arXiv:2303.10341v1 [math.GR] 18 Mar 2023

融合不变表示的分解唯一性

JOSE CANTARERO 和 GERMAN COMBARIZA

ABSTRACT. 给定有限 p 群 S 上的饱和融合系统 $\mathcal{F}$，我们给出判据，以确定何时融合不变表示分解为不可约表示具有唯一性。我们利用这些判据证明，当 S 的阶至多为 p^3 时，分解具有唯一性。我们还描述了一个例子，其中融合不变表示的幺半群甚至不是半阶乘的。最后，我们使用 GAP 找到其他一些融合系统的例子，在这些例子中，该幺半群不是唯一分解的。

INTRODUCTION

有限群 G 的分类空间的 K-理论由 Atiyah-Segal 完备化定理 [2], [3] 确定；该定理指出，它是关于增广理想的 G 表示环的完备化。这通常不同于 BG 上复向量丛的格罗滕迪克群，后者在 [18] 中有描述。

这些结果最近被推广到 p-局部有限群的分类空间。给定一个 p-局部有限群 $(S, \mathcal{F}, \mathcal{L})$，$|\mathcal{L}|_p^\wedge$ 上复向量丛的格罗滕迪克群在 [8] 中被证明与表示环 $R(\mathcal{F})$ 同构，而后者可表示为 $\mathcal{F}$ 的轨道范畴上各表示环的逆极限。另一方面，$|\mathcal{L}|_p^\wedge$ 的 K-理论同构于 $R(\mathcal{F})$ 关于增广理想的完备化（见 [4]）。

表示环 $R(\mathcal{F})$ 也可以看作与 S 的表示等价类幺半群相关联的格罗滕迪克群，其中这些表示是 $\mathcal{F}$–不变的。例如，当 $\mathcal{F}$ 是与有限群 G 相关联的融合系统，且 S 是其 p-Sylow 子群时，这些表示恰好是 S 的表示，其特征标在 S 的 G–共轭类上为常数。本文首先在第 1 节简要回顾融合不变表示及其主要性质。尽管我们在饱和融合系统的完全一般性下证明结果，但主要例子来自有限群，因此本文也应会引起仅对有限群表示论感兴趣的读者的关注。

$R(\mathcal{F})$ 是自由阿贝尔群，其秩等于 S 中元素的 $\mathcal{F}$–共轭类的数量。然而，在 [12] 和 [23] 中存在这样的例子：一个 $\mathcal{F}$–不变表示不能唯一地分解为 $\mathcal{F}$–不变不可约表示之和

2020 年数学主题分类。主要分类：20D20；次要分类：20C15，20M14。关键词和短语：阶乘幺半群、融合系统、表示幺半群。

。这与有限群表示环的性质有显著差异，本文旨在更好地理解这一现象。

从幺半群 Rep($\mathcal{F}$) 的角度来看，这种缺乏唯一性更容易理解；该幺半群由 $\mathcal{F}$–不变表示的同构类构成。用约化交换幺半群的语言来说，它是自由幺半群 Rep(S) 的一个子幺半群，而这些例子表明它未必是自由的。自由幺半群也称为唯一分解的幺半群，以强调其可唯一地分解为原子之和。我们在第2节中给出了若干保证分解唯一性的判据，其中一些实际上是刻画。下面的定理概述了本节的主要结果。

定理。设 $\mathcal{F}$ 是有限 p-群 S 上的一个饱和融合系统。若满足以下任一条件，则 Rep($\mathcal{F}$) 是唯一分解的。

- S 的 $\mathcal{F}$–共轭类数等于 S 的不可约 $\mathcal{F}$–不变表示数。
- 作为自由阿贝尔群， $R(\mathcal{F})$ 有一个由表示组成的基 $\{\rho_1, \dots, \rho_k\}$，满足

$$\mathrm{Irr}(\rho_j) - \bigcup_{i \neq j} \mathrm{Irr}(\rho_i) \neq \emptyset$$

  对所有 j。
- 作为自由阿贝尔群， $R(\mathcal{F})$有一组由互不相交的虚表示构成的基。
- 融合系统 $\mathcal{F}$ 是传递的。
- $\mathcal{F}$ 的本质秩为零。

此外，前两个条件刻画了 Rep($\mathcal{F}$) 的阶乘性。

任意定义在阿贝尔 p-群 S 上的饱和融合系统，其本质秩均为零。特别是，当 S 的阶至多为 p^2 时，必然具有阶乘性。很自然会想知道，当阶为 p^3 时这一结论是否仍成立。定义在阶为 8 的群上的饱和融合系统数量不多且易于处理；而定义在阶为 p^3 、且 p 为奇数的群上的饱和融合系统，已有 [24]中的分类。利用逐案分析和第2节中的判据，我们确定了所有这些情形下 Rep($\mathcal{F}$) 的阶乘性。下述定理对应定理 3.2，它是第3节的主要结果。

定理。若 S 上的 $|S| \leq p^3$ 和 $\mathcal{F}$ 是饱和融合系统，则 Rep($\mathcal{F}$) 是唯一分解幺半群。

这一结果无法进一步推广，因为 [12] 和 [23] 中不具备分解唯一性的例子，分别对应于定义在阶为 3^4和 2^4, 的群上的融合系统。事实上，它们分别是在素数 3 和 2 处的 Σ_9 和 $PSL_3(\mathbb{F}_3)$ 的融合系统。人们可能会想知道，一般而言，Rep($\mathcal{F}$) 是否具有较弱的分解性质。其中一种性质是半阶乘性，即我们不要求分解具有唯一性，

而只要求每个元素的分解长度唯一。在第 4 节中，我们证明，当 $\mathcal{F}$ 是素数 2 处 A_6 的融合系统时，Rep($\mathcal{F}$) 不具有半阶乘性。

尽管 A_6 的例子在数学上已得到完整描述，但我们发现这个例子要归功于我们编写并在 GAP[11] 中实现的算法。具体而言，对于与有限群 G 相关联、具有 p-西洛子群 S 的融合系统 $\mathcal{F}$，我们构建了一些函数，用以确定 $\mathcal{F}$–共轭类的数量、表示环的复化，以及作为正则表示子表示的不可约 $\mathcal{F}$–不变表示的数量。在某些情况下，我们注意到这些信息可用于确定所有不可约的 $\mathcal{F}$–不变表示。除了 [12] 和 [23], 中的例子外，我们还发现了新的例子：这些融合系统无法唯一分解为不可约的融合不变表示。具体而言，它们是以下群的融合系统：

- Σ_6、Σ_8、$PSL_2(\mathbb{F}_{17})$、$PSU_3(\mathbb{F}_5)$、M_{10}、$PSL_3(\mathbb{F}_5)$、$PSL_2(\mathbb{F}_{31})$、$PSU_3(\mathbb{F}_9)$ 和 $GL_3(\mathbb{F}_3)$ 在素数 2 处。
- A_9 和 $PSL_3(\mathbb{F}_{19})$ 在素数 3 处。

除上述非阶乘例子外，我们发现，A_8 在素数 2 处具有阶乘性，而 $PSp_4(\mathbb{F}_3)$ 和 $PSL_4(\mathbb{F}_7)$ 在素数 3 处具有阶乘性。尽管我们已经得到了 Rep($\mathcal{F}$) 阶乘性的刻画，但这些刻画并不完全令人满意，因为它们要求确定不可约 $\mathcal{F}$–不变表示的数量，或研究 $R(\mathcal{F})$ 到 $R(S)$ 的包含关系以找到一个特定的基，而我们没有用 $\mathcal{F}$ 表述的直接判据。

不可约 $\mathcal{F}$–不变表示还有一个有趣的方面，我们在本文中未能完全解决。在第2节中，我们证明，如果 Rep($\mathcal{F}$) 具有阶乘性，那么这些表示必定是 S 的正则表示的子表示。我们猜想，即使 Rep($\mathcal{F}$) 不具有阶乘性，这一点也总是成立；事实上，在所有我们成功确定全部不可约 G–不变表示的例子中，确实如此。

1. 融合不变表示

本节将介绍融合不变表示。请注意，本文中的所有表示都是有限维酉表示，我们只关注等价意义下的表示。我们先从一个特殊情形入手，它涵盖了本文中的大多数例子。不过，主要结果适用于一般定义。

定义1.1. 设 G 是一个有限群， S 是 G的一个 p-Sylow 子群。若对于任意 $P \leq S$ 以及任何满足 $gPg^{-1} \leq S$的 $g \in G$，表示 ρ：$S \to U_n$均与表示$\rho_{|P}$和$\rho_{|gPg^{-1}} \circ c_g$等价，则称 ρ是 G不变的。

S 的子群范畴以 G–子共轭为态射，它作为 Cartan-Eilenberg 定理中的指标范畴，出现在关于有限群的 p-局部上同调的定理中（例如参见 [6]中的定理 III.10.3）。该定理可以改进为 $BG^\wedge_p$ 的同伦分解，而 C. Broto、R. Levi 和 B. Oliver [5] 则创立了研究这类分解及具有类似性质的其他空间所需的语言和技术。本文中，作者定义了有限 p-群 S上的饱和融合系统的概念。这是一个范畴，其对象是 S 的子群，态射是满足若干公理要求的群同态。

感兴趣的读者可参见 [5] 中的定义1.1和定义1.2，了解形式化定义；直观地说，这些态射的行为类似于较大群中元素所诱导的共轭。事实上，饱和融合系统的主要例子来源于有限群。若 G 是有限群，且 S 是 p-Sylow 子群，则存在一个称为 $\mathcal{F}_S(G)$ 的饱和融合系统，其态射集合为

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_S(G)}(P,Q) = \mathrm{Hom}_G(P,Q) = \{f\colon P \to Q \mid f = c_g \text{ for some } g \in G\}$$

不过，也存在异类融合系统，也就是说，它们并非由这种方式构造。目前，文献中已有许多构造异类融合系统的方法，尽管本文不会涉及这些系统。我们推荐感兴趣的读者参见 [19] 和 [24]，了解一些例子。接下来，我们将定义1.1推广到这一一般情形。

定义1.2。设 $\mathcal{F}$ 是有限 p-群 S上的一个饱和融合系统。若对于任意 $P \le S$及任意 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,S)$，表示 $\rho\colon S \to U_n$ 与表示 $\rho_{|P}$和$\rho_{|f(P)} \circ f$等价，则称表示 $\rho\colon S \to U_n$ 是 $\mathcal{F}$–不变的。

在 $\mathcal{F}_S(G)$这一特殊情形下，这对应于 G不变表示。当 $\mathcal{F}$ 明确时，我们也称它们为融合不变表示。这些表示已在 [4], [8], [12] 和 [23], 中得到研究，也在更一般的背景下于 [7], [22], [27] 和 [28]中得到研究。

为了确定一个表示是否为融合不变表示，我们可以运用特征标理论，以及某些以特定意义生成融合系统的子群族。对于下面的引理，若存在 $\mathcal{F}$中的态射 f，使得 $f(x) = y$，则称 S 中的两个元素 x、 y 是$\mathcal{F}$共轭的。关于中心化子群、根子群和本质子群的定义，分别见 [5],的定义 1.6、 [5] 的定义 A.9，以及 [16], 第 2 页第二段。

