子 $- \otimes_A W$后仍为单射。

虽然命题 3.1 是文献中最接近 Cotor 的 K¨unneth 定理的结果（在此情形下，只有 Cotor^0, ，即余张量积），但它有一个我们需要克服的关键局限：它仅在 M 或 N 中至少一个具有平凡 Γ-余作用时，才用 $\mathrm{Cotor}^*_\Gamma(L, M)$ 和 N 来描述 $\mathrm{Cotor}^*_\Gamma(L, M \otimes_A N)$。这里，若左 Γ-余模 W 的余作用映射 $\psi_W : W \to \Gamma \otimes_A W$ 由 $\psi_W(w) = 1 \otimes w$ 给出，就称其具有平凡余作用。这个局限过于严格，使得命题 3.1 无法满足 Cotor 的拓扑应用需求。我们希望找到一种对 $\mathrm{Cotor}^*_\Gamma(L, M \otimes_A N)$ 的描述，使其尽可能接近于用 $\mathrm{Cotor}^*_\Gamma(L, M)$ 和 $\mathrm{Cotor}^*_\Gamma(L, N)$ 来描述，同时不假设 M 或 N 具有平凡Γ-余作用。

在讨论 M和 N各自具有非平凡余作用的情形之前，我们至少可以指出，命题 3.1 对高阶 Cotor 群有一个简单的推论。我们首先需要几个简单的引理。回顾一下， $E : \mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Comod}(\Gamma)$ 表示扩张余模函子，它是遗忘函子 G: Comod(Γ) $\to$ Mod(A) 的右伴随。于是:

引理 3.2. 存在一个同构 $E(M \otimes_A GN) \cong (EM) \otimes_A N$，它是 Γ-余模之间的同构，并且关于变量 M 和 N是自然的。

证明。参见 [11], 中的命题 9，其中证明了 A 为双代数时的情形；当 A 为双代数胚时，同一证明仍然适用。□

引理 3.3. 若 M、N 是左 Γ-余模，且 M 是相对内射的，则 $M \otimes_A N$也相对内射。

˜ ˜证明。取一个 A-模 M 以及左 Γ-余模态射 $i : M \to EM$ 和$\pi : EM \to M$，使得 $\pi \circ i = \mathrm{id}_M$。于是我们得到如下交换图

$$M \otimes_A N \xrightarrow{i \otimes_A N} (E\tilde{M}) \otimes_A N \xrightarrow{\pi \otimes_A N} M \otimes_A N,$$
$$\text{id}$$

˜ ˜并且 $(EM) \otimes_A N \cong E(M \otimes_A N)$ 是左 Γ-余模，由引理 3.2 可知。因此， $M \otimes_A N$˜确实是扩张余模 $E(M \otimes_A N)$ 的一个收缩。□

现在我们得到命题 3.1 的如下推论:

推论 3.4. 若 Γ 是交换环 A 上的余代数， L 是右 Γ-余模， M 是左 Γ-余模，且 N 是平坦于 A 的平凡左 Γ-余模，则我们有如下 A-模同构

$$\begin{aligned}\mathrm{Cotor}_\Gamma^n(L, M \otimes_A N) &\cong \mathrm{Cotor}_\Gamma^n(L, M) \otimes_A N \\ &\cong \mathrm{Cotor}_\Gamma^n(L, M) \otimes_A (A \square_\Gamma N)\end{aligned}$$

对每个非负整数 n。

特别地，在 $n = 0$ 情形下，我们有一个 K¨unneth 同构

$$L\square_\Gamma(M \otimes_A N) \cong (L\square_\Gamma M) \otimes_A (A\square_\Gamma N).$$

证明。由于 N 具有平凡余作用，我们有左 Γ-余模的一个同构$N \cong A\square_\Gamma N$，在整个证明过程中我们将自由地使用它。

给定一个由相对内射左 Γ-余模构成的 M 的分解 $I^\bullet$，左 A-余模的上链复形 $I^\bullet \otimes_A N$ 由 N 的平坦性可知是正合的，并且根据引理 3.3，它是一个由相对内射对象构成的复形。因此，上链复形 $L\square_\Gamma(I^\bullet \otimes_A N)$ 的上同调给出 Cotor 群 $\mathrm{Cotor}_\Gamma^*(L, M \otimes_A N)$。应用命题 3.1 可得上链复形的同构 $L\square_\Gamma(I^\bullet \otimes_A N) \cong (L\square_\Gamma I^\bullet) \otimes_A N$，而右侧上链复形的上同调为 $\mathrm{Cotor}_\Gamma^*(L, M) \otimes_A N$，同样是利用 N 的平坦性。□

推论 3.4 的一个部分逆命题如下，由推论 4.10 和 4.11 给出。

4. The primitive filtration of a comodule.

以下内容的一个基本思路是：当余模 M、 N 都具有非平凡余作用时，第 3 节的结果并不能直接应用；但我们可以尝试对余模 M 或 N 作滤过，使每个过滤商都具有平凡余作用，从而得到一个谱序列，其输入项可借助推论 3.4 的某种应用而得到简化。定义-命题 4.1 中给出了这样一种典范且相当有用的滤过[8]，：

定义-命题 4.1。

- 设 (A, Γ) 是一个双代数胚，并设 M 是一个左 Γ-余模。我们将 M 的本原滤过定义为以下滤过

$$0 = M_{-1} \subseteq M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M \tag{4.8}$$

M 的子群如下定义： M_i 是投影$M \to M(i+1)$ 的核，其中

$$M = M(0) \to M(1) \to M(2) \to \dots \tag{4.9}$$

是一个满群同态序列，其定义方式为：归纳地令 $M(i+1)$ 为包含映射 $A\square_\Gamma M(i) \hookrightarrow M(i)$ 的余核。因此，我们得到群的短正合列

$$0 \to M_i \to M \to M(i+1) \to 0, \tag{4.10}$$

$$0 \to A\square_\Gamma M(i) \to M(i) \to M(i+1) \to 0, \quad and \tag{4.11}$$

$$0 \to M_i \to M_{i+1} \to A\square_\Gamma M(i+1) \to 0. \tag{4.12}$$

[8]余模上的这个本原滤过与 [14]中的双代数上的本原滤过相同。我们从未在文献中见过这种本原滤过，也从未听别人提起过，但这是一个非常简单有效的想法，我们猜想其他人很可能不止一次考虑过它。

• 我们称 M 具有穷尽原始滤过，如果 $\cup_i M_i = M$。我们称 M 具有有限原始滤过，如果对于某个 M，有 $M_i = M$。
• 若 (A,Γ) 是一个双代数，则本原滤过 (4.8) 是由子-Γ-余模构成的滤过，而不仅仅是由子群构成的滤过；并且扩张 (4.10)、(4.11) 和 (4.12) 都是 Γ-余模的扩张。

• 当左 Γ-余模扩张 (4.12) 的底层 A-模扩张是分裂的时，我们称 M 上的本原滤过是分裂的。若交换环 A 是半单的（例如它是一个域），则 M 上的本原滤过自动分裂。

• 当 M 上的本原滤过是分裂且穷尽的时，我们有一个 A-模同构 [9] $M \cong \coprod_{i\geq 0} A\square_\Gamma M(i)$。于是，我们将 M 上这个分次称为 M 上的本原分次，其中度数为 i 的分量 M^i 是 $A\square_\Gamma M(i)$。

证明。根据命题 2.1，若 (A,Γ) 是一个双代数，则每个包含映射$A\square_\Gamma M(i) \hookrightarrow M(i)$ 都是左 Γ-余模态射，因此 (4.9) 是一列左 Γ-余模态射，所以 (4.8) 也是一列左 Γ-余模态射；(4.10)、(4.11) 和 (4.12) 也同理。□

