arXiv:2303.10354v1 [math.CV] 18 Mar 2023

任意四边形在伸缩映射下外部共形模数的渐近行为

SEMEN R. NASYROV 和 GIANG V. NGUYEN

摘要。本文着重研究足够一般形状的四边形在沿横轴、系数为 $H \to \infty$ 的伸缩映射下，其外部共形模的畸变。利用拟共形变换的性质，并结合椭圆积分理论中的一些事实，我们证实该模数的渐近行为与四边形边界的形状无关。具体而言，当 $H \to \infty$ 时，它等价于 $(1/\pi)\log H$。因此，我们解决了任意四边形外部区域的 Vuorinen问题。

1. 引言

设 Q 为一个若尔当域，$z_j (1 \le j \le 4)$ 为 Q 边界上的四个固定点，排列方式使得当 z_j 沿边界 ∂Q 移动时，指标 k 的递增方向与正方向一致。于是，$\boldsymbol{Q} = (Q;\ z_1, z_2, z_3, z_4)$ 称为以区域 Q 为域、顶点为 $z_j (1 \le j \le 4)$ 的四边形。按照约定 $z_5 \equiv z_1$，我们将边界 ∂Q 上的弧 (z_k, z_{k+1}) 定义为该四边形的边。

对于给定的四边形 $\boldsymbol{Q} = (Q;\ z_1, z_2, z_3, z_4)$，设 Γ 为 Q 中连接（z_1, z_2）与（z_3, z_4）的所有曲线所组成的族。$\boldsymbol{Q}$ 的内部共形模 $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{Q})$，就是 Γ 的极值长度$\lambda(\Gamma)$（关于极值长度的概念，参见例如 [1, 第 1 章 D 节], [10, 第 3 章 11]节）。

注 1. 四边形 $\boldsymbol{Q} = (Q;\ z_1, z_2, z_3, z_4)$的内部共形模也可以类似地定义如下情形：$Q$ 不是若尔当域，而只是具有非退化边界的单连通域，且 z_1, z_2, z_3, z_4 是 Q 的四个不同边界素端（参见例如 [9, 第 2 章 3]节）。

~现在考虑所有曲线族 Γ，这些曲线连接区域 Q 在扩充复平面中的~补集里的边 (z_1, z_2) 和 (z_3, z_4)。那么，曲线族 Γ 的极值长度 $\lambda(\Gamma)$~ 称为四边形 $\boldsymbol{Q}$ 的外部共形模，记作 $\mathrm{ExtMod}(\boldsymbol{Q})$。显然，若记 $\boldsymbol{Q}^c = (Q^c;\ z_4, z_3, z_2, z_1)$，其中 $Q^c = \overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ 是 Q 在扩充复平面中的补集，则 $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{Q}^c) = \mathrm{ExtMod}(\boldsymbol{Q})$。

注意到，四边形的内部共形模也与狄利克雷积分密切相关（例如参见 [6]）。对于给定的四边形 $\boldsymbol{Q} = (Q;\ z_1, z_2, z_3, z_4)$，其边界分段光滑，且函数 u 在区域 Q内调和、在其闭包上连续，并满足狄利克雷-诺伊曼边界条件 $u(z) = 0$ for $z \in (z_2, z_3)$

关键词和短语：四边形、共形模、外部共形模、拟共形映射、区域向核的收敛。

and $u = 1$ for $z \in (z_4, z_1)$, $\frac{\partial u}{\partial n}(z) = 0$ for $z \in (z_1, z_2) \cup (z_3, z_4)$，其中 n 是边界 Q的外法线方向，四边形 $\boldsymbol{Q}$ 的内部共形模等于狄利克雷积分

$$\mathrm{Mod}(\boldsymbol{Q}) = \int\limits_{Q} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dxdy.$$

外部共形模 ExtMod(Q) 等于一个函数的狄利克雷积分，该函数在区域 Q 的补集 Q^c 中为调和函数，并在其闭包上连续，且满足类似的边界条件。

最后，内部共形模可以用共形映射来定义。若 $f\colon Q \to [0,1] \times [0,m]$ 是从区域 Q 到矩形的共形映射，且 Q 的顶点映至矩形的顶点，并且 $f(z_1) = 0$，则 $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{Q}) = m$；对于外部共形模，我们必须取一个从区域 Q 到其外部矩形 Q^c 的共形映射。

四边形的内部共形模在共形变换下保持不变。在拟共形映射下，它也拟不变（参见例如 [1, 第 2 章 A 节], [10, 第 3 章第 22] 节）：若 $f_{\mathcal{K}}$ 是一个 $\mathcal{K}$- 拟共形映射，则对于任意四边形 $\boldsymbol{Q}$，有不等式

$$\frac{1}{\mathcal{K}} \mathrm{Mod}(\boldsymbol{Q}) \leq \mathrm{Mod}(f_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{Q})) \leq \mathcal{K}\, \mathrm{Mod}(\boldsymbol{Q}). \tag{1}$$

这里， $f_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{Q})$是一个四边形，其区域和顶点分别是四边形 $\boldsymbol{Q}$ 在映射 $f_{\mathcal{K}}$下的区域和顶点的像。