引理 1.3。设 $\rho\colon\ S \to U_n$ 是一个表示。以下条件等价。

(1) ρ 是 $\mathcal{F}$–不变的。(2) 对任意 $P \le S$和任意 $f \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$，$\rho_{|P}$与 $\rho_{|P} \circ f$同构。(3) 对 S的任意 $\mathcal{F}$–中心化子自反根子群 P和任意 $f \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$，$\rho_{|P}$与 $\rho_{|P} \circ f$同构。

(4) 对 S 的任意 $\mathcal{F}$–本质子群 P和任意$f \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$，以及对 $P = S$和任意 $f \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(S)$，$\rho_{|P}$与 $\rho_{|P} \circ f$ 同构。(5) 对任意一对 $\mathcal{F}$–共轭元素 x、 y， $\chi_\rho(x) = \chi_\rho(y)$。

对于 $\mathcal{F}_S(G)$ 的情形，最后一个条件指出，表示 ρ 是 G–不变的，当且仅当对于 S 中任意一对 G–共轭元素，都有 $\chi_\rho(x) = \chi_\rho(y)$。现在我们列举 $\mathcal{F}$–不变表示的一些直接性质。

- 如果 α 等价于 β，且 α 是 $\mathcal{F}$–不变的，那么 β 也是。
- 如果 ρ 和 α 是 $\mathcal{F}$–不变的，那么 $\rho \oplus \alpha$ 和 $\rho \otimes \alpha$ 也是。
- 对于任意 $\mathcal{F}$，平凡表示和约化正则表示都是 $\mathcal{F}$–不变的。

- 如果 ρ 和 $\rho \oplus \alpha$ 都是 $\mathcal{F}$–不变的，那么 α也是。
- 如果 $n\rho$ 对某个 $n \neq 0$是 $\mathcal{F}$–不变的，那么 ρ也是。
- 如果 $\rho \oplus \alpha$ 与 $\rho \oplus \beta$同构，那么 α 与 β同构。

定义1.4. 如果一个 $\mathcal{F}$–不变表示不能分解为两个非平凡 $\mathcal{F}$–不变表示的直和，则称其为不可约表示。

显然，任何 $\mathcal{F}$–不变表示都可以分解为不可约 $\mathcal{F}$–不变表示的直和。注意，如果把不可约$\mathcal{F}$–不变表示视为 S的表示，它未必是不可约的。下面的例子将对此加以说明。

例 1.5。考虑群 Σ_3 的 3-西洛子群 $S = \{1,(1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$ 。 S 的不可约表示是由下式确定的一维表示 ρ_j

$$\rho_j(1, 2, 3) = e^{2\pi ij/3}$$

对于 $j = 0$，1，2。在等价意义下， S 的表示具有形式 $\rho = m_0\rho_0 + m_1\rho_1 + m_2\rho_2$，其中 $m_i \in \mathbb{N}$。由于 S 没有任何非平凡真子群，且 $\mathrm{Aut}_{\Sigma_3}(S) = \{1, c_{(1,2)}\}$，因此 ρ 是 Σ_3–不变的，当且仅当$\rho \circ c_{(1,2)}$ 与 ρ等价。但

$$\rho \circ c_{(1,2)} = m_0\rho_0 + m_1\rho_2 + m_2\rho_1$$

因此，当且仅当 $m_1 = m_2$ 时，这一条件成立。于是，任意 Σ_3–不变表示都是 ρ_0 和 $\rho_1+\rho_2$ 的非负整数线性组合。它们是不可约的 Σ_3–不变表示，因为它们不能分解为两个非平凡的 Σ_3–不变子表示之和。注意， $\rho_1 + \rho_2$ 不是 S 的不可约表示。

$\mathcal{F}$–不变表示的同构类构成一个半环，其运算为直和和张量积。我们将其记为 $\mathrm{Rep}(\mathcal{F})$；当 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(G)$ 时，则改记为 $\mathrm{Rep}_G(S)$。根据定义，这是半环 $\mathrm{Rep}(S)$ 的一个子半环。为了研究表示分解为不可约表示之和的唯一性，我们可以忽略其乘法结构，将它们仅视为交换幺半群。

注 1.6。尽管它对应于$\mathcal{F}_S(G)$，我们仍选择写作 $\mathrm{Rep}_G(S)$，以强调其元素是 S 的表示的同构类。

$\mathcal{F}$–不变表示理论与超特征标和超类理论 [10]有一些相似之处。例如，$\mathcal{F}$ 确定了S 的一个划分，该划分由 $\mathcal{F}$–共轭类组成；集合 $\{1\}$ 是其中一个类，而$\mathcal{F}$–不变表示的特征标在每个这样的 G–共轭类上都是常数。我们可以通过 $\mathcal{F}_{D_8}(\Sigma_4)$来体会其中的差异。群 D_8 被划分为四个 Σ_4–共轭类，而 [12] 中的例 4.5.4 表明，D_8 的任何 Σ_4–不变表示都由 1、$X+Z$、$Y+Z$ 和 XY生成，其中 X、Y 和 XY 是 D_8 的一维不可约表示，而 Z 是二维不可约表示。如果 D_8 的这个划分属于某个超特征理论，那么就会存在一个超特征标，它以 $2Z$ 为子表示。但这样一来，D_8 的不可约表示集合的划分所含元素就会少于四个。

另一方面，在有限p群 S 上构造一个并非来自 S上的饱和融合系统的超特征理论要容易得多。将 S 划分为两部分、并将所有非平凡元素置于同一类的划分，总是对应着一个超特征理论。但如果 S 是一个 p群，其非平凡元素至少有两种不同的阶，那么构成该划分的子集就不可能是 $\mathcal{F}$共轭类。

2. 幺半群的分解唯一性

本节回顾约化交换幺半群理论中的一些术语和结果，以便研究上一节介绍的融合不变表示幺半群中的分解唯一性。我们沿用 [13]中的术语。由于我们的幺半群是交换的，我们用 0 表示单位元。在本文其余部分，$\mathcal{F}$ 表示一个 p群 S上的饱和融合系统。

定义 2.1. 若 0 是唯一的可逆元，则称交换幺半群为约化的。

交换幺半群 $\mathrm{Rep}(\mathcal{F})$ 是约化的，因为它是约化幺半群 $\mathrm{Rep}(S)$ 的子幺半群。

定义 2.2. 设 M 是一个约化交换幺半群。M 中的非零元素 x 称为原子，如果 $x=y+z$ 蕴含 $y=0$ 或 $z=0$。

定义 2.3. 原子幺半群是由其原子集合生成的约化交换幺半群。

幺半群 $\mathrm{Rep}(\mathcal{F})$ 是原子的，其原子是 S 的不可约 $\mathcal{F}$–不变表示。

定义 2.4. 若每个非零元素都能以唯一的方式（至多相差重排）表示为有限个原子的和，则称原子幺半群具有唯一分解性质。

这也称为唯一分解幺半群。容易看出，一个约化交换幺半群具有唯一分解性质，当且仅当它是自由的，也就是说，它同构于以下形式的幺半群

$$\mathbb{N}X = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{N}$$

对于某个集合 X。对于有限群 G，幺半群 Rep(G) 是唯一分解的，因为 G 的任意表示都能以唯一的方式分解为不可约表示的直和（忽略排列顺序）。Rep$^{\Sigma_3}$(S) 的原子是例 1.5 中描述的表示 ρ_0和 $\rho_1 + \rho_2$，该幺半群是唯一分解的，因为

$$m\rho_0 + n(\rho_1 + \rho_2) = m'\rho_0 + n'(\rho_1 + \rho_2)$$

推出 $m = m'$ 和 $n = n'$。

为了描述一个不能唯一分解的例子，我们引入 Rep($\mathcal{F}$) 的格罗滕迪克群，记作 $R(\mathcal{F})$，并称为 $\mathcal{F}$的表示环。当 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S G$ 时，我们也使用记号 $R_G(S)$。一般而言， $R(\mathcal{F})$ 是一个自由阿贝尔群，其秩等于 S 的 $\mathcal{F}$ 共轭类的数量（见 [4]中的推论 2.2）。然而，幺半群 Rep($\mathcal{F}$) 一般不是自由的，如 [12] 中的以下例子所示。

例 2.5. 令 S 为 Σ_9的一个 3-西洛子群。幺半群 Rep$^{\Sigma_9}$(S) 不具有唯一分解。以下例子最早见于 [12] 的例 4.5.5。表示环 $R_{\Sigma_9}(S)$ 是由以下 Σ_9–不变虚表示生成的自由阿贝尔群

$$1, a_1 + a_2 + X, b_0 + c_0 + Z - X, b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + 2Z, X + Y$$

其中 a_i、 b_0、 c_i、 X、 Y 和 Z 是 S 的表示，它们不共享 S的任何不可约表示。一个更方便的基为

$$1, a_1 + a_2 + X, b_0 + c_0 + Z + a_1 + a_2, b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + 2Z, X + Y$$

由注释 2.12 可知，1、 $b_0 + c_0 + Z + a_1 + a_2$、 $b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + 2Z$和 $X + Y$是不可约的 $\mathcal{F}$–不变表示。另一方面，使用基并应用相同的判据

$$1, a_1 + a_2 + X, b_0 + c_0 + Z + Y, b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + 2Z, X + Y$$

我们可以得出结论， $a_1 + a_2 + X$ 和 $b_0 + c_0 + Z + Y$是不可约的 $\mathcal{F}$–不变表示。那么，表达式

$$(a_1 + a_2 + X) + (b_0 + c_0 + Z + Y) = (b_0 + c_0 + Z + a_1 + a_2) + (X + Y)$$

表明 Rep$^{\Sigma_9}$(S) 不是唯一分解的。

另一个已知的非唯一分解幺半群例子，来自融合系统不变表示，在 [23], 的例 A.2 中给出：is Rep$^{PGL_3(\mathbb{F}_3)}$ (SD_{16})。

注 2.6. 设 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 分别是定义在 S_1 和 S_2 上的饱和融合系统。若存在群同构 α: $S_1 \to S_2$，以及范畴同构 α': $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$，且其在对象上的定义为 $\alpha'(P) = \alpha(P)$，则这两个融合系统同构。容易证明，同构 α 诱导出幺半群同构 $\mathrm{Rep}(\mathcal{F}_2) \to \mathrm{Rep}(\mathcal{F}_1)$，以及环同构 $R(\mathcal{F}_2) \to R(\mathcal{F}_1)$。

以下结果在非唯一分解理论中广为人知，但为求完整起见，我们给出这一特例的证明。

命题 2.7。设 M 是一个原子幺半群，其格罗滕迪克群$K(M)$ 是有限秩自由阿贝尔群。那么， M 是唯一分解幺半群，当且仅当$K(M)$ 的秩等于 M 的原子集合的基数。