当然，任何底层 A-模为阿廷模的左 Γ-余模都具有有限本原滤过。另一个能得到本原滤过性质良好的余模的有用来源是命题4.2：

命题4.2。设 (A,Γ) 是一个连通的分次双代数，即 A 和Γ 在负次数上均为平凡对象，且单位映射 $\eta\colon A \to \Gamma$ 在分次零次上是满射（等价地，是同构）。那么，每个有下界的[10]分次左 Γ-余模都具有穷尽本原滤过。

证明。若 M 是一个下有界的分次左 Γ-余模，且在分次次数 $< n$ 上平凡，那么 $A\square_\Gamma M \to M$ 在最低分次次数上是同构，因此其余核也下有界，并且其非平凡直和项的分次次数有严格更高的下界。由归纳法，在 (4.9) 中，每个$M(i)$ 在分次次数 $< n+i$ 上都是平凡的；在 (4.8) 中，包含映射 $M_i \subseteq M$ 在分次次数 $< n+i-1$ 上是同构。因此， M的每个齐次元素都属于某个 i 对应的 $M(i)$。□

我们需要几个简单的引理，即引理 4.3 和 4.4；它们显然都不是新的：

引理 4.3. 设 (A,Γ) 是一个双代数，设 I 是一个集合，且 $\{M_i\colon i\in I\}$ 是一族左 Γ-余模。设 L 是一个左 Γ-余模。那么自然映射[11]

$$\coprod_{i\in I}(L\square_\Gamma M_i) \to L\square_\Gamma\left(\coprod_{i\in I} M_i\right) \tag{4.13}$$

[9]但通常并非 Γ-余模的同构。[10]通常认为，若存在一个整数 n，使得 M 在分次次数 $< n$ 上平凡，则称分次群、模、环等 M 是 *bounded below*。[11]由于从 Γ-余模到 A-模的遗忘函子是左伴随，它保余极限，因此 (4.13) 定义域中的余积也可以同样视为 A-模中的余积，或 Γ-余模中的余积。当然，(4.13) 值域中的余积必须视为 Γ-余模中的余积，否则就无法对其应用余张量积。

是一个同构。

证明。我们有一个 A-模的交换图，其行是正合的

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \coprod_i L\square_\Gamma M_i & \longrightarrow & \coprod_i L\otimes_A M_i & \longrightarrow & \coprod_i L\otimes_A \Gamma\otimes_A M_i \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ 0 & \longrightarrow & L\square_\Gamma \coprod_i M_i & \longrightarrow & L\otimes_A \coprod_i M_i & \longrightarrow & L\otimes_A \Gamma\otimes_A \coprod_i M_i \end{array} \tag{4.14}$$

且标示为同构的映射确实是同构，因为在 A-模中，张量积与余积可交换。因此，(4.14) 中剩余的垂直映射——即映射 (4.13)——也是同构。□

引理 4.4。设 (A,Γ) 是一个双代数，并设

$$M_0 \to M_1 \to M_2 \to \dots \tag{4.15}$$

是左 Γ-余模之间的一列态射。设 L 是一个左 Γ-余模，并设 n 是一个非负整数。则自然群同态

$$\operatorname{colim}_i \operatorname{Cotor}^n_\Gamma(L, M_i) \to \operatorname{Cotor}^n_\Gamma(L, \operatorname{colim}_i M_i) \tag{4.16}$$

是一个同构。

证明。令 $D^\bullet_\Gamma(M_i)$ 表示 M_i 的未约化余边值分解（如 [17], 的附录1中定义 A1.2.11 所述，但用 Γ 替代单位余理想 $\ker\epsilon$）。由于对每个 n，$D^n_\Gamma(M_i) \cong \Gamma^{\otimes_A (n+1)} \otimes_A M_i$，故上链复形 of$A$-模之间的自然映射

$$\operatorname{colim}_i D^\bullet_\Gamma(M_i) \to D^\bullet_\Gamma(\operatorname{colim}_i M_i) \tag{4.17}$$

是一个同构。由于从 Γ-余模到 A-模的遗忘函子是忠实的左伴随，它保留并反映余极限，因此 (4.17) 实际上是 Γ-余模上链复形之间的同构。

在余极限仅为余积的情形下（即，映射 (4.15) 是可裂单射），将引理 4.3 应用于 (4.17)，可得

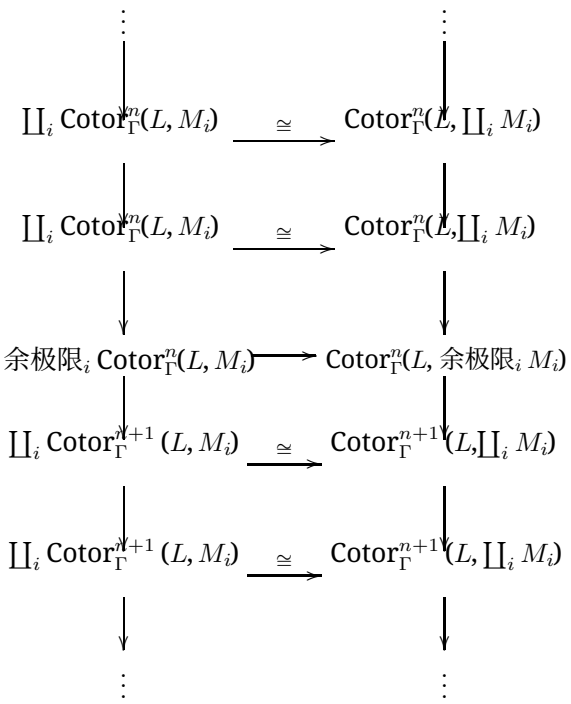
$$\coprod_i \operatorname{Cotor}^n_\Gamma(L, M_i) \to \operatorname{Cotor}^n_\Gamma(L, \coprod_i M_i) \tag{4.18}$$

是一个同构。

更一般地——也就是说，当 (4.15) 中的映射不一定是可裂单射时——我们有如下 Γ-余模短正合列

$$\coprod_i M_i \xrightarrow{\mathrm{id}-T} \coprod_i M_i \to \operatorname{colim}_i M_i \tag{4.19}$$

并将 $\mathrm{Cotor}^*_\Gamma(L,-)$ 应用于 (4.19)，得到一个列正合的交换图

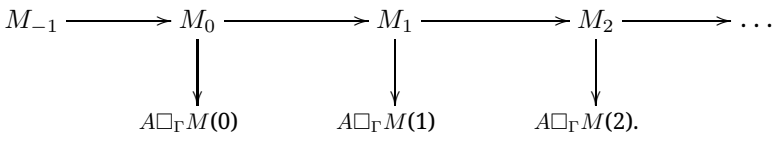


其中所示映射是同构，这是因为 (4.18) 是一个同构。现在，由五引理可知，剩下的映射——即 (4.16)——是一个同构。□

命题 4.5. 设 (A,Γ) 是一个双代数，且 M 是一个左 Γ-余模，具有穷尽原始滤过 $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots$。那么我们有一个第一象限谱序列

$$E^1_{s,t} \cong \mathrm{Tor}^A_s(A\square_\Gamma M(t), N) \Rightarrow \mathrm{Tor}^A_s(M,N)$$
$$d^r : E^r_{s,t} \to E^r_{s-1,t+r}.$$

