arXiv:2303.10375v1 [math.QA] 18 Mar 2023

轨形顶点算子代数 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(k,0)^K$ 的融合规则

Rabia Iqbal [1] 和 Cuipo Jiang [2]上海交通大学数学科学学院，中国上海 200240

摘要

对于克莱因四元群 K 以及一个正整数 k，轨形顶点算子代数 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(k,0)^K$ 的不可约模已在 [JWa21] 中分类并构造。本文将完全确定 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(k,0)^K$ 的融合规则。

1 引言

设 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的三维单李代数。对于正整数 k，令 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(k,0)$ 为相应的有理单仿射顶点算子代数 [FZ92], [LL04]。已知 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(k,0)$ 的自同构群为 $PSL(2)$。给定 $PSL(2)$ 的有限子群 G，轨形顶点算子代数 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(k,0)^G$ 是单的，并且人们猜想它是有理的；当 G 可解时，这一猜想已得到证明 [CM16]。研究轨形顶点算子代数 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(k,0)^G$ 的结构和表示是十分自然且有意义的。如果 $|G| = 2$，则 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(k,0)^G$ 的不可约模和融合规则已在 [JW20] 中刻画。若 G 是自同构群 $\mathrm{Aut}(L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(k,0))$ 中由对合 σ_1 和 σ_2 生成的克莱因子群 K，其中这两个对合分别定义为 $\sigma_1(h(-1)\mathbf{1}) = h(-1)\mathbf{1}$, $\sigma_1(e(-1)\mathbb{I}) = -e(-1)\mathbf{1}$, $\sigma_1(f(-1)\mathbb{I}) = -f(-1)\mathbb{I}$' 和 $\sigma_2(h(-1)\mathbb{I}) = -h(-1)\mathbf{1}$, $\sigma_2(e(-1)\mathbb{I}) = f(-1)\mathbf{1}$, $\sigma_2(f(-1)\mathbb{I}) = e(-1)^{\mathbb{I}}$，则 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(k,0)^K$ 的不可约模已在 [JWa21], 中分类，其中 $\{e,f,h\}$ 是 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 的标准基。本文将完整确定 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(k,0)^K$ 的融合规则。正如 [JWa21], 中所指出的，若 $k = 1$，则 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(1,0)^K$ 同构于轨道格顶点代数 $V_{\mathbb{Z}\beta}^+$，且 $(\beta|\beta) = 8$。$V_{\mathbb{Z}\gamma}^+$ 在 $(\gamma|\gamma) \in 2\mathbb{Z}_+$ 时的不可约模分类和融合规则分别见 [DN99] 和 [Ab01] 。若 $k = 2$，则 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(2,0)^K \cong L(\mathbf{1}\ 2\ ,0)^{\otimes 3}$，其中 $L(\mathbf{1}\ 2\ ,0)$ 是中心荷为 1 2 的简单 Virasoro顶点算子代数。 $L(\mathbf{1}\ 2,0)$ 的融合规则见 [DMZ94] 和 [W93]。因此本文假设 $k \geq 3$ 。注意，克莱因群 K 不是循环群。这意味着我们需要确定 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(k,0)^K$ 中来自 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(k,0)$ 关于不同对合的扭曲模的模的融合积。然而，在这种情况下，相应的交织算子通常不易构造。我们不直接构造相应的交织算子，而是注意到当 k 为

[1]由中国国家自然科学基金项目 No. 12171312 资助。电子邮件：rabipu14@sjtu.edu.cn。[2]由中国国家自然科学基金项目 No.12171312 资助。电子邮件：cpjiang@sjtu.edu.cn。2010年数学主题分类：17B69。关键词：轨形顶点算子代数、不可约模、融合规则。

偶正整数时，$V_{\mathbb{Z}\gamma}^{+}\otimes K_0^{+}$ 是 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(k,0)^K$ 的共形顶点子代数。因此，我们可以将 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(k,0)^K$ 的不可约模分解为 $V_{\mathbb{Z}\gamma}^{+}\otimes K_0^{+}$ 的不可约模的直和。利用 [Ab01] 和 [JW20] 中得到的融合规则，我们便可得到所需的融合积；其中 $V_{\mathbb{Z}\gamma}^{+}$ 和 K_0^{+} 分别是格顶点算子代数和副共形代数关于对合 σ_2 以及海森堡李代数 $\mathbb{C}h$ 的轨形子代数。 k 为奇整数的情形较容易处理。我们想指出，利用给出的融合规则，可以很容易地得到 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(k,0)^K$ 的 S-矩阵。

$L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(k,0)^K$的研究也部分受到 [JLam19]工作的启发。设 $\mathfrak{so}_m$为 $\mathbb{C}$上的正交单李代数，$L_{\widehat{\mathfrak{so}_m}}(1,0)$为其层为1的相应简单有理仿射顶点算子代数。对于 $\ell\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$，张量积 $L_{\widehat{\mathfrak{so}_m}}(1,0)^{\otimes\ell}$仍然是有理的，而仿射李代数 $\widehat{\mathfrak{so}_m}$在$L_{\widehat{\mathfrak{so}_m}}(1,0)^{\otimes\ell}$上的对角作用定义了一个层为 ℓ的顶点子代数$L_{\widehat{\mathfrak{so}_m}}(\ell,0)$。 $m\geqslant 4,\ell\geqslant 3$对应的交换子顶点算子代数$C_{L_{\widehat{\mathfrak{so}_m}}(1,0)^{\otimes\ell}}(L_{\widehat{\mathfrak{so}_m}}(\ell,0))$在[JLam19]中被刻画为一个轨形顶点算子代数，它同构于 $L_{\widehat{\mathfrak{so}_l}}(m,0)^G$，或者当 $l\geq 4$时同构于$(L_{\widehat{\mathfrak{so}_l}}(m,0)\oplus L_{\widehat{\mathfrak{so}_l}}(m,m\Lambda_1))^G$，其中 G是由对合生成的有限阿贝尔群。当 $l=3$时，如果 m为奇数，$C_{L_{\widehat{\mathfrak{so}_m}}(1,0)^{\otimes 3}}(L_{\widehat{\mathfrak{so}_m}}(3,0))$可实现为轨形顶点算子代数$L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(2m,0)^K$；如果 m为偶数，则可实现为$(L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(2m,0)+L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(2m,2m))^K$。此外，$C_{L_{\widehat{\mathfrak{so}_m}}(1,0)^{\otimes 3}}(L_{\widehat{\mathfrak{so}_m}}(3,0))$是$C_{L_{\widehat{\mathfrak{so}_m}}(1,0)^{\otimes\ell}}(L_{\widehat{\mathfrak{so}_m}}(\ell,0))$的构件。

本文的组织结构如下。第2节简要回顾顶点算子代数的一些基本记号和事实。第3节给出若干引理和命题，这些内容对我们确定融合规则非常有用。第4节专门给出 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(k,0)^K$的所有融合规则。全文中，我们始终假设 k 是一个正整数。

我们用符号 $\mathbb{C}$、 $\mathbb{Z}$和 $\mathbb{Z}_+$ 分别表示复数、整数和正整数集。

2 预备知识

本节首先回顾来自[DLM98], [DLM00], [FHL93], [LL04] 和 [Z96], [DJX13], [MT04]的顶点算子代数的一些基础知识和事实。然后回顾来自[JWa21]的若干主要结果。

设$(V,Y,\mathbb{1},\omega)$是一个顶点算子代数 [Bor86], [FLM88]。设 g是顶点算子代数 V的一个有限阶自同构 T。将V 按 g 的特征子空间分解记为:

$$V=\bigoplus_{r\in\mathbb{Z}/T\mathbb{Z}}V^r,$$

其中$V^r=\{v\in V|gv=e^{-2\pi\sqrt{-1}\frac{r}{T}}v\}$, $0\leqslant r\leqslant T-1$。在这种情况下，我们用 r表示介于 0 和 $T-1$ 之间的整数，也表示其模 T 的剩余类。

定义 2.1. 设 V 是一个顶点算子代数。弱 g-扭曲 V-模是一个

配备线性映射的向量空间 M

$$\begin{aligned} Y_M(\cdot,x): V &\longrightarrow (\mathrm{End}\, M)[[x^{\frac{1}{T}}, x^{-\frac{1}{T}}]] \\ v &\longmapsto Y_M(v,x) = \sum_{n\in\frac{1}{T}\mathbb{Z}} v_n x^{-n-1}, \end{aligned}$$

其中 $v_n \in \mathrm{End}\ M$，满足以下关于 $0 \leqslant r \leqslant T-1$, $u \in V^r, v \in V, w \in M$ 的条件:

$$Y_M(u,x) = \sum_{n\in\frac{r}{T}+\mathbb{Z}} u_n x^{-n-1},$$

$$u_s w = 0 \quad for \quad s \gg 0,$$

$$Y_M(\mathbf{1},x) = id_M,$$

$$x_0^{-1}\delta(\frac{x_1-x_2}{x_0})Y_M(u,x_1)Y_M(v,x_2) - x_0^{-1}\delta(\frac{x_2-x_1}{-x_0})Y_M(v,x_2)Y_M(u,x_1)$$

$$= x_2^{-1}(\frac{x_1-x_0}{x_2})^{-\frac{r}{T}}\delta(\frac{x_1-x_0}{x_2})Y_M(Y(u,x_0)v,x_2),$$

其中 $\delta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^n$ ，所有二项式表达式均按第二个变量的非负整数次幂展开。

我们有以下 Borcherds 恒等式 [DLM98], [Ab01]。

$$[u_{m+\frac{r}{T}}, v_{n+\frac{s}{T}}] = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m+\frac{r}{T}}{i} (u_i v)_{m+n+\frac{r+s}{T}-i}, \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{\frac{r}{T}}{i} (u_{m+i}v)_{n+\frac{r+s}{T}-i} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{m}{i} (u_{m+\frac{r}{T}-i}v_{n+\frac{s}{T}+i} - (-1)^m v_{m+n+\frac{s}{T}-i}u_{\frac{r}{T}+i}), \tag{2}$$

其中 $u \in V^r$, $v \in V^s$, $m, n \in \mathbb{Z}$。

定义 2.2. 可容许的 g-扭曲 V-模是一个弱 g-扭曲 V-模，其带有一个 $\frac{1}{T}\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$-分次 $M = \oplus_{n\in\frac{1}{T}\mathbb{Z}_{\geqslant 0}} M(n)$，满足 $v_m M(n) \subseteq M(n+r-m-1)$，其中 $v \in V_r$, $m, n \in \frac{1}{T}\mathbb{Z}$ 为齐次元素。

定义 2.3. g-扭曲 V-模是一个弱 g-扭曲 V-模，其带有一个 $\mathbb{C}$-分次:

$$M = \oplus_{\lambda\in\mathbb{C}} M_\lambda,$$

使得对于固定的 λ 和 $n \ll 0$， $L(0)w = \lambda w = (\mathrm{wt}\ w)w$，有 $\dim\ M_\lambda < \infty$, $M_{\lambda+\frac{n}{T}} = 0\, w \in M_\lambda$，其中 $L(0)$ 是 $Y_M(\omega,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n)x^{-n-2}$ 的分量算子。