证明。设 X 是 M 的原子集合。若 M 是唯一分解幺半群，则它同构于$\mathbb{N}X$，因此 $K(M) \cong \mathbb{Z}X$。

现在假设 M 不是唯一分解幺半群。由于 X 中 M 的原子集合在阿贝尔群意义下生成$K(M)$，因此存在一个满同态 φ: $\mathbb{Z}X \to K(M)$，它由从 M 到 $K(M)$ 的泛映射诱导。由于 M 不是唯一分解幺半群， $K(M)$ 中存在一个关系$\sum n_x x = 0$，其中至少有一个 $n_x \neq 0$。因此， φ 不是单射，并且存在一个正合序列

$$0 \to \mathbb{Z}Y \to \mathbb{Z}X \to K(M) \to 0$$

与 Y 无 穷。由于 $K(M)$ 是有限秩自由阿贝尔群，若 $|X|$ 有限，则有

$$|X| = \operatorname{rk} K(M) + |Y|$$

因此 $\operatorname{rk} K(M) < |X|$。若 X 无限，则 $\operatorname{rk} K(M)$ 显然不同于 $|X|$。 □

特别地，证明表明，若 M 是原子幺半群，且 $K(M)$ 是有限秩自由阿贝尔群，则这些原子幺半群中的原子数大于或等于 $K(M)$ 的秩。

推论 2.8。 $\mathcal{F}$–不变表示的不可约表示数大于或等于 $R(\mathcal{F})$ 的秩。

推论 2.9。幺半群 $Rep(\mathcal{F})$ 是唯一分解的，当且仅当 $\mathcal{F}$–共轭类中的 S 的元素数等于 S 的 $\mathcal{F}$–不变不可约表示数。

来看一个这些数字不相同的例子，很有启发性。

例2.10。我们回到例 2.5 中的 $\mathrm{Rep}^{\Sigma_9}(S)$；我们已经知道它不具有唯一分解性质。$R_{\Sigma_9}(S)$ 的秩为五，并且作为阿贝尔群，它由以下 Σ_9–不变的 S 虚表示自由生成。

$$1, P = a_1 + a_2 + X, Q = b_0 + c_0 + Z - X, R = b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + 2Z, S = X + Y$$

我们将 $R_{\Sigma_9}(S)$ 的这个基替换为

$$1, P, Q' = Q + S = b_0 + c_0 + Z + Y, R, S$$

它现在是一个 Σ_9–不变表示的基。

$\rho = a1 + bP + cQ' + dR + eS$ 是一个不可约的 Σ_9–不变表示，其系数均为整数。由不可约性可知，若所有系数均非负，则 ρ 必为这五个表示之一；根据例 2.5，我们已知它们都是不可约的。

接下来，假设至少有一个系数为负。这个系数不可能是 b，否则 a_1 和 a_2 的系数都会为负。出于同样的原因，它也不可能是 a、 c 或 d。因此，假设 $e \leq -1$。那么必有 $e + b \geq 0$ 和 $e + c \geq 0$，因为 $e + b$ 是 ρ 中 X 的系数，而 $e + c$ 是 ρ 中 Y 的系数。但这样一来

$$\rho = a1 + (-e)(P - S + Q') + (b + e)P + (c + e)Q' + dR$$

现在所有系数都非负，且 $P - S + Q' = a_1 + a_2 + b_0 + c_0 + Z$ 是一个表示。因此， ρ 也可能是 $P - S + Q'$；根据例 2.5，我们已知它是不可约的。我们证明了恰有六个不可约的 Σ_9–不变表示。

给定一个 S 的表示 ρ，记 Irr(ρ) 为其不可约子表示的集合。

命题 2.11。幺半群 Rep($\mathcal{F}$) 是唯一分解的，当且仅当 $R(\mathcal{F})$ 有一个表示基 $\{\rho_1, \ldots, \rho_k\}$，满足

$$\mathrm{Irr}(\rho_j) - \bigcup_{i \neq j} \mathrm{Irr}(\rho_i) \neq \emptyset$$

对所有 j 均成立。此外，若这一条件成立，则该基就是不可约的 $\mathcal{F}$–不变表示的集合。

证明。给定这样一个基 $\{\rho_1, \ldots, \rho_k\}$，若 ρ 是一个不可约的 $\mathcal{F}$–不变表示，则必有

$$\rho = n_1\rho_1 + \ldots + n_k\rho_k$$

对于某个 $n_j \in \mathbb{Z}$。由于 ρ_j 包含一个不可约子表示，而该子表示对于任何 $i \neq j$ 都不与 ρ_i 共享，因此系数 n_j 必须非负。由于 ρ 不可约，必有 $\rho = \rho_j$，其中 j 如此，因此不可约的 $\mathcal{F}$–不变表示的数量至多为 k。根据推论 2.8，这一数量恰为 k，故由推论 2.9，Rep($\mathcal{F}$) 是唯一分解的。我们也由此得到最后一个结论。

另一方面，如果 Rep($\mathcal{F}$) 是唯一分解的，那么根据推论 2.9，不可约的 $\mathcal{F}$–不变表示的数量等于 $R(\mathcal{F})$ 的秩，这是有限的。令$\rho_1, \ldots, \rho_k$为不可约的 $\mathcal{F}$–不变表示。给定 ρ_j，如果它的每个不可约子表示都作为某个满足 $i \neq j$ 的 ρ_i 的子表示出现，

那么 ρ_j 将是

$$\sum_{i\neq j} n_i\rho_i$$

对于某些非负整数 n_i。这将与 Rep($\mathcal{F}$) 具有唯一分解这一事实相矛盾。因此，$\{\rho_1,\dots,\rho_k\}$ 是 $R(\mathcal{F})$ 的一个基，并满足所需性质。□

注释 2.12。我们可以采用类似的设置来证明一个不可约性判据。假设 $R(\mathcal{F})$ 有一个由表示组成的基 $\{\rho_1,\dots,\rho_k\}$，且 ρ_j 满足

$$\mathrm{Irr}(\rho_j) - \bigcup_{i\neq j}\mathrm{Irr}(\rho_i) \neq \emptyset$$

我们来证明 ρ_j 是一个不可约的 $\mathcal{F}$–不变表示。

设 $\alpha \in \mathrm{Irr}(\rho_j) - \bigcup_{i\neq j}\mathrm{Irr}(\rho_i)$，并设 $\rho_j = \gamma + \epsilon$，其中 γ和 ϵ是 $\mathcal{F}$–不变表示。由于 ρ_j 是基中唯一包含 α 作为子表示的表示，我们可以假设 γ 包含 α，且其重数与在 ρ_j中的相同。将 γ 写成 ρ_i的整数线性组合时，ρ_j 的系数必为一，因此 $\gamma = \rho_j + \gamma'$。于是 $\gamma' + \epsilon = 0$，由此 $\gamma' = 0 = \epsilon$，所以$\rho_j = \gamma$。

如果两个虚表示分别作为 S 的不可约表示的整数线性组合进行分解后，不含有任何相同的不可约表示，我们就称它们是 S 的互不相交虚表示。更一般地，给定 S 的有限个虚表示，若其中任意两个互不相交，就称它们互不相交。

命题 2.13. 若 $R(\mathcal{F})$ 有一个由 S 的互不相交虚表示构成的基，则 Rep($\mathcal{F}$) 是唯一分解的。

证明. 首先，我们对这个基作如下修改：将每个形如 $-\rho$ 的元素（其中 ρ 是一个表示）替换为 ρ。设 α 是 $R(\mathcal{F})$ 在这个新基下的一个虚表示，但它不是表示。若 β 是 S 的一个 $\mathcal{F}$–不变表示，并将其用这个基表示，则 α 的系数必为零，因为 β 是一个表示。因此， S 的所有 $\mathcal{F}$–不变表示都由该基中属于表示的元素所组成的集合 X 生成。特别地，根据注释 2.12， X 是 S 的不可约 $\mathcal{F}$–不变表示的集合。这说明不可约 $\mathcal{F}$–不变表示的数量至多为 $R(\mathcal{F})$ 的秩，故根据推论 2.8，该数量等于其秩。因此，根据推论 2.9，Rep($\mathcal{F}$) 是唯一分解的。□

如下例子所示，命题 2.13 并不能刻画 Rep($\mathcal{F}$) 的阶乘性。

例 2.14。 [12] 的例 4.5.4 中确定了 $\mathcal{F}_{D_8}(\Sigma_4)$ 的表示环。令 $\{1, X, Y, Z, XY\}$ 为 D_8 的不可约表示集合，

其中 Z 是二维不可约表示。于是， $R_{\Sigma_4}(D_8)$ 是由 1、 $X+Z$、 $Y+Z$ 和 XY 生成的自由阿贝尔群。根据命题 2.11，幺半群 $\mathrm{Rep}^{\Sigma_4}(D_8)$ 具有唯一分解性，而这些就是所有可能的不可约 Σ_4–不变表示。

然而，不可能为 $R_{\Sigma_4}(D_8)$ 找到由互不相交的虚表示构成的基。假设存在由互不相交的虚表示构成的基 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 。让我们用这个基来表示已有的基。可以假设 $\pm X$ 出现在 v_1 的分解中，那么 $Y+Z$、1 和 XY 中 v_1 的系数都为零。类似的条件对以下各对也必须成立（允许重新排序）： (Y, v_2)、$(1, v_3)$ 和 (XY, v_4)。特别是， $X+Z=\pm v_1$ 和 $Y+Z=\pm v_2$，这与 v_1 和 v_2 互不相交相矛盾。

然而，命题 2.13 在两种极端情况下很有用。以下术语取自 [17] 的引言。

定义 2.15. 融合系统 $\mathcal{F}$ 是传递的，当且仅当 S的元素只有两个 $\mathcal{F}$–共轭类。

引理 2.16. 若 $\mathcal{F}$ 是传递的，则 $\mathrm{Rep}(\mathcal{F})$ 是唯一分解的。

证明. 在此证明中，我们采用 $R(\mathcal{F})$ 的等价描述，即将其视为 $\mathcal{F}$–不变虚特征标构成的格罗滕迪克群。

这两个共轭类必定分别是 1 的共轭类和所有非平凡元素的共轭类。令 $\chi \in R(\mathcal{F})$，并令 $m=\chi(1)$。由于 χ 是 $\mathcal{F}$–不变的，我们必须有$\chi(s) = n$ 对所有 $s \neq 1$都成立。我们知道 m 是一个整数。我们将证明 n 也是一个整数。注意

$$(\chi, 1) = \frac{1}{|S|}\sum_{s\in S}\overline{\chi(s)} = \frac{1}{|S|}(m+\bar{n}(|S|-1)) = \frac{m-\bar{n}}{|S|}+\bar{n}$$

是一个整数，或者等价地

$$\frac{m-n}{|S|}+n$$

另一方面，由于 S 是一个 p-群，它是幂零的，因此 $[S,S]\neq S$。所以它的阿贝尔化非平凡，并且 S 有一个非平凡的一维表示ρ。我们也用 ρ 表示它的特征标。于是

$$(\chi,\rho) = \frac{1}{|S|}\left(m+\bar{n}\sum_{s\neq 1}\rho(s)\right) = \frac{1}{|S|}\left(m+\bar{n}\sum_{s\in S}\rho(s)-\bar{n}\rho(1)\right) = \frac{1}{|S|}(m-\bar{n})$$

也是一个整数，因此

$$\frac{m-n}{|S|}$$

是一个整数。因此， n 是一个整数，且 $S|$ 整除 $m+n$。令 $m-n=a|S|$满足 $a\in\mathbb{Z}$。那么

$$\chi = (a+n)1 + a\widetilde{\mathrm{reg}_S}$$

其中 $\widetilde{\text{reg}_S}$ 是约化正则表示。由于约化正则表示不包含作为子表示的平凡表示，这表明

$$R(\mathcal{F}) = \mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}\widetilde{\text{reg}_S}$$

