arXiv:2303.10363v1 [math.OA] 18 Mar 2023

汤普森群 F 在无限树上的作用

Jeong Hee Hong 和 Wojciech Szyma´nski*

2022年7月10日

摘要

我们构造了汤普森群 F 在一个由无穷二叉有根树对构成的紧空间上的作用。该作用是 F 通过平移作用于其一个齐性空间 F/H_2所得作用的 F 等变紧化；这个齐性空间对应于 F的某个子群 H_2 。 F 在希尔伯特空间 $\ell^2(F/H_2)$上的表示在复群代数 $\mathbb{C}[F]$上是忠实的。

2020年数学主题分类：20F65，22D25 关键词：汤普森群 F，无限树，等变紧化

*本研究得到DFF研究项目2“算子代数的自同构与不变量”（编号7014–00145B，2017–2022年）资助。

1 引言与预备知识

1.1 引言

群通过作用于几何对象而自然地展现出来。秉持这一观点，近年来人们日益关注汤普森群 F、 T和 V的各种作用的构造与分析。例如，参见 Farley 对汤普森群的 Haagerup 性质的证明；Jones 从平面代数构造群 F 和 T 的表示；以及 Garncarek 为群 F 和 T、 [13]构造主系列的类似物。本文的主要目的是定义汤普森群 F 在无穷二叉有根树拓扑空间的一个紧子空间上的作用。

尽管汤普森群的原始定义涉及区间和圆周上的映射，见 [17] 和 [8], ，但我们更愿意将这些群视为嵌入坎茨代数 $\mathcal{O}_2$的酉群中，见 [4], [20], 以及下文第1.4节。Haagerup 和 Olesen 在研究群 T 和 V的内 amenability 失效时，已经利用了这一视角 [15]。正是汤普森群与坎茨代数 $\mathcal{O}_2$ 之间的这种联系，促使我们在本文中构造了相关对象。

我们从 F的一个子群 H_2 出发，见下文第2节，并考察F 通过平移在 F/H_2 上的作用。我们注意到， F 在希尔伯特空间$\ell^2(F/H_2)$上的表示在群代数 $\mathbb{C}[F]$上是忠实的。陪集空间 F/H_2 可自然地识别为对角极大交换子代数（简称 MASA） $\mathcal{D}_2$ 中的某些投影所构成的集合 Ω_2 ，其中该代数属于坎茨代数 $\mathcal{O}_2$。$\mathcal{D}_2$ 中的哪些投影 p属于 Ω_2 ，仅取决于值 $\tau(p)$；其中， τ 是 $\mathcal{O}_2$的核心一致超有限（简称 UHF）子代数 $\mathcal{F}_2$ 上的规范迹，见下文定理2.3。

我们采用以下策略。集合 Ω_2 自然嵌入到一棵无限二叉根树的所有子树对构成的空间中。于是， F 在 Ω_2 上的作用可通过连续性延拓为 F 在闭包 Ω_2上的作用。Ω_2 是 Ω_2 中的一个离散开子空间。将其移除后， F 便作用于拓扑边界 $\partial\Omega_2 = \Omega_2 \setminus \Omega_2$, , 这是一个与康托尔空间同胚的空间。结果发现， $\partial\Omega_2$ 中含有一个被 F整体固定的点，这与 [12]中的一项结果有些类似。

本文中构造作用 $F \curvearrowright \partial\Omega_2$ 的方法似乎相当自然。值得指出的是， F 在单位区间上的标准作用也以类似方式出现，是 F 在其齐性空间上的作用的一种 F 等变紧化。事实上，在这种情况下，可以取一类从区间 $[0,1]$ 到其自身、且固定某个内部二进有理数的函数所构成的子群。此外，由于群 F 的元素本身可以看作有限树对，因此直观上可以预期 F 能够作用于无限树对。值得注意的是，文献中早已在群 F、 [14]作用的背景下出现过无限树。

1.2 汤普森群 F

汤普森群 F 是由闭区间 $[0,1]$ 到其自身的保序分段线性同胚构成的群，这些同胚除有限多个二进有理数外处处可微，且所有斜率都是 2 的整数次幂。该群有如下表示:

$$F = \langle x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots \mid x_j x_i = x_i x_{j+1}, \forall i < j \rangle. \tag{1}$$

值得注意的是，群 F 也有一个有限表示

$$F = \langle A, B \mid [AB^{-1}, A^{-1}BA] = 1,\ [AB^{-1}, A^{-2}BA^2] = 1 \rangle, \tag{2}$$

参见 [8] 和 [16]。通过令 $x_0 = A$ 和 $x_n = A^{-(n-1)}BA^{n-1}$ 分别对应 $n \geq 1$，可以得到两个表示（1）和（2）之间的联系。如 [5], 所示， F 的每个元素 g都有唯一的标准形

$$g = x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_k} x_{i_l}^{-1} \cdots x_{i_2}^{-1} x_{i_1}^{-1}, \tag{3}$$

其中 $j_k \neq i_l$、 $j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_k$ 和 $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_l$，并且如果对于某个 m， x_m 和 x_m^{-1}都出现，那么 x_{m+1}和 x_{m+1}^{-1}中必有一个也出现。 F的换位子子群 $[F,F]$ 是单群，且它是 F的最小真正规子群。 F 的元素 f 属于 $[F,F]$，当且仅当 f的图像在 0 和 1 处的斜率都等于 1。我们有 $F/[F,F] \cong \mathbb{Z}^2$。关于汤普森群 F、 T和 V的入门介绍，读者可参阅 [8] 和 [3]。