注2. 显然，双边不等式(1)的类似结论对于外部共形模仍然成立。

2005年，M. Vuorinen教授提出了一个问题：研究区域的共形模在 H-拟共形映射 f_H 作用下的畸变，该映射定义如下

$$f_H : x + iy \mapsto Hx + iy \quad (H > 1). \tag{2}$$

他尤其关注当$H \to \infty$ 时，相应共形模会呈现怎样的行为? 在这种情况下，研究四边形和二连通区域的共形模畸变都很有意义。

许多研究致力于探讨Vuorinen问题。特别是， [4, 5,12, 14, 15])研究了任意有界或无界二连通区域的内部共形模畸变。此外，在 [14, 15] 中，也研究了与四边形外部共形模渐近行为相关的一些问题。

研究四边形在 f_H 作用下外部共形模数的畸变行为确实非常值得关注。W. Bickley [2] 以及后来的 P. Duren 和 J. Pfaltzgraff [7] 提出了一些公式，用于联系矩形内部共形模与外部共形模的值。到2013年，利用 [7], M. Vuorinen 和 H. Zhang [16, 的研究成果，定理 4. 3] 为具有固定内部共形模的矩形外部共形模建立了一些上下界。

在研究 [13, 16], 所述外部共形模的过程中，本文第一作者对延拓 f_H 在 $H \to \infty$作用下外部共形模的渐近行为提出了一个猜想。下面回顾其内容。

设 f 和 g 是线段 $[a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$上的两个连续函数，并且对所有 $x \in [a,b]$，都有 $f(x) < g(x)$。令 $\boldsymbol{Q} = (Q;\ z_1, z_2, z_3, z_4)$，其中 Q 由两条竖直线段 $[z_1, z_2]$ 和 $[z_3, z_4]$（端点分别为 $z_1 = a + ig(a)$、$z_2 = a + if(a)$、 $z_3 = b + if(b)$、$z_4 = b + ig(b)$）以及两条曲线围成，这两条曲线分别是函数 f, g的图像:

$$\mathcal{G}_1 = \{x + iy : y = f(x),\ a \le x \le b\}, \quad \mathcal{G}_2 = \{x + iy : y = g(x),\ a \le x \le b\}.$$

下文中，将所有此类四边形的集合（即对应于任意线段 $[a,b]$ 以及满足上述条件的函数 f 和 g 的四边形）记为 $\mathfrak{S}$。

用 $\boldsymbol{Q}_H$ 表示 $\boldsymbol{Q}$ 在映射 f_H下的像四边形；也就是说，在映射 f_H下， $\boldsymbol{Q}$ 的区域和顶点映射为四边形 $\boldsymbol{Q}_H$的区域和顶点。S. R. 纳瑟罗夫教授预言

猜想1 (S.R.Nasyrov)。 $\boldsymbol{Q}_H$ 的外部共形模的渐近行为与 $H \to \infty$时 Q 边界的形状无关。此外，外部共形模$(\boldsymbol{Q}_H)$ $\sim (1/\pi)\log\, H$， 当 $H \to \infty$时。

近期，在 [8, 定理1.3] 中，A. Duytin与本文第二作者已证实猜想1对于关于两个坐标轴均对称的任意四边形成立。

本文证明了猜想1对于 $\mathfrak{S}$类任意四边形成立。以下定理是本文的主要结果。

定理1. 若 $\mathbf{Q} \in \mathfrak{S}$ 则

$$\operatorname{ExtMod}(\boldsymbol{Q}_H) \sim \frac{1}{\pi} \log H \quad as \quad H \to \infty. \tag{3}$$

注意，定理1表明，四边形 $\boldsymbol{Q}_H \in \mathfrak{S}$ 的外部共形模 $\operatorname{ExtMod}(\boldsymbol{Q}_H)$的渐近行为特征，与内部共形模 $\operatorname{Mod}(\boldsymbol{Q}_H)$的情况显著不同。$\operatorname{Mod}(\boldsymbol{Q}_H)$的渐近行为取决于边界曲线 $\mathcal{G}_1$ 和 $\mathcal{G}_1$的形状。如 [14,定理4.2],所示

$$\operatorname{Mod}(\boldsymbol{Q}_H) \sim cH, \quad \text{where} \quad c = \int_a^b \frac{dx}{g(x) - f(x)}.$$

2. 共形模的单调性质

本节将介绍一些性质，用以描述四边形变化时共形模的行为。

设 Γ_1、Γ_2 为两个曲线族，若每条曲线 $\gamma_2 \in \Gamma_2$ 都包含某个$\gamma_1 \in \Gamma_1$ 作为其子弧，即 $\Gamma_1 \supset \Gamma_2$，则记作 $\Gamma_1 < \Gamma_2$。

下面的定理显然成立，它描述了一族曲线 Γ 的极值长度 $\lambda(\Gamma)$ 的变化（例如，参见 [1,第 1 章 D 节]）。

定理 2。若 $\Gamma_1 < \Gamma_2$，则 $\lambda(\Gamma_1) < \lambda(\Gamma_2)$。

由定理 2 可立即得到四边形共形模的一些单调性（参见例如 [11,第 2 章，第 3] 节）。

定理 3. 设 $\boldsymbol{Q} = (Q;\, z_1, z_2, z_3, z_4)$ 和 $\boldsymbol{Q}' = (Q';\, z_1', z_2', z_3', z_4')$ 是两个四边形 $s.$