证明。 这只是对 A-模的扩张塔应用 $\mathrm{Tor}^A_*(-,N)$ 后得到的正合偶的谱序列



□

当然，在双代数 (A,Γ) 的大多数典型例子中，A 是一个域，因此命题 4.5 的谱序列在 E^1 页就已经退化到 $s=0$ 线，从而得到一个意料之中的同构。因此，命题 4.5 的谱序列完全不是我们的关注重点，我们提及它只是为了完整起见。下面给出一个有趣得多的谱序列：

定理 4.6。（Cotor 的 K¨unneth 谱序列。）设 (A,Γ) 是一个双代数，且 L 是右 Γ-余模，M、N 是左 Γ-余模。假设 M 在 A 上平坦，并且 N 具有穷尽原始滤过。

于是我们得到一个第一象限谱序列

$$E_1^{s,t} \cong \mathrm{Cotor}_\Gamma^s(L,M) \otimes_A (A\square_\Gamma N(t)) \Rightarrow \mathrm{Cotor}_\Gamma^s(L, M\otimes_A N) \tag{4.20}$$
$$d_r : E_r^{s,t} \to E_r^{s+1,t-r}.$$

如果 N 上的本原滤过也分裂（例如，当 A 是一个域时），那么 (4.20) 的 E_1 项也可表示为 $E^s{}_1{}^t \cong \mathrm{Cotor}_\Gamma^s(L,M) \otimes_A N^t$ 其中 $N^t = A\square_\Gamma N(t)$ 是 N 上原始分次中次数为 t 的直和项，如定义-命题 4.1 所述。

证明。由于 M 是平坦的，对 N 上的本原滤过应用 $M\otimes_A -$，可得到一个左 Γ-余模的扩张塔

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = M\otimes_A N_{-1} & \longrightarrow & M\otimes_A N_0 & \longrightarrow & M\otimes_A N_1 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & M\otimes_A (A\square_\Gamma N(0)) & & M\otimes_A (A\square_\Gamma N(1)) & & \end{array}$$

使得 $\mathrm{colim}_{n\to\infty} M\otimes_A N_n \to M\otimes_A N$ 是一个同构，因此得到一个谱序列

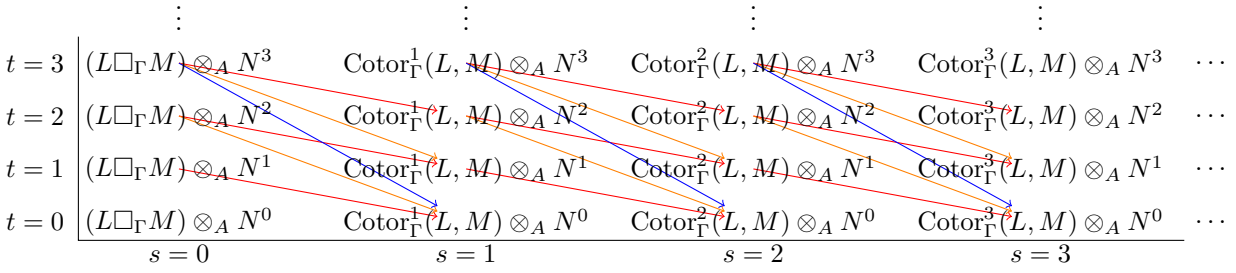
$$E_1^{s,t} \cong \mathrm{Cotor}_\Gamma^s\left(L, M\otimes_A (A\square_\Gamma N(t))\right) \Rightarrow \mathrm{colim}_i\, \mathrm{Cotor}_\Gamma^s(L, M\otimes_A N_i) \tag{4.21}$$
$$d_r : E_r^{s,t} \to E_r^{s+1,t-r}.$$

回想一下，由命题 2.1，$A\square_\Gamma N(t)$ 具有自然的左 Γ-余作用，因为 (A,Γ) 是一个双代数；但该左 Γ-余作用显然是平凡的，因为 $A\square_\Gamma N(t)$ 中的每个元素都是本原元。余作用的平凡性使我们能够应用推论 3.4，从而对每个 s,t，得到 $\mathrm{Cotor}_\Gamma^s(L, M\otimes_A(A\square_\Gamma N(t))) \cong \mathrm{Cotor}_\Gamma^s(L,M) \otimes_A (A\square_\Gamma N(t))$。最后，谱序列 (4.21) 的收敛项 $\mathrm{colim}_i\, \mathrm{Cotor}_\Gamma^*(L, M\otimes_A N_i)$ 同构于

$$\mathrm{Cotor}_\Gamma^*\left(L, \mathrm{colim}_i(M\otimes_A N_i)\right)) \cong \mathrm{Cotor}_\Gamma^*(L, M\otimes_A N)$$

根据引理 4.4。 □

为便于读者直观理解该谱序列，我们给出定理 4.6 的谱序列中 E_1-页的一部分示意图，其中 s 为横坐标，t 为纵坐标，d_1-微分用红色表示，d_2-微分用橙色表示，d_3-微分用蓝色表示：(4.22)



在 (4.22) 中，我们写作 N^i，而不是 $A\square_\Gamma N(i)$，仿佛 N上的本原滤过是分裂的；但这只是为了记号方便，使谱序列的示意图更易读。如果 N 上的本原滤过不是分裂的，那么将图 (4.22) 中所有的 N^i替换为 $A\square_\Gamma N(i)$，所得示意图仍能正确表示该谱序列。

在 (4.22) 中绘制谱序列时采用这种约定，特别是选择水平和垂直坐标，是很方便的，因为 s 列中的双次数恰好是在 E_∞ 页中对 $\mathrm{Cotor}^s_\Gamma(L, M\otimes_A N)$ 有贡献的双次数。

定理 4.6 有如下推论：

推论 4.7. 设 (A,Γ) 是一个双代数，且 L 是一个右 Γ-余模，M、N 是左 Γ-余模。假设 M 在 A 上平坦，并且 N 具有分裂的穷尽原始滤过。则 A-模 $L\square_\Gamma(M\otimes_A N)$ 同构于 $(L\square_\Gamma M)\otimes_A N$ 的子-A-模，该子模由 $s=0$ 列中对每个 $r\geq 1$ 都属于 d_r 微分核的元素组成。

请注意，与 Adams谱序列（其收敛性质在 [6] 中讨论）不同，该谱序列不存在条件收敛问题，因此不会导致 $N=\oplus_{n\geq 0}N^n$ 在 E_∞ 页中变为收敛项中的 $\prod_{n\geq 0}N^n$。这是因为定理 4.6 的谱序列收敛到余极限，因此扩张问题被组织成余极限序列，而非极限序列。

推论4.8. 设 (A,Γ) 是一个双代数，且 L 是右 Γ-余模，M、N 是左 Γ-余模。假设 M 在 A 上平坦，且 N 具有长度为2的原始滤过，即商 Γ-余模 $N/(A\square_\Gamma N)$ 具有平凡的 Γ- 余作用。那么，定理 4.6 的谱序列退化为一个长正合列

$$0 \to (L\square_\Gamma M)\otimes_A(A\square_\Gamma N) \to L\square_\Gamma(M\otimes_A N) \to (L\square_\Gamma M)\otimes_A(N/(A\square_\Gamma N))$$
$$\to \mathrm{Cotor}^1_\Gamma(L,M)\otimes_A(A\square_\Gamma N) \to \mathrm{Cotor}^1_\Gamma(L,M\otimes_A N) \to \mathrm{Cotor}^1_\Gamma(L,M)\otimes_A(N/(A\square_\Gamma N))$$
$$\to \mathrm{Cotor}^2_\Gamma(L,M)\otimes_A(A\square_\Gamma N) \to \mathrm{Cotor}^2_\Gamma(L,M\otimes_A N)\to\cdots.$$

定义 4.9. 给定一个交换环 A，我们称一个 A-模 M能够检测非平凡性，如果对于任意满足 $M\otimes_A N\cong 0$的 A-模 N，都有 $N\cong 0$。