因此， $R(\mathcal{F})$ 有一个由互不相交的特征标构成的基，并且根据命题 2.13，它具有唯一分解性质。□

第二种极端情形对应于每个态射都是 S 的某个自同构的限制这一情形。

引理 2.17. 如果 $\mathcal{F}$ 的本质秩为零，那么 Rep($\mathcal{F}$) 具有唯一分解性质。

证明. 如果 $\mathcal{F}$ 的本质秩为零，那么表示 ρ 是 S–不变的，当且仅当对于每个 $f \in \text{Aut}_{\mathcal{F}}(S)$， $\rho \circ f$ 与 ρ 等价。注意， ρ 不可约，当且仅当 $\rho \circ f$ 不可约。因此，$\text{Aut}_{\mathcal{F}}(S)$ 作用于 S 的不可约表示集合 $\text{Irr}(S)$。于是

$$R(\mathcal{F}) = R(S)^{\text{Aut}_{\mathcal{F}}(S)} = \mathbb{Z}[\text{Irr}(S)]^{\text{Aut}_{\mathcal{F}}(S)} \cong \mathbb{Z}[\text{Irr}(S)/\text{Aut}_{\mathcal{F}}(S)]$$

这表明 $R(\mathcal{F})$ 有一个由互不相交的特征标构成的基，因此根据命题 2.13，它具有唯一分解性质。□

如果 S 是阿贝尔的，那么 $\mathcal{F}$ 的本质秩自动为零，而阶至多为 p^2 的 p-群都是阿贝尔群，因此接下来讨论 $|S| = p^3$的情形是很自然的。我们将在下一节中这样做。

注 2.18. 如果 Rep($\mathcal{F}$)具有唯一分解性质，且 ρ 是一个不可约的 $\mathcal{F}$–不变表示，那么 ρ 是 reg_S^n 的一个子表示，其中某个 n满足条件，因此 $\text{reg}_S^n = \rho \oplus \alpha$。由于 reg$_S$ 是 $\mathcal{F}$–不变的， α 也如此，因此我们可以将其分解为不可约的$\mathcal{F}$–不变表示的直和

$$\text{reg}_S^n = \rho \oplus \bigoplus \rho_i^{k_i}$$

另一方面，由于 reg$_S$ 是 $\mathcal{F}$–不变的，它有如下分解

$$\text{reg}_S = \bigoplus \omega_i^{r_i}$$

其中 ω_i 是不可约的 $\mathcal{F}$–不变表示。根据唯一分解的唯一性，对于某个 j有 $\rho = \omega_j$ ，特别地， ρ 是 reg$_S$的一个子表示。

前一条注记中的论证表明，当 Rep($\mathcal{F}$) 满足唯一分解时，任何不可约的$\mathcal{F}$–不变表示都是正则表示的子表示。除了 [12] 和 [23], 的例子外，我们还在附录中列举了若干使用软件 GAP 找到的饱和融合系统例子，其中 Rep($\mathcal{F}$) 不满足唯一分解。我们已验证，其中许多仍满足以下性质：任何不可约的 $\mathcal{F}$–不变表示都是正则表示的子表示（论文中未列出这些细节）。因此，提出以下猜想是合理的。

猜想 2.19. S 的每个不可约 $\mathcal{F}$–不变表示都是正则表示的子表示。

3. Fusion systems over p-groups of small order

本节将证明，对于阶为 p^3 的 p-群上的饱和融合系统，其融合不变表示幺半群均为唯一分解幺半群。

我们从 $p = 2$ 开始。设 S 是一个阶为八的群， $\mathcal{F}$ 是定义在 S 上的饱和融合系统。若 S 是阿贝尔群，则 $\mathcal{F}$ 的本质秩为零，因此根据引理 2.17，Rep($\mathcal{F}$) 是唯一分解幺半群。众所周知，除同构外， D_8 上有三个饱和融合系统，分别是 D_8、 S_4 和 A_6 的融合系统；而 Q_8 上有两个，分别对应于群 Q_8 和 $SL_2(\mathbb{F}_3)$。对于 D_8 和 Q_8，我们分别用 X、 Y 和 XY 表示一维不可约表示，用 Z 表示二维不可约表示。在所有这些情形下，融合不变表示幺半群都是唯一分解幺半群：

- 当群为 D_8 或 Q_8 时，结论成立，因为它是某个群的表示幺半群。

- 对于 Σ_4，我们已在例 2.14 中证明了这一点。
- 对于 A_6， D_8 的元素有三个 A_6–共轭类。容易验证，不可约的 A_6–不变表示为 1、 $X + XY + Z$ 和 $Y + Z$。

- 对于 $SL_2(\mathbb{F}_3)$， Q_8 的元素有三个 $SL_2(\mathbb{F}_3)$–共轭类。容易验证，不可约的 $SL_2(\mathbb{F}_3)$–不变表示为 1、$X + Y + XY$ 和 Z。

本节余下部分中，我们假设 p 是奇素数。我们首先考虑具有如下表示的特异群 $S = p_+^{1+2}$

$$\langle a, b, c \mid a^7 = 1, b^7 = 1, c^7 = 1, [a, b] = c, [a, c] = 1, [b, c] = 1\rangle$$

回想一下， p_+^{1+2} 上的饱和融合系统由 p_+^{1+2} 的自同构群、作为中心化子自反的秩 2 初等阿贝尔群及其自同构群决定（参见 [24] 中的推论 4.5）。因此， S 的一个表示 ρ 是 $\mathcal{F}$–不变的，当且仅当满足以下两个条件：

(1) 对所有 $f \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(S)$， $f^*\rho \cong \rho$。(2) 对每个 $\mathcal{F}$–中心化子自反子群 V（其为秩 2 的初等阿贝尔群），对所有 $h \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(V)$， $h^*\rho|_V \cong \rho|_V$。

第一个条件表明， ρ 是 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(S)$ 在 Rep(S) 上作用的不动点。与引理 2.17 的证明一样，不动点构成一个自由幺半群，其基由在 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(S)$ 的作用下， S 的不可约表示的轨道求和得到。

根据 [14], 定理 5.5.4， S 群 p^2 有 $p-1$ 个一维不可约表示，以及维数为 p 的不可约表示。一维

表示来自商群

$$S \to S/Z(S) \cong \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$$

并记作 $x^i y^j$，与 $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$ 的相应表示相同。令 ω 表示一个本原 p^2 次单位根。其余不可约表示ϕ_j（对应于 $j = 1$，.....，$p-1$）由它们在 a 和 b 上的取值描述。具体而言，

$$\phi_j(a) = \mathrm{diag}(\omega^{j(1+(p-1)p)}, \ldots, \omega^{j(1+p)}, \omega^j, 1)$$

而 $\phi_j(b)$ 是将 e_1 映射为 e_p、并在 $n \geq 2$ 时将 e_n 映射为 e_{n-1} 的线性变换。这里，$\{e_1, \ldots, e_p\}$ 表示 $\mathbb{C}^p$ 的标准基。注意，$\phi_j(c) = w^j I$。

为了确定 S 的不可约表示在 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(S)$ 的作用下的轨道，我们可以使用以下引理。

引理 3.1. 设 f 是 S 的一个自同构，在同构 $\mathrm{Out}(S) \cong GL_2(\mathbb{F}_p)$ 下由矩阵 $M = \begin{pmatrix} r & r' \\ s & s' \end{pmatrix}$ 表示。那么 $f^*(x^i y^j) = x^{ir+js} y^{ir'+js'}$，且 $f^*(\phi_j) = \phi_{j \det(M)}$，其中所有指标均按模 p 计算。

因此，我们将先确定幺半群 $\mathrm{Rep}(S)^{\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(S)}$，然后施加由初等阿贝尔子群给出的条件。$S$的秩二初等阿贝尔子群是由 c 和 ab^i 生成的子群 V_i，其中 $i = 0, \ldots, p-1$；以及由 c 和 b 生成的子群 V_p。通过将这些子群分别与 $\mathbb{F}_p^2$ 等同，并使上述生成元素构成标准基，它们自然带有 $GL_2(\mathbb{F}_p)$ 的作用。注意，秩二初等阿贝尔群 V 的不可约表示可以与 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(V, \mathbb{F}_p)$ 中的元素对应起来；在此对应下，$\mathrm{Aut}(V) \cong GL_2(\mathbb{F}_p)$ 的作用是对偶作用，对应于乘以转置矩阵。

现在，我们逐一考察 [24] 中表 1.1 和表 1.2 的所有可能性，以确定每种情况下融合不变表示幺半群的唯一分解性。

情况 1：$G = S \rtimes W$，其中 p 不整除 W 的阶。这由引理 2.17 得出。

情况 2：$G = (\mathbb{Z}/p)^2 \rtimes (SL_2(\mathbb{F}_p) \times \mathbb{Z}/r)$，其中 r 整除 $p-1$。我们有 $\mathrm{Out}_G(S) \cong \mathbb{Z}/(p-1) \times \mathbb{Z}/r$，其元素为对角矩阵。注意，$\mathbb{Z}/r$的作用将形式为 y^j with $j \neq 0$ 的表示集合划分为 $d = (p-1)/r$个轨道。设 Y_i、$i = 1$、.....、d 分别为这些互不相交集合中各表示之和。对于形式为 $x^i y^j$ with$ij \neq 0$ 的表示，也可作类似论证，从而得到表示 B_i for $i = 1$、.....、d。$\mathrm{Rep}(S)^{\mathrm{Out}_G(S)}$ 的一组基为

$$\left\{ 1, X = \sum_{i=1}^{p-1} x^i, Y_1, \ldots, Y_d, B_1, \ldots, B_d, Z = \sum_{j=1}^{p-1} \phi_j \right\}$$

现在设 ρ 是 S 的一个 G–不变表示。那么

$$\rho = q1 + lX + \sum_{i=1}^{d} s_i Y_i + \sum_{i=1}^{d} t_i B_i + uZ$$

ρ 在由 a 和 c生成的子群 V_0 上的限制为

$$(q + s_1 r + \ldots + s_d r)1 + l\left(\sum_{i=1}^{p-1} x^i\right) + \sum_{i=1}^{d} t_i r\left(\sum_{i=1}^{p-1} x^i\right) + u\left(\sum_{i=0,j=1}^{p-1} x^i y^j\right)$$

由于 $\mathrm{Aut}_G(V_0) \cong SL_2(\mathbb{F}_p) \rtimes \mathbb{Z}/r$，元素 x 和 xy 通过 $SL_2(\mathbb{F}_p)$的作用相关，因此 $u = l + t_1 r + \ldots + t_d r$。于是

$$\rho = q1 + l(X + Z) + \sum_{i=1}^{d} s_i Y_i + \sum_{i=1}^{d} t_i (B_i + rZ)$$

因此，根据命题 2.11，$\mathrm{Rep}_G(S)$具有唯一分解。

情形 3: $G = L_3(p)$，其中 3 不整除 $p-1$。在此情形下，$\mathrm{Out}_{L_3(p)}(S) \cong \mathbb{Z}/(p-1) \times \mathbb{Z}/(p-1)$，其元素是 $GL_2(\mathbb{F}_p)$中的对角矩阵。$\mathrm{Rep}(S)^{\mathrm{Out}_{L_3(p)}(S)}$ 的一组基为

$$\left\{1, X, Y = \sum_{i=1}^{p-1} y^i, M = \sum_{ij\neq 0} x^i y^j, Z\right\}$$