定义 2.4. 若 $V/C_2(V)$ 是有限维的，则称顶点算子代数为 C_2-余有限，其中 $C_2(V) = \langle u_{-2}v \mid u, v \in V\rangle$。

我们有以下结果，出自 [ABD04], [DLM98] 和 [Z96]。

定理 2.5. 设 V 是满足 C_2-余有限性质的顶点算子代数，则 V 至多有有限多个不可约可容许模（按同构分类）。 V 的有理性也蕴含同样的结论。

我们有以下结果，出自 [DLM98] 和 [DLM00]。

定理 2.6. 设 V 是一个 g-有理顶点算子代数，则

(1) 任意不可约可容许的 g-扭曲 V-模 M 都是一个 g-扭曲 V-模。此外，存在一个数 $\lambda \in \mathbb{C}$，使得 $M = \oplus_{n\in\frac{1}{T}\mathbb{Z}_{\geqslant 0}} M_{\lambda+n}$，其中 $M_\lambda \neq 0$。数 λ称为 M的共形权；

(2) 不可约可容许的 g-扭曲 V-模在同构意义下只有有限多个。

定义 2.7. 设 $M = \bigoplus_{n\in\frac{1}{T}\mathbb{Z}_+} M(n)$ 是一个可容许的 g-扭曲 V-模，则对偶模 M' 定义如下:

$$M' = \bigoplus_{n\in\frac{1}{T}\mathbb{Z}_+} M(n)^*,$$

其中 $M(n)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M(n)\ \mathbb{C})$。顶点算子 $Y_{M'}(v,z)$ 对于 $v \in V$定义为

$$\langle Y_{M'}(v,z)f, u\rangle = \langle f, Y_M(e^{zL(1)}(-z^{-2})^{L(0)}v, z^{-1})u\rangle,$$

其中 $\langle f, w\rangle = f(w)$ 是自然配对 $M' \times M \to \mathbb{C}$.

注 2.8。 *1.* $(M', Y_{M'})$ 是一个可容许的 g^{-1}-扭曲 V-模，并且 M 当且仅当 M' 不可约时才不可约。 *[FHL93]*。

现在我们回顾 [FHL93] 中的交织算子和融合规则的概念。

定义 2.9。设 $(V,\ Y)$ 是一个顶点算子代数，且 $(W^1,\ Y^1)$、$(W^2,\ Y^2)$ 和 $(W^3,\ Y^3)$ 是 V-模。类型为 $\binom{W^3}{W^1\ W^2}$ 的交织算子是一个线性映射

$$\begin{aligned} I(\cdot,z) : W^1 &\longrightarrow \mathrm{Hom}(W^2, W^3)\{z\} \\ u &\longmapsto I(u,z) = \sum_{n\in\mathbb{Q}} u_n z^{-n-1} \end{aligned}$$

满足:

(1) 对任意 $u \in W^1$ 和 $v \in W^2$，当 $u_n v = 0$ 对 n 足够大时；(2) $I($ $L(-1)v,\ z) = \frac{d}{dz}I(v,\ z)$；(3) 对任意 $u \in V$、 $v \in W^1$，满足（雅可比恒等式）

$$z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) Y^3(u,\ z_1)I(v,\ z_2) - z_0^{-1}\delta\left(\frac{-z_2 + z_1}{z_0}\right) I(v,\ z_2)Y^2(u,\ z_1)$$

$$= z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right) I(Y^1(u,\ z_0)v,\ z_2).$$

所有类型为 $\begin{pmatrix} W^3 \\ W^1\ W^2 \end{pmatrix}$ 的交织算子构成的空间记为

$$I_V \begin{pmatrix} W^3 \\ W^1\ W^2 \end{pmatrix}.$$

令 $N_{W^1,W^2}^{W^3} = \dim\ I_V \begin{pmatrix} W^3 \\ W^1\ W^2 \end{pmatrix}$。这些整数 $N_{W^1,W^2}^{W^3}$ 通常称为融合规则。

定义 2.10。设 V 是一个顶点算子代数，W^1 和 W^2 是两个 V-模。若模 (W, I)（其中 $I \in I_V \begin{pmatrix} W \\ W^1\ W^2 \end{pmatrix}$）满足：对于任意 V-模 M 和 $\mathcal{Y} \in I_V \begin{pmatrix} M \\ W^1\ W^2 \end{pmatrix}$，都存在唯一的 V-模同态 $f: W \to M$，使得 $\mathcal{Y} = f \circ I.$，则称其为 W^1 和 W^2 的张量积（或融合积）。通常，我们将 (W, I) 记作 $W^1 \boxtimes_V W^2$，或简记为 $W^1 \boxtimes W^2$。

融合规则具有如下对称性质 [FHL93]。

命题 2.11. 设 $W^i (i = 1, 2, 3)$ 为 V-模。则

$$N_{W^1,W^2}^{W^3} = N_{W^2,W^1}^{W^3},\ N_{W^1,W^2}^{W^3} = N_{W^1,(W^3)'}^{(W^2)'}.$$

接下来，我们回顾[DLM96] 中关于 g_i-扭曲模之间的交织算子（M_i，Y_{M_i}），其中 $i = 1$，2，3；其中 g_i，$i = 1$，2，3 是 V的阶为T_i，$i = 1$，2，3 的交换自同构。 V可分解为公共特征子空间的直和

$$V = \bigoplus_{j_1,j_2} V_{j_1,j_2},$$

其中 $V_{j_1,\ j_2} = \{v \in V | g_s \cdot v = e^{\frac{2\pi j_s\sqrt{-1}}{T_s}} v,\ s = 1, 2\}$。

给定数据下，类型为 $\begin{pmatrix} M^3 \\ M^1\ M^2 \end{pmatrix}$ 的交织算子是一个线性映射

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}:\ M^1 &\longrightarrow \mathrm{Hom}(M^2, M^3)\{z\} \\ u &\longmapsto \mathcal{Y}(u, z) = \sum_{n\in\mathbb{C}} u_n z^{-n-1} \end{aligned}$$

使得对于 $w^i \in M_i$、$i = 1$、2、固定的 $c \in \mathbb{C}$，以及足够大的 $n \in \mathbb{Q}$

$$w_{n+c}^1 w^2 = 0,$$

以下（广义）雅可比恒等式在 M_2 上成立：对于 $u \in V_{j_1,\ j_2}$ 和 $w \in M_1$,

$$z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)^{j_1/T_1} Y_{M_3}(u,\ z_1)\mathcal{Y}(v,\ z_2) - z_0^{-1}\delta\left(\frac{-z_2+z_1}{z_0}\right)^{j_1/T_1} \mathcal{Y}(v,\ z_2)Y_{M_2}(u,\ z_1)$$

$$= z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right)^{-j_2/T_2} \mathcal{Y}(Y_{M_1}(u,\ z_0)v,\ z_2),$$

and

$$\mathcal{Y}(L(-1)v,z) = \frac{d}{dz}\mathcal{Y}(v,z)$$

向量空间的维数$N_{M_1,\ M_2}^{M_3}$其中交织算子的类型为$\begin{pmatrix} M^3 \\ M^1 \ M^2 \end{pmatrix}$，称为融合规则。若$N_{M_1,\ M_2}^{M_3} \geq 1$则 $g_3 = g_1 g_2$ [DLM96]。

最后，我们回顾一些关于量子维数的概念[DJX13]。

定义 2.12. 设 $M = \oplus_{n\in\frac{1}{T}\mathbb{Z}_+} M_{\lambda+n}$ 为一个 g-扭模， M的形式特征标定义为

$$ch_q M = tr_M q^{L(0)-c/24} = q^{\lambda-c/24}\sum_{n\in\frac{1}{T}\mathbb{Z}_+} (\dim M_{\lambda+n})\, q^n,$$

其中， c 是顶点算子代数 V 的中心荷，而 λ 是 M的共形权。

文献 [Z96], [DLM00] 证明了 $\mathrm{ch}_q M$ 在区域内收敛到一个全纯函数 $|q|<1$. 我们将全纯函数 $\mathrm{ch}_q M$ 记为 $Z_M(\tau)$。此处及下文中，τ 属于上半平面 $\mathbb{H}$ 且 $q = e^{2\pi i\tau}$。

设 V是一个顶点算子代数，且 M是一个 g-扭曲的 V-模，满足 $Z_V(\tau)$ 和 $Z_M(\tau$均存在。定义 M 在 V上的量子维数为[DJX13]

$$\mathrm{qdim}_V M = \lim_{y\to 0}\frac{Z_M(iy)}{Z_V(iy)},$$

其中 y为正实数。设 $M^0 \cong V$、 M^1、 $\cdots$、 M^d表示所有两两不等价的不可约 V-模。此外，假设 λ_i的共形权 M^i对所有 $i>0$. 均为正。则 [DJX13]

$$\mathrm{qdim}_V\left(M^i \boxtimes M^j\right) = \mathrm{qdim}_V M^i \cdot \mathrm{qdim}_V M^j$$

对于 i、 $j=0$、 $\cdots$、 d.

3 引理和命题

本节中，我们确定 orbifold 顶点算子代数$L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(k,0)^K$的融合规则。为方便起见，我们将 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(k,i)$ 简记为 $L(k,i)$，并将 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(k,0)^K$简记为$L(k,0)^K$。

我们首先回顾 $L(k,\ 0)^K$及其不可约模，参见 [JWa21]。设 $\{e, f, h\}$ 是 $\mathfrak{sl}_2$(ℂ 的一组标准基。设 σ_1 和 σ_2 是 $\mathfrak{sl}_2$(ℂ的两个自同构，定义如下:

$$\sigma_1(h) = h,\ \sigma_1(e) = -e,\ \sigma_1(f) = -f;$$

$$\sigma_2(h) = -h,\ \sigma_2(e) = f,\ \sigma_2(f) = e.$$

那么， σ_1 和 σ_2 可以提升为简单顶点算子代数L(k, 0)的自同构。令 K为由 σ_1和 σ_2生成的 L(k, 0)的自同构子群。那么K 是阶为 4 的克莱因四元群，因为 $\sigma_1^2 = 1$、 $\sigma_2^2 = 1$和 $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$。记

$$\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2.$$

令 α 为 $\mathfrak{sl}_2$(ℂ)的简单根，其中 $(\alpha|\alpha) = 2$。根据 [FZ92], , 可积最高权 L(k, 0)-模 L(k, i) 为 $0 \leqslant i \leqslant k$ 提供了不可约L(k, 0)-模的完整列表，其最低权空间分别是 $(i + 1)$ 维不可约$\mathfrak{sl}_2$(ℂ)-模 $L(\frac{i\alpha}{2})$。设

$$h^{(1)} = h, \quad e^{(1)} = e, \quad f^{(1)} = f,$$

$$h^{(2)} = e + f, \quad e^{(2)} = \frac{1}{2}(h - e + f), \quad f^{(2)} = \frac{1}{2}(h + e - f),$$

$$h^{(3)} = \sqrt{-1}(e - f), \quad e^{(3)} = \frac{1}{2}(\sqrt{-1}h + e + f), \quad f^{(3)} = \frac{1}{2}(-\sqrt{-1}h + e + f).$$