例如，在任意交换环 A 上，非零自由 A-模都能检测非平凡性。如果 A 是一个域，那么每个非零 A-模都能检测非平凡性。如果 A 是一个极大理想为 $\mathfrak{m}$、分式域为 K 的离散赋值环，那么 $K\oplus A/\mathfrak{m}A$能够检测非平凡性。

定理 4.6 的一项最重要推论是推论 4.10：

推论 4.10. 设 (A,Γ) 是一个双代数，且 L 是右 Γ-余模，M、N 是左 Γ-余模。假设 A-模 $L\square_\Gamma M$ 能检测非平凡性，

假设 N 具有分裂的穷尽原始滤过，并假设典范映射

$$(L\square_\Gamma M)\otimes_A (A\square_\Gamma N)\to L\square_\Gamma(M\otimes_A N) \tag{4.23}$$

是一个同构，并且假设典范映射

$$\mathrm{Cotor}^1_\Gamma(L,M)\otimes_A (A\square_\Gamma N)\to \mathrm{Cotor}^1_\Gamma(L,M\otimes_A N) \tag{4.24}$$

是单射。那么 N 具有平凡余作用。

证明。映射 (4.23) 是同构，当且仅当谱序列 (4.20) 中底行上方最左列的所有元素都支持微分，因此无法存活到 E_∞-页。特别地，如果 $(L\square_\Gamma M)\otimes_A N^1$ 非零，那么它必须支持一个非零的 d_1-微分，其靶为 $\mathrm{Cotor}^1_\Gamma(L,M)\otimes_A N^0$，因此 $\mathrm{Cotor}^1_\Gamma(L,M)\otimes_A N^0$ 并非所有元素都能存活到 E_2-项，更不用说 E_∞-项了。因此，映射 (4.24) 不可能是单射。所以 $(L\square_\Gamma M)\otimes_A N^1$ 必定平凡。由于 $L\square_\Gamma M$ 检测非平凡性，N^1 为零。由于 $N^1 = A\square_\Gamma(N/(A\square_\Gamma N))$，$N^1$ 为零可确保 $N(2)\cong N/(A\square_\Gamma N)\cong N(1)$，因而 N^2 也为零；由归纳法，N 上的本原滤过从第二项起恒定。N 上本原滤过的穷尽性因此可得 $A\square_\Gamma N = N$。□

利用命题4.2，以及当 A 是域时，$L\square_\Gamma M$ 的平凡性蕴含 M 的平凡性这一事实，若 (A,Γ) 是连通分次双代数，且 L、M 是有下界的分次 Γ-余模，则有：

推论4.11。设 A 是域，Γ 是 A 上的连通分次双代数。设 L 是分次右 Γ-余模，M、N 是分次左 Γ-余模，并且典范映射

$$(L\square_\Gamma M)\otimes_A (A\square_\Gamma N)\to L\square_\Gamma(M\otimes_A N) \tag{4.25}$$

是同构；再设 L、M 和 N 均非零且有下界，并设典范映射

$$\mathrm{Cotor}^1_\Gamma(L,M)\otimes_A (A\square_\Gamma N)\to \mathrm{Cotor}^1_\Gamma(L,M\otimes_A N) \tag{4.26}$$

是单射。则 N 具有平凡余作用。

推论 4.10 和 4.11 是否定性结果，它们以某种方式给出了推论 3.4 的逆命题：它们告诉我们，当我们有预期的 Cotor^0 的 K¨unneth 公式 (4.25)（即余张量积）时，我们不可能有任何合理的 K¨unneth 公式来描述 Cotor^1, ，因为典范映射 (4.26) 不具单射性，这意味着 $\mathrm{Cotor}^1_\Gamma(A,M\otimes_A N)$ 不可能分解为 $\mathrm{Cotor}^1_\Gamma(A,M)\otimes_A \mathrm{Cotor}^0_\Gamma(A,N)$ 与 $\mathrm{Cotor}^0_\Gamma(A,M)\otimes_A \mathrm{Cotor}^1_\Gamma(A,N)$ 之间的任何形式的扩张，除非 N 具有平凡余作用。相反，能够作出的最佳一般性陈述是存在定理 4.6 的谱序列。

面对这些负面结果，一种合理的应对方式是追问：在什么情况下，我们至少能得到 Cotor^0 的 K¨unneth 公式？我们将在第6节讨论这个问题。

5. Example calculations of the Künneth spectral sequence for Cotor。

设 k 是特征为 p 的域，令 Γ 为双代数 $k[\xi]/\xi^p$，其中 x 是本原元。考虑定理 4.6 中 $L = k = M$ 和 $N = \Gamma$ 的情形：N 上的本原滤过是有限的，其中 N^n 是由 ξ^n 张成的 k-向量空间（$0 \le n \le p-1$ 时），其他情况下为平凡空间。我们用 $k\{x\}$ 表示以 $\{x\}$ 为基的 k-向量空间，这样便可合理地绘制 K¨unneth 谱序列的 E_1 页，图中取 $p = 5$:

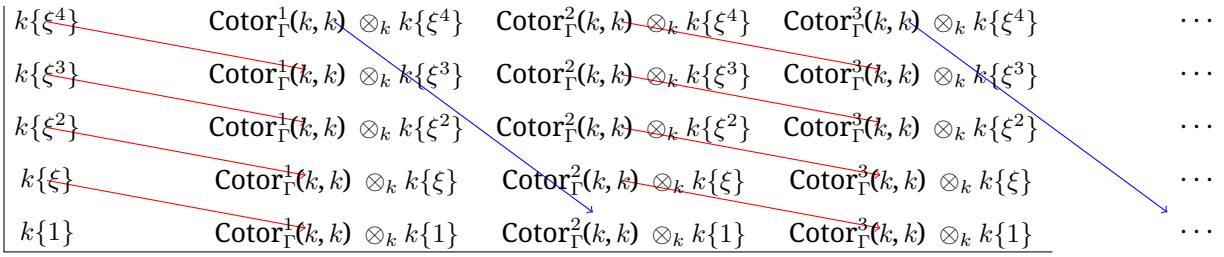


Figure 1. $E^{*,\,*}_1 \cong \mathrm{Cotor}^*_{k[\xi]/\xi^p}(k,k)\otimes k[\xi]/\xi^p \Rightarrow \mathrm{Cotor}^*_{k[\xi]/\xi^p}(k, k[\xi]/\xi^p)$。

非零微分如图所示，但这一论断值得一些论证，下面我们就来给出。

定理 4.6 的谱序列还有一种构造方式：对 Γ 的余条复形（系数取 N）施加由 N 上的本原滤过所诱导的滤过。也就是说，定理 4.6 的谱序列就是滤过上链复形的谱序列

$$\Gamma^{\otimes_A \bullet}\otimes_A N_0 \subseteq \Gamma^{\otimes_A \bullet}\otimes_A N_1 \subseteq \Gamma^{\otimes_A \bullet}\otimes_A N_2 \subseteq \cdots \subseteq \Gamma^{\otimes_A \bullet}\otimes_A N.$$

在 $\Gamma = k[\xi]/\xi^p$ 的情形下，表示 $\mathrm{Cotor}^1_\Gamma(k,k)$ 生成元的余条复形 1-上循环是本原元 $\xi \in k[\xi]/\xi^p$，而表示 $\mathrm{Cotor}^2_\Gamma(k,k)$ 生成元的余条复形 2- 上循环是 “transpotent”

$$T\xi := \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p}\binom{p}{i}\xi^{p-i}\otimes\xi^i \in k[\xi]/\xi^p \otimes_k k[\xi]/\xi^p$$