现在设 ρ 是 S的一个 $L_3(p)$不变表示。那么

$$\rho = q1 + rX + sY + tM + uZ$$

ρ 限制在由 a 和 c 生成的子群 V_0 上为

$$q1 + r\left(\sum_{i=1}^{p-1} x^i\right) + s(p-1)1 + t\left(\sum_{ij\neq 0} x^i\right) + u\left(\sum_{i=0,j=1}^{p-1} x^i y^j\right)$$

由于 $\mathrm{Aut}_{L_3(p)}(V_0) \cong GL_2(\mathbb{F}_p)$，其在 $V_0 - \{1\}$ 上的作用是传递的，因此它在非平凡表示集合上的作用也是传递的。因此，这些非平凡表示的所有系数都必须相等，也就是说，$r + (p-1)t = u$。通过对由 b 和 c 生成的子群 V_p 进行对称论证，我们得到 $s + (p-1)t = u$，因此 $r = s$。因此

$$\rho = q1 + r(X + Y + Z) + t(M + (p-1)Z)$$

由命题 2.11，$\mathrm{Rep}_G(S)$ 是唯一分解的。事实上，它是由 1、$X + Y + Z$ 和 $M + (p-1)Z$ 生成的自由幺半群。

情形 4: $G = L_3(p) : 2$，其中 3 不整除 $p-1$。注意，$L_3(p)$–不变表示 ρ of S is $(L_3(p) : 2)$–不变，当且仅当 $f^*\rho \cong \rho$，其中 f is S that permutes a and b 的自同构。由于 f^* 固定 X、Y、M 和 Z，我们得到

也就是说， ρ is $L_3(p)$–不变，当且仅当它是 $(L_3(p):2)$–不变。特别地，我们看到 S 有三个 $L_3(p)$–共轭类。

情形 5： $G =^2 F_4(2)'$ 和 J_4 在素数 3 处。这些群的融合系统包含 $L_3(3):2$ 的融合系统，因此它们要么与 $L_3(3):2$ 有相同的共轭类，要么只有两个共轭类。由引理 2.16 或前一种情形可知，对于这两个群，幺半群 $\mathrm{Rep}_G(S)$ 是唯一分解的。

情形 6： $G = Th$ 在素数 5 处。在这种情形下，所有秩二的初等阿贝尔子群都是根子群，且彼此在 Th–共轭，并且其自同构群为 $GL_2(\mathbb{F}_5)$。给定 S 中一个非平凡元素 x，要么 $x = c^j$，此时 x 在 Th 中与 c 共轭；要么由 c 和 x 生成的子群是 S 的秩二初等阿贝尔子群之一，并且此时 x 在 Th 中与 c 共轭。因此，Th 的融合系统是传递的，所以根据引理 2.16，$\mathrm{Rep}_G(S)$ 是唯一分解的。

情形 7：当 3 整除 $p-1$ 时， $G = L_3(p)$。在这种情况下，$\mathrm{Out}_{L_3(p)}(S) \cong \mathbb{Z}/(p-1) \times \mathbb{Z}/[(p-1)/3]$，它是由以下矩阵生成的 $\mathrm{Out}(S)$ 的子群：

$$\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \xi^{-2} & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}$$

其中 ξ 是 $\mathbb{F}_p^\times$ 的一个生成元。一个更方便的生成元集合为：

$$\begin{pmatrix} \xi^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \xi^{-2} & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}$$

我们来计算 $\mathrm{Rep}(S)^{\mathrm{Out}_{L_3(p)}(S)}$ 的一组基。 x 的轨道包含 x^{ξ^3}，因此也包含 $x^{\xi^3\xi^{-2}} = x^\xi$ 以及 x 的所有幂。 y 也同样如此。为了求满足 $ij \neq 0$ 的元素 x^iy^j 的轨道，注意 $\mathrm{Out}_{L_3(p)}(S)$ 在集合 $\{x^iy^j \mid ij \neq 0\}$ 上的作用是自由的，因此该集合分成三个大小为 $(p-1)^2/3$ 的轨道。如果 x^iy^j 与 $x^{i'}y^{j'}$ 相关，则 $i' = i\xi^{3k-2n}$ 和 $j' = j\xi^n$，因此

$$j'^{-1}i' = j^{-1}\xi^{-n}i\xi^{3k-2n} = j^{-1}i\xi^{3k-3n}$$

此条件将集合 $\{x^iy^j \mid ij \neq 0\}$ 分成三个子集，分别是满足$j^{-1}i = \xi^m$ 且 m 模 3 同余于 0、1 和 2 的元素。由于这三个子集的大小均为 $(p-1)^2/3$，它们就是三个轨道。最后，由于第二个矩阵的行列式为 ξ^{-1}，它是 $\mathbb{F}_p^\times$的一个生成元，因此 ϕ_1 的轨道包含所有 ϕ_j。因此，$\mathrm{Rep}(S)^{\mathrm{Out}_{L_3(p)}(S)}$ 的一个基为

$$\left\{1, X, Y, Z, M_n = \sum_{j,k} x^{ja^{3k+n}}y^j\right\}$$

其中 $0 \leq n \leq 2$，指标 j遍历 $\{1, \ldots, p-1\}$，而指标 k遍历 $\{1, \ldots, (p-1)/3\}$。现在设 ρ是 S的一个 $L_3(p)$–不变表示。那么

$$\rho = q1 + rX + sY + t_0M_0 + t_1M_1 + t_2M_2 + uZ$$

ρ 在由 a 和 c生成的子群 V_0 上的限制是

$$q1 + r\left(\sum_{i=1}^{p-1} x^i\right) + s(p-1)1 + \frac{(t_0+t_1+t_2)(p-1)}{3}\left(\sum_{i=1}^{p-1} x^i\right) + u\left(\sum_{i=0,j=1}^{p-1} x^i y^j\right)$$

由于 $\mathrm{Aut}_{L_3(p)}(V_0) \cong SL_2(\mathbb{F}_p) \rtimes \mathbb{Z}/[(p-1)/3]$，元素 x 和 xy 通过 $\mathrm{Aut}_{L_3(p)}(V_0)$ 的作用相关，因此 x和 xy 的系数必须相等。也就是说

$$u = r + \frac{p-1}{3}(t_0 + t_1 + t_2)$$

对由 b 和 c生成的子群 V_p 作类似论证，可得

$$u = s + \frac{p-1}{3}(t_0 + t_1 + t_2)$$

由此可得 $r = s$。因此

$$\rho = q1 + r(X+Y+Z) + t_0\left(M_0 + \frac{p-1}{3}Z\right) + t_1\left(M_1 + \frac{p-1}{3}Z\right) + t_2\left(M_2 + \frac{p-1}{3}Z\right)$$

根据命题 2.11，幺半群 $\mathrm{Rep}_G(S)$ 是唯一分解的；事实上，它是由 1、 $X+Y+Z$ 和当 $n=0$ 为 1、2 时的 $M_n + \frac{p-1}{3}Z$ 生成的自由幺半群。

情形 8： $G = L_3(p):2$，当 3 整除 $p-1$ 时。群 $\mathrm{Out}_{L_3(p):2}(S)$ 由 $\mathrm{Out}_{L_3(p)}$ 以及交换 a 和 b 的自同构的类生成。因此，$\mathrm{Rep}(S)^{\mathrm{Out}_{L_3(p):2}(S)}$ 的一组基为：

$$\{1, X+Y, M_0, M_1+M_2, Z\}$$

考察上述子群 V_0 和 V_p 的自同构，可得 $\mathrm{Rep}_G(S)$ 由 1、 $X+Y+Z$、 $M_0 + \frac{p-1}{3}Z$、 $M_1 + M_2 + {}^{2}{}_{(p-1)\,3}$ Z 生成，因此根据命题 2.11，~~它是~~唯一分解的。

情形 9： $G = L_3(p).3$，当 3 整除 $p-1$ 时。在这种情况下，群 $\mathrm{Out}_{L_3(p).3}(S)$ 是 $GL_2(\mathbb{F}_p)$ 中由对角矩阵构成的子群，因此 $\mathrm{Rep}(S)^{\mathrm{Out}_{L_3(p).3}(S)}$的一组基为 $\{1, X, Y, M, Z\}$。考察子群 V_0 和 V_p 的自同构，可得 $\mathrm{Rep}_G(S)$ 由 1、 $X+Y+Z$、 $M+6Z$ 生成，因此根据命题 2.11，它是唯一分解幺半群。

情形 10：当 3 整除 $p-1$ 时， $G = L_3(p).\Sigma_3$。由于 $L_3(p).\Sigma_3$ 的融合系统包含 $L_3(p)$。3 的融合系统，因此它要么与 $L_3(p)$。3 有相同的共轭类，要么有两个共轭类。所以，根据前述

情况或引理 2.16，Rep{v12}({v13})
是一个唯一分解幺半群。

情况 11： $G = He$，Held 群，在素数 7 处。群 $\mathrm{Out}_{He}(S)$ 由以下矩阵生成

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

因此，$\mathrm{Rep}(S)^{\mathrm{Out}_{He}(S)}$ 由以下元素生成

$$\{1, Z, A, B, C, D, E\}$$

其中 $A = x + x^2 + x^4 + y^3 + y^6 + y^5$ 和 $B = x^3 + x^6 + x^5 + y + y^2 + y^4$。其余表示为

$$C = xy + x^2y + x^4y + xy^2 + x^2y^2 + x^4y^2 + xy^4 + x^2y^4 + x^4y^4 + x^3y^3 + x^6y^3 + x^5y^3 + x^3y^5 + x^6y^5 + x^5y^5 + x^3y^6 + x^6y^6 + x^5y^6$$

$$D = xy^3 + xy^6 + xy^5 + x^2y^3 + x^2y^6 + x^2y^5 + x^4y^3 + x^4y^6 + x^4y^5$$

$$E = x^3y + x^6y + x^5y + x^3y^2 + x^6y^2 + x^5y^2 + x^3y^4 + x^6y^4 + x^5y^4$$

现在设 ρ 是 S的一个 He–不变表示。那么

$$\rho = q1 + rA + sB + tC + uD + vE + wZ$$

ρ 在由 ab 和 c 生成的子群 V_1 上的限制为

$$(q + 3u + 3v)1 + (r + s + 3t + u + v)\left(\sum_{i=1}^{6} x^i\right) + w\left(\sum_{i=0,j=1}^{p-1} x^i y^j\right)$$

由于 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(V_1) = SL_2(\mathbb{F}_7)$，元素 x 和 xy 通过对偶作用相关。因此 $w = r + s + 3t + u + v$，从而

$$\rho = (q + 3t + 3u)1 + r(A + Z) + s(B + Z) + t(C + 3Z) + u(D + Z) + v(E + Z$$

我们得到 $\mathrm{Rep}_G(S)$ 由 $1, A+Z, B+Z, C+3Z, D+Z, E+Z$生成，因此根据命题 2.11，它是唯一分解的。

情况 12： $G = He$：在素数 7 处为 2。 S 的表示 ρ 是 $(He : 2)$–不变的，当且仅当它是 He–不变的且满足 $f^*\rho = \rho$，其中 f 是交换 a 和 b的二阶自同构。注意，f^* 固定 C 和 Z，交换 A 和 B，并交换D 和 E。因此 $\mathrm{Rep}_G(S)$ 由 $1, A + B + 2Z, C + 3Z$ 和 $D + E + 2Z$生成。根据命题 2.11，这是一个唯一分解幺半群。