1.3 坎茨代数 $\mathcal{O}_n$

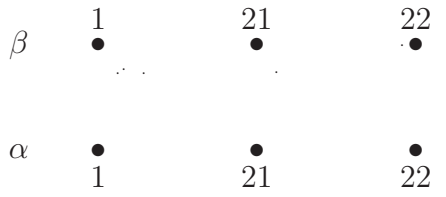
若 n是大于 1 的整数，则坎茨代数 $\mathcal{O}_n$ 是一个含幺、单、纯无限的 C^*-代数，由 n 个等距算子 $S_1, \ldots, S_n$ 生成，并满足 $\sum_{i=1}^n S_i S_i^* = 1$，见[9]。我们用 W_n^k表示由满足 $\mu_m \in \{1, \ldots, n\}$ 的 k-元组 $\mu = \mu_1 \ldots \mu_k$组成的集合，并用W_n表示其并集 $\cup_{k=0}^{\infty} W_n^k$，其中 $W_n^0 = \{\emptyset\}$。我们称 W_n的元素为多重指标。若$\mu \in W_n^k$，则 $|\mu| = k$是 μ的长度。若 $\mu = \mu_1 \ldots \mu_k \in W_n$，则 $S_\mu = S_{\mu_1} \ldots S_{\mu_k}$（按约定，$S_\emptyset = 1$ ）是一个值域投影为 $P_\mu = S_\mu S_\mu^*$的等距算子。
$\{S_i, S_i^* \mid i = 1, \ldots, n\}$ 中的每个字都可以唯一表示为 $S_\mu S_\nu^*$，其中 $\mu, \nu \in W_n$ [9, 引理 1.3]。对于 $\mu, \nu \in W_n$，若 μ 在自然字典序中先于 ν，我们就记作 $\mu \prec \nu$。

我们用 $\mathcal{F}_n^k$ 表示由所有形如 $S_\mu S_\nu^*$、μ、 $\nu \in W_n^k$ 的字张成的 $\mathcal{O}_n$ 的 C^* 子代数，它同构于矩阵代数 $M_{n^k}(\mathbb{C})$。 $\mathcal{F}_n$ 对 $\cup_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_n^k$ 的范数闭包是类型为 n^∞ 的 UHF 代数，称为 $\mathcal{O}_n$、 [9] 的核心 UHF 子代数。我们用 τ 表示 $\mathcal{F}_n$ 上唯一的归一化迹。核心 UHF 子代数 $\mathcal{F}_n$ 是规范作用 γ 的不动点代数： $U(1) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_n)$，满足 $\gamma_z(S_j) = zS_j$，其中 $z \in U(1)$，且 $j = 1$， ....., n。存在一个从 $\mathcal{O}_n$ 到 $\mathcal{F}_n$ 的忠实条件期望 E，它由关于归一化 Haar 测度取平均给出。此外，对于每个 $m \in \mathbb{Z}$，我们用 $\mathcal{O}_n^{(m)}$ 表示 $\mathcal{O}_n$ 中对应于 γ 的谱子空间。因此，特别地， $\mathcal{O}_n^{(0)} = \mathcal{F}_n$。

由投影 P_μ、 $\mu \in W_n$生成的 C^*-子代数 $\mathcal{D}_n$ of $\mathcal{O}_n$ 是 $\mathcal{O}_n$ 中的极大交换子代数（MASA）。 $\mathcal{D}_n$ 的谱自然地与

X_n ——完整的单边 n-移位空间。也就是说， X_n 是由自然数 $\mathbb{N}$ 索引的无限多个有限集 $\{1,\dots,n\}$ 的笛卡尔积。对于 $0 \le k < \infty$，我们将 $\mathcal{D}_n^k := \mathcal{D}_n \cap \mathcal{F}_n^k$ 记作。

下文中，我们将考虑 $\mathcal{O}_n$ 中形如 $w = \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{J}} S_\alpha S_\beta^*$ 的元素，其中 $\mathcal{J}$ 是由 α、β 组成的有限个对构成的集合，这些对中的元素是 W_n 中的字 α、β 。当然，这样的表示（如果存在）并不唯一。我们记 $\mathcal{J}_1 = \{\alpha \in W_n : \exists(\alpha,\beta) \in \mathcal{J}\}$ 和 $\mathcal{J}_2 = \{\beta \in W_n : \exists(\alpha,\beta) \in \mathcal{J}\}$。特别地，我们考虑 $\mathcal{O}_n$ 中由字的有限和表示的酉元所构成的群 $\mathcal{S}_n$，即形如 $u = \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{J}} S_\alpha S_\beta^*$ 的元素，其中 $\mathcal{J} \subseteq W_n \times W_n$ 是某个有限集。这样的和是酉元，当且仅当 $\sum_{\alpha\in\mathcal{J}_1} P_\alpha = 1 = \sum_{\beta\in\mathcal{J}_2} P_\beta$。注意， $\mathcal{S}_n$ 是 $\mathcal{O}_n$ 中 $\mathcal{D}_n$ 的正规化子里的一个子群。$\mathcal{S}_n$ 中的元素 $u = \sum_{(\mu,\nu)\in\mathcal{J}} S_\mu S_\nu^*$ 可以用一个有向二分图表示，其（互不相同的）顶点标记为 α 和 β、$(\alpha,\beta) \in \mathcal{J}$，并且从顶点 β 到顶点 α 有有向边（箭头）。我们总是将顶点排列为两行：上行为标记为 β 的顶点，下行为标记为 α 的顶点。例如，$u = S_{21}S_1^* + S_{22}S_{21}^* + S_1S_{22}^* \in \mathcal{S}_2$ 可由以下有向二分图表示。



我们还会将每一行按字典序递增排列。因此，若 β_1先于 β_2，则一条从 β_1 到 α_1 的箭头与另一条从 β_2 到 α_2的箭头交叉，当且仅当 α_2 先于 α_1。若酉元 $w = \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{J}} S_\alpha S_\beta^*$ 的图不含交叉，则称 w 为保序的。借助酉元的有向二分图表示，接下来将利用这一保序性质来识别坎茨代数 $\mathcal{O}_2$中的 Thompson 群 F 元素。