(i) 若 $Q = Q'$，顶点 z_1' 和 z_2' 位于边 (z_1, z_2)上，且顶点 z_3' 和 z_4' 位于 $\boldsymbol{Q}$的边 (z_3, z_4) 上，则 $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{Q}) \le \mathrm{Mod}(\boldsymbol{Q}')$。

(ii) 若 $Q \supset Q'$、 $z_k = z_k'$、 $1 \le k \le 4$，且两个四边形有相同的一对对边，(z_1, z_2) 和 (z_3, z_4)，则 $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{Q}) \le \mathrm{Mod}(\boldsymbol{Q}')$。

我们可以说，在（i）的情况下， $\boldsymbol{Q}'$ 是通过收窄其原有边而从 $\boldsymbol{Q}$ 得到的；而在（ii）的情况下， $\boldsymbol{Q}'$ 是通过挤压其侧边而从 $\boldsymbol{Q}$ 得到的。定理 3指出，在这些变换下，四边形的共形模会增大。

3. Some properties of elliptic integrals

第一类和第二类不完全椭圆积分分别由以下方程定义（例如，参见 [3]）。

$$F(z,k) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \tag{4}$$

$$E(z,k) = \int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\, dt, \tag{5}$$

其中 $k \in$ （0，1）是一个实参数。

我们可以将椭圆积分被积函数中的某些项表示为二项级数。相应的不完全椭圆积分可写成如下形式（例如，参见 [3, 公式 902.00– 903.00，第 300] 页）。

$$F(x,k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} k^{2n} I_{2n}(x), \tag{6}$$

$$E(x,k) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2 (2n-1)} k^{2n} I_{2n}(x). \tag{7}$$

Here

$$I_{2n}(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

这是一个可通过以下递推公式计算的积分：

$$I_0(x) = \arcsin x, \quad I_2(x) = \frac{1}{2}\left(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}\right),$$

$$I_{2n}(x) = \frac{2n-1}{2n} I_{2(n-1)}(x) - \frac{1}{2n} x^{2n-1}\sqrt{1-x^2}, \quad n \ge 1.$$

由此可得

$$I_0(x) - 2I_2(x) = x\sqrt{1-x^2} > 0, \quad 0 < x < 1. \tag{8}$$

此外,

$$0 < I_{2n}(x) \leq I_0(1) = \frac{\pi}{2}, \quad n \geq 0, \quad 0 < x < 1. \tag{9}$$

完全椭圆积分是不完全椭圆积分的一种特殊情形。在（4）和（5）中代入$z = 1$，可得以下积分

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\, dt, \quad \text{where} \quad k \in (0,1)$$

它们分别称为第一类和第二类完全椭圆积分。我们将 $K'(k) = K(k')$ 和 $E'(k) = E(k')$ 记作，其中 $k' := \sqrt{1-k^2}$。

另一方面，当 k较小时，完全椭圆积分可用以下公式表示

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\right]^2 k^{2n}, \tag{10}$$

$$E(k) = -\frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\right]^2 \frac{k^{2n}}{(2n-1)}, \tag{11}$$

而当 k较大时，完全椭圆积分可表示为:

$$K(k) = \frac{2}{\pi}K'(k)\ln\frac{4}{k'} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\right]^2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(k')^{2n}}{m(2m-1)}, \tag{12}$$

$$E(k) = \frac{2}{\pi}[K'(k) - E'(k)]\ln\frac{4}{k'} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\right]^2 \frac{2n}{(2n-1)} \sum_{m=1}^{n} \frac{(k')^{2n}}{m(2m-1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\right]^2 \frac{(k')^{2n}}{(2n-1)^2}. \tag{13}$$

由 (10)、(11)、(12) 和 (13)，可验证以下等式:

$$\lim_{k\to 0} K(k) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{k\to 0} E(k) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{k\to 0}\left(K'(k) - \ln\frac{4}{k}\right) = 0, \quad \lim_{k\to 0} E'(k) = 1, \tag{14}$$

$$\lim_{k\to 1}\left(K(k) - \ln\frac{4}{k'}\right) = 0, \quad \lim_{k\to 1} E(k) = 1, \quad \lim_{k\to 1} K'(k) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{k\to 1} E'(k) = \frac{\pi}{2}. \tag{15}$$

4. 主要结果的证明

我们考虑四边形 $\boldsymbol{Q}=(Q;\ A,B,C,D)\ \in \mathfrak{S}$，其顶点为 $A=a+if(a)$、$B=b+if(b)$、$C=b+ig(b)$ 和 $D=a+ig(a)$。设

$$Q_H=f_H(Q)=\{(x,y)\in\mathbb{C}:\ aH\le x\le bH, f(x/H)\le y\le g(x/H)\}$$

是由式 (2) 定义的伸缩映射 f_H 将区域 Q 映射得到的像，$A_H=f_H(A)$，$B_H=f_H(B)$，$C_H=f_H(C)$，$D_H=f_H(D)$。那么，$\boldsymbol{Q}_H=(Q_H;\ A_H,B_H,C_H,D_H)$ 是区域 $\boldsymbol{Q}$ 在此映射下的像。