那么 $\{h^{(r)}, e^{(r)}, f^{(r)}\}$、 $r = 1$、2、3 是 $\mathfrak{sl}_2$-三元组，并且

$$\sigma_r(h^{(r)}) = h^{(r)}, \quad \sigma_r(e^{(r)}) = -e^{(r)}, \quad \sigma_r(f^{(r)}) = -f^{(r)}.$$

对于 $0 \leq i \leq k$ 和 σ_r, $r = 1, 2, 3$, 令 $v^{r,i,0}$ 为 $\mathfrak{sl}_2$(ℂ) 关于 $\mathfrak{sl}_2$-三元组 $\{h^{(r)}, e^{(r)}, f^{(r)}\}$ 的最高权向量，其权为 i，并令

$$v^{r,i,j} = \frac{1}{j!}f^{(r)}(0)v^{r,i,0}, \quad 0 \leqslant j \leqslant i.$$

Then

$$h^{(r)}(0)v^{r,i,j} = (i - 2j)v^{r,i,j} \quad \text{for} \quad 0 \leqslant j \leqslant i,$$
$$e^{(r)}(0)v^{r,i,0} = 0, \quad e^{(r)}(0)v^{r,i,j} = (i - j + 1)v^{r,i,j-1} \quad \text{for} \quad 1 \leqslant j \leqslant i,$$
$$f^{(r)}(0)v^{r,i,i} = 0, \quad f^{(r)}(0)v^{r,i,j} = (j + 1)v^{r,i,j+1} \quad \text{for} \quad 0 \leqslant j \leqslant i - 1,$$
$$a^{(r)}(n)v^{r,i,j} = 0 \quad \text{for} \quad a \in \{h, e, f\}, \quad n \geqslant 1.$$

对于 $0 \leq j \leq i$，我们将 $v^{1,i,j}$ 记为 $v^{i,j}$。于是我们可以假设

$$v^{2,i,i} = \sum_{j=0}^{i}(-1)^j v^{i,j}, \quad v^{3,i,i} = \sum_{j=0}^{i}(\sqrt{-1})^j v^{i,j}.$$

回忆一下，根据 [JWa21], , 对于 $i \in 2\mathbb{Z}_{\geq 2}$, $r = 1, 2, 3$, $L(k, i)^{\sigma_r, j}$, $j = 1, 2, 3, 4$，它们是由共形权向量 $v^{r,i,0} + v^{r,i,i}$, $v^{r,i,0} - v^{r,i,i}$ 生成的不可约 L(k, 0)^K-模,

$v^r,_{i,1}+v^r,_{i,i}{}^{i-1}$ 和 $v^r,_{i,1}-v^r,_{i,i}{}^{i-1}$ 分别如此。对于 $i=2$, $L(k,2)^{\sigma_r,j}$, $j=1,2,3,4$, 它们是由共形权向量 $v^r,_{2,0}+v^r,_{2,2}$,$v^r,_{2,0}-v^r,_{2,2}$, $v^r,_{2,1}$ 和 $h^{(r)}(-1)v^r,_{2,1}$ 生成的不可约 $L(k,0)^K$-模。对于 $i=0$, $L(k,0)^{\sigma_r,j}$, $j=1,2,3,4$, 它们是由共形权向量 1, $h^{(r)}(-1)1$, $(e^{(r)}+f^{(r)})(-1)1$ 和 $(e^{(r)}-f^{(r)})(-1)1$ 生成的不可约 $L(k,0)^K$-模。

为简便起见，对于 $0\leq i\leq k$、 $i\in 2\mathbb{Z}$、 $1\leq l\leq 4$，我们分别将 $L(k,i)^{\sigma_1,l}$ 记作 $L(k,i)^l$。特别地， $L(k,0)^1=L(k,0)^K$，以及 $L(k,0)^j$, $j=2,3,4$ 分别由 $h(-1)1$、$(e(-1)+f(-1))1$、$(e(-1)-f(-1))1$ 生成。由 [JWa21]，我们得到以下结果。

定理 3.1. (1) 若 $k\in 2\mathbb{Z}_{\geqslant 0}+1$，则存在 $^{11}{}_{(k+1)^2}$ 个两两不等价的不可约 $L(k,0)^K$-模，如下所示：

$$L(k,i)^+,\ L(k,j)^l,\ 1\leqslant i\leqslant k,\ i\in 2\mathbb{Z}+1,\ 0\leqslant j\leqslant k,\ j\in 2\mathbb{Z},\ 1\leqslant l\leqslant 4,$$

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_r,+},\ \overline{L(k,i)}^{\sigma_r,-},\ 0\leqslant i\leqslant\frac{k-1}{2},\ r=1,2,3.$$

(2) 若 $k\in 2\mathbb{Z}_+$，则存在 $\frac{11k+32}{2}$ 个两两不等价的不可约 $L(k,0)^K$-模，如下所示：

$$L(k,i)^+,\ L(k,j)^l,\ 1\leqslant i\leqslant k,\ i\in 2\mathbb{Z}+1,\ 0\leqslant j\leqslant k,\ j\in 2\mathbb{Z},\ 1\leqslant l\leqslant 4,$$

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_r,+},\ \overline{L(k,i)}^{\sigma_r,-},\ \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_r,l},\ 0\leqslant i\leqslant\frac{k}{2}-1,\ r=1,2,3,\ 1\leqslant l\leqslant 4,$$

$where\ \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_r,1}+\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_r,2}=\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_r,+},\ \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_r,3}+\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_r,4}=\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_r,-}.$

容易看出，对于 $r=1$、2、3，

$$L(k,0)^{\sigma_r,j}\boxtimes\overline{L(k,i)}^{\sigma_r,\pm}=\overline{L(k,i)}^{\sigma_r,\pm},\ j=1,2, \tag{3}$$

$$L(k,0)^{\sigma_r,j}\boxtimes\overline{L(k,i)}^{\sigma_r,\pm}=\overline{L(k,i)}^{\sigma_r,\mp},\ j=3,4, \tag{4}$$

$$L(k,0)^{\sigma_r,j}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_r,1}=\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_r,j},\ j=1,2,3,4. \tag{5}$$

我们首先给出以下引理。

引理 3.2。对于 $i\in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们有

$$L(k,0)^r\boxtimes L(k,i)^1=L(k,i)^r,\ r=1,2,3,4,$$

$$L(k,0)^r\boxtimes L(k,i)^r=L(k,i)^1,\ r=1,2,3,4,$$

$$L(k,0)^r\boxtimes L(k,i)^s=L(k,i)^t,\ \{r,s,t\}=\{2,3,4\}.$$

证明。第一个公式由 $L(k,i)^r$ 的定义得出，其中 $0 \le i \le k$, $i \in 2\mathbb{Z}$,$0 \le r \le 4$。对于其他关系，注意到 $L(k,0)^2$ 由 $h(-1)\mathbf{1}$ 生成，而 $L(k,i)^2$由 $v^{i,j}_v^{i,i-j}$ 生成，其中 $j \in 2\mathbb{Z}$, $0 \le j \le i$。由于

$$h(0)(v^{i,j} - v^{i,i-j}) = (i-2j)(v^{i,j} + v^{i,i-j}),$$

由此可得 $L(k,0)^2 \boxtimes L(k,i)^2 = L(k,i)^1$。根据定义， $L(k,0)^3$ 由 $(e(-1) + f(-1))\mathbf{1}$ 生成，而 $L(k,i)^3$ 由 $v^{i,j}_v^{i,i-j}$ 生成，其中 $j \in 2\mathbb{Z}+1$, $0 \le j \le i$。注意到

$$(e+f)(0)(v^{i,j} + v^{i,i-j}) = (i-j+1)(v^{i,j-1} + v^{i,i-j+1}) + (j+1)(v^{i,j+1} + v^{i,i-j-1}) \in L(k,i)^1.$$

这意味着 $L(k,0)^3 \boxtimes L(k,i)^3 = L(k,i)^1$。显然， $L(k,0)^4 \boxtimes L(k,i)^4 = L(k,i)^1$ 这一公式可由以下事实推出：

$$(e-f)(0)(v^{i,j} - v^{i,i-j}) = (i-j+1)(v^{i,j-1} + v^{i,i-j+1}) - (j+1)(v^{i,j+1} + v^{i,i-j-1}) \in L(k,i)^1.$$

最后一个关系的证明类似。 □

引理 3.3. 对于 $i \in 4\mathbb{Z}+2$, 我们有

$$L(k,i)^1 = L(k,i)^{\sigma_2,1} = L(k,i)^{\sigma_3,3},$$
$$L(k,i)^2 = L(k,i)^{\sigma_2,3} = L(k,i)^{\sigma_3,2},$$
$$L(k,i)^3 = L(k,i)^{\sigma_2,2} = L(k,i)^{\sigma_3,1},$$
$$L(k,i)^4 = L(k,i)^{\sigma_2,4} = L(k,i)^{\sigma_3,4}.$$

对于 $i \in 4\mathbb{Z}$, 我们有

$$L(k,i)^1 = L(k,i)^{\sigma_2,1} = L(k,i)^{\sigma_3,1},$$
$$L(k,i)^2 = L(k,i)^{\sigma_2,3} = L(k,i)^{\sigma_3,4},$$
$$L(k,i)^3 = L(k,i)^{\sigma_2,2} = L(k,i)^{\sigma_3,3},$$
$$L(k,i)^4 = L(k,i)^{\sigma_2,4} = L(k,i)^{\sigma_3,2}.$$

证明。注意到 $v^{2,i,i} = \sum_{j=0}^{i}(-1)^j v^{i,j}$, $v^{3,i,i} = \sum_{j=0}^{i}(\sqrt{-1})^j v^{i,j}$. 直接计算可得，对于 $i \in 2\mathbb{Z}$,

$$v^{2,i,0} = \sum_{j=0}^{i} v^{i,j}, \quad v^{3,i,0} = \sum_{j=0}^{i}(-\sqrt{-1})^{i+j} v^{i,j}.$$

那么对于 $i \in 2\mathbb{Z}$,

$$v^{2,i,i} + v^{2,i,0} = \sum_{\substack{0 \le j \le i \\ j \in 2\mathbb{Z}}} 2v^{i,j}, \quad v^{2,i,0} - v^{2,i,i} = \sum_{\substack{0 \le j \le i \\ j \in 2\mathbb{Z}+1}} 2v^{i,j}$$