情况 13： $G = Fi'_{24}$，素数 7 处的导出 Fischer 群。 Fi'_{24} 的融合系统包含 He： 2 的融合系统；但对于导出 Fischer 群，子群 V_3、 V_5 和 V_6 是根子群，其自同构群为 $SL_2(\mathbb{F}_7)$。令

$\rho = q1 + r(A + B + 2Z) + s(C + 3Z) + t(D + E + 2Z)$。将 ρ 限制到由 ab^6 和 c 生成的子群 V_6 上，得到

$$(q+6s)1+r\left(2\sum_{i=1}^{6}x^i+2\sum_{i=0,j=1}^{p-1}x^iy^j\right)+s\left(2\sum_{i=1}^{6}x^i+3\sum_{i=0,j=1}^{p-1}x^iy^j\right)+t\left(3\sum_{i=1}^{6}x^i+2\sum_{i=0,j=1}^{p-1}x^iy^j\right)$$

由于 x 和 xy 通过 $SL_2(\mathbb{F}_7)$ 的对偶作用相关，因此必有 $2r+2s+3t = 2r+3s+2t$，也就是说，$t = s$，因此

$$\rho = q1 + r(A + B + 2Z) + s(C + D + E + 5Z)$$

因此，根据命题 2.11，$\mathrm{Rep}_G(S)$ 是一个唯一分解幺半群，并且我们看到该融合系统有三个共轭类。

情形 14：素数 7 处的 $G = Fi_{24}$，费希尔群，以及 $\mathcal{F} = RV_1$。费希尔群 Fi_{24} 的融合系统和奇异 7-局部融合系统 RV_1 都包含 Fi'_{24} 的融合系统，因此它们的共轭类要么与 Fi'_{24} 相同，要么有两个共轭类。因此，根据前一种情况或引理 2.16，$\mathrm{Rep}_G(S)$ 和 $\mathrm{Rep}(\mathcal{F})$ 都是唯一分解幺半群。

情形 15：$G = O'N$，奥南群，在素数 7 处。在此情形下，群 $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(S)$ 由以下矩阵生成

$$\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0\\0&6\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

因此，幺半群 $\mathrm{Rep}(S)^{\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(S)}$ 由以下表示生成

$$\{1, X + Y, Z, L, N\}$$

其中

$$L = \sum_{i=1}^{6}x^iy^i + \sum_{i=1}^{6}x^iy^{7-i}$$

且 $N = M - L$。令

$$\rho = m1 + n(X + Y) + lL + rN + kZ$$

ρ 在由 a 和 c 生成的子群 V_0 上的限制为

$$m1+n1+n\left(\sum_{i=1}^{6}x^i\right)+2l\left(\sum_{i=1}^{6}x^i\right)+4r\left(\sum_{i=1}^{6}x^i\right)+k\left(\sum_{i=0,j=1}^{6}x^iy^j\right)$$

由于 V_0 是中心且根式的，因此 x 和 xy 通过 $SL_2(\mathbb{F}_7)$ 的作用相关联，从而 $n + 2l + 4r = k$。类似地，限制到子群 V_1

由 ab 和 c 生成的子群为

$$(m+6l)1+2n\left(\sum_{i=1}^{6}x^i\right)+l\left(\sum_{i=1}^{6}x^i\right)+4r\left(\sum_{i=1}^{6}x^i\right)+k\left(\sum_{i=0,j=1}^{6}x^iy^j\right)$$

因此 $2n+l+4r=k$。于是 $n=l$和 $k=3n+4r$。因此，Rep$_G(S)$ 由 1、 $X+Y+M+3Z$ 和 $N+4Z$ 生成，所以根据命题 2.11，它是唯一分解的。我们还看到， S中的元素有三个共轭元素。

情形 16： $G=O'N$： 素数 7 处的 2，以及 $\mathcal{F}=RV_2$、 RV_3。由于所有这些融合系统都包含 $O'N$的融合系统，因此相应的幺半群根据前一种情况或引理 2.16 都是唯一分解的。

情形 17： $G=M$，Fischer-Griess 怪兽群，素数 13 处。根据 [26], ，群 Out$_M(S)$ $\cong 3\times 4S_3$ 由以下矩阵生成

$$r=\begin{pmatrix}3&0\\0&9\end{pmatrix}\quad s=\begin{pmatrix}5&-4\\-2&7\end{pmatrix}\quad z=\begin{pmatrix}2&2\\1&-2\end{pmatrix}$$

元素 r 的阶为三，而 z 的阶为 24，并且满足

$$z^2=\begin{pmatrix}6&0\\0&6\end{pmatrix}$$

此外， $s=zrz^{-1}$。注意，6 是 $\mathbb{F}_{13}^{\times}$的生成元。我们首先计算 S 的不可约表示在 Out$_G$ (S) 作用下的轨道，它们为

$$\{1,Z,R,T\}$$

其中

$$R=\sum_{n=1}^{12}(z^2)^nx+\sum_{n=1}^{12}(z^2)^nxy+\sum_{n=1}^{12}(z^2)^nxy^3+\sum_{n=1}^{12}(z^2)^nxy^9+\sum_{n=1}^{12}(z^2)^nxy^7+\sum_{n=1}^{12}(z^2)^nxy^8$$
$$+\sum_{n=1}^{12}(z^2)^nxy^{11}+\sum_{n=1}^{12}(z^2)^ny$$

$$T=\sum_{n=1}^{12}(z^2)^nxy^2+\sum_{n=1}^{12}(z^2)^nxy^{10}+\sum_{n=1}^{12}(z^2)^nxy^6+\sum_{n=1}^{12}(z^2)^nxy^4+\sum_{n=1}^{12}(z^2)^nxy^5+\sum_{n=1}^{12}(z^2)^nxy^{12}$$

我们按如下方式得到这些轨道 R 和 T。显然， z^2 在形如 x^iy^j的元素上作用是自由的。另一方面， z 和 r 的作用使我们能够

从 x 得到至少以下元素。

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{z} & x^2y^2 & & \\ & & \downarrow r & & \\ & & x^6y^5 & \xrightarrow{z} & x^4y^2 \\ & & \downarrow r & & \\ & & x^5y^6 & \xrightarrow{z} & x^3y^{11} \\ & & & & \downarrow r \\ & & & & x^9y^8 \xrightarrow{z} y^{10} \end{array}$$

显然，这些元素属于 xy, xy^3, xy^9, xy^7, xy^8,xy^{11} 和 y 的 z^2-轨道。因此， x 的轨道至少有 96 个元素。另一方面，1、 $rz^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 和 $(rz^4)^2$ 固定 x，所以该轨道至多有 96 个元素。这表明 R 是 x 的轨道。要找出 xy^2 的轨道，注意到我们可以利用 z 和 r 的作用得到以下元素。

$$\begin{array}{ccc} xy^2 & \xrightarrow{z} & x^7y^5 \\ \downarrow r & & \downarrow r \\ x^3y^5 & & x^8y^6 \\ \downarrow r & & \downarrow r \\ x^9y^6 & & x^{11}y^2 \end{array}$$

同样，显然，这些元素属于 xy^{10}, xy^6, xy^4, xy^5 和 xy^{12} 的 z^2-轨道。因此， xy^2 的轨道至少有 72 个元素。但形如 x^iy^j 且满足 $(i,j) \neq (0,0)$ 的元素只有 168 个，因此 T 是 xy^2 的轨道。

现在设 $\rho = a1 + nZ + mR + kT$ 是 G–不变的 S 表示。将 ρ 限制到由 ab 和 c 生成的子群 V_1 上，得到

$$(a+12k)1 + n\sum_{i=0,j=1}^{1} 2x^iy^j + 8m\sum_{i=1}^{12} x^i + 5k\sum_{i=1}^{12} x^i$$

由于 V_1 是根，且其自同构群包含 $SL_2(\mathbb{F}_{13})$，因此 xy 和 x 的系数必须相等，即

$$n = 6m + 5k$$

因此，不可约的 G–不变表示为 1、 $8Z+M$ 和 $5Z+N$。由命题 2.11 可知，$\mathrm{Rep}_G(S)$ 是唯一分解幺半群；或者，也可以使用

有限群图谱 [9] 来确认 S 中有两个 13 阶元素共轭类，并结合推论 2.9。

定理 3.2. 若 $|S| \leq p^3$ 和 $\mathcal{F}$ 是定义在 S上的饱和融合系统，则 Rep($\mathcal{F}$) 是唯一分解幺半群。

证明. 若 $|S| \leq p^2$，则 S 是阿贝尔的，且 $\mathcal{F}$ 的本质秩为零，因此由引理 2.17，Rep($\mathcal{F}$) 是唯一分解的。

因此，我们可以假设 S 的阶恰为 p^3。若 $p = 2$，则 S 是阿贝尔群，或同构于 D_8 或 Q_8，我们已经验证在这些情形下 Rep($\mathcal{F}$) 是唯一分解的。若$p > 2$，则 S 要么是阿贝尔群，要么是广义特异群。若 S 同构于 p_+^{1+2}，我们在命题之前已经证明，对于任意定义在 S上的饱和融合系统 $\mathcal{F}$，幺半群 Rep($\mathcal{F}$) 是唯一分解的。若 S 不同构于 p_+^{1+2}，则由 [25], 中的定理 4.2，$\mathcal{F}$ 的本质秩为零，因此由引理 2.17，Rep($\mathcal{F}$) 是唯一分解的。□

请注意，这个结果不能推广到阶为 p^4的情形，因为 [12] 和 [23] 中的非唯一分解例子分别给出了阶为 3^4 和 2^4, 的西洛子群。

4. The half-factoriality property

本节给出一个由融合不变表示构成的幺半群的例子，其中分解唯一性以一种特殊方式失效：甚至元素的长度都无法确定。

设 M 是一个原子幺半群。给定一个元素的分解

$$x = \sum_{i=0}^{k} a_i$$

将其写成原子之和时，我们称 k 为该分解的长度。按照 [13], 中的术语，同时牢记我们考虑的所有幺半群都是既约的，我们来考察半唯一分解幺半群。

定义 4.1. 设 M 是一个原子幺半群。若对于每个元素 $x \in M$， x 的每一种分解都具有相同的长度，则称 M 为半阶乘的。

请注意，不同的元素可能具有长度不同的分解。下面的命题受到 [15] 中命题 5.4 的启发。给定一个原子幺半群M，考虑 $K(M)$ 中由集合 Conv(M) 所包含的那些元素，它们可以表示为以下形式

$$\sum n_i a_i$$

其中 a_i 是原子，且 $\sum n_i \neq 0$。

引理 4.2。设 M 是一个原子幺半群。以下条件等价。

(1) M 是半阶乘。(2) $0 \notin$ Conv(M)。(3) Conv(M) $\neq K(M)$。

证明。假设 M 不是半阶乘。那么存在 $x \in M$，它可以用两种不同的方式表示为原子之和

$$x = \sum n_i a_i = \sum m_i b_i$$

取 $\sum n_i \neq \sum m_i$。于是，在 $K(M)$ 中有

$$0 = \sum n_i a_i - \sum m_i b_i$$

因此 $0 \in \mathsf{Conv}(M)$。

现在假设 $0 \in \mathsf{Conv}(M)$，并令 $x \in K(M)$。必有 $x = \sum n_i a_i$，其中 a_i 是原子。若 $\sum n_i \neq 0$，则 $x \in \mathsf{Conv}(M)$。若 $\sum n_i = 0$，则由于 $0 \in \mathsf{Conv}(M)$，我们有 $0 = \sum m_i b_i$，其中 $\sum m_i \neq 0$，因此

$$x = x + 0 = \sum n_i a_i + \sum m_i b_i$$

由此可得 $x \in \mathsf{Conv}(M)$。

最后，假设 $\mathsf{Conv}(M) = K(M)$。由于 $0 \in \mathsf{Conv}(M)$，我们有 $0 = \sum n_i a_i$，其中 $\sum n_i \neq 0$。于是

$$\sum_{n_i>0} n_i a_i = \sum_{n_i<0} (-n_i) a_i$$

并注意到 $\sum_{n_i>0} n_i$ 不可能等于 $\sum_{n_i<0} (-n_i)$，因为 $\sum n_i \neq 0$。因此 M 不是半阶乘的。□