属于 ξ，且分次 k-代数 $\mathrm{Cotor}^*_\Gamma(k,k)$ 同构于 $\Lambda(h)\otimes_k k[b]$，其中$h \in \mathrm{Cotor}^1_\Gamma(k,k)$ 由 ξ 表示，而 $b \in \mathrm{Cotor}^2_\Gamma(k,k)$ 由 $T\xi$ 表示。Γ 上的余模代数结构，以及 Γ 上的本原滤过是由余模理想构成的滤过这一事实，推出定理 4.6 的谱序列是一个 k-代数谱序列，因此我们只需计算每一页在 k-代数生成元上的微分。E_1 页同构于 $k[\xi]/\xi^p \otimes_k \Lambda(h)\otimes_k k[b]$，又由于 $\psi(\xi) = \xi\otimes 1 + 1\otimes\xi$，我们在余条复形中有 $\delta(\xi) = \xi\otimes 1$，因此 d_1-微分为 $d_1(\xi) = h$。由次数原因，$d_1(h) = 0$ 且 $d_1(b) = 0$，所以由莱布尼茨法则可得，对所有 $i < p$，$d_1(\xi^i b^j) = i\xi^{i-1}hb^j$，且 $d_1(\xi^i h b^j) = 0$，从而得到 E_2 页 $E^{*,\,*}_2 \cong \Lambda(h\xi^{p-1})\otimes_k k[b]$。类 $h\xi^{p-1}$ 由余边复形 1-上链 $\xi\otimes\xi^{p-1}$ 表示，且我们在余条复形中有 $\delta(\xi\otimes\xi^{p-1}) = -\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p-1}{i}\xi^i\otimes\xi^{p-1-i}$。到达谱序列的 E_{p-1} 页时，我们有 $d_{p-1}(h\xi^{p-1})$ 是 $\delta(\xi\otimes\xi^{p-1})$ 中各项之和

其本原滤过[12] $p-1$ 低于 $\xi\otimes\xi^{p-1}$ 的本原滤过。因此我们有，$d_{p-1}(h\xi^{p-1})$ 是 E_{p-1} 页上由余循环 $-\xi\otimes\xi^{p-1}\otimes 1$ 表示的类，即 $d_{p-1}(h\xi^{p-1}) = -(T\xi)\otimes 1$。由莱布尼茨法则可知，$E_p$ 页上仅剩下双次数 (0, 0) 中的 k 副本，因此谱序列在该页塌缩。这给出了图1所示的长微分。

一个推论是，取 p 为一个足够大的素数，我们就能在谱序列 (4.20) 中得到任意长的非零微分。

6. When do we have a Künneth formula for Cotor^0?

本节的主要结果是定理 6.2，它给出了一个判据，用于确定由谱序列 (4.20) 的 $s=0$ 列支撑的微分何时能够消去 $t=0$ 行以上的所有内容；至少在对拓扑应用最有意义的情形下是如此，即定理 4.6 中 $L=A$ 且 M 是 Γ 的子余模的情形。本节还给出了定理 6.4，这是定理 6.2 的推广，它放宽了 M 是 Γ 的子余模这一假设。上述拓扑应用中最明显的情形将在后文第7节介绍。

定义 6.1. 设 A 为交换环，Γ 为 A上的双代数，且M 为左 Γ-余模 Γ的子余模。设 N 为左 Γ-余模。我们将相对于 M的 N的 K¨unneth 商定义为 A-模 K¨u(N; M)，它由下列自然的 A-模映射的余核给出

$$\left(M\otimes_A N^0\right)\times_{\Gamma\otimes_A N} N \hookrightarrow (M\otimes_A N)\times_{\Gamma\otimes_A N} N$$

该映射由交换图导出

$$\begin{array}{ccccc} M\otimes_A N^0 & \hookrightarrow & M\otimes_A N & \hookrightarrow & \Gamma\otimes_A N \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \psi_N} \\ \left(M\otimes_A N^0\right)\times_{\Gamma\otimes_A N} N & \hookrightarrow & (M\otimes_A N)\times_{\Gamma\otimes_A N} N & \hookrightarrow & N \end{array} \tag{6.27}$$

其中每个方块都是 A-模的拉回方块。

如果 M 在 A上平坦，则 (6.27) 中用钩箭头标记的映射是单射。

定理 6.2 给出的等价条件中，第四个条件（在实际情形下）尤其容易检验；它是余张量积的 K¨unneth 公式 (6.28) 成立的充要条件。

定理 6.2. 设 A 为交换环，Γ 为 A上的双代数，且M 为左 Γ-余模 Γ的子余模。设 N 为左 Γ-余模，在 A上平坦，并假设 M 在 A上也平坦。那么以下条件等价：

(1) 典范映射

$$(A\square_\Gamma M)\otimes_A (A\square_\Gamma N)\to A\square_\Gamma(M\otimes_A N) \tag{6.28}$$

是一个同构。

[12]请记住，我们按照系数上的本原滤过，对以 Γ 为系数的 Γ 的余条复形进行了滤过。[13]推论 4.7 证明，谱序列中微分的这种行为等价于自然映射 $(L\square_\Gamma M)\otimes_A (A\square_\Gamma N)\to L\square_\Gamma(M\otimes_A N)$ 是一个同构。

（2） $M \otimes_A N \subseteq \Gamma \otimes_A N$与余作用映射$\psi_N$的像的交： $N \to \Gamma \otimes_A N$落在 $M \otimes_A N$的子模 $M \otimes_A$ （$A\Box_\Gamma N$）中。（3）K¨unneth 商 K¨u（N； M）消失。（4）如果 $n \in N$满足 ψ_N（n） $\in M \otimes_A N$，那么 n是本原元。

证明。

1 等价于 2：由于 $M \subseteq \Gamma$ 和 M 在 A上是平坦的，因此存在单态射 $M \otimes_A N \hookrightarrow \Gamma \otimes_A N$和 $A\Box_\Gamma(M \otimes_A N) \hookrightarrow A\Box_\Gamma(\Gamma \otimes_A N)$，从而得到一个 A-模的交换图

$$\begin{array}{ccccc} A\Box_\Gamma (M \otimes_A N) & \hookrightarrow & A\Box_\Gamma (\Gamma \otimes_A N) & \underset{\cong}{\xleftarrow{sh}} & N \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ A\Box_\Gamma (M \otimes_A (A\Box_\Gamma N)) & \hookrightarrow & A\Box_\Gamma (\Gamma \otimes_A (A\Box_\Gamma N)) & \underset{\cong}{\xleftarrow{sh|_{A\Box_\Gamma N}}} & A\Box_\Gamma N \end{array}$$

其中 sh： $N \to A\Box_\Gamma(\Gamma \otimes_A N)$ 是“剪切同构”，在元素上的定义就是余作用映射 ψ_N。更确切地说，图式

$$\begin{array}{ccc} A\Box_\Gamma (\Gamma \otimes_A N) & \underset{\cong}{\xleftarrow{sh}} & N \\ \downarrow \iota & \swarrow_{\psi_N} & \\ \Gamma \otimes_A N & & \end{array} \tag{6.29}$$

是交换的，其中 ι 是$\Gamma \otimes_A N$的余模本原元到 $\Gamma \otimes_A N$中的典范包含。

因此， $A\Box_\Gamma(M \otimes_A N) \subseteq \Gamma \otimes_A N$中的任意给定元素都等于$\psi(n)$，其中某个 $n \in N$。所以，包含映射 $A\Box_\Gamma(M \otimes_A N^0) \subseteq A\Box_\Gamma(M \otimes_A N)$ 是满射，当且仅当只要 $\psi(n) \in M \otimes_A N$，就有 $\psi(n)$ 包含于 $M \otimes_A N^0$，正如命题所述。