设 $I_H=aH+i(f(a)+g(a))/2$ 和 $J_H=bH+i(f(b)+g(b))/2$ 分别是线段 $[A_H,D_H]$ 和 $[B_H,C_H]$ 的中点。对于自然数 n，取 $a\equiv x_1<x_2<\ldots<x_{n+1}\equiv b$ 为 $[a,b]$ 中的一些点，并令 $y_j:=(f(x_j)+g(x_j))/2$, $1\le j\le n+1$。显然，对于所有 $1\le j\le n+1$，都有 $f(x_j)<y_j<g(x_j)$。记 $X_{jH}=x_jH+i\,y_j$。显然，可以选取 x_j 的值，使得连接点 $X_{1H},\ldots,X_{(n+1)H}$ 的 n 折线 γ_H 位于区域 Q_H 内，并将 $f(x/H)$ 和 $g(x/H)$ 的图像分隔开，$x\in[aH,bH]$。对于每个 $j=1,\ldots,n$，γ_H 的第 j 条线段 $[X_{jH},X_{(j+1)H}]$ 的方程为

$$y=\frac{a_j}{H}x+b_j,\quad \text{if}\quad x_jH\le x\le x_{j+1}H,$$

其中

$$a_j=\frac{y_{j+1}-y_j}{x_{j+1}-x_j}\quad\text{and}\quad b_j=-\frac{x_jy_{j+1}-x_{j+1}y_j}{x_{j+1}-x_j}.$$

考虑映射 ϱ_H：$x+iy\mapsto x+iv(x,y)$，其中

$$v(x,y)=\begin{cases} y-\frac{f(a)+g(a)}{2}, & \text{if}\quad x\le aH,\\ y-\frac{a_j}{H}x-b_j, & \text{if}\quad x_jH\le x\le x_{j+1}H,\quad 1\le j\le n,\\ y-\frac{f(b)+g(b)}{2}, & \text{if}\quad x\ge bH.\end{cases}$$

这是复平面上的分段线性同胚。不难验证，ϱ_H 是从 z 平面到 w 平面的 $\mathcal{K}_H$-拟共形映射，其系数为

$$\mathcal{K}_H=\frac{1+\kappa_H}{1-\kappa_H},$$

其中 $\kappa_H=\frac{\mathfrak{a}}{\sqrt{\mathfrak{a}^2+4H^2}}$，且 $\mathfrak{a}=\max\limits_{1\le j\le n}|a_j|$。因此，当 $H\to\infty$ 时，$\mathcal{K}_H\to 1$。

在映射 ρ_H 下，折线 γ_H 映为实轴上的线段 $[I_{1H},J_{1H}]$，而线段 $[A_H,B_H]$ 和 $[C_H,D_H]$ 映为关于实轴对称的线段 $[A_{1H},B_{1H}]$ 和 $[C_{1H},D_{1H}]$。这里，I_{1H}、J_{1H}、A_{1H}、B_{1H}、C_{1H} 和 D_{1H} 分别是点 I_H、J_H、A_H、B_H、C_H 和 D_H 在此映射下的像。记

$$Q_{1H}=\varrho_H(Q_H)=\{(u,v)\in\mathbb{C}:\ aH\le u\le bH, f_1(u/H)\le v\le g_1(u/H)\},$$

并令

$$\boldsymbol{Q}_{1H}=(Q_{1H};A_{1H},B_{1H},C_{1H},D_{1H}),$$

其中，$f_1(x/H)$ 和 $g_1(x/H)$ 是 $[aH,bH]$ 上的连续函数，其图像分别是函数 $y=f(x/H)$ 和 $y=g(x/H)$ 的图像在映射 ϱ_H 下的像。

由于任意平移都不会改变共形模的值，不失一般性，我们可以假设 $b=-a=\alpha>0$，因此，

$$Q_{1H}=\{(u,v)\in\mathbb{C}:\ -\alpha H\le u\le \alpha H, f_1(u/H)\le v\le g_1(u/H)\}.$$

由 (1) 可得

$$\frac{1}{\mathcal{K}_H}\operatorname{ExtMod}(\boldsymbol{Q}_H)\le \operatorname{ExtMod}(\boldsymbol{Q}_{1H})\le \mathcal{K}_H\operatorname{ExtMod}(\boldsymbol{Q}_H).$$

结合 $\mathcal{K}_H\to 1$ 以及 $H\to\infty$ 这一事实，可得

$$\operatorname{ExtMod}(\boldsymbol{Q}_{1H})\sim \operatorname{ExtMod}(\boldsymbol{Q}_H)\quad \text{as}\quad H\to\infty. \tag{16}$$

另一方面，若将四边形记为 $\boldsymbol{G}_{1H}=(G_{1H};\ D_{1H},C_{1H},B_{1H},A_{1H})$，其中 $G_{1H}=\overline{\mathbb{C}}\setminus Q_{1H}$ 是扩充复平面中 Q_{1H} 的补集，则

$$\operatorname{ExtMod}(\boldsymbol{Q}_{1H})=\operatorname{Mod}(\boldsymbol{G}_{1H}).$$