注意，对于保序酉元 $w = \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{J}} S_\alpha S_\beta^*$，其逆元 $w^* = \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{J}} S_\beta S_\alpha^*$ 也保序。此外，设 $u = \sum_{(\mu,\nu)\in\mathcal{K}} S_\mu S_\nu^*$ 是另一个保序酉元。我们可以为 u 和 w 选取这样的表示，使得字 ν 和 α 的长度都相同，即 $|\nu| = |\alpha| = k$ ，其中 k为某个固定值。由于对每个 r都有 $1 = \sum_{|\kappa|=r} S_\kappa S_\kappa^*$ ，这可以通过将项 $S_\alpha S_\beta^*$ 替换为$\sum_{|\kappa|=k-|\alpha|} S_\alpha S_\kappa S_\kappa^* S_\beta^*$，并将项 $S_\mu S_\nu^*$ 替换为 $\sum_{|\kappa|=k-|\nu|} S_\mu S_\kappa S_\kappa^* S_\nu^*$来实现。于是我们看到

$$uw = \sum_{(\mu,\nu)\in\mathcal{K},(\alpha,\beta)\in\mathcal{J},} S_\mu S_\nu^* S_\alpha S_\beta^* = \sum_{(\mu,\nu)\in\mathcal{K},(\alpha,\beta)\in\mathcal{J},\nu=\alpha} S_\mu S_\beta^*$$

也保序。例如，考虑 $u = S_{11}S_1^* + S_{12}S_{21}^* + S_2S_{22}^*$ 和
$w = S_{111}S_{11}^* + S_{112}S_{121}^* + S_{12}S_{122}^* + S_{211}S_{21}^* + S_{212}S_{221}^* + S_{22}S_{222}^*$。我们将它们表示为

$$\begin{aligned} u = {} & S_{1111}S_{111}^* + S_{1112}S_{112}^* + S_{1121}S_{121}^* + S_{1122}S_{122}^* + S_{121}S_{211}^* + S_{122}S_{212}^* + S_{21}S_{221}^* \\ & + S_{22}S_{222}^* \\ w = {} & S_{111}S_{11}^* + S_{112}S_{121}^* + S_{121}S_{1221}^* + S_{122}S_{1222}^* + S_{211}S_{21}^* + S_{212}S_{221}^* + S_{221}S_{2221}^* \\ & + S_{222}S_{2222}^*, \end{aligned}$$

然后可以看到

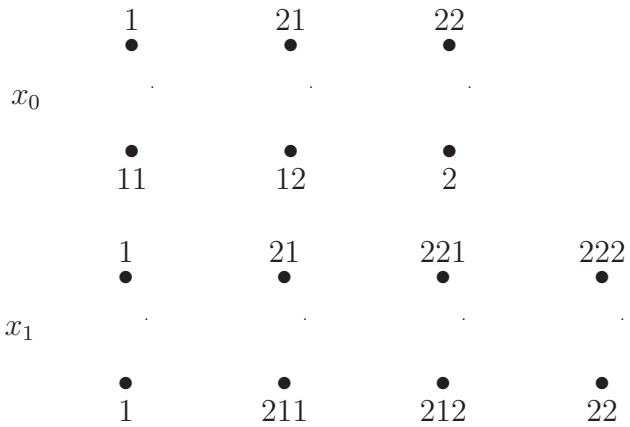
$$uw = S_{1111}S_{11}^* + S_{1112}S_{121}^* + S_{1121}S_{1221}^* + S_{1122}S_{1222}^* + S_{121}S_{21}^*S_{122}S_{221}^* + S_{21}S_{2221}^* + \\ + S_{22}S_{2222}^*.$$

1.4 汤普森群在 $\mathcal{U}(\mathcal{O}_2)$ 中的表示

如 [4] 和 [20], 所示，汤普森群 F 在 $\mathcal{O}_2$ 的酉群中有一个自然的忠实表示，由满足 $\mathcal{S}_2$ 中的关联$\mathcal{J}_1 \ni \alpha \mapsto \beta \in \mathcal{J}_2$（对于（$\alpha$， β） $\in \mathcal{J}$）保持 W_2上的字典序的酉元$u = \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{J}} S_\alpha S_\beta^*$ 给出。因此，酉元 $u \in \mathcal{S}_2$ 属于 F 当且仅当它是保序的。特别地，我们有

$$x_0 = S_{11}S_1^* + S_{12}S_{21}^* + S_2S_{22}^*,$$
$$x_k = 1 - S_2^kS_2^{*k} + S_2^kx_0S_2^{*k}, \quad \text{for } k \geq 1.$$

两个生成元 x_0 和 x_1 分别由以下保序有向二分图表示:



由 F 和 $S_{22}S_1^* + S_1S_{21}^* + S_{21}S_{22}^*$ 生成的 $\mathcal{S}_2$ 子群同构于 Thompson 群 T，它由 $u = \sum_{(\alpha,\ \beta)\in\mathcal{J}} S_\alpha S_\beta^*$ 中满足关联 $\mathcal{J}_1 \ni \alpha \mapsto \beta \in \mathcal{J}_2$（其中 $(\alpha,\beta) \in \mathcal{J}$）尊重 W_2 上字典序（允许循环置换）的那些酉元组成。最后，群 $\mathcal{S}_2$ 本身同构于 Thompson 群 V。

2 群 F 在 F/H_2 上的作用

我们考虑 F 的子群 H_2，定义如下:

$$H_2 := \left\{ \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{J}} S_\alpha S_\beta^* \in F \mid \forall(\alpha,\beta) \in \mathcal{J},\ |\alpha| - |\beta| \in 2\mathbb{Z} \right\}. \tag{4}$$