2 等价于 3，且 2 等价于 4：这些蕴含关系只需按定义展开即可得出。

□

注 6.3. 如果函子 K¨u(–; M) : Comod(Γ) $\to$ Mod(A) 至少是半正合的，那就好了，因为这样我们就能通过标准的同调方法，找到一些实际计算它在各种余模上的取值的办法。然而，K¨u 通常并非半正合；例如， A 是一个域 k，且 $M = \Gamma = k[\xi]/\xi^2$ 具有 ξ 本原元时，就可以看出这一点。如果我们有灵活而强大的工具来计算 K¨u(–; M)，那么 K¨u(N; M) 的消失就有可能成为定理 6.2 中列出的四个等价条件里最容易检验的一项，而不是（目前看来）第四个条件最便于实际检验。遗憾的是，作者不知道有什么工具可以计算 K¨u；若有人知道这类工具，作者将很乐意向其请教。

如果 Γ 是有限生成的 A-模（或者如果 (A, Γ) 是分次的，且 A 集中于 0 次，并且 Γ 在每个次数上都是有限生成的 A-模），那么根据 [5], 的定义，K¨u 至少是一个相干函子；但这似乎并不能为计算 K¨u(–; M) 的值提供任何非平凡的方法。

定理 6.2 可以推广到 M 不是 Γ的子余模的情形。这一推广即定理 6.4，其表述不如定理

6.2 简洁，因此我们将这一结果单独列出。关于 K¨unneth 商 K¨u(N; M) 的材料也可以推广到定理 6.4 的情形。不过，在定理 6.2 的若干等价条件中，K¨unneth 商消失这一条件是我们最不了解其应用的，因此为了使定理 6.4 的表述尽量简洁，我们省略了其中关于 K¨unneth 商的内容。

定理 6.4。设 (A,Γ) 是一个分次双代数，且 A 集中在零次。假设 Γ是有限型的，即对于每个整数 n， Γ的次数 n 直和项是有限生成的 A-模。设 M 是 Γ的有限型悬置直和中的一个分次左子余模；也就是说，存在某个函数 $d\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ 以及某个单射分次左 Γ-余模同态

$$\iota : M \hookrightarrow \coprod_{n\in\mathbb{Z}} \Sigma^n \Gamma^{\oplus d(n)}.$$

假设 N 是一个分次右 Γ-余模，并且 M 和 N 都是关于 A平坦的。则以下条件等价：

(1) 典范映射

$$(A\square_\Gamma M)\otimes_A (A\square_\Gamma N) \to A\square_\Gamma (M\otimes_A N) \tag{6.30}$$

是一个同构。

(2) 像的交集

$$\iota\otimes N : M\otimes_A N \hookrightarrow \left(\coprod_{n\in\mathbb{Z}} \Sigma^n\Gamma^{\oplus d(n)}\right)\otimes_A N$$

与余作用映射的多个副本的直和之像

$$\coprod_{n\in\mathbb{Z}} \Sigma^n \psi_N^{\oplus d(n)} : \coprod_{n\in\mathbb{Z}} \Sigma^n N^{\oplus d(n)} \to \coprod_{n\in\mathbb{Z}} \Sigma^n (\Gamma\otimes_A N)^{\oplus d(n)} \xrightarrow{\cong} \left(\coprod_{n\in\mathbb{Z}} \Sigma^n \Gamma\right)^{\oplus d(n)} \otimes_A N$$

落在 $M\otimes_A N$ 的子模 $M\otimes_A (A\square_\Gamma N)$ 中。

(3) 若 $y\in \coprod_{n\in\mathbb{Z}} \Sigma^n N^{\oplus d(n)}$ 满足

$$\coprod_{n\in\mathbb{Z}} \Sigma^n \psi_N^{\oplus d(n)}(y) \in M\otimes_A N \subseteq \coprod_{n\in\mathbb{Z}} \Sigma^n \Gamma^{\oplus d(n)} \otimes_A N,$$

则 y 是 $\coprod_{n\in\mathbb{Z}} \Sigma^n N^{\oplus d(n)}$ 的一个本原元。

证明。证明与定理 6.2 的证明基本相同。 □

满足定理 6.4 假设的分次双代数中，最值得注意的一族例子是模 p Steenrod 代数及其在每个素数 p 处的线性对偶。Ravenel 对 Morava 稳定子代数进行分次后得到的关联分次双代数 $E^0S(n)$（见 [16] 以及 [17] 的第 6.3 节）构成了另一族重要例子：它们是有限型但非有限维的分次双代数，其 Cotor 群与 Steenrod 代数对偶上的 Cotor 一样，是谱序列的输入，而这些谱序列最终计算各种空间和谱的稳定同伦群。

不过，定理 6.4 最直接的情形当然是相关的环和模都集中在 0 次的情形，即非分次情形：

推论6.5. 设 A 是一个交换环，且 Γ 是 A上的双代数。假设 Γ 作为 A-模是有限生成的。设 M 是有限个 Γ副本的直和 $\Gamma^{\oplus n}$ 的一个左子余模，设 N 是一个右 Γ-余模，并假设 M和 N 分别在 A上平坦。那么以下条件等价:

(1) 典范映射

$$(A\square_\Gamma M)\otimes_A (A\square_\Gamma N)\to A\square_\Gamma(M\otimes_A N)$$

是一个同构。

(2) $\iota\otimes N$: $M\otimes_A N\hookrightarrow(\Gamma^{\oplus n})\otimes_A N$ 的像与余作用映射副本的直和的像的交

$$\psi_N^{\oplus n}: N^{\oplus n}\to(\Gamma\otimes_A N)^{\oplus n}\xrightarrow{\cong}\Gamma^{\oplus n}\otimes_A N$$

落在 $M\otimes_A N$ 的子模 $M\otimes_A(A\square_\Gamma N)$ 中。

(3) 若 $n\in N^{\oplus n}$ 满足 $\psi_N(n)\in M\otimes_A N\subseteq\Gamma^{\oplus n}\otimes_A N$，则 n 是 $N^{\oplus n}$ 的本原元。

例6.6。

- 参见第5节中的计算，其中同构6.30成立；也就是说，这是一个存在 Cotor 的 K¨unneth 公式的情形[0]。
- 另一方面，令 $A=k$，其中 k 是特征为 p 的域，并令$\Gamma=k[\xi]/\xi^p$，其中 ξ 是本原元。那么典范映射

$$(A\square_\Gamma\Gamma)\otimes_A (A\square_\Gamma\Gamma)\to A\square_\Gamma(\Gamma\otimes_A\Gamma)$$

不是满射：其定义域同构于 k，而其陪域同构于 Γ。（当然，对域上的任意双代数，同一个例子也以相同方式成立；不过，为了具体说明并与第5节保持一致，我们选用了上述的 Γ 。）

7. Topological applications.

现在我们最好说明本文所得结果的一些拓扑学后果。给定带基点空间或谱 X 以及整数 n，经典结果表明，我们可以逐步向 X 附加胞腔，以消去 X 在高于 n 的次数中的所有同伦群，从而得到带基点空间或谱 $X^{\leq n}$ 以及连续映射 $X\to X^{\leq n}$，使得 $\pi_m(X)\to\pi_m(X^{\leq n})$ 对所有 $m\leq n$ 都是同构，并且 $\pi_m(X^{\leq n})$ 对所有 $m>n$ 都消失。在不稳定情形中，这一构造可追溯到 [10], ，他解决了 Hurewicz 在 Eilenberg 1949年 的代数拓扑未决问题列表 [12] 中的一个问题。