结合 (16) 可得

$$\operatorname{ExtMod}(\boldsymbol{Q}_H)\sim \operatorname{Mod}(\boldsymbol{G}_{1H})\quad \text{as}\quad H\to\infty. \tag{17}$$

我们还注意到，对于每个 $H>0$，$|A_HB_H|=|A_{1H}B_{1H}|$ 和 $|D_HC_H|=|D_{1H}C_{1H}|$。

现在我们考虑以下两种情形，并得到 $\operatorname{Mod}(\boldsymbol{G}_{1H})$ 的一些上下界。

不失一般性，考虑情形 $|A_{1H}B_{1H}|\le|C_{1H}D_{1H}|$；情形 $|A_{1H}B_{1H}|\ge|C_{1H}D_{1H}|$ 的讨论类似。

需要强调的是，$f_1(\alpha)=-g_1(\alpha)$，且 $f_1(-\alpha)=-g_1(-\alpha)$。为方便起见，我们记 $\beta=g_1(\alpha)$、$\sigma=g_1(-\alpha)$。

对于每个 H，取一个充分大的数 $M>0$，使得

$$-M<f_1(u)<g_1(u)<M,\quad \text{for all}\quad |u|\le\alpha.$$

考虑四边形 $\boldsymbol{G}_{2H}:=(G_{2H};\ D_{1H},C_{1H},B_{1H},A_{1H})$，其中 G_{2H} 是扩充复平面中矩形 $[-\alpha,\alpha]\times[-M,M]$ 的补集。注意，$\boldsymbol{G}_{2H}$ 的顶点与 $\boldsymbol{G}_{1H}$ 的顶点 D_{1H}、C_{1H}、B_{1H} 和 A_{1H} 重合。显然，$G_{2H}\subset G_{1H}$，由定理 3（ii）可得

$$\operatorname{Mod}(\boldsymbol{G}_{1H})\le\operatorname{Mod}(\boldsymbol{G}_{2H}). \tag{18}$$

另一方面，记 G_{3H} 为两条竖直线段 $[A_{1H},B_{1H}]$、$[D_{1H},C_{1H}]$ 和水平线段 $[I_{1H},J_{1H}]$ 的并集的补集。于是，$G_{1H}\subset G_{3H}$，由定理 3（ii）可得

$$\operatorname{Mod}(\boldsymbol{G}_{3H})\le\operatorname{Mod}(\boldsymbol{G}_{1H}), \tag{19}$$

其中四边形 $\boldsymbol{G}_{3H}=(G_{3H};\ D_{1H}、C_{1H}、B_{1H}、A_{1H})$。

结合 (17)、(18) 和 (19)，我们得到

$$\operatorname{Mod}(\boldsymbol{G}_{3H})\le\operatorname{ExtMod}(\boldsymbol{Q}_H)\le\operatorname{Mod}(\boldsymbol{G}_{2H}). \tag{20}$$

若 $|A_{1H}B_{1H}| = |C_{1H}D_{1H}|$，则利用 [8], 中的引理 4.1 和 4.2（其中讨论了对称四边形的情形），我们可以立即估计四边形 $\boldsymbol{G}_{2H}$ 和 $\boldsymbol{G}_{3H}$ 的共形模，并证明

$$\mathrm{Mod}(\boldsymbol{G}_{2H}), \mathrm{Mod}(\boldsymbol{G}_{3H}) \sim \frac{1}{\pi}\log H \quad \text{as} \quad H \to \infty.$$

这立即推出了定理1的结论。

在 $|A_{1H}B_{1H}| < |C_{1H}D_{1H}|$ 的情形下，我们按如下方式进行。设 $A_{1H} = H\alpha + i\sigma$ 和 $B_{1H} = H\alpha - i\sigma$ 分别是 A_{1H} 和 B_{1H} 在从 $[D_{1H}, C_{1H}]$ 出发的线段上的垂直投影。记 $\boldsymbol{G}_{2H} = (G_{2H};\ A_{1H},\ B_{1H},\ B_{1H},\ A_{1H})$。由定理 3（$i$）可得

$$\mathrm{Mod}(\boldsymbol{G}_{2H}) \le \mathrm{Mod}(\widetilde{\boldsymbol{G}}_{2H}). \tag{21}$$

考虑四边形 $\boldsymbol{G}_{3H} = (G_{3H};\ A^-_{1H},\ B^-_{1H},\ B_{1H},\ A_{1H})$，其中顶点 A^-_{1H}、B^-_{1H} 是分别由点 A_{1H}、B_{1H} 支撑的点，它们位于沿线段 $[D_{1H}, C_{1H}]$ 的割线左侧，因此由定理 3（i）可得

$$\mathrm{Mod}(\widetilde{\boldsymbol{G}}_{3H}) \le \mathrm{Mod}(\boldsymbol{G}_{3H}). \tag{22}$$