我们关注群 F 通过左平移在 F/H_2 上的作用。

设 $f=\sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{J}} S_\alpha S_\beta^*$ 属于 F。我们定义

$$f_0 := \sum_{|\alpha|-|\beta|\in 2\mathbb{N}} S_\alpha S_\beta^*,$$
$$f_1 := \sum_{|\alpha|-|\beta|\notin 2\mathbb{N}} S_\alpha S_\beta^*,$$

其中上述求和仅涉及 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{J}$。我们用 $[f]$ 表示由 $f\in F$ 确定的 F/H_2 中的陪集。当且仅当 $f^{-1}g\in H_2$ 时，$[g]=[f]$。由于

$$f^{-1}g=(f_0^*+f_1^*)(g_0+g_1)=(f_0^*g_1+f_1^*g_0)+(f_0^*g_0+f_1^*g_1),$$

$f_0^*g_1+f_1^*g_0=0$ 当且仅当 $f^{-1}g\in H_2$，显然这等价于 $g_0g_0^*=f_0f_0^*$。也就是说，投影 $f_0f_0^*$ 唯一确定了 f 的陪集。因此，记

$$\Omega_2 := \{f_0f_0^*\in\mathcal{D}_2 \mid f\in F\}, \tag{5}$$

我们看到，陪集空间 F/H_2 可自然地与 Ω_2 识别。此外，设 f、$g\in F$，并记 $p:=g_0g_0^*$。那么 $(fg)_0=f_0g_0+f_1g_1$，因此 $(fg)_0(fg)_0^*=f_0pf_0^*+f_1(1-p)f_1^*$。因此，在上述将 F/H_2 与 Ω_2, 识别的情况下，F 在 F/H_2 上的作用对应于 F 在 Ω_2 上的如下作用：

$$f\cdot p=f_0pf_0^*+f_1(1-p)f_1^*, \tag{6}$$

对于 $f\in F$ 和 $p\in\Omega_2$。特别地，我们有

$$\begin{aligned}
x_0\cdot p &= (P_{11}-S_{11}(S_1^*pS_1)S_{11}^*)+S_{12}(S_{21}^*pS_{21})S_{12}^*+(P_2-S_2(S_{22}^*pS_{22})S_2^*),\\
x_0^{-1}\cdot p &= (P_1-S_1(S_{11}^*pS_{11})S_1^*)+S_{21}(S_{12}^*pS_{12})S_{21}^*+(P_{22}-S_{22}(S_2^*pS_2)S_{22}^*),\\
x_1\cdot p &= S_1(S_1^*pS_1)S_1^*+(P_{211}-S_{211}(S_{21}^*pS_{21})S_{211}^*)+S_{212}(S_{221}^*pS_{221})S_{212}^*\\
&\quad+(P_{22}-S_{22}(S_{222}^*pS_{222})S_{22}^*),\\
x_1^{-1}\cdot p &= S_1(S_1^*pS_1)S_1^*+(P_{21}-S_{21}(S_{211}^*pS_{211})S_{21}^*)+S_{221}(S_{212}^*pS_{212})S_{221}^*\\
&\quad+(P_{222}-S_{222}(S_{22}^*pS_{22})S_{222}^*).
\end{aligned}$$

群 F 在 Ω_2 上的作用 (6) 给出了群F 在希尔伯特空间 $\ell^2(\Omega_2)$ 上的酉表示 π_2。

命题 2.1. 表示 π_2 在群代数 $\mathbb{C}[F]$ 上是忠实的。

证明。首先，考虑 F 中的一个元素 f，以及 $\mathcal{D}_2$ 中的一个投影 p，使得 $fp\neq p$。那么，存在 $\mathcal{D}_2$ 中的一个投影 $q\leq p$，使得 $qfq=0$。我们定义一个元素 $g\in F$，如下所示。若 fq 属于所有 m 为偶数时的子空间的并 $\mathcal{O}_2^{(m)}$，则取 $F\setminus H_2$ 中任意一个满足 $g(1-q)=(1-q)g=1-q$ 的元素 g。否则，令 $g=1$。在这两种情况下，我们都有 $g^{-1}fg\notin H_2$。

现在，我们声称，对于 F 中任意元素 f_1、.....、f_k，只要它们都不等于恒等式，就存在一个 $g\in F$，使得对所有 $j=1$、.....、k，都有 $g^{-1}f_jg\notin H_2$。事实上，很容易看出

存在 $\mathcal{D}_2$ 中互相正交的投影 q_1、……、q_k，使得 $q_j f_j q_j = 0$，并且对所有 $j = 1$、……、k，都有 $f_j q_j f_j^*$（$\sum_{i\neq j} q_i$）$= 0$。对于每个 j，取 F 中的一个元素 g_j，使得 g_j（$1 - q_j$）$=$（$1 - q_j$）$g_j = 1 - q_j$且 $g_j^{-1} f_j g_j \notin H_2$。令 g：$= g_1 g_2 \cdots g_k$。那么，对所有 $j = 1$、……、k，都有 $g^{-1} f_j g \notin H_2$，如所声称。

现在，设 $f_1, \ldots, f_k$ 是 F 中互不相同的元素。根据上述论证，存在一个 $g \in F$，使得对所有 $i \neq j$，都有 $g^{-1} f_i^{-1} f_j g \notin H_2$。令 $p = g \cdot 1$ 为 Ω_2 的一个元素。则 $f_1 \cdot p, \ldots, f_k \cdot p$ 是 Ω_2 中互不相同的元素。这立即意味着 $\pi_2(f_1) \ldots, \pi_2(f_k)$ 线性无关，因此表示 π 是忠实的。