取 $X\to X^{\leq n}$ 的同伦纤维时，我们得到一个同伦纤维序列

$$X^{>n}\to X\to X^{\leq n}, \tag{7.31}$$

其中，$X^{>n}\to X$ 对所有的 $m>n$都诱导一个 π_m 同构，而当 $m\leq n$时，$\pi_m(X^{>n})$消失。若我们在稳定同伦范畴中取这个同伦纤维，那么（7.31）也是一个同伦余纤维序列，因此它会在同调群中诱导一个长正合列。自然会问，在 X 和n 满足什么条件时，我们才能对这个同调长正合列进行良好的计算控制。

特别地，同伦余纤维序列（7.31）诱导出一个分次 $\mathbb{F}_p$-向量空间的短正合列

$$0 \to H_*(X;\mathbb{F}_p) \to H_*(X^{\leq n};\mathbb{F}_p) \to H_*(\Sigma X^{>n};\mathbb{F}_p) \to 0 \tag{7.32}$$

假设 X 有下界， $H\mathbb{F}_p$-幂零完备[14]，且 $H^*(X;\mathbb{F}_p)$ 的 A_*-余模原始元在度数 $\geq n$ 中均为平凡。这里 p 是任意素数，而 A_* 是模 p Steenrod 对偶代数。

换言之，若 $\mathrm{Cotor}^0_{A_*}(\mathbb{F}_p, H_*(X;\mathbb{F}_p))$ 有上界（即在充分大的度数上消失），那么对于充分大的 n，(7.32) 是短正合的。

楔积 $X \wedge Y$ 的 Adams E_2页中的 0线为

$$\mathrm{Cotor}^0_{A_*}\left(\mathbb{F}_p, H_*(X;\mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_*(Y;\mathbb{F}_p)\right).$$

Adams谱序列中的 0线尤其值得关注，因为 E_∞页中的 0线恰好是从稳定同伦到同调的 Hurewicz 同态的像。鉴于上述通过附加胞腔消去高阶同伦的考量，若我们知道 $\mathrm{Cotor}^0_{A_*}(\mathbb{F}_p, H_*(X;\mathbb{F}_p))$ 和 $\mathrm{Cotor}^0_{A_*}(\mathbb{F}_p, H_*(Y;\mathbb{F}_p))$ 都有上界，我们希望知道 $\mathrm{Cotor}^0_{A_*}\left(\mathbb{F}_p, H_*(X;\mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_*(Y;\mathbb{F}_p)\right)$ 也有上界，从而

$$0 \to H_*(X \wedge Y;\mathbb{F}_p) \to H_*\left((X \wedge Y)^{<n};\mathbb{F}_p\right) \to H_*\left(\Sigma(X \wedge Y)^{\geq n};\mathbb{F}_p\right) \to 0$$

对于某个 n，是短正合的。

当然，$\mathrm{Cotor}^0_{A_*}(\mathbb{F}_p, -)$ 只是 A_*-余模原始元函子，因此作为定理 6.2 的一个特例，我们有：

推论 7.1. 设 X, Y 是谱，并假设 $H_*(X;\mathbb{F}_p)$ 是 A_* 的一个子余模。令 $e(X)$ $e(Y)$ $e(X \wedge Y)$ 分别表示 X, Y 和 $X \wedge Y$ 的 Adams E_2-项中的 0 线。那么，典范映射 $e(X) \otimes_{\mathbb{F}_p} e(Y) \to e(X \wedge Y)$ 是同构，当且仅当满足以下条件：

> 对于所有满足 $\psi(n) \in H_*(X;\mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_*(Y;\mathbb{F}_p) \subseteq A_* \otimes_{\mathbb{F}_p} H_*(Y;\mathbb{F}_p)$ 的齐次 $n \in H_*(Y;\mathbb{F}_p)$，都有 n 是一个 A_*- 余模本原元。

特别地，若 $H_*(X;\mathbb{F}_p)$ 和 $H_*(Y;\mathbb{F}_p)$ 中的 A_*-余模本原元均有上界，且条件 (7.1) 成立，则 $H_*(X;\mathbb{F}_p)$ 中的 A_*-余模本原元也有上界。

有许多熟悉且引人注目的谱 X，使得 $H_*(X;\mathbb{F}_p)$ 是 A_* 的 A_*-子余模：例如，情形 $X = BP$；或者对任意正整数 n，情形 $X = BP\langle n\rangle$；又或者当 $p = 2$ 时，情形 $X = ko$ 或 $X = tmf$。在这些情形下，我们有：

推论 7.2。设 Y 是一个谱。对于谱 X 的 Adams E_2-谱序列中的 0线，我们仍记作 $e(X)$。我们将 Steenrod 对偶代数 A_* 中 ξ_n 的共轭典范映射记作 ζ_n。

[14]关于谱的幂零完备化，标准参考文献是 [7]。我们稍作解释，以便尚不熟悉谱幂零完备化的读者能够具体理解这一概念：Bousfield 证明，在谱 X 有下界这一假设下，X 是 $H\mathbb{F}_p$-幂零完备的，当且仅当它的同伦群按 [8] 的意义是 Ext-p-完备的。更具体地说，若 X 有下界且其每个同伦群都是有限生成的，则 X 是 $H\mathbb{F}_p$-幂零完备的，当且仅当其每个同伦群都是 p-进完备的。

• 设 $p = 2$。那么典范映射 $e(BP) \otimes_{\mathbb{F}_2} e(Y) \to e(BP \wedge Y)$ 是同构，当且仅当对于每个齐次元素 $y \in H_*(Y;\mathbb{F}_2)$，若 $\psi(y) \in P(\zeta_1^2, \zeta_2^2, \dots) \otimes_{\mathbb{F}_2} H_*(Y;\mathbb{F}_2)$，则有 $\psi(y) = 1 \otimes y$。

• 设 $p > 2$。那么典范映射 $e(BP) \otimes_{\mathbb{F}_p} e(Y) \to e(BP \wedge Y)$ 是一个同构，当且仅当对于每个齐次元素 $y \in H_*(Y;\mathbb{F}_p)$，若 $\psi(y) \in P(\xi_1, \xi_2, \dots) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_*(Y;\mathbb{F}_p)$，则有 $\psi(y) = 1 \otimes y$。

• 设 $p = 2$。典范映射 $e(BP\langle n\rangle) \otimes_{\mathbb{F}_2} e(Y) \to e(BP\langle n\rangle \wedge Y)$ 是一个同构，当且仅当对于每个齐次元素 $y \in H_*(Y;\mathbb{F}_2)$，若 $\psi(y) \in P(\zeta_1^2, \dots, \zeta_n^2, \zeta_{n+1}, \zeta_{n+2}, \dots) \otimes_{\mathbb{F}_2} H_*(Y;\mathbb{F}_2)$，则有 $\psi(y) = 1 \otimes y$。

• 设 $p > 2$。典范映射 $e(BP\langle n\rangle) \otimes_{\mathbb{F}_p} e(Y) \to e(BP\langle n\rangle \wedge Y)$ 是同构，当且仅当对于每个满足 $\psi(y) \in P(\xi_1, \xi_2, \dots) \otimes_{\mathbb{F}_p} E(\tau_n, \tau_{n+1}, \dots) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_*(Y;\mathbb{F}_p)$ 的齐次元素 $y \in H_*(Y;\mathbb{F}_p)$，我们有$\psi(y) = 1 \otimes y$。