现在令 G^*_{3H}为由三条线段构成的外部区域：$[C_{1H}, D_{1H}]$、$[C_{1H}, D_{1H}]$和 $[I_{1H}, J_{1H}]$、，其中点 C_{1H} 和 D_{1H} 分别是点 C_{1H} 和 D_{1H} 关于虚轴的对称点。考虑四边形 $\boldsymbol{G}^*_{3H} = (G^*_{3H}; A^-_{1H}, B^-_{1H}, B^+_{1H}, A^+_{1H})$，其中 A^+_{1H}、B^+_{1H} 分别由点 A_{1H}、B_{1H} 支撑，并位于沿线段 $[A_{1H}, B_{1H}]$的割线右侧，则由定理 3（i）可得

$$\mathrm{Mod}(\boldsymbol{G}^*_{3H}) \le \mathrm{Mod}(\widetilde{\boldsymbol{G}}_{3H}). \tag{23}$$

结合 (20)、(21)、(22) 和 (23)，我们推得

$$\mathrm{Mod}(\boldsymbol{G}^*_{3H}) \le \mathrm{ExtMod}(\boldsymbol{Q}_H) \le \mathrm{Mod}(\widetilde{\boldsymbol{G}}_{2H}). \tag{24}$$

现在，利用 [8], 中引理 4.1–4.2 的证明思路，我们研究当 $H \to \infty$时四边形 $\boldsymbol{G}_{2H}$ 和 $\boldsymbol{G}^*_{3H}$ 的共形模的渐近行为。

引理 1. 我们有

$$\mathrm{Mod}(\widetilde{\boldsymbol{G}}_{2H}) \sim \frac{1}{\pi}\log H \quad as \quad H \to \infty.$$

证明。 这一断言实际上已在 [8,引理 4.1]中得到证明。 □

引理 2. 我们有

$$\mathrm{Mod}(\boldsymbol{G}^*_{3H}) \sim \frac{1}{\pi}\log H \quad as \quad H \to \infty. \tag{25}$$

证明。 设 $D_{1H} = -H\alpha + i\beta$、$C_{1H} = -H\alpha - i\beta$分别为 D_{1H}、C_{1H}在 $[A_{1H}, B_{1H}]$线段的延长线上的垂直投影。两个外部区域之间的共形映射

将两条水平线段 $[-1/k,-1]$ 和 $[1,1/k]$ $(0<k<1)$ 的外部映射到两条垂直~ ~线段 $[D_{1H},C_{1H}]$ 和 $[D_{1H},C_{1H}]$的外部，其形式为

$$\zeta(w)=C\int_0^w\frac{(1/\lambda^2-t^2)\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \tag{26}$$

这里， $C\neq 0$ 是某个常数，而 $1/\lambda\in(1,1/k)$、 $1/\mu\in(1,1/\lambda)$分别是点 D_{1H} 和A_{1H}^-的原像~。

现在来详细说明 $\zeta(w)$的公式，由（26）可得

$$\begin{aligned}\zeta(w)&=\frac{C}{k^2}\int_0^w\frac{(k^2/\lambda^2-k^2t^2)\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=\frac{C}{k^2}\int_0^w\frac{(1-k^2t^2)-(1-k^2/\lambda^2)\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\\&=\frac{C}{k^2}\left[\int_0^w\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}dt-\left(1-k^2/\lambda^2\right)\int_0^w\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\right]\\&=\frac{C}{k^2}\left[E(w,k)-(1-k^2/\lambda^2)F(w,k)\right],\end{aligned}$$

其中， $K(w,k)$和 $E(w,k)$分别是不完全椭圆积分的第一类和第二类。根据 $\zeta(w)$的定义，可得

$$\zeta(1)=H\alpha,\qquad \zeta(1/\lambda)=H\alpha+i\beta,\qquad \zeta(1/\mu)=H\alpha+i\sigma.$$

不难看出（例如，参见 [3]）

$$H\alpha=\frac{C}{k^2}\left[E(k)-(1-k^2/\lambda^2)K(k)\right],\quad \beta=\frac{C}{k^2}[E(\ell',k')-(k^2/\lambda^2)F(\ell',k')], \tag{27}$$

其中

$$\ell'=\sqrt{1-\ell^2},\quad \ell=\frac{k}{k'}\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-1},\quad \frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{k^2}\frac{E'(k)}{K'(k)}. \tag{28}$$

应当强调，对于每个 $H>0$，若固定 α,β，则存在唯一的 $k=k(H)$、 $\lambda=\lambda(H)$、 $\ell=\ell(H)$ 和 $C=C(H)$，使得 (26)、(27) 和 (28) 成立；此外，当 $H\to\infty$ 时， $k=k(H)\to 1$, $\lambda=\lambda(H)\to 1$。由于 (26) 中的所有参数均由 H 唯一确定，我们将记 $\zeta(w)=\zeta_H(w)$。

根据黎曼-施瓦茨对称原理， $\zeta_H(w)$ 将上半平面 $\mathbb{H}_\zeta^+$ 映射到~ ~G_{5H}，其为三条线段 $[B_{1H},C_{1H}]$、 $[B_{1H},C_{1H}]$ 和 $[I_{1H},J_{1H}]$的并集的外部；下文中我们只考虑 $\zeta_H(w)$ 在 $\mathbb{H}_\zeta^+$ 上的情形。