而如果 $i \in 4\mathbb{Z}+2$,

$$v^{3,i,i}+v^{3,i,0}=\sum_{\substack{0\le j\le i\\ j\in 2\mathbb{Z}+1}} 2(\sqrt{-1})^j v^{i,j}=\sum_{\substack{0\le j<\frac{i}{2}\\ j\in 2\mathbb{Z}+1}} 2(\sqrt{-1})^j(v^{i,j}+v^{i,i-j})+2(\sqrt{-1})^{\frac{i}{2}}v^{i,\frac{i}{2}},$$

$$v^{3,i,0}-v^{3,i,i}=\sum_{\substack{0\le j\le i\\ j\in 2\mathbb{Z}}} 2(\sqrt{-1})^j v^{i,j}=\sum_{\substack{0\le j<\frac{i}{2}\\ j\in 2\mathbb{Z}}} 2(\sqrt{-1})^j(v^{i,j}-v^{i,i-j}).$$

如果 $i\in 4\mathbb{Z}$, 那么

$$v^{3,i,i}+v^{3,i,0}=\sum_{\substack{0\le j\le i\\ j\in 2\mathbb{Z}}} 2(\sqrt{-1})^j v^{i,j}=\sum_{\substack{0\le j<\frac{i}{2}\\ j\in 2\mathbb{Z}}} 2(\sqrt{-1})^j(v^{i,j}+v^{i-j})+2(\sqrt{-1})^{\frac{i}{2}}v^{i,\frac{i}{2}},$$

$$v^{3,i,0}-v^{3,i,i}=\sum_{\substack{0\le j\le i\\ j\in 2\mathbb{Z}+1}} 2(\sqrt{-1})^j v^{i,j}=\sum_{\substack{0\le j<\frac{i}{2}\\ j\in 2\mathbb{Z}+1}} 2(\sqrt{-1})^j(v^{i,j}-v^{i,i-j}).$$

这意味着, 对于 $i\in 2\mathbb{Z}$,

$$L(k,i)^{\sigma_2,j}=L(k,i)^j,\ L(k,i)^{\sigma_2,2}=L(k,i)^3,\ L(k,i)^{\sigma_2,3}=L(k,i)^2,\ j=1,4,$$

and

$$L(k,i)^{\sigma_3,j}=L(k,i)^j,\ L(k,i)^{\sigma_3,1}=L(k,i)^3,\ L(k,i)^{\sigma_3,3}=L(k,i)^1,\ j=2,4 \text{ if } i\in 4\mathbb{Z}+2,$$

$$L(k,i)^{\sigma_3,j}=L(k,i)^j,\ L(k,i)^{\sigma_3,2}=L(k,i)^4,\ L(k,i)^{\sigma_3,4}=L(k,i)^2,\ j=1,3,\ \text{if } i\in 4\mathbb{Z}.$$

其他关系可由引理 3.13 得出。 □

现在我们回顾 [DLY09], [DJWY10], [ALY14], [JW19], 和 [JW20]中的一些结果。令 $K_0=K(\mathfrak{sl}_2,k)$ 表示由 $L(k,0)$ 的海森堡顶点子代数生成的交换子顶点算子代数, 其中生成元为 $h(-1)\mathbf{1}$。 K_0 称为与 $L(k,0)$ 相关的抛物子顶点算子代数。在 [DLY09], 中构造了当 $0\le i\le k, 0\le j\le k-1$ 时的不可约 K_0- 模 $M^{i,j}$, 其中 $K_0=M^{0,0}$, 且 $M^{i,j}\cong M^{k-i,k-i+j}$。[ALY14] 中的定理 8.2 表明, 在 [DLY09] 中构造的当 $1\le i\le k, 0\le j\le i-1$ 时的 $\frac{k}{(k+1)}$ 2 个不可约 K_0-模 $M^{i,j}$ 构成了不可约K_0-模同构类的完全集。此外, K_0 是 C_2-余有限的（见 [ALY14]）, 并且是有理的（见 [ALY19]）。

回顾 [DLY09], 关于 $0\le i\le k$,

$$L(k,i)=\bigoplus_{j=0}^{k-1} V_{\mathbb{Z}\gamma+(i-2j)\gamma/2k}\otimes M^{i,j} \tag{6}$$

其中 $\gamma=h(-1)\mathbf{1}$ 使得 $(\gamma|\gamma)=2k$。设 $K_0^+=K_0^{\sigma_2}$是 [JW19] 中的 [JW20]轨形帕拉费米子顶点算子代数。那么 $K_0=K_0^+\oplus K_0^-$。我们有如下来自 [JW19] 和 [JW20]的结果。

定理 3.4. 若 $k=2n+1, n\geq 1$，则 K_0^+ 有 $(k+1)(k+7)4$ 个互不同构的不可约模。若 $k=2n, n\geq 2$，则有 $(k^2+8k+28)\ 4$ 个互不同构的不可约 K_0^+-模。更确切地说，若 $k=2n+1, n\geq 1$，集合

$$\{W(k,i)^j \ for\ 0\leq i\leq \frac{k-1}{2}, j=1,2,$$
$$(M^{i,j})^s \ for\ (i,j)=(i,\frac{i}{2}), i=2,4,6,\cdots,2n,\ \ and\ (i,j)=(2n+1,0), s=0,1,$$
$$M^{i,0}\ for\ 1\leq i\leq \frac{k-1}{2}, M^{i,j}\ for\ 3\leq i\leq k, if\ i=2m, 1\leq j\leq m-1, if\ i=2m+1, 1\leq j\leq m\}$$

给出了所有不等价的不可约 K_0^+-模。如果 $k=2n, n\geq 2$,

$$W(k,i)^j\ for\ 0\leq i\leq \frac{k}{2}, j=1,2, \widetilde{W(k,\frac{k}{2})^j}\ \ for\ j=1,2,$$
$$(M^{i,j})^s\ for\ (i,j)=(i,\frac{i}{2}), i=2,4,6,\cdots,2n, (i,j)=(n,0) and\ (i,j)=(2n,0), s=0,1,$$
$$M^{i,0}\ for\ 1\leq i\leq \frac{k-2}{2}, M^{i,j}\ for\ 3\leq i\leq k, if\ i=2m, 1\leq j\leq m-1, if\ i=2m+1, 1\leq j\leq m$$

穷尽了所有不等价的不可约 K_0^+-模。

回顾 $[\ \ 00]$ $[\ \ 10]$ $V_{\mathbb{Z}\gamma}$ $e^{\gamma}=\frac{1}{k}e\ -1\ ^k\mathbf{1}$ $e^{-\gamma}=$DLM和 DJWY，由 !( ) 和 ! $\frac{1}{k}f\ -1\ ^k\mathbf{1}$ K_0 ( ) 生成，并且由

$$W^3=k^2h(-3)_{\mathbb{I}}+3kh(-2)h(-1)_{\mathbb{I}}+2h(-1)^3{}_{\mathbb{I}}-6kh(-1)e(-1)f(-1)_{\mathbb{I}}$$
$$+3k^2e(-2)f(-1)_{\mathbb{I}}-3k^2e(-1)f(-2)_{\mathbb{I}}. \tag{7}$$

注意到 $V_{\mathbb{Z}\gamma}^+$ 由 $e^{\gamma}+e^{-\gamma}$ [DN99], 生成，并且 K_0^+ 由 $W_1^3W^3$ [JW20]生成。于是容易看出 $e^{\gamma}+e^{-\gamma}$，$W_1^3W^3\in L(k,0)^K$，对于 $k\in 2\mathbb{Z}_+$。由此可得 $V_{\mathbb{Z}\gamma}^+\otimes K_0^+\subseteq L(k,0)^K$。下面的引理容易验证。

引理 3.5. 作为 $V_{\mathbb{Z}\gamma}^+\otimes K_0^+$-模，对于 $k\in 4\mathbb{Z}+2$，我们有

$$L(k,0)^K = L(k,0)^1=V_{\mathbb{Z}\gamma}^+\otimes K_0^+\oplus V_{\mathbb{Z}\gamma}^-\otimes K_0^-$$
$$\oplus[\oplus_{2\leq i<\frac{k}{2}, i\in 2\mathbb{Z}}(V_{\mathbb{Z}\gamma-\frac{i}{k}\gamma}\otimes M^{0,i}\oplus V_{\mathbb{Z}\gamma+\frac{i}{k}\gamma}\otimes M^{0,k-i})^+],$$
$$L(k,0)^2 = V_{\mathbb{Z}\gamma}^+\otimes K_0^-\oplus V_{\mathbb{Z}\gamma}^-\otimes K_0^+\oplus[\oplus_{2\leq i<\frac{k}{2}, i\in 2\mathbb{Z}}(V_{\mathbb{Z}\gamma-\frac{i}{k}\gamma}\otimes M^{0,i}\oplus V_{\mathbb{Z}\gamma+\frac{i}{k}\gamma}\otimes M^{0,k-i})^-],$$
$$L(k,0)^3 = \oplus_{2\leq i<\frac{k}{2}, i\in 2\mathbb{Z}+1}(V_{\mathbb{Z}\gamma-\frac{i}{k}\gamma}\otimes M^{0,i}\oplus V_{\mathbb{Z}\gamma+\frac{i}{k}\gamma}\otimes M^{0,k-i})^+$$
$$\oplus V_{\mathbb{Z}\gamma+\frac{1}{2}\gamma}^+\otimes(M^{0,\frac{k}{2}})^+\oplus V_{\mathbb{Z}\gamma+\frac{1}{2}\gamma}^-\otimes(M^{0,\frac{k}{2}})^-,$$
$$L(k,0)^4 = \oplus_{2\leq i<\frac{k}{2}, i\in 2\mathbb{Z}+1}(V_{\mathbb{Z}\gamma-\frac{i}{k}\gamma}\otimes M^{0,i}\oplus V_{\mathbb{Z}\gamma+\frac{i}{k}\gamma}\otimes M^{0,k-i})^-$$
$$\oplus V_{\mathbb{Z}\gamma+\frac{1}{2}\gamma}^+\otimes(M^{0,\frac{k}{2}})^-\oplus V_{\mathbb{Z}\gamma+\frac{1}{2}\gamma}^-\otimes(M^{0,\frac{k}{2}})^+;$$