□

命题2.2. 对每个 $f \in F$，我们有 $f_0 \neq 0$。

证明。反设 $f \in F$ 和 $f_0 = 0$。记

$$f = \sum_{|\alpha|>|\beta|} S_\alpha S_\beta^* + \sum_{|\mu|<|\nu|} S_\mu S_\nu^*. \tag{7}$$

我们可以将 f 的表示写成 (7) 中的形式，并使得对某个 $k \in \mathbb{N}$，对于所有 (α, β) 和所有 (μ, ν)，都有 $|\alpha| = k = |\nu|$。现在，记

$$r_j = \#\{(\alpha, \beta) \in \mathcal{J} \mid |\alpha| - |\beta| = 2j + 1\}, \quad j = 0, 1, \ldots, R,$$
$$l_j = \#\{(\mu, \nu) \in \mathcal{J} \mid |\nu| - |\mu| = 2j + 1\}, \quad j = 0, 1, \ldots, L.$$

我们有 $1 = \sum P_\alpha + \sum P_\mu = \sum P_\beta + \sum P_\nu$。应用重标度迹 $2^k\tau$，得到

$$2^k = \sum_{i=0}^{R} r_i + \sum_{j=0}^{L} l_j 2^{2j+1} = \sum_{i=0}^{R} r_i 2^{2i+1} + \sum_{j=0}^{L} l_j.$$

将这些相加，得到恒等式

$$2^{k+1} = \sum_{i=0}^{R} r_i (2^{2i+1} + 1) + \sum_{j=0}^{L} l_j (2^{2j+1} + 1). \tag{8}$$

然而，这与事实矛盾，因为（8）的右边能被 3 整除，而左边不能。

□

现在，我们可以详细描述（5）中定义的空间 Ω_2, 。

定理2.3。Ω_2 由所有满足 $\tau(p) = k/2^{2m+1}$的投影 $p \in \mathcal{D}_2$ 组成，其中$m \in \mathbb{N}$ 和 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $0 < k \leq 2^{2m+1}$，且 $k - 2$ 能被 3 整除。

证明。首先，我们证明每个投影 $p \in \Omega_2$ 都满足定理的条件。设 $f \in F$写成一个字 $w_1 \cdots w_r$，其中每个 $w_j \in \{x_0, x_0^{-1}, x_1, x_1^{-1}\}$。我们将对$r$使用归纳法，证明投影 $f_0 f_0^*$ 具有所需的形式。对应于 $f = f_0 f_0^* = 1$ 的情形 $r = 0$ 显然成立。对于归纳步骤，

假设 $p = (w_2 \cdots w_r)_0 (w_2 \cdots w_r)_0^*$ 具有所需的形式，其中整数为 m。我们有 $f_0 f_0^* = w_1 \cdot p$。如果 $w_1 = x_0$，那么

$$\tau(w_1 \cdot p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \tau(pP_1)\right) + \tau(pP_{21}) + 2\left(\frac{1}{4} - \tau(pP_{22})\right).$$

因此我们有

$$2^{2m+1}(\tau(w_1 \cdot p) - \tau(p)) = 2^{2m+1}3\left(\frac{1}{4} - \frac{\tau(pP_1)}{2} - \tau(pP_{22})\right).$$

由于这个恒等式的右边可被 3 整除，左边也可被 3 整除，因此在这种情况下归纳步骤成立。其余三种情况，即 w_1 等于 x_0^{-1}、x_1 或 x_1^{-1}，处理方法类似。

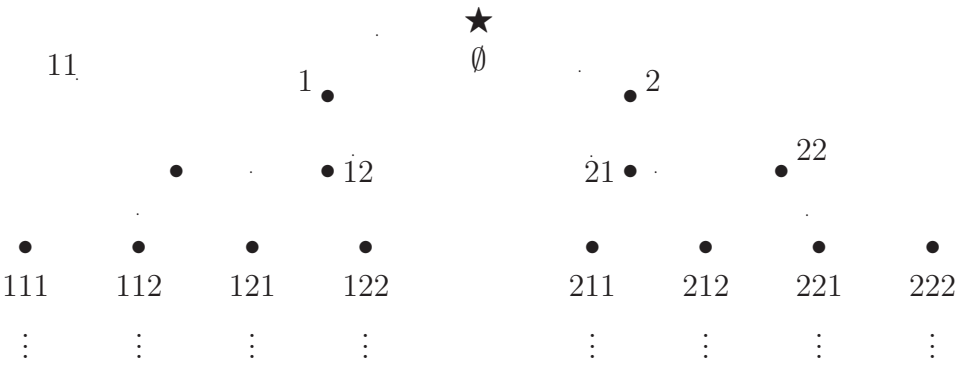
现在，我们证明满足定理条件的所有投影都出现在 Ω_2 中。设 $p = \sum_{\alpha \in J} P_\alpha$，其中 J 是 W_2^{2m+1} 的子集，且其元素个数模 3 余 2。首先假设 J 至少有 5 个元素。取 J 中的元素 $\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \alpha_3$，并取 W_2^{2m+1} 中的元素 $\mu_1, \ldots, \mu_k, \nu_1, \ldots, \nu_l$，使得 $[\alpha_1, \mu_1, \ldots, \mu_k, \alpha_2, \nu_1, \ldots, \nu_l, \alpha_3]$ 是 W_2^{2m+1} 中的一个 $\prec$ 区间。那么存在保序偏等距 $u_1, \ldots, u_5$，使得：