由 (27) 可得

$$\frac{E(k)-(1-k^2/\lambda^2)K(k)}{E(\ell',k')-(k^2/\lambda^2)F(\ell',k')}=\frac{H\alpha}{\beta}. \tag{29}$$

现在我们将证明

$$\frac{1-\lambda(H)}{1-k(H)}\to\delta_1\in(0,1)\text{ and }\frac{1-\mu(H)}{1-k(H)}\to\delta_2\in(0,1)\quad\text{as}\quad H\to\infty. \tag{30}$$

事实上，对于每个 $H>0$，函数 $\psi_H=\zeta_H(1+(1/k-1)z)-\alpha H$ 将上半平面映射到区域 G_H，该区域是沿线段 $[0,0+i\beta]$ 和 $[-2H\alpha,-2H\alpha+i\beta]$ 裂开的半平面。此外，ψ_H 将点 0、1 和 ∞ 分别映射到 0_H^-、0_H^+ 和 ∞，其中 0_H^- 和 0_H^+ 是 G_H 的素端，其支撑点位于原点，分别落在沿线段 $[0,0+i\beta]$ 的割线的左边和右边。由于 $H\to\infty$，区域族 G_H 作为核收敛到 G，该核是沿线段 $[0,0+i\beta]$ 裂开的上半平面。于是，根据广义 Radó 定理，ψ_H 一致收敛到将上半平面映射到 G 的共形映射 ψ，其中 0、1 和 ∞ 分别映射到 0^-、0^+ 和 ∞；0^- 和 0^+ 是 G 的素端，其支撑点位于 0，分别落在沿线段$[0,0+i\beta]$的割线的左边和右边。根据 ψ_H 的定义，我们有 $\psi_H((1/\lambda(H)-1)/(1/k(H)-1))=i\beta$，由此可得 $(1/\lambda(H)-1)/(1/k(H)-1)\to\delta_1$，其中 δ_1 是 $i\beta$ 在 ψ 下的原像；同理，我们也有 $\psi_H((1/\mu(H)-1)/(1/k(H)-1))=(i\sigma)^-$，以及 $(1/\mu(H)-1)/(1/k(H)-1)\to\delta_2$，其中 δ_2 是 $(i\sigma)^-$ 在 ψ 下的原像。因此，$0<\delta_2<\delta_1<1$，且 (30) 成立。

结合 (28) 和 (30)，得到 $\ell'=\ell'(H)\to\sqrt{\delta_1}\in(0,1)$。

注意到 $k<\lambda<1$，由 (14) 和 (15)，对于 $k=k(H)$ 和 $\lambda=\lambda(H)$，我们推得

$$E(k)-(1-k^2/\lambda^2)K(k)\to 1\quad\text{as}\quad H\to\infty. \tag{31}$$

由 (28) 可知

$$\frac{k^2}{\lambda^2}=\frac{E'(k)}{K'(k)}.$$

因此，对于 $k=k(H)$、$\lambda=\lambda(H)$ 和 $\ell=\ell(H)$，我们有

$$\begin{aligned}E(\ell',k')-(k^2/\lambda^2)F(\ell',k')&=\frac{K(k')E(\ell',k')-E(k')F(\ell',k')}{K(k')}\\&\sim\frac{2}{\pi}\left[K(k')E(\ell',k')-E(k')F(\ell',k')\right]\quad\text{as}\quad H\to\infty.\end{aligned}$$

在 (6) 和 (7) 中，将参数 x 和 k 替换为 ℓ' 和 k'，得到

$$E(\ell',k')=I_0(\ell')-\frac{1}{2}I_2(\ell')k'^2-\frac{1}{8}I_4(\ell')k'^4-\dots,$$

$$F(\ell',k')=I_0(\ell')+\frac{1}{2}I_2(\ell')k'^2+\frac{3}{8}I_4(\ell')k'^4+\dots.$$

结合式 (9) 可得

$$E(\ell',k')=I_0(\ell')-\frac{1}{2}I_2(\ell')k'^2+o(k'^2),$$

$$F(\ell',k')=I_0(\ell')+\frac{1}{2}I_2(\ell')k'^2+o(k'^2),$$

关于 ℓ' 一致地，当 $k'\to 0$ 时。

结合 (10) 和 (11)，可得

$$K(k')E(\ell',k')-E(k')F(\ell',k')=\frac{\pi}{4}\left[I_0(\ell')-2I_2(\ell')\right]k'^2+o(k'^2)$$

关于 ℓ' 一致地，当 $k' \to 0$ 时成立。由于当 $H \to \infty$ 时， $\ell' = \ell'(H) \to \sqrt{\delta_1} \in (0, 1)$，因此我们有

$$K(k')E(\ell', k') - E(k')F(\ell', k') \sim \frac{\pi}{4}\left[I_0(\sqrt{\delta_1}) - 2I_2(\sqrt{\delta_1})\right] k'^2, \tag{32}$$

当 $H \to \infty$ 时， $k' = k'(H)$、 $\ell' = \ell'(H)$。

由于 (8) 中的 $I_0(\sqrt{\delta_1}) - 2I_2(\sqrt{\delta_1}) \neq 0$。由 (29)、(31) 和 (32) 得到，对于 $k' = k'(H)$

$$\frac{H\alpha}{\beta} \sim \frac{2C_1}{k'^2} \quad \text{as} \quad H \to \infty,$$