例4.3。我们在例 2.5 中看到，当 S 是 Σ_9的一个 3-西洛子群时，$\mathsf{Rep}^{\Sigma_9}(S)$不是唯一分解的。但我们将看到它是半阶乘的。在例2.10中，我们证明了这个幺半群的原子为 1、 P、 Q'、 R、 S和 $P - S + Q'$。令

$$0 = a1 + bP + cQ' + dR + eS + f(P - S + Q') = a1 + (b+f)P + (c+f)Q' + dR + (e-f)S$$

由于 $R_{\Sigma_9}(S)$是以 $\{1, P, Q', R, S\}$为基的自由阿贝尔幺半群，我们得到 $a = b + f = c + f = d = e - f = 0$，因此

$$a + b + c + d + e + f = a + (b + f) + (c + f) + d + (e - f) = 0$$

因此 $0 \notin \mathsf{Conv}(\mathsf{Rep}^{\Sigma_9}(S))$，故根据命题4.2，$\mathsf{Rep}^{\Sigma_9}(S)$ 是半阶乘的。

下面的命题受这个例子的启发。

命题 4.4. 设 M 是一个原子幺半群，使得 $K(M)$ 是有限秩自由阿贝尔群。若 $K(M)$ 存在一个基，使得 M 的每个原子都可以表示为该基中元素的凸整线性组合，则 M 是半阶乘的。

证明。设 $\{b_1, \ldots, b_k\}$ 是 $K(M)$ 的一组基，满足陈述中的条件。对于 M 的每个原子 a，存在一个凸整线性组合

$$a = \sum \lambda_j(a) b_j$$

As假设我们有 $0 = \sum n_a a$，其中求和遍历 M 的原子集合 .

$$0 = \sum_a n_a a = \sum_a n_a \left(\sum_j \lambda_j(a) b_j \right) = \sum_j \left(\sum_a n_a \lambda_j(a) \right) b_j$$

由此可得 $\sum_a n_a \lambda_j(a) = 0$ 对每个 j均成立。但随后

$$\sum_a n_a = \sum_a \left(\sum_j \lambda_j(a) \right) n_a = \sum_j \left(\sum_a n_a \lambda_j(a) \right) = 0$$

这表明 $0 \notin \mathsf{Conv}(M)$，因此 M 是半阶乘的。 □

下面证明，当 S 是Σ_6的一个 2-西洛子群时，$\mathsf{Rep}^{\Sigma_6}(S)$ 不是半阶乘的。我们选取 S 为复合映射 $D_8 \times \mathbb{Z}/2 \to \Sigma_4 \times \mathbb{Z}/2 \to \Sigma_6$的像，其中第一个映射由 Σ_4 在正方形顶点上的作用诱导，第二个映射由 Σ_4 到 Σ_6 的标准嵌入以及元素 (5, 6) 诱导。若 β 是 $\mathbb{Z}/2$的符号表示，则 S 的不可约表示具有 $\rho \otimes 1$或 $\rho \otimes \beta$的形式，其中 $\rho \in \{1, X, Y, XY, Z\}$是 D_8的一个不可约表示。我们按照它们在上一行出现的顺序，将后者命名为 ρ'_i。我们为 $1 \leq i \leq 10$ 定义表示

$$\rho_i = \begin{cases} \rho'_i \otimes 1 & \text{if } i \leq 5 \\ \rho'_{i-5} \otimes \beta & \text{if } i > 5 \end{cases}$$

群 S 有十个共轭类和六个 Σ_6–共轭类。利用表示为 Σ_6–不变表示的特征标判据，很容易证明

$R_{\Sigma_6}(S) = \mathbb{Z}\{\rho_1, \rho_2+\rho_4+\rho_5+\rho_7+\rho_{10}, \rho_3+\rho_5+\rho_7+\rho_{10}, -\rho_4+\rho_6-\rho_7-\rho_{10}, \rho_4+\rho_8+\rho_{10}, \rho_9\}$

不过，更方便的一组基为

$R_{\Sigma_6}(S) = \mathbb{Z}\{\rho_1, \rho_2+\rho_4+\rho_5+\rho_7+\rho_{10}, \rho_3+\rho_5+\rho_7+\rho_{10}, \rho_2+\rho_5+\rho_6, \rho_4+\rho_8+\rho_{10}, \rho_9\}$我们将这些表示称为 α_j，其中 $j = 1 = 1, \ldots, 6$。注意， α_j及其 $j \neq 2$ 是由注释 2.12 可知的不可约 Σ_6–不变表示。设 α 是 S 的一个不可约Σ_6–不变表示。那么

$$\alpha = \sum n_i \alpha_i$$

如果所有 n_i 都是非负的，那么 α 必须是其中一个 α_j。另一方面，唯一可能为负的系数是 n_2，因为其余每个 α_i 都包含一个 S 的不可约表示，而该表示不与任何其他 α_k 共享。因此，设 $n_2 < 0$ 且对所有 $i \neq 2$ 均有 $n_i \geq 0$。那么

$\alpha = n_1\alpha_1 + (n_2+n_3)\alpha_3 + (n_2+n_4)\alpha_4 + (n_2+n_5)\alpha_5 + (-n_2)(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5-\alpha_2) + n_6\alpha_6$

注意

$$\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_2 = \rho_3 + \rho_5 + \rho_6 + \rho_8 + \rho_{10}$$

设 $\alpha_7 = \rho_3 + \rho_5 + \rho_6 + \rho_8 + \rho_{10}$，根据前一个等式，它是 Σ_6–不变的。由于 α 不可约，因此只有一个系数必须为 1，其余系数都必须为 0。除了前面列出的可能性外，我们还得到 $\alpha = \alpha_7$。现在考虑基

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$$

$R_{\Sigma_6}(S)$ 的。注意， α_2 和 α_7 是这个基中仅有的分别包含 ρ_2和 ρ_6的元素，因此根据注释 2.12，它们是不可约的。因此，根据推论 2.9，$\mathrm{Rep}^{\Sigma_6}(S)$ 不是唯一分解的。此外

$$\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_7$$

因此 $\mathrm{Rep}^{\Sigma_6}(S)$ 不是半阶乘的。

Appendix A. GAP algorithms for fusion-invariant representations

这里给出我们在 GAP 中为形如 $\mathcal{F}_S(G)$ 的融合系统所实现的、与融合不变表示相关的算法，其中 S 是有限群 G 的一个 p-Sylow 子群。

(1) S 的共轭类的 G–融合模式。

我们取 S 中元素的 S–共轭类列表，并检查其中哪些类融合为 S 中元素的单个 G–共轭类。输出是一个正整数列表，其长度与 S 的 S–共轭类列表相同；当且仅当两个位置上的 S–共轭类 G–共轭时，这两个位置上的整数才相同。若 G 是对称群，我们使用元素的循环结构检查 G– 共轭关系。

通过这一过程很容易得到 S 中元素的 G–共轭类数量，我们将其作为列表中的一个附加元素加入输出。

(2) 表示是否是 S –不变的

利用 G–对 S共轭类的融合模式，我们检查每一对被融合的类，判断特征是否在这些类上相同。如果某处不相同，我们就停止并返回 false。否则返回 true。根据表示是以 S 的不可约表示形式给出，还是以 S的 $N_G(S)$–不变表示形式给出，该算法有两个版本。

(3) 假设猜想 2.19 成立，判断 $\mathrm{Rep}^G(S)$ 是否是唯一分解的。

我们将 S元素的 G–共轭类数量（可从 S共轭类的 G–融合模式中获得），与作为正则表示子表示的 S 的不可约 G–不变表示数量进行比较。

在第一个版本中，我们遍历 S 的正则表示的子表示列表。我们按如下方式构建不可约的 G–不变表示列表。如果某个表示是列表中某个表示的子表示，或者是正则表示中列表里某个表示的补表示的子表示，

则忽略它。否则，如果它是 G–不变的，就将其添加到列表中；否则忽略它。如果在某个时刻，该列表中的元素数多于 S 的 G–共轭类数，函数就返回 false，这意味着 Rep$_G(S)$ 不是唯一分解的。否则，函数返回 true；若猜想 2.19 成立，这就意味着 Rep$_G(S)$ 是唯一分解的。

在第二个版本中，我们遍历那些$N_G(S)$–不变子表示的列表，这些子表示必须预先确定。在第三个版本中，仅针对对称群，我们使用与第二个版本相同的列表，但采用共轭类的 G–融合模式，该模式利用元素的循环结构。

(4) S 的 G–不变不可约表示列表，它们是正则表示的子表示。

它采用与前一个函数相同的算法，但在第一个版本中，会检查 S 的正则表示的所有子表示；在第二和第三个版本中，则会检查所有 $N_G(S)$–不变子表示，直到全部检查完毕。它以 S的不可约表示为基底，返回 S 的 G–不变表示列表。

S的 G–不变表示环的复化的一组基。

利用 S 中元素共轭类的 G–融合模式（或者当 G 是对称群时，利用元素的循环结构模式），我们找出 S 中的若干元素对，它们确定了 S 中所有元素之间的全部 G–共轭关系。然后，我们创建一个矩阵，为这些元素对各设一行。对应于 (s_1, s_2) 的行中，第 j 个元素包含元素 $\chi_j(s_1) - \chi_j(s_2)$，其中 χ_j 是 GAP 所确定顺序下 S 的第 j 个不可约表示的特征。

最后，我们计算这个矩阵的整数零空间。我们将零空间中的元素 $(a_1, \ldots, a_r)$ 视为虚特征标 $a_1\chi_1 + \ldots + a_r\chi_r$。

注 A.1. 我们用于判断 Rep$_G(S)$ 以及 S 的不可约G–不变表示列表的算法可能需要大量计算时间。回答这两个问题的另一种方法是：使用上述算法在 GAP 中求表示环的复化（视为向量空间），然后从这个对象中求出作为阿贝尔群的表示环，最后按照我们在第 4 节中使用的相同过程，求出 Σ_6 的一个 2-西洛子群的不可约 Σ_6–不变表示。我们将在下面的例子中说明这一方法。