• 设 $p = 2$。典范映射 $e(ko) \otimes_{\mathbb{F}_2} e(Y) \to e(ko \wedge Y)$ 是同构，当且仅当对于每个满足 $\psi(y) \in P(\zeta_1^4, \zeta_2^2, \zeta_3, \zeta_4, \dots) \otimes_{\mathbb{F}_2} H_*(Y;\mathbb{F}_2)$ 的齐次元素 $y \in H_*(Y;\mathbb{F}_2)$，我们有 $\psi(y) = 1 \otimes y$。

• 设 $p = 2$。典范映射 $e(tmf) \otimes_{\mathbb{F}_2} e(Y) \to e(tmf \wedge Y)$ 是同构，当且仅当对于每个齐次元素 $y \in H_*(Y;\mathbb{F}_2)$，只要 $\psi(y) \in P(\zeta_1^8, \zeta_2^4, \zeta_3^2, \zeta_4, \zeta_5, \dots) \otimes_{\mathbb{F}_2} H_*(Y;\mathbb{F}_2)$，就有 $\psi(y) = 1 \otimes y$。

推论 7.2 的情形可以用另一种方法处理，因为谱 BP 和 $BP\langle n\rangle$ 具有这样的性质：它们的模 p 同调不仅是 A_* 的一个 A_*-子余模，而且还是 A_*的一个子双代数。素数 2 处的 ko和 tmf 也具有同样的性质。当 $H_*(X;\mathbb{F}_p)$ 是 A_*的一个子双代数时，我们可以使用换环同构

$$\begin{aligned}\operatorname{Cotor}^n_{A_*}(\mathbb{F}_p, H_*(X\wedge Y;\mathbb{F}_p)) &\cong \operatorname{Cotor}^n_{A_*}\left(\mathbb{F}_p, H_*(X;\mathbb{F}_p)\otimes_{\mathbb{F}_p} H_*(Y;\mathbb{F}_p)\right)\\ &\cong \operatorname{Cotor}^n_{H_*(X;\mathbb{F}_p)}(\mathbb{F}_p, H_*(Y;\mathbb{F}_p))\end{aligned}$$

从而得出与推论 7.2 相同的结论。与换环同构相比，使用推论 7.1 的优势在于其灵活性和一般性：推论 7.1 不要求 $H_*(X;\mathbb{F}_p)$ 自身具有余乘法。

更广泛地说，本文的方法，尤其是定理 6.4，也适用于 $H_*(X;\mathbb{F}_p)$ 甚至不是 A_* 的子余模、更不用说子余代数的情形。这包括一些熟悉的经典情形：例如，奇素数下的 $X = ku$ 或 $X = MU$ 。作为定理 6.4 的一个特例，我们得到推论 7.1 的推广：

推论 7.3。设 X、Y 为谱，并假设对于某个函数 $d\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$，$H_*(X;\mathbb{F}_p)$ 是 $\coprod_{n\in\mathbb{Z}} \Sigma^n A_*^{\oplus d(n)}$ 的分次 A_*-余模子。那么 $e(X) \otimes_{\mathbb{F}_p} e(Y) \to e(X \wedge Y)$ 是同构，当且仅当对每个齐次元素$y \in H_*(Y;\mathbb{F}_p)$，满足

$$\coprod_{n\in\mathbb{Z}} \Sigma^n \psi^{\oplus d(n)}(y) \in H_*(X;\mathbb{F}_p)\otimes_{\mathbb{F}_p} H_*(Y;\mathbb{F}_p) \subseteq \coprod_{n\in\mathbb{Z}} \Sigma^n A_*^{\oplus d(n)} \otimes_{\mathbb{F}_p} H_*(Y;\mathbb{F}_p),$$

我们有 $\coprod_{n\in\mathbb{Z}} \Sigma^n \psi^{\oplus d(n)}(y) = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} \Sigma^n (1\otimes y)^{\oplus d(n)}$，也就是说，$y$是一个 A_*-余模原始元。

推论 7.3 适用的一个非常熟悉的谱的例子是情形$X = ku$:

推论 7.4。设 $p > 2$。典范映射 $e(ku) \otimes_{\mathbb{F}_p} e(Y) \to e(ku \wedge Y)$ 是同构，当且仅当对于每个满足以下条件的齐次元素 $y \in H_*(Y; \mathbb{F}_p)$,

$$\coprod_{i=0}^{p-2} \Sigma^{2i}\psi(y) \in \coprod_{i=0}^{p-2} \Sigma^{2i} P(\xi_1, \xi_2, \dots) \otimes_{\mathbb{F}_p} E(\tau_2, \tau_3, \dots) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_*(Y; \mathbb{F}_p) \subseteq \coprod_{i=0}^{p-2} \Sigma^{2i} A_* \otimes_{\mathbb{F}_p} H_*(Y; \mathbb{F}_p),$$

我们有 $\psi(y) = 1 \otimes y$。

References

[1] J. F. Adams。 *Stable homotopy and generalised homology*。芝加哥数学讲座丛书。芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州，1995年。1974年原版的重印本。[2] Khaled Al-Takhman。 *Äquivalenzen zwischen Komodulkategorien von Koalgebren über Ringen* 1999 。博士论文——杜塞尔多夫大学。[3] Khaled Al-Takhman。《环上余代数的余模与余张量函子》。载于 *Mathematics & mathematics education (Bethlehem, 2000)* 23 37 ，第 – 页。世界科学出版社，里弗埃奇，新泽西州，2002年。[4] Khaled Al-Takhman。《环上余代数的余模范畴的等价》。 *J. Pure* ，( ): –。[5] *Appl. Algebra* 173 3 245 271, 2002 Maurice Auslander。相干函子。载于 *Proc. Conf. Categorical Algebra (La Jolla, Calif.,* ，第 – 页。施普林格，纽约，。[6] J. Michael Boardman。条件收敛谱序列。载于 *1965)* 189 231 1966 *Homotopy invariant algebraic structures (Baltimore, MD, 1998)* 239 *Contemp. Math.* 49 84 ，第 卷，页码 –。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1999年。[7] A. K. Bousfield。《关于同调的谱的局部化》。 *Topology*, 18(4):257–281，1979年。[8] A. K. Bousfield 和 D. M. Kan。 *Homotopy limits, completions and localizations*。数学讲义，第304卷。施普林格出版社，柏林，1972年。[9] Tomasz Brzezinski 和 Robert Wisbauer。 *Corings and comodules* 309 *London* ，第 卷，[10] 。 *Mathematical Society Lecture Note Series* 2003 剑桥大学出版社，剑桥，。[10] Henri Cartan 和 Jean-Pierre Serre。《纤维空间与同伦群 I：一般构造》。 *C. R. Acad. Sci. Paris*, 234:288–290，1952年。[11] Yukio Doi。同调余代数。 *J. Math. Soc. Japan*, 33(1):31–50，1981年。[12] Samuel Eilenberg。关于拓扑学问题。 *Ann. of Math. (2)*, 50:247–260，1949年。[13] Saunders Mac Lane。 *Homology*。数学经典。施普林格出版社，柏林，1995年。1975年版的重印本。[14] John W. Milnor 和 John C. Moore。关于霍普夫代数的结构。 *Ann. of Math. (2)*, 81 211: –264，1965年。[15] Joseph Neisendorfer。 *Algebraic methods in unstable homotopy theory* 12 *New* ，第 卷，[16] 。 *Mathematical Monographs* 2010 剑桥大学出版社，剑桥，。[16] Douglas C Ravenel。莫拉瓦稳定子代数的上同调。 *Mathematische Zeitschrift* 152 3 287 297, 1977 ，( ): –。[17] Douglas C. Ravenel。 *Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres*，第121卷，*Pure and Applied Mathematics*。学术出版社，奥兰多，佛罗里达州，1986年。