其中 $C_1 \neq 0$ 为某个常数。这意味着

$$\frac{1}{\pi}\log H \sim \frac{1}{\pi}\log\frac{1}{1-k} \quad \text{as} \quad k \to 1. \tag{33}$$

~考虑四边形 $\boldsymbol{G}_{3H}^{*+} = (G_{3H}^{*+}; A_{1H}^{-}, J_{1H}, I_{1H}, A_{1H}^{+})$，其中 G_{3H}^{*+} 是 G_{3H}^{*} 的上半部分。由于它与顶点为 $-1/k$、 $-1/\mu$、 $1/\mu$ 和 $1/k$ 的上半平面所构成的四边形共形等价，我们得出

$$\operatorname{Mod}(\boldsymbol{G}_{3H}^{*+}) = \frac{2K(k/\mu)}{K'(k/\mu)}.$$

借助对称原理，我们可知

$$\operatorname{Mod}(\boldsymbol{G}_{3H}^{*}) = \frac{K(k/\mu)}{K'(k/\mu)} \sim \frac{1}{\pi}\log\frac{1}{1-k/\mu}, \quad k = k(H), \quad \mu = \mu(H) \quad \text{as} \quad H \to \infty.$$

当 $H \to \infty$ 时，得到如下估计

$$1 - \frac{k(H)}{\mu(H)} \sim \mu(H) - k(H) = (1 - k(H)) - (1 - \mu(H)) \sim (1 - \delta_2)(1 - k(H)),$$

因此，

$$\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{1-k/\mu} \sim \frac{1}{\pi}\log\frac{1}{1-k},$$

而这与 (33) 一起推出 (25)。 □

主定理的证明。 由引理 1、引理 2 和不等式 (24)，我们得出渐近公式 (3) 成立。因此，定理 1已得到完整证明。

FUNDING

第一作者的这项工作是在伏尔加地区科学教育数学中心发展计划（协议编号 075-02-2022-882）资助下完成的。

参考文献

[1] L. V. Ahlfors，拟共形映射讲义，第*38*卷 （美国数学会，2006年）。[2] W. G. Bickley，“矩形外部空间的二维势问题”，伦敦数学会会刊**2** （1），82–105（1934年）。[3] P. F. Byrd 和 M. D. Friedman，工程师与科学家椭圆积分手册，第*2*版。（施普林格出版社，柏林，1971年）。[4] D. N. Dautova 和 S. R. Nasyrov，“拉伸作用下镜面对称双连通域模的渐近行为”，数学札记**103** （3），537–549（2018年）。

[5] D. N. Dautova 和 S. R. Nasyrov，“沿实轴无界拉伸下非对称双连通区域共形模的渐近行为”，洛巴切夫斯基数学杂志**40**（9），1268–1274（2019年）。[6] V. N. Dubinin，几何函数论中的电容器容量与对称化（Birkhäuser，巴塞尔，2014年）。[7] P. Duren 和 J. Pfaltzgraff，“罗宾容量与极值长度”，数学分析与应用杂志**179**（1），110–119（1993年）。[8] A. Dyutin，G. V. Nguyen，“伸缩映射下对称四边形外部共形模的渐近行为”，洛巴切夫斯基数学杂志**44**（4）（2023年）（已接受发表；预印本 arXiv:2212.12967v2（2022年））。[9] G. M. Goluzin，复变函数几何理论（美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，数学专著译丛，第26卷，1969年）。[10] R. Kühnau，“四边形与环域的共形模”，载于：复分析手册，R. Kühnau 编（爱思唯尔，2005年），第2卷，第99–129页。[11] N. Papamichael 和 N. Stylianopoulos，数值共形映射：区域分解与四边形映射（世界科学出版社，新加坡，2010年）。[12] S. R. Nasyrov，“黎曼–施瓦茨反射原理与矩形框架模的渐近行为”，计算方法与函数论**15**（1），59–74（2015年）。[13] S. Nasyrov，T. Sugawa，M. Vuorinen，“四边形的模与拟共形反射”，数学分析与应用杂志**42**（12），127092（2023年）（已接受发表；https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127092；预印本 arXiv:2111.08304（2021年））。[14] S. R. Nasyrov，G. V. Nguyen，“拉伸作用下无界对称双连通域共形模的渐近行为”，洛巴切夫斯基数学杂志**42**（12），2895–2904（2021年）。[15] G. V. Nguyen，S. R. Nasyrov，“拉伸作用下非对称无界双连通域共形模的渐近行为”，洛巴切夫斯基数学杂志**43**（10），2977–2988（2022年）。[16] M. Vuorinen 和 X. Zhang，“关于四边形的外部模与特殊函数”，不动点理论与应用杂志**13**（1），215–230（2013年）。

喀山联邦大学，克里姆廖夫斯卡娅街35号，鞑靼斯坦，420008，俄罗斯联邦
电子邮件地址：snasyrov@kpfu.ru

喀山联邦大学，克里姆廖夫斯卡娅街35号，鞑靼斯坦，420008，俄罗斯联邦电子邮件地址：
nvgiang.math@gmail.com