对于 $k\in 4\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
L(k,0)^K = \;& V^+_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes K_0^+ \oplus V^-_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes K_0^- \oplus [\oplus_{\substack{2\le i<\frac{k}{2}\\ i\in 2\mathbb{Z}}}(V_{\mathbb{Z}\gamma-\frac{i}{k}\gamma}\otimes M^{0,i}\oplus V_{\mathbb{Z}\gamma+\frac{i}{k}\gamma}\otimes M^{0,k-i})^+]\\
& \oplus V^+_{\mathbb{Z}\gamma+\frac{1}{2}\gamma}\otimes (M^{0,\frac{k}{2}})^+ \oplus V^-_{\mathbb{Z}\gamma+\frac{1}{2}\gamma}\otimes (M^{0,\frac{k}{2}})^-,\\
L(k,0)^2 = \;& V^+_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes K_0^- \oplus V^-_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes K_0^+ \oplus [\oplus_{\substack{2\le i<\frac{k}{2}\\ i\in 2\mathbb{Z}}}(V_{\mathbb{Z}\gamma-\frac{i}{k}\gamma}\otimes M^{0,i}\oplus V_{\mathbb{Z}\gamma+\frac{i}{k}\gamma}\otimes M^{0,k-i})^-]\\
& \oplus V^+_{\mathbb{Z}\gamma+\frac{1}{2}\gamma}\otimes (M^{0,\frac{k}{2}})^- \oplus V^-_{\mathbb{Z}\gamma+\frac{1}{2}\gamma}\otimes (M^{0,\frac{k}{2}})^+,\\
L(k,0)^3 = \;& \oplus_{\substack{1\le i<\frac{k}{2}\\ i\in 2\mathbb{Z}+1}}(V_{\mathbb{Z}\gamma-\frac{i}{k}\gamma}\otimes M^{0,i}\oplus V_{\mathbb{Z}\gamma+\frac{i}{k}\gamma}\otimes M^{0,k-i})^+,\\
L(k,0)^4 = \;& \oplus_{\substack{1\le i<\frac{k}{2}\\ i\in 2\mathbb{Z}+1}}(V_{\mathbb{Z}\gamma-\frac{i}{k}\gamma}\otimes M^{0,i}\oplus V_{\mathbb{Z}\gamma+\frac{i}{k}\gamma}\otimes M^{0,k-i})^-,
\end{aligned}$$

其中，$(V_{\mathbb{Z}\gamma-\frac{i}{k}\gamma}\otimes M^{0,\ i}\oplus V_{\mathbb{Z}\gamma+\frac{i}{k}\gamma}\otimes M^{0,\ k-i})^+$作为 $V^+_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes K_0^+$-模由 $v^{k,\ i}+v^{k,\ k-i}$生成，而 $(V_{\mathbb{Z}\gamma-\frac{i}{k}\gamma}\otimes M^{0,\ i}\oplus V_{\mathbb{Z}\gamma+\frac{i}{k}\gamma}\otimes M^{0,\ k-i})^-$由 $v^{k,\ i}-v^{k,\ k-i}$生成。

设 $V^{T_i}_{\mathbb{Z}\gamma}$, $i=1,\ 2$ 是 σ_2-扭曲 $V_{\mathbb{Z}\gamma}$-模 [D94]。由 [JW20], 可得 $0\le i\le k$, $i\ne\frac{k}{2}$, 我们有

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_2} = V^{T_{a_i}}_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes W(k,i), \tag{8}$$

其中, $a_i=1$ 或 2, 并且如果 $k\in 2\mathbb{Z}$,

$$\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2} = V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_{a_{\frac{k}{2}}}}\otimes W(k,\frac{k}{2}) + V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T'_{a_{\frac{k}{2}}}}\otimes \widetilde{W(k,\frac{k}{2})}, \tag{9}$$

其中 $V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_{a_{\frac{k}{2}}}}, V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T'_{a_{\frac{k}{2}}}}\in\{V^{T_1}_{\mathbb{Z}\gamma},\ V^{T_2}_{\mathbb{Z}\gamma}\}$。下面给出以下引理。

引理 3.6. 对于 $k\in\mathbb{Z}_+$ 和 $0\le i\le k$, 我们有

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_2} = V^{T_1}_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes W(k,i),\ i\in 2\mathbb{Z},\ i\ne\frac{k}{2}, \tag{10}$$

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_2} = V^{T_2}_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes W(k,i),\ i\in 2\mathbb{Z}+1,\ i\ne\frac{k}{2}, \tag{11}$$

$$\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2} = V^{T_2}_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes (W(k,\frac{k}{2})\oplus\widetilde{W(k,\frac{k}{2})}),\ k\in 4\mathbb{Z}+2, \tag{12}$$

and

$$\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2} = V^{T_1}_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes (W(k,\frac{k}{2})\oplus\widetilde{W(k,\frac{k}{2})}),\quad k\in 4\mathbb{Z}, \tag{13}$$

作为 $V^+_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes K_0^+$-模。

证明。 我们先证明（10）对于 $i=0$。文献 [JW20] 指出

$$\overline{L(k,0)}^{\sigma_2}=V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_s}\otimes W(k,0),$$

其中 $s=1$ 或 2。现在我们证明 $s=1$。我们需要考察 $(e^{\gamma}+e^{-\gamma})^{k-1}=\frac{1}{k!}(e(-1)^k\mathbf{1}+f(-1)^k\mathbf{1})_{k-1}$ 在 $L(k,0)^{\sigma_2}$ 的最低权向量 $\mathbf{1}$ 上的扭曲作用。回忆 [JWa21] 中的结论 $h^{(2)}=e+f$。然后，利用 [Li97-2]，中引入的 $\Delta(\cdot,z)$-系统，我们得到

$$\begin{aligned}&Y_{\sigma_2}(e(-1)^k\mathbf{1}+f(-1)^k\mathbf{1},z)\\ =\;&Y(z^{\frac{1}{4}(e+f)(0)}\exp(\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{(e+f)(n)}{-4n}(-z)^{-n})(e(-1)^k\mathbf{1}+f(-1)^k\mathbf{1}),z).\end{aligned}$$

直接计算可得，对于 $n\geq 2$,

$$(e(n)+f(n))(e(-1)^k\mathbf{1}+f(-1)^k\mathbf{1})=0,$$

并且对于 $0\leq m\leq k$,

$$f(1)^m e(-1)^k\mathbf{1}=\frac{m!k!}{(k-m)!}e(-1)^{k-m}\mathbf{1},\quad e(1)^m f(-1)^k\mathbf{1}=\frac{m!k!}{(k-m)!}f(-1)^{k-m}\mathbf{1}.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}&\exp(\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{(e+f)(n)}{-4n}(-z)^{-n})(e(-1)^k\mathbf{1}+f(-1)^k\mathbf{1})\\ =\;&\sum_{m=0}^{k-1}\tfrac{k!}{4^m(k-m)!}z^{-m}(e(-1)^{k-m}\mathbf{1}+f(-1)^{k-m}\mathbf{1})+\tfrac{k!}{2^{2k-1}}z^{-k}\mathbf{1}.\end{aligned}$$

对于 $n\geq 1$,

$$z^{\frac{1}{4}(e+f)(0)}(e(-)^n\mathbf{1}+f(-1)^n\mathbf{1})=z^{\frac{1}{4}(e+f)(0)}[\tfrac{1}{2^n}(h^{(2)}(-1)-e^{(2)}(-1)+f^{(2)}(-1))^n\mathbf{1}$$

$$+\tfrac{1}{2^n}(h^{(2)}(-1)+e^{(2)}(-1)-f^{(2)}(-1))^n\mathbf{1}]=\tfrac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}z^j u^{(n,j)}+\tfrac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}z^{-j}v^{(n,j)}$$

对于某个权为 n 的 $u^{(n,j)},v^{(n,j)}\in L(k,0)$。因此

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{k!}(e(-1)^k\mathbf{1}+f(-1)^k\mathbf{1})_{k-1}\mathbf{1}=\sum_{m=0}^{k-1}\tfrac{1}{4^m(k-m)!}[\sum_{j=0}^{[\frac{k-m}{2}]}u^{(m,j)}(k-m+j-1)\\ &+\sum_{j=1}^{[\frac{k-m}{2}]}v^{(m,j)}(k-m-j-1)]\mathbf{1}+\tfrac{1}{2^{2k-1}}\mathbf{1}=\tfrac{1}{2^{2k-1}}\mathbf{1},\end{aligned}$$

由于 $k-m-j-1\geq 0$。结合（8），可得对于 $k\in\mathbb{Z}_+$,

$$\overline{L(k,0)}^{\sigma_2}=V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_1}\otimes W(k,0).$$

注意，对于 $0 \leq i \leq k$,

$$L(k,i) = \bigoplus_{j=0}^{k-1} V_{\mathbb{Z}\gamma+(i-2j)\gamma/2k} \otimes M^{i,j},$$

and

$$L(k,i) \boxtimes \overline{L(k,0)}^{\sigma_2} = \overline{L(k,i)}^{\sigma_2}.$$

那么，其他关系可由以下事实推出：[Ab01]

$$V_{\mathbb{Z}\gamma+\frac{i}{2k}\gamma} \boxtimes V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_1} = V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_1}, \text{ if } i \text{ is even},$$

and

$$V_{\mathbb{Z}\gamma+\frac{i}{2k}\gamma} \boxtimes V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_1} = V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_2}, \text{ if } i \text{ is odd}.$$

□

引理 3.7. 假设 $k \in 2\mathbb{Z}_+$，那么作为 $V_{\mathbb{Z}\gamma}^+ \otimes K_0^+$-模，对于 $0 \leq i \leq k$，有 ,

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_1} = \oplus_{j=0}^{k-1} V_{\mathbb{Z}\gamma+(\frac{k-2i}{4k}-\frac{j}{k})\gamma} \otimes M^{i,j}, \quad 0 \leq i \leq k. \tag{14}$$

证明。由 [JWa21] 可知， $\sigma_1 = e^{2\pi i h'(0)}$，其中 $h' = \frac{1}{4}h$。 σ_1-扭曲的 $L(k, 0)$- 模 $L(k, i)^{\sigma_1}$ 可通过 $\overline{\Delta}(\cdot, z)$-系统 [Li97-2]构造。令

$$\Delta(h', z) = z^{h'(0)} \exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h'(n)}{-n}(-z)^{-n}).$$

那么 $(\overline{L(k,i)}^{\sigma_1}, Y_{\sigma_1}(\cdot, z)) = (L(k, i)\ Y(\Delta(h', z)\cdot, z))$ 是一个不可约的 σ_1-扭曲 $L(k, 0)$-模 [Li97-2]。由 (7) 以及 $V_{\mathbb{Z}\gamma}$由 $e^{\gamma} = \frac{1}{k}! e(-1)^k 1$和 $e^{-\gamma} = \frac{1}{k}! f(-1)^k 1$生成这一事实，对于 $k \in 2\mathbb{Z}_+$，有 $V_{\mathbb{Z}\gamma} \otimes K_0 \subseteq L(k, 0)^{\sigma_1}$, $^+ = L(k, 0)^+$。于是$L(k, i)^{\sigma_1}$ 可分解为 $V_{\mathbb{Z}\gamma} \otimes K_0$ 的不可约模的直和。作为一个 σ_1-扭曲的 $L(k, 0)$-模， $L(k, i)^{\sigma_1}$ 由 $v^{i,i}$ 生成。注意 [JWa21]

$$Y_{\sigma_1}(h, z) = Y(h + \frac{k}{2}z^{-1}, z),$$

并且对于 $m \geq 0$,

$$h'(m)W^3 = 0.$$

于是很容易看出

$$h_0(v^{i,i}) = (\frac{k}{2} - i)v^{i,i},$$

and

$$Y_{\sigma_1}(W^3, z) = Y(W^3, z).$$

这意味着 $V_{\mathbb{Z}\gamma+(\frac{k-2i}{4k})\gamma}\otimes M^{i,\ i}\subseteq L(k,\ i)^{\sigma_1}$。由 [JW19] 回忆可知，作为 K_0^+-模，$M^{i,\ i}\cong M^{i,\ 0}$。再结合这一事实

$$L(k,0)=\bigoplus_{j=0}^{k-1}V_{\mathbb{Z}\gamma+\frac{-j}{k}\gamma}\otimes M^{0,j},$$