$$\begin{aligned}
&(i) \quad u_1^* u_1 = P_{\alpha_1}, \ \ u_1 u_1^* = P_{\alpha_1 1}, \ \ u_1 \in \mathcal{O}_2^{(1)}, \\
&(ii) \quad u_2^* u_2 = \sum_{j=1}^{k} P_{\mu_j}, \ \ u_2 u_2^* = P_{\alpha_1 2} + \sum_{j=1}^{k-1} P_{\mu_j} + P_{\mu_k 1}, \ \ u_2 \in \mathcal{O}_2^{(0)}, \\
&(iii) \quad u_3^* u_3 = P_{\alpha_2}, \ \ u_3 u_3^* = P_{\mu_k 2}, \ \ u_3 \in \mathcal{O}_2^{(1)}, \\
&(iv) \quad u_4^* u_4 = \sum_{i=1}^{l} P_{\nu_i}, \ \ u_4 u_4^* = P_{\alpha_2} + \sum_{i=1}^{l-1} P_{\nu_i}, \ \ u_4 \in \mathcal{O}_2^{(0)}, \\
&(v) \quad u_5^* u_5 = P_{\alpha_3}, \ \ u_5 u_5^* = P_{\nu_l} + P_{\alpha_3}, \ \ u_5 \in \mathcal{O}_2^{(-1)},
\end{aligned}$$

当 $k = 0$ 或 $l = 0$时，做显而易见的修改。于是，$f = 1 - \sum_{j=1}^{5} u_j^* u_j + \sum_{j=1}^{5} u_j$ 是群 F的一个元素，满足 $f \cdot p = \sum_{\alpha \in J \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}} P_\alpha$。因此，从 $p = 1$开始并递归应用此过程，我们便能将上述每个投影 p 表示为 $f \cdot 1$ 的形式，其中 $f \in F$取适当值。 □

3 Ω_2的 F-等变紧化

设 $\mathfrak{T}_2$ 是如下图所示的无限二叉根树。



$\mathfrak{T}_2$ 的顶点用来自 W_2 的字标记。注意，一个字的长度等于对应顶点到根的距离。

我们用 Σ_2 表示所有包含根 ★ 且不含任何叶子的 $\mathfrak{T}_2$ 子树的集合。也就是说，若 $\omega \in \Sigma_2$ 且 $\alpha \in \omega$ （标记为 α 的顶点属于 ω），则 α 的两个后继节点中至少有一个必须属于 ω。令 Σ_2^* 表示由空树扩充后的集合 Σ_2。在 Σ_2^* 上有一种自然的乘积拓扑，使其成为一个紧的、可度量化的空间。此前已有研究考虑过这个空间，例如见 [19]。子树序列 (ω_n) 收敛到 ω，当且仅当对于每个 $\alpha \in W_2$，当 n 充分大时，我们都有 $\alpha \in \omega \Leftrightarrow \alpha \in \omega_n$。

令 $\mathcal{P}(\mathcal{D}_2)$ 为 $\mathcal{D}_2$ 中所有投影的集合。存在一个从 $\mathcal{P}(\mathcal{D}_2)$ 到 Σ_2^* 的自然嵌入。具体而言，若 $q \in \mathcal{P}(\mathcal{D}_2)$，则对应的树（为简便起见，也记作 q）由所有满足 $qP_\alpha \neq 0$ 的顶点 α 构成。现在，我们将 Ω_2 视为 $\Sigma_2 \times \Sigma_2^*$ 的子集，因此

$$\Omega_2 \ni q \leftrightarrow (q, 1-q) \in \Sigma_2 \times \Sigma_2^*. \tag{9}$$

若 $q \in \Omega_2$ 且 $f \in F$，则该作用具有一种优美的对称形式

$$f \cdot (q, 1-q) = (f_0 q f_0^* + f_1(1-q)f_1^*,\ f_1 q f_1^* + f_0(1-q)f_0^*). \tag{10}$$

命题 3.1. 设 (q_n) 是 Ω_2 中的一个元素序列，且在 $\Sigma_2 \times \Sigma_2^*$ 中收敛。那么对每个 $f \in F$，序列 $(f \cdot q_n)$ 也在 $\Sigma_2 \times \Sigma_2^*$ 中收敛。

证明。设序列 (q_n) 在 $\Sigma_2 \times \Sigma_2^*$ 中收敛。这等价于说，对每个 $\alpha \in W_2$，

(i) 若 $q_n P_\alpha \neq 0$ 对无穷多个 n 成立，则 $q_n P_\alpha \neq 0$ 对除有限多个 n 之外的所有对象都成立，并且

(ii) 若 $(1-q_n)P_\alpha \neq 0$ 对无穷多个 n 成立，则 $(1-q_n)P_\alpha \neq 0$ 对除有限多个 n 之外的所有对象都成立。

为证明该命题，我们必须证明将 q_n 替换为 $f \cdot q_n$ 后，条件 (i) 和 (ii) 仍成立。我们先证明 (i)。假设对于无穷多个 n，$f \cdot q_n P_\alpha \neq 0$ 成立。那么，要么对于无穷多个 n，$f_0 q_n f_0^* P_\alpha \neq 0$ 成立；要么对于无穷多个 n，$f_1(1-q_n)f_1^* P_\alpha \neq 0$ 成立。假设

前一种情况成立。那么 $q_n(f_0^*f_0)(f_0^*P_\alpha f_0) \neq 0$ 也成立。令 $(f_0^*f_0)(f_0^*P_\alpha f_0) = \sum_\beta P_\beta$。存在一个 β，使得对于无穷多个 n，$q_nP_\beta \neq 0$ 成立。但根据假设，对于除有限多个 n 外的所有 n，$q_nP_\beta \neq 0$ 均成立。因此，在这种情况下，条件 (i) 对 $f \cdot q_n$ 成立。后一种情况可用类似论证验证，而对于 $f \cdot q_n$，条件 (ii) 也同样成立。 □