例 A.2. 设 S 是 A_9 的一个 3-西洛子群。使用 GAP，我们发现 $R_{A_9}(S) \otimes \mathbb{C}$ 的一个基为

$$X = \{\rho_1, -\rho_2 - \rho_3 - \rho_4 + \rho_6 - \rho_7 + \rho_8, -\rho_2 - \rho_3 - \rho_4 + \rho_5 - \rho_7 + \rho_9, \rho_2 + \rho_3 + \rho_{12} + \rho_{15},$$
$$- \rho_2 - \rho_3 + \rho_{10} + \rho_{11} + \rho_{14} + \rho_{16}, \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 + \rho_7 + \rho_{13} + \rho_{17}\}$$

其中 ρ_i 是 GAP 按所示顺序列出的不可约表示。我们看到，S 中的元素共有六个 A_9–共轭类。容易验证

$R_{A_9}(S) = \mathbb{Z}X$。我们还可以找到一组表示基，即

$$\{\rho_1, \rho_6 + \rho_8 + \rho_{13} + \rho_{17}, \rho_5 + \rho_9 + \rho_{13} + \rho_{17}, \rho_2 + \rho_3 + \rho_{12} + \rho_{15},$$
$$\rho_4 + \rho_7 + \rho_{10} + \rho_{11} + \rho_{13} + \rho_{14} + \rho_{16} + \rho_{17}, \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 + \rho_7 + \rho_{13} + \rho_{17}\}$$

令 α_j 为此基的第 j 个元素。根据注释 2.12，具有 $1 \leq j \leq 5$ 的 A_9–不变表示 α_j 是不可约的。令 α 为一个不可约的 A_9–不变表示，且它在 $R_{A_9}(S)$ 中表示为 $\alpha = \sum n_i \alpha_i$，其中 S。唯一可能为负的 n_i 是 n_6，我们可以将其改写为:

$$\alpha = n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3 + (n_4 + n_6)\alpha_4 + (n_5 + n_6)\alpha_5 + (-n_6)(-\alpha_6 + \alpha_5 + \alpha_4)$$

令 $\alpha_7 = -\alpha_6 + \alpha_5 + \alpha_4$。注意

$$\alpha_7 = \rho_{10} + \rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{14} + \rho_{15} + \rho_{16}$$

因此，α_7 是 α 的一种新可能。事实上，根据注释 2.12，α_7 和 α_6 都是不可约的，因为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$ 也是 $R_{A_9}(S)$ 的一组基。我们发现，S 有七个不可约的 A_9–不变表示，因此根据推论 2.9，$\mathrm{Rep}^{A_9}(S)$ 不具有唯一分解性质。

利用上述算法，我们发现了新的非阶乘幺半群例子，其形式为 $\mathrm{Rep}^G(S)$；下表将这些例子与 [12] 和 [23]中的例子一并列出。我们将这些算法应用于其西洛子群的阶为 2^4, 2^5 和 3^4的群，这些群对应于 [1], 的命题 4.3 和 4.4 中的融合系统、[21], 的第 7 章表 1 和表 2 中的一些融合系统，以及其他经典群。列“Irr. G–invariant reps.”指的是S 的不可约 G–不变表示，它们是正则表示的子表示。表中的群 $(\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/9) \rtimes \mathbb{Z}/3$ 是 GAP 的 SmallGroups 库中 ID 为$[81, 9]$, 的群，它是由 $\mathbb{Z}/3$ 通过矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$所确定的作用得到的半直积。

群 G	素数 p	p-Sylow S	G–共轭类 S Irr. G–不变表示	
Σ_6	2	$\mathbb{Z}/2 \times D_8$	6	7
$PSL_2(\mathbb{F}_{17})$	2	D_{16}	5	7
$PSU_3(\mathbb{F}_5)$	2	SD_{16}	5	8
M_{10}	2	SD_{16}	6	8
$SL_3(\mathbb{F}_3)$	2	SD_{16}	5	8
$PSL_3(\mathbb{F}_5)$	2	$\mathbb{Z}/4 \wr \mathbb{Z}/2$	7	8
$PSL_2(\mathbb{F}_{31})$	2	D_{32}	9	21
$PSU_3(\mathbb{F}_9)$	2	SD_{32}	9	53
$GL_3(\mathbb{F}_3)$	2	$\mathbb{Z}/2 \times SD_{16}$	10	16
Σ_8	2	$D_8 \wr \mathbb{Z}/2$	10	?
Σ_9	3	$\mathbb{Z}/3 \wr \mathbb{Z}/3$	5	6
A_9	3	$\mathbb{Z}/3 \wr \mathbb{Z}/3$	6	7
$PSL_3(\mathbb{F}_{19})$	3	$(\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/9) \rtimes \mathbb{Z}/3$	7	16

除此之外，还有其他有限群的例子使 $\mathrm{Rep}_G(S)$ 不是唯一分解的。例如，如果 $\mathrm{Rep}_G(S)$ 不是唯一分解的，且 H 是任意另一个具有 p-西洛子群 R的有限群，那么 $\mathrm{Rep}_{G\times H}(S \times R)$ 也不是唯一分解的。另一个例子来自具有相同融合系统的有限群（见注 2.6）；例如， $SL_3(\mathbb{F}_3)$与 M_{11} 在素数 2 处的融合系统同构 [20], ，因此当 S 是 M_{11} 的一个 2-西洛子群时，$\mathrm{Rep}_{M_{11}}(S)$不是唯一分解的。

我们还利用这些函数发现，在素数 3 处，PSp_4（$\mathbb{F}_3$）和 PSL_4（$\mathbb{F}_7$）具有分解唯一性；在素数 2 处， A_8 也具有分解唯一性。

References

1. Kasper K. S. Andersen、Bob Oliver 和 Joana Ventura，《约化、温和与奇异融合系统》，《伦敦数学会会刊》（第 3 辑）105（2012），第 1 期，87–152。MR 2948790´2. M. F. Atiyah，《有限群的特征标与上同调》，《高等科学研究所数学出版物》（1961），第 9 期，23–64。MR 0148722 3. M. F. Atiyah 和 G. B. Segal，《等变 K理论与完备化》，《微分几何杂志》3（1969），1–18。MR 0259946 4. No´e B´arcenas 和 Jos´e Cantarero，《融合系统的一个完备化定理》，《以色列数学杂志》236（2020），第 2 期，501–531。MR 4093897 5. Carles Broto、Ran Levi 和 Bob Oliver，《融合系统的同伦论》，《美国数学会杂志》16（2003），第 4 期，779–856。MR 1992826 6. Kenneth S. Brown，《群的上同调》，《数学研究生教材》第 87 卷，施普林格出版社，纽约-柏林，1982。MR 672956 7. Jos´e Cantarero 和 Nat`alia Castellana，《有限环空间的酉嵌入》，《论坛数学》29（2017），第 2 期，287–311。MR 3619114 8. Jos´e Cantarero、Nat`alia Castellana 和 Lola Morales，《 p-局部有限群分类空间上的向量丛与 Benson-Carlson 对偶》，《伦敦数学会杂志》（第 2 辑）101（2020），第 1 期，1–22。MR 4072482

9. J. H. Conway、R. T. Curtis、S. P. Norton、R. A. Parker 和 R. A. Wilson，《有限群》，牛津大学出版社，Eynsham，1985，单群的极大子群与普通特征标；计算方面由 J. G. Thackray 协助。MR 827219 10. Persi Diaconis 和 I. M. Isaacs，《代数群的超特征标与超类》，《美国数学会汇刊》360（2008），第 5 期，2359–2392。MR 2373317 11. GAP 小组，《GAP——群、算法与编程》，4.12.1 版，2022年。12. Jorge E. Gaspar，《K-理论与融合不变表示》，理学学士论文，墨西哥国立自治大学，2020年。13. Alfred Geroldinger 和 Franz Halter-Koch，《非唯一分解：综述》，《交换代数中的乘法理想理论》，施普林格出版社，纽约，2006年，第 207–226 页。MR 2265810 14. Daniel Gorenstein，《有限群》，第二版，Chelsea 出版公司，纽约，1980年。MR 569209 15. Felix Gotti，《有限秩自由交换幺半群子幺半群的几何与组合方面》，《线性代数及其应用》604（2020），146–186。MR 4116825 16. Ellen Henke，《在融合系统中识别 $SL_2(q)$》，《群论杂志》13（2010），第 5 期，679–702。MR 2720198 17. L´aszl´o H´ethelyi、Radha Kessar、Burkhard K¨ulshammer 和 Benjamin Sambale，《具有传递融合系统的块》，《代数学杂志》424（2015），190–207。MR 3293217 18. Stefan Jackowski 和 Bob Oliver，《紧李群分类空间上的向量丛》，《数学学报》176（1996），第 1 期，109–143。MR 1395671 19. Ran Levi 和 Bob Oliver，《构造一种由 Solomon 和 Benson 研究的类型的 2-局部有限群》，《几何与拓扑》6（2002），917–990。MR 1943386 20. John Martino 和 Stewart Priddy，《 $BG_p^\wedge$的不稳定同伦分类》，《剑桥哲学会数学会刊》119（1996），第 1 期，119–137。MR 1356164 21. Ra´ul Moragues Moncho，《具有指数 p 的特异子群的 p 群上的融合系统》，博士论文，伯明翰大学，2018年。22. Toke Norgard-Sorensen，《秩 1 或 2 的单连通 p-紧群的同伦表示》，博士论文，哥本哈根大学，2013年。23. Sune Precht Reeh，《融合稳定有限集的阿贝尔幺半群是自由的》，《代数与数论》9（2015），第 10 期，2303–2324。MR 3437763 24. Albert Ruiz 和 Antonio Viruel，《阶为 p^3 且指数为 p 的特异群上的 p-局部有限群分类》，《数学杂志》248（2004），第 1 期，45–65。MR 2092721 25. Radu Stancu，《几乎所有广义特异 p 群都是抗性的》，《代数学杂志》249（2002），第 1 期，120–126。MR 1887988 26. Nobuaki Yagita，《阶为 p^3 且指数为 p 的特异p 群上的 p-局部有限群的稳定分裂与上同调》，《代数拓扑学校与会议论文集》，《几何与拓扑专著》第 11 卷，几何与拓扑出版社，考文垂，2007年，第 399–434 页。MR 2402816 27. Krzysztof Ziemia´nski，《素数 2 处 SO(7) 和 Spin(7) 的同伦表示》，《纯粹与应用代数学杂志》212（2008），第 6 期，1525–1541。MR 2391664 28. ，《DI(4) 这一 2-紧群的忠实酉表示》，《纯粹与应用代数学杂志》213（2009），第 7 期，1239–1253。MR 2497572

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. Unidad Mérida,
Parque Científico y Tecnológico de Yucatán,
Carretera Sierra Papacal–Chuburná Puerto Km 5.5,
Sierra Papacal, Mérida, YUC 97302,Mexico.
电子邮箱地址：cantarero@cimat.mx

Universidad Externado de Colombia,
Departamento de Matemáticas,
Calle 12 No. 1-17 Este.,C.P. 111711, Bogotá,
Colombia.电子邮箱地址:
german.combariza@uexternado.edu.co