我们推得，作为一个 $V_{\mathbb{Z}\gamma}^+\otimes K_0^+$-模，

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_1}=\oplus_{j=0}^{k-1}V_{\mathbb{Z}\gamma+(\frac{k-2i}{4k}-\frac{j}{k})\gamma}\otimes M^{i,j}.$$

□

引理 3.8. 假设 $k\in 2\mathbb{Z}_+$，那么作为 $V_{\mathbb{Z}\gamma}^+\otimes K_0^+$-模，对于 $0\le i\le k$，我们有 ，

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_3}=V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_2}\otimes W(k,i),\ k+2i\in 4\mathbb{Z}+2, \tag{15}$$

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_3}=V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_1}\otimes W(k,i),\ k+2i\in 4\mathbb{Z},\ i\neq\frac{k}{2}, \tag{16}$$

$$\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3}=V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_1}\otimes(W(k,\frac{k}{2})\oplus\widetilde{W(k,\frac{k}{2})}). \tag{17}$$

证明。注意到

$$\begin{aligned}&Y_{\sigma_3}(e(-1)^k\mathbf{1}+f(-1)^k\mathbf{1},z)\\ =\ &Y(z^{\frac{1}{4}\sqrt{-1}(e-f)(0)}\exp(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{-1}(e-f)(n)}{-4n}(-z)^{-n})(e(-1)^k\mathbf{1}+f(-1)^k\mathbf{1}),z).\end{aligned}$$

那么，类似于引理 3.6的证明，我们有

$$(e(-1)^k\mathbf{1}+f(-1)^k\mathbf{1})_{k-1}\mathbf{1}=\frac{1}{2^{2k-1}}(\sqrt{-1})^k\mathbf{1}.$$

由此可得

$$\overline{L(k,0)}^{\sigma_3}=V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_1}\otimes W(k,0),\ k\in 4\mathbb{Z}_+,$$
$$\overline{L(k,0)}^{\sigma_3}=V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_2}\otimes W(k,0),\ k\in 4\mathbb{Z}_++2.$$

然后，类似于引理3.6中的证明，考虑 $L(k,i)\boxtimes L(k,0)^{\sigma_3}$ 并利用 $\overline{V_{\mathbb{Z}\gamma}^+}$ [Ab01], 的融合规则，即可得到所需的关系。 □

以下两个引理由引理 3.5-引理 3.8得出。

引理 3.9. 对于 $k\in 2\mathbb{Z}_+$、 $0\leq i\leq k$、 $i\neq \frac{k}{2}$，作为 $V_{\mathbb{Z}\gamma}^+\otimes K_0^+$-模，我们有

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_1,+}=\sum_{\substack{0\leq j\leq k-1\\ j\in 2\mathbb{Z}}} V_{\mathbb{Z}\gamma+(\frac{k-2i}{4k}-\frac{j}{k})\gamma}\otimes M^{i,j},$$

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_1,-}=\sum_{\substack{0\leq j\leq k-1\\ j\in 2\mathbb{Z}+1}} V_{\mathbb{Z}\gamma+(\frac{k-2i}{4k}-\frac{j}{k})\gamma}\otimes M^{i,j},$$

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_2,+}= V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_2,+}\otimes W(k,i)^+\oplus V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_2,-}\otimes W(k,i)^-,\ i\in 2\mathbb{Z}+1,$$

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_2,-}= V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_2,+}\otimes W(k,i)^-\oplus V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_2,-}\otimes W(k,i)^+,\ i\in 2\mathbb{Z}+1,$$

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_2,+}= V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_1,+}\otimes W(k,i)^+\oplus V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_1,-}\otimes W(k,i)^-,\ i\in 2\mathbb{Z},$$

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_2,-}= V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_1,+}\otimes W(k,i)^-\oplus V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_1,-}\otimes W(k,i)^+,\ i\in 2\mathbb{Z},$$

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_3,+}= V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_1,+}\otimes W(k,i)^+\oplus V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_1,-}\otimes W(k,i)^-,\ k+2i\in 4\mathbb{Z},$$

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_3,-}= V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_1,+}\otimes W(k,i)^-\oplus V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_1,-}\otimes W(k,i)^+,\ k+2i\in 4\mathbb{Z},$$

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_3,+}= V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_2,+}\otimes W(k,i)^+\oplus V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_2,-}\otimes W(k,i)^-,\ k+2i\in 4\mathbb{Z}+2,$$

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_3,-}= V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_2,+}\otimes W(k,i)^-\oplus V_{\mathbb{Z}\gamma}^{T_2,-}\otimes W(k,i)^+,\ k+2i\in 4\mathbb{Z}+2.$$

引理 3.10. 设 $k\in 2\mathbb{Z}_+$，则作为 $V_{\mathbb{Z}\gamma}^+\otimes K_0^+$-模，我们有

$$\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,1}=V^{T_1,+}\otimes W(k,\frac{k}{2})^+\oplus V^{T_1,-}\otimes W(k,\frac{k}{2})^-, \tag{18}$$

$$\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,2}=V^{T_1,+}\otimes \widetilde{W(k,\frac{k}{2})}^-\oplus V^{T_1,-}\otimes \widetilde{W(k,\frac{k}{2})}^+, \tag{19}$$

$$\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,3}=V^{T_1,+}\otimes \widetilde{W(k,\frac{k}{2})}^+\oplus V^{T_1,-}\otimes \widetilde{W(k,\frac{k}{2})}^-, \tag{20}$$

$$\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,4}=V^{T_1,-}\otimes W(k,\frac{k}{2})^+\oplus V^{T_1,+}\otimes W(k,\frac{k}{2})^-. \tag{21}$$

对于 $k\in 4\mathbb{Z}$,

$$\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,1}\cong\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,1},\quad \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,2}\cong\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,2}, \tag{22}$$

$$\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,3}\cong\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,4},\quad \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,4}\cong\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,3}. \tag{23}$$

对于 $k \in 4\mathbb{Z}+2$,

$$\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,1} = V^{T_2,+}\otimes W(k,\frac{k}{2})^+ \oplus V^{T_2,-}\otimes W(k,\frac{k}{2})^-, \tag{24}$$

$$\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,2} = V^{T_2,+}\otimes \widetilde{W(k,\frac{k}{2})}^- \oplus V^{T_2,-}\otimes \widetilde{W(k,\frac{k}{2})}^+, \tag{25}$$

$$\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,3} = V^{T_2,-}\otimes W(k,\frac{k}{2})^+ \oplus V^{T_2,+}\otimes W(k,\frac{k}{2})^-, \tag{26}$$

$$\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,4} = V^{T_2,+}\otimes \widetilde{W(k,\frac{k}{2})}^+ \oplus V^{T_2,-}\otimes \widetilde{W(k,\frac{k}{2})}^-. \tag{27}$$

命题 3.11。 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(k,0)^K$ 的所有不可约模都是自对偶的。

证明。根据 [JW20], 中的定理 3.25，作为 $L(k,0)^{\sigma_1}$ 的不可约模，$(L(k,i)^{\pm})'$ 同构于 $L(k,i)^{\mp}$，其中 $i \in 2\mathbb{Z}+1$。根据定理 3.1，作为 $L(k,0)^K$-模， $L(k,i)^+$ 和 $L(k,i)^-$ 不可约且彼此同构，其中 $i \in 2\mathbb{Z}+1$。这意味着在这种情况下， $L(k,i)^+$ 是自对偶的。若 $i \in 2\mathbb{Z}$，注意到 [JW20]

$$V_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes M^{i,\frac{i}{2}} \subseteq L(k,i)$$

以及 $V^+_{\mathbb{Z}\gamma}$、 $V^-_{\mathbb{Z}\gamma}$、$(M^{i,\frac{i}{2}})^+$、$(M^{i,\frac{i}{2}})^-$ 都是自对偶的。由此可推出 $L(k,i)^j$、 $j=1$、2、3、4 都是自对偶的。根据 [JW20]，作为 $L(k,0)^{\sigma_r,+}$-模，

$$(\overline{L(k,i)}^{\sigma_r,\pm})' \cong \overline{L(k,k-i)}^{\sigma_r,\pm}.$$

由 [JWa21] 可知，当 $L(k,0)^K$-模时，

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_r,\pm} \cong \overline{L(k,k-i)}^{\sigma_r,\pm}.$$

于是我们推得，对于 $i \neq \frac{k}{2}$, $L(k,i)^{\sigma_r,\pm}$, $r=1,2,3$ 都是自对偶的。若 $k \in 2\mathbb{Z}$, $i=\frac{k}{2}$，根据

$$V_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes M^{\frac{k}{2},0} \subseteq \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1}$$

并且 $V^{\pm}_{\mathbb{Z}\gamma}$, $(M^{\frac{k}{2},0})^{\pm}$是自对偶的，我们推得 $L(k,\frac{k}{2})^{\sigma_1,j}$, $j=1,2,3,4$ 都是自对偶的。这意味着 $L(k,\frac{k}{2})^{\sigma_r,j}$, $r=2,3$, $j=1,2,3,4$ 也都是自对偶的。 □

下面的命题给出了 $L(k,0)^K$ 的所有不可约模的量子维数，它由 [JW20] 和定理 3.4推得。

命题 3.12. 对于 $0 \leq i \leq k$，我们有

$$\dim_q L(k,i)^+ = 2\frac{\sin\frac{(i+1)\pi}{k+2}}{\sin\frac{\pi}{k+2}},\ i \in 2\mathbb{Z}+1,$$

$$\dim_q L(k,i)^j = \frac{\sin\frac{(i+1)\pi}{k+2}}{\sin\frac{\pi}{k+2}},\ i\in 2\mathbb{Z},\ j=1,2,3,4,$$

$$\dim_q \overline{L(k,i)}^{\sigma_r,+} = \dim_q \overline{L(k,i)}^{\sigma_r,-} = 2\frac{\sin\frac{(i+1)\pi}{k+2}}{\sin\frac{\pi}{k+2}},\ i\neq\frac{k}{2},\ r=1,2,3,$$

$$\dim_q L(k,\frac{k}{2})^{\sigma_r,j} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{k+2}},\ r=1,2,3,\ j=1,2,3,4.$$