令 $\overline{\Omega_2}$ 表示 Ω_2 在 $\Sigma_2 \times \Sigma_2^*$中的闭包。

定义 3.2. 根据命题 3.1，F 在 Ω_2 上的作用可唯一延拓为 F 在 Ω_2 上的一个同胚作用。

事实上，令 $\omega \in \overline{\Omega_2}$，并取收敛到 ω的序列 $q_n \in \Omega_2$。对于一个 $f \in F$，令 $f \cdot \omega := \lim f \cdot q_n$，由命题 3.1 可知此极限存在。若 $p_n \in \Omega_2$是另一个收敛到 ω的序列，则 $\lim f \cdot q_n = \lim f \cdot p_n$，因为序列$h_{2n} := q_n$, $h_{2n+1} := p_n$ 也收敛到 ω，因此序列 $f \cdot h_n$ 有极限，这同样由命题 3.1 得出。由此得到一个定义良好的映射 $\Omega_2 \ni \omega \mapsto f \cdot \omega \in \Omega_2$。

此映射是连续的。事实上，令 $\omega_n \in \Omega_2$ 为一个收敛到 ω的序列。对于每个 n，令 $q_m^n \in \Omega_2$ 为一个收敛到 ω_n的序列，并令 $q_m \in \Omega_2$ 为一个收敛到 ω的序列。我们有 $f \cdot q_m^n \to f \cdot \omega_n$ 和 $f \cdot q_m \to f \cdot \omega$。现在，在 Ω_2 上取一个与其拓扑相容的 m 度量 d，并令 k_n 为自然数的递增序列，使得 $d(q_{k_n}^n, \omega_n) \to 0$ 且 $d(f \cdot q_{k_n}^n, f \cdot \omega_n) \to 0$。那么 $q_{k_n}^n \to \omega$也成立，因此 $f \cdot q_{k_n}^n \to f \cdot \omega$。由此可得 $f \cdot \omega_n \to f \cdot \omega$。

现在，对于每个 $f \in F$，我们对所有 $q \in \Omega_2$ 都有 $f \cdot (f^{-1} \cdot q) = q = f^{-1} \cdot (f \cdot q)$。由连续性可知，每个映射 $\Omega_2 \ni \omega \mapsto f \cdot \omega \in \overline{\Omega_2}$ 都是同胚，其逆映射由 f^{-1}的作用给出。最后，由于该作用在稠密子空间 Ω_2 上满足结合律，依据连续性，F 在 Ω_2 上的作用也满足结合律。

注 3.3. 显然，等变紧化的构造取决于对 Ω_2, 上拓扑的谨慎选择，而某些自然拓扑并不适用。例如，考虑 Ω_2, 上定义的度量 d_τ：$d_\tau(p, q) = \tau(|p - q|)$。对于 F 中的元素 $f = \sum_{(\mu,\nu)\in\mathcal{J}} S_\mu S_\nu^*$，令

$$\ell(f) = \max\{||\alpha| - |\beta|| \mid (\alpha, \beta) \in \mathcal{J}\}. \tag{11}$$

于是，对于每个 $f \in F$ 以及任意两个 $p, q \in \Omega_2$，我们有

$$d_\tau(f \cdot p, f \cdot q) = \tau(f_0|p - q|f_0^*) + \tau(f_1|p - q|f_1^*) \leq 2^{\ell(f)+1}\tau(|p - q|) = 2^{\ell(f)+1}d_\tau(p, q)$$

因此，映射 $\Omega_2 \ni p \mapsto f \cdot p \in \Omega_2$ 是利普希茨的，其利普希茨常数为 $2^{\ell(f)+1}$。因此，作用 $F \curvearrowright \Omega_2$ 唯一地延拓为 F 在 Ω_2 关于度量 d_τ 的完备化上的作用。然而，这个完备化不是紧的。

也可以尝试在 Ω_2 上赋予维托里斯拓扑，或者在 X_2 上赋予一个度量，然后在 Ω_2, [10] 上定义相应的豪斯多夫距离。然而，F 在 Ω_2 上的作用关于维托里斯拓扑并不连续。□

对于 $\omega \in \Sigma_2$ 和 $k \in \mathbb{N}$，我们用 $\omega|_k$ 表示 ω的第 k 层限制。也就是说，$\omega|_k$ 是一棵有限树，当且仅当 $\alpha \in \omega$ 且 $|\alpha| \leq k$。此外，我们记 $(\omega, \eta)|_k = (\omega|_k, \eta|_k)$。

命题 3.4。以下结论成立。

1. Ω_2 是 Ω_2的离散开子空间。

2. 它的补集 $\partial\Omega_2 := \Omega_2 \setminus \overline{\Omega_2}$ 包含于 $\Sigma_2 \times \Sigma_2$ 中，且与康托尔空间同胚。

证明。空树 0 是空间 Σ_2^*中的一个孤立点。因此，集合 $\Sigma_2 \times \{0\}$ 是 (1, 0) $\in \Sigma_2 \times \Sigma_2^*$ 的一个开闭邻域，将其与集合$\{(q, 1-q) \mid 1 \neq q \in \Omega_2\}$分开。由此，1 是 Ω_2中的一个孤立点。因此，对每个 $f \in F$，点$f \cdot 1$ 在 Ω_2中也是孤立点。于是，Ω_2 在 Ω_2 中是离散开集。因此， $\partial\Omega_2$ 是 $\Sigma_2 \times \Sigma_2$ 的闭子空间。