对于 $0\leqslant i,\ j,\ l\leqslant k$ 使得 $i+j+l\in 2\mathbb{Z}$，根据 [JW20], 我们定义

$$\mathrm{sign}(i,j,l)^+ = \begin{cases} +, & \text{if } i+j-l\in 4\mathbb{Z}, \\ -, & \text{if } i+j-l\notin 4\mathbb{Z}, \end{cases}$$

and

$$\mathrm{sign}(i,j,l)^- = \begin{cases} -, & \text{if } i+j-l\in 4\mathbb{Z}, \\ +, & \text{if } i+j-l\notin 4\mathbb{Z}. \end{cases}$$

我们得到以下融合规则，适用于 $\mathbb{Z}_2$-轨形仿射顶点算子代数$L(k,\ 0)^{\langle\sigma_2\rangle}$ ，来源于[JW20]。

引理 3.13。 $\mathbb{Z}_2$-轨道仿射顶点算子代数 $L(k,0)^{\langle\sigma_r\rangle}$ 的融合规则如下：

$$L(k,i)^{\sigma_2,+}\boxtimes L(k,j)^{\sigma_2,\pm} = \sum_{\substack{|i-j|\leqslant l\leqslant i+j\\ i+j+l\in 2\mathbb{Z}\\ i+j+l\leqslant 2k}} L(k,l)^{\sigma_2,sign(i,j,l)^\pm}, \tag{28}$$

$$L(k,i)^{\sigma_2,-}\boxtimes L(k,j)^{\sigma_2,\pm} = \sum_{\substack{|i-j|\leqslant l\leqslant i+j\\ i+j+l\in 2\mathbb{Z}\\ i+j+l\leqslant 2k}} L(k,l)^{\sigma_2,sign(i,j,l)^\mp}, \tag{29}$$

$$L(k,i)^{\sigma_2,+}\boxtimes \overline{L(k,j)}^{\sigma_2,\pm} = \sum_{\substack{|i-j|\leqslant l\leqslant i+j\\ i+j+l\in 2\mathbb{Z}\\ i+j+l\leqslant 2k}} \overline{L(k,l)}^{\sigma_2,sign(i,j,l)^\pm}, \tag{30}$$

$$L(k,i)^{\sigma_2,-}\boxtimes \overline{L(k,j)}^{\sigma_2,\pm} = \sum_{\substack{|i-j|\leqslant l\leqslant i+j\\ i+j+l\in 2\mathbb{Z}\\ i+j+l\leqslant 2k}} \overline{L(k,l)}^{\sigma_2,sign(i,j,l)^\mp}. \tag{31}$$

我们还需要以下关系，它们对 [JW20]中的定理 5.3 的原有版本中的一些笔误进行了修正。

引理 3.14。对于 $k \in 4\mathbb{Z}+2$，我们有

$$(M^{\frac{k}{2},0})^{+} \boxtimes W^{\pm} = \sum_{\substack{0 \le l \le \frac{k}{2}-1 \\ k+l \in 2\mathbb{Z}}} W(k,l)^{\pm}, \tag{32}$$

$$(M^{\frac{k}{2},0})^{-} \boxtimes W^{\pm} = \sum_{\substack{0 \le l \le \frac{k}{2}-1 \\ k+l \in 2\mathbb{Z}}} W(k,l)^{\mp}, \tag{33}$$

其中 $W = W(k,\frac{k}{2})$ 或 $W = W(k,\frac{k}{2})$。

对于 $k \in 4\mathbb{Z}$，我们有

$$(M^{\frac{k}{2},0})^{+} \boxtimes W(k,\frac{k}{2})^{\pm} = \sum_{\substack{0 \le l \le \frac{k}{2}-1 \\ k+l \in 2\mathbb{Z}}} W(k,l)^{\pm} + W(k,\frac{k}{2})^{\pm}, \tag{34}$$

$$(M^{\frac{k}{2},0})^{-} \boxtimes W(k,\frac{k}{2})^{\pm} = \sum_{\substack{0 \le l \le \frac{k}{2}-1 \\ k+l \in 2\mathbb{Z}}} W(k,l)^{\mp} + W(k,\frac{k}{2})^{\mp}, \tag{35}$$

$$(M^{\frac{k}{2},0})^{+} \boxtimes \widetilde{W(k,\frac{k}{2})}^{\pm} = \sum_{\substack{0 \le l \le \frac{k}{2}-1 \\ k+l \in 2\mathbb{Z}}} W(k,l)^{\pm} + \widetilde{W(k,\frac{k}{2})}^{\mp}, \tag{36}$$

$$(M^{\frac{k}{2},0})^{-} \boxtimes \widetilde{W(k,\frac{k}{2})}^{\pm} = \sum_{\substack{0 \le l \le \frac{k}{2}-1 \\ k+l \in 2\mathbb{Z}}} W(k,l)^{\mp} + \widetilde{W(k,\frac{k}{2})}^{\pm}. \tag{37}$$

4 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(k,0)^K$ 的融合规则

本节将通过若干定理给出 $L(k,0)^K$ 的不可约模的融合规则。

定理 4.1。

$$L(k,i)^+ \boxtimes L(k,j)^+ = \sum_{\substack{|i-j| \leqslant l \leqslant i+j \\ l \in 2\mathbb{Z},\, i+j+l \leqslant 2k}} L(k,l),\ i,j \in 2\mathbb{Z}+1, \tag{38}$$

$$L(k,i)^+ \boxtimes L(k,j)^r = \sum_{\substack{|i-j| \leqslant l \leqslant i+j \\ i+j+l \in 2\mathbb{Z} \\ i+j+l \leqslant 2k}} L(k,l)^+,\ i \in 2\mathbb{Z}+1,\ j \in 2\mathbb{Z},\ r = 1,2,3,4. \tag{39}$$

对于 $i,j \in 2\mathbb{Z}$，我们有

$$L(k,i)^r \boxtimes L(k,j)^r = \sum_{\substack{|i-j| \leqslant l \leqslant i+j \\ i+j+l \in 4\mathbb{Z} \\ i+j+l \leqslant 2k}} L(k,l)^1 \oplus \sum_{\substack{|i-j| \leqslant l \leqslant i+j \\ i+j+l \in 4\mathbb{Z}+2 \\ i+j+l \leqslant 2k}} L(k,l)^4, \quad r = 1,2,3,4, \tag{40}$$

$$L(k,i)^3 \boxtimes L(k,j)^4 = L(k,i)^2 \boxtimes L(k,j)^1 = \sum_{\substack{|i-j| \leqslant l \leqslant i+j \\ i+j+l \in 4\mathbb{Z} \\ i+j+l \leqslant 2k}} L(k,l)^2 \oplus \sum_{\substack{|i-j| \leqslant l \leqslant i+j \\ i+j+l \in 4\mathbb{Z}+2 \\ i+j+l \leqslant 2k}} L(k,l)^3, \tag{41}$$

$$L(k,i)^2 \boxtimes L(k,j)^4 = L(k,i)^3 \boxtimes L(k,j)^1 = \sum_{\substack{|i-j| \leqslant l \leqslant i+j \\ i+j+l \in 4\mathbb{Z} \\ i+j+l \leqslant 2k}} L(k,l)^3 \oplus \sum_{\substack{|i-j| \leqslant l \leqslant i+j \\ i+j+l \in 4\mathbb{Z}+2 \\ i+j+l \leqslant 2k}} L(k,l)^2, \tag{42}$$

$$L(k,i)^2 \boxtimes L(k,j)^3 = L(k,i)^4 \boxtimes L(k,j)^1 = \sum_{\substack{|i-j| \leqslant l \leqslant i+j \\ i+j+l \in 4\mathbb{Z} \\ i+j+l \leqslant 2k}} L(k,l)^4 \oplus \sum_{\substack{|i-j| \leqslant l \leqslant i+j \\ i+j+l \in 4\mathbb{Z}+2 \\ i+j+l \leqslant 2k}} L(k,l)^1. \tag{43}$$

证明。注意，对于 $i \in 2\mathbb{Z}+1$, $L(k,i)^+ \cong L(k,i)^-$，它们是不可约的 $L(k,0)^K$-模。由命题 3.12 和引理 3.13，容易看出 (38)-(39) 成立。对于其余公式，我们先证明 $r=1$ 的 (40)。由于根据引理 3.3，对于 $i \in 2\mathbb{Z}$,

$$L(k,i)^1 = L(k,i)^{\sigma_2,1},\ L(k,i)^4 = L(k,i)^{\sigma_2,4},$$

只需证明对于 $i,j \in 2\mathbb{Z}$,

$$L(k,i)^{\sigma_2,1} \boxtimes L(k,j)^{\sigma_2,1} = \sum_{\substack{|i-j| \leqslant l \leqslant i+j \\ i+j+l \in 4\mathbb{Z} \\ i+j+l \leqslant 2k}} L(k,l)^{\sigma_2,1} \oplus \sum_{\substack{|i-j| \leqslant l \leqslant i+j \\ i+j+l \in 4\mathbb{Z}+2 \\ i+j+l \leqslant 2k}} L(k,l)^{\sigma_2,4}.$$

回忆

$$L(k,i) = \bigoplus_{j=0}^{k-1} V_{\mathbb{Z}\gamma+(i-2j)\gamma/2k} \otimes M^{i,j} \quad \text{for } 0 \leq i \leq k,$$

对于 $i \in 2\mathbb{Z}$, $M^{i,\frac{i}{2}}$由 $v^{i,\frac{i}{2}}$生成。因此，对于 $i \in 4\mathbb{Z}$,

$$V_{\mathbb{Z}\gamma}^+ \otimes (M^{i,\frac{i}{2}})^+ \subseteq L(k,i)^{\sigma_2,1}, \quad V_{\mathbb{Z}\gamma}^+ \otimes (M^{i,\frac{i}{2}})^- \subseteq L(k,i)^{\sigma_2,3} \tag{44}$$

对于 $i \in 4\mathbb{Z}+2$,

$$V_{\mathbb{Z}_\gamma}^+ \otimes (M^{i,\frac{i}{2}})^+ \subseteq L(k,i)^{\sigma_2,2}, \quad V_{\mathbb{Z}_\gamma}^+ \otimes (M^{i,\frac{i}{2}})^- \subseteq L(k,i)^{\sigma_2,4}. \tag{45}$$

根据（28），我们有

$$L(k,i)^{\sigma_2,+} \boxtimes L(k,j)^{\sigma_2,+} = \sum_{\substack{|i-j| \le l \le i+j \\ i+j+l \in 4\mathbb{Z} \\ i+j+l \le 2k}} L(k,l)^{\sigma_2,+} \oplus \sum_{\substack{|i-j| \le l \le i+j \\ i+j+l \in 4\mathbb{Z}+2 \\ i+j+l \le 2k}} L(k,l)^{\sigma_2,-}. \tag{46}$$