要证明 $\partial\Omega_2$ 是一个康托尔空间，只需证明如下结论：对所有 $(\omega, \eta) \in \partial\Omega_2$ 以及所有 $k \in \mathbb{N}$，都存在一个 $m \in \mathbb{N}$ 和 Ω_2 中的一个序列 (q_n)，使得 $q_n \neq q_r$对 $n \neq r$成立，$(q_n, 1-q_n)|_k = (\omega, \eta)|_k$，且 $q_n|_m$是常数（不依赖于 n），并且不同于 $\omega|_m$。为此，取一个元素 $(\omega, \eta) \in \partial\Omega_2$ 和一个 $k \in \mathbb{N}$。根据 $\partial\Omega_2$, 的定义，存在一个 $q_0 \in \Omega_2$，使得 $(q_0, 1-q_0)|_k = (\omega, \eta)|_k$。我们还可以假设存在一个 α_0，满足 $|\alpha_0| > k$，使得其某个后继节点（记作 $\alpha_0 1$）满足 $P_{\alpha_0 1} \leq q_0$，而 $P_{\alpha_0 2} \leq 1 - q_0$。注意，若 q' 是 $P_{\alpha_0 1}$ 的任意真子投影，且满足 $q_0 - q' \in \Omega_2$，则 $q_0|_k = (q_0 - q')|_k$。现在，取 $P_{\alpha_0 1}$ 的一个真子投影q_1'，使得 $q_1 := q_0 - q_1' \in \Omega_2 \cap \mathcal{D}_2^m$具有性质 $q_1|_m \neq \omega|_m$。令$m_1 = m$，并通过归纳法构造一列两两不交、非零的 $P_{\alpha_0 1}$ 的真子投影 q_n'，使得 $q_n := q_{n-1} - q_n' \in \Omega_2 \cap \mathcal{D}_2^{m_n}$具有性质 $q_n|_{m_{n-1}} = q_{n-1}|_{m_{n-1}}$，其中 $m_n > m_{n-1}$。那么，Ω_2中的投影序列 $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ 具有所需性质。

□

注 3.5. 令 $\pi_1 : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \to \Sigma_2$ 为到第一坐标的典范投影。值得注意的是，纤维 $\pi_1^{-1}(\omega) \cap \partial\Omega_2$ 会因 $\omega \in \Sigma_2$的选择不同而有显著差异。例如，如果 ω 是一棵仅由一条无限路径构成的树，那么 $\pi_1^{-1}(\omega) \cap \partial\Omega_2$ 恰有一个点，即 $(\omega, 1)$。另一方面，$\pi_1^{-1}(1) \cap \partial\Omega_2 = \{1\} \times \Sigma_2$。□

最后，我们注意到， $\partial\Omega_2$ 中的元素 (1, 1) 被 F整体固定。

参考文献

[1] V. Aiello、A. Brothier 和 R. Conti，《源自 Temperley–Lieb–Jones 代数的汤普森群 Jones 表示》，《国际数学研究通知》15（2021），11209–11245。F V. Aiello 和 V. F. R. Jones，《关于 R. Thompson 群某些酉表示的谱测度》，《泛函分析杂志》280（2021），108777，共27页。[2] J. M. Belk 和 K. S. Brown，《汤普森群元素的森林图》，《国际代数与计算杂志》15（2005），815–850。

[4] J.-C. Birget, 《Richard Thompson 群与复杂性》，纪念 John Rhodes 教授65岁生日的半群与群国际会议，《国际代数与计算杂志》14（2004），569–626。[5] M. Brin 和 C. Squier，《实数直线上的分段线性同胚群》，《数学发明》79（1985），485–498。[6] A. Brothier 和 V. F. R. Jones，《汤普森群的毕达哥拉斯表示》，《泛函分析杂志》277（2019），2442–2469。[7] A. Brothier 和 V. F. R. Jones，《关于 R. Thompson 群的 Haagerup 性质和 Kazhdan 性质》，《群论杂志》22（2019），795–807。[8] J. W. Cannon、W. J. Floyd 和 W. R. Parry，《Richard Thompson 群导论札记》，《数学教学》（第2辑）42（1996），215–256。[9] J. Cuntz，由等距算子生成的单 C^*代数，《数学物理通讯》57（1977），173–185。[10] R. Engelking，《一般拓扑学》，2nd 第6卷，Sigma 纯数学丛书，柏林：Heldermann 出版社，1989。[11] D. S. Farley，《汤普森群在希尔伯特空间上的真等距作用》，《国际数学研究通知》45（2003），2409–2414。[12] D. Farley，《汤普森群在 CAT(0) 边界上的作用》，《群、几何与动力学》2（2008），185–222。[13] ˙L. Garncarek，《汤普森群 F和 T的主系列表示类比》，《印第安纳大学数学杂志》61（2012），619–626。[14] G. Golan 和 M. Sapir，《R. Thompson 群 F中有限个数的稳定子》，《代数与分析》29（2017），70–110。[15] U. Haagerup 和 K. K. Olesen，《汤普森群 T和 V的非内在可平均性》，《泛函分析杂志》272（2017），4838–4852。[16] U. Haagerup 和 G. Picioroaga，《汤普森群的新表示及其应用》，《算子理论杂志》66（2011），217–232。[17] G. Higman，《有限表示的无限单群》，《纯数学札记》第8卷，澳大利亚国立大学，堪培拉，1974。[18] V. F. R. Jones，《汤普森群 F 和 T的一些酉表示》，《组合代数杂志》1（2017），1–44。[19] K. R. Milliken，《关于树的无限子树的分割定理》，《美国数学会汇刊》263（1981），137–148。

[20] V. Nekrashevych，《群作用的 Cuntz-Pimsner代数》，《算子理论杂志》52（2004），223–249。

Jeong Hee Hong 数学与计算机科学系 南丹麦大学 Campusvej 55，DK–5230 Odense M，丹麦
电子邮件：hongjh@imada.sdu.dk

Wojciech Szyma´nski 数学与计算机科学系 南丹麦大学 Campusvej 55，DK–5230 Odense M，丹麦 电子邮件：szymanski@imada.sdu.dk