根据 [JW20], 的定理 5.1，我们有 $i,\ j \in 2\mathbb{Z}_+$,

$$(M^{i,\frac{i}{2}})^+ \boxtimes (M^{j,\frac{j}{2}})^+ = \sum_{\substack{|i-j| \le l \le i+j \\ i+j+l \in 4\mathbb{Z} \\ i+j+l \le 2k}} (M^{l,\frac{l}{2}})^+ \oplus \sum_{\substack{|i-j| \le l \le i+j \\ i+j+l \in 4\mathbb{Z}+2 \\ i+j+l \le 2k}} (M^{l,\frac{l}{2}})^-. \tag{47}$$

So

$$\begin{aligned} &(V_{\mathbb{Z}_\gamma}^+ \otimes (M^{i,\frac{i}{2}})^+) \boxtimes (V_{\mathbb{Z}_\gamma}^+ \otimes (M^{j,\frac{j}{2}})^+) \\ &= \sum_{\substack{|i-j| \le l \le i+j \\ i+j+l \in 4\mathbb{Z} \\ i+j+l \le 2k}} V_{\mathbb{Z}_\gamma}^+ \otimes (M^{l,\frac{l}{2}})^+ \oplus \sum_{\substack{|i-j| \le l \le i+j \\ i+j+l \in 4\mathbb{Z}+2 \\ i+j+l \le 2k}} V_{\mathbb{Z}_\gamma}^+ \otimes (M^{l,\frac{l}{2}})^-. \end{aligned} \tag{48}$$

注意，对于 $0 \le l \le k$,

$$L(k,l)^{\sigma_2,+} = L(k,l)^{\sigma_2,1} \oplus L(k,l)^{\sigma_2,2}, \quad L(k,l)^{\sigma_2,-} = L(k,l)^{\sigma_2,3} \oplus L(k,l)^{\sigma_2,4}.$$

那么根据（44）-（48），若 $i,\ j \in 4\mathbb{Z}$,

$$L(k,i)^{\sigma_2,1} \boxtimes L(k,j)^{\sigma_2,1} = \sum_{\substack{|i-j| \leqslant l \leqslant i+j \\ i+j+l \in 4\mathbb{Z} \\ i+j+l \leqslant 2k}} L(k,l)^{\sigma_2,1} \oplus \sum_{\substack{|i-j| \leqslant l \leqslant i+j \\ i+j+l \in 4\mathbb{Z}+2 \\ i+j+l \leqslant 2k}} L(k,l)^{\sigma_2,4}.$$

若 $i \in 4\mathbb{Z}, j \in 4\mathbb{Z}+2$，则

$$L(k,i)^{\sigma_2,1} \boxtimes L(k,j)^{\sigma_2,2} = \sum_{\substack{|i-j| \leqslant l \leqslant i+j \\ i+j+l \in 4\mathbb{Z} \\ i+j+l \leqslant 2k}} L(k,l)^{\sigma_2,2} \oplus \sum_{\substack{|i-j| \leqslant l \leqslant i+j \\ i+j+l \in 4\mathbb{Z}+2 \\ i+j+l \leqslant 2k}} L(k,l)^{\sigma_2,3}.$$

若 i、$j \in 4\mathbb{Z}+2$，则

$$L(k,i)^{\sigma_2,2} \boxtimes L(k,j)^{\sigma_2,2} = \sum_{\substack{|i-j| \leqslant l \leqslant i+j \\ i+j+l \in 4\mathbb{Z} \\ i+j+l \leqslant 2k}} L(k,l)^{\sigma_2,1} \oplus \sum_{\substack{|i-j| \leqslant l \leqslant i+j \\ i+j+l \in 4\mathbb{Z}+2 \\ i+j+l \leqslant 2k}} L(k,l)^{\sigma_2,4}.$$

由于根据引理 3.2,

$$L(k,0)^{\sigma_2,2}\boxtimes L(k,i)^{\sigma_2,1}=L(k,i)^{\sigma_2,2},\ L(k,0)^{\sigma_2,2}\boxtimes L(k,i)^{\sigma_2,3}=L(k,i)^{\sigma_2,4},$$

and

$$L(k,0)^{\sigma_2,r}\boxtimes L(k,0)^{\sigma_2,r}=L(k,0)^{\sigma_2,1},\ r=1,2,3,4,$$

由此可得，对于 i、$j\in 2\mathbb{Z}$,

$$L(k,i)^{\sigma_2,1}\boxtimes L(k,j)^{\sigma_2,1}=\sum_{\substack{|i-j|\leqslant l\leqslant i+j\\ i+j+l\in 4\mathbb{Z}\\ i+j+l\leqslant 2k}}L(k,l)^{\sigma_2,1}\oplus\sum_{\substack{|i-j|\leqslant l\leqslant i+j\\ i+j+l\in 4\mathbb{Z}+2\\ i+j+l\leqslant 2k}}L(k,l)^{\sigma_2,4}.$$

我们证明，(40) 对于 $r=1$ 成立。(40 对于 $r=2$、3、4，以及 (41)-(43)，则可由 (40 对于 $r=1$、引理 3.2 以及融合积的结合律推出。 □

定理 4.2。对于 $i\in 2\mathbb{Z}_++1$、$0\leq j<\frac{k}{2}$、$r=1,\ 2,\ 3$,

$$L(k,i)^+\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_r,+}=L(k,i)^+\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_r,-}=\sum_{\substack{|i-j|\leq l\leq i+j\\ i+j+l\in 2\mathbb{Z}\\ i+j+l\leq 2k}}(\overline{L(k,l)}^{\sigma_r,+}+\overline{L(k,l)}^{\sigma_r,-}).\tag{49}$$

对于 $k\in 2\mathbb{Z}_+$、$i\in 2\mathbb{Z}_++1$、$r=1,\ 2,\ 3,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4$,

$$L(k,i)^+\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_r,j}=\sum_{\substack{|i-j|\leq l\leq i+j\\ i+j+l\in 2\mathbb{Z}\\ l\leq\frac{k}{2}-1}}(\overline{L(k,l)}^{\sigma_r,+}+\overline{L(k,l)}^{\sigma_r,-}).\tag{50}$$

对于 $i\in 2\mathbb{Z}_+$, $0\leq j<\frac{k}{2}$,

$$L(k,i)^1\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_1,\pm}=L(k,i)^2\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_1,\pm}=\sum_{\substack{|i-j|\leq l\leq i+j\\ i+j+l\in 2\mathbb{Z}\\ i+j+l\leq 2k}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_1,sign(i,j,l)^\pm},$$

$$L(k,i)^3\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_1,\pm}=L(k,i)^4\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_1,\pm}=\sum_{\substack{|i-j|\leq l\leq i+j\\ i+j+l\in 2\mathbb{Z}\\ i+j+l\leq 2k}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_1,sign(i,j,l)^\mp},$$

$$L(k,i)^1\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_2,\pm}=L(k,i)^3\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_2,\pm}=\sum_{\substack{|i-j|\leq l\leq i+j\\ i+j+l\in 2\mathbb{Z}\\ i+j+l\leq 2k}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_2,sign(i,j,l)^\pm},$$

$$L(k,i)^2\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_2,\pm}=L(k,i)^4\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_2,\pm}=\sum_{\substack{|i-j|\leq l\leq i+j\\ i+j+l\in 2\mathbb{Z}\\ i+j+l\leq 2k}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_2,sign(i,j,l)^\mp},$$

$$L(k,i)^2\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_3,\pm}=L(k,i)^3\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_3,\pm}=\sum_{\substack{|i-j|\le l\le i+j\\ j-l\in 4\mathbb{Z}+2\\ i+j+l\le 2k}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,\pm}\oplus\sum_{\substack{|i-j|\le l\le i+j\\ j-l\in 4\mathbb{Z}\\ i+j+l\le 2k}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,\mp},$$

$$L(k,i)^1\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_3,\pm}=L(k,i)^4\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_3,\pm}=\sum_{\substack{|i-j|\le l\le i+j\\ j-l\in 4\mathbb{Z}+2\\ i+j+l\le 2k}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,\mp}\oplus\sum_{\substack{|i-j|\le l\le i+j\\ j-l\in 4\mathbb{Z}\\ i+j+l\le 2k}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,\pm}.$$

证明。 (49)-(50) 可由命题 3.12、引理 3.13以及以下事实得出： $L(k,i)^+\cong L(k,i)^-$，若 $i\in 2\mathbb{Z}_++1$。对于其余公式，回顾一下，当 $i\in 2\mathbb{Z}_+$, $r=1,\ 2,\ 3,$

$$L(k,i)^{\sigma_r,1}\oplus L(k,i)^{\sigma_r,2}=L(k,i)^{\sigma_r,+},\quad L(k,i)^{\sigma_r,3}\oplus L(k,i)^{\sigma_r,4}=L(k,i)^{\sigma_r,-}.$$

那么，这些公式由引理 3.13、命题 3.12和引理 3.3得出。 □

For $i\in 2\mathbb{Z}_+$, we denote $\bar{i}=2$ if $i\in 4\mathbb{Z}+2$, and $\bar{i}=0$ if $i\in 4\mathbb{Z}$.

定理 4.3. 对于 $k\in 2\mathbb{Z}_+$, $i\in 2\mathbb{Z}_+$, $r=1, 2, 3,$

$$L(k,i)^{\sigma_r,j}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_r,1}$$

$$=\sum_{\substack{|i-\frac{k}{2}|\le l\le\frac{k}{2}-1\\ i+\frac{k}{2}-l\in 4\mathbb{Z}}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_r,+}\oplus\sum_{\substack{|i-\frac{k}{2}|\le l\le\frac{k}{2}-1\\ i+\frac{k}{2}-l\in 4\mathbb{Z}+2}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_r,-}\oplus\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_r,j+\bar{i}},\ j=1,2,\tag{51}$$

$$L(k,i)^{\sigma_r,j}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_r,1}$$

$$=\sum_{\substack{|i-\frac{k}{2}|\le l\le\frac{k}{2}-1\\ i+\frac{k}{2}-l\in 4\mathbb{Z}}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_r,-}\oplus\sum_{\substack{|i-\frac{k}{2}|\le l\le\frac{k}{2}-1\\ i+\frac{k}{2}-l\in 4\mathbb{Z}+2}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_r,+}\oplus\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_r,j-\bar{i}},\ j=3,4,\tag{52}$$

$$L(k,i)^{\sigma_r,j}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_r,1}=L(k,i)^{\sigma_r,1}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_r,j},\ j=1,2,3,4,$$

$$L(k,i)^{\sigma_r,j}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_r,j}=L(k,i)^{\sigma_r,1}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_r,1},\ j=1,2,3,4,$$

$$L(k,i)^{\sigma_r,l}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_r,s}=L(k,i)^{\sigma_r,t}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_r,1},\ \{l,s,t\}=\{2,3,4\}.$$

证明. 只需证明 $r=1$ 的定理。注意，对于 $i\in 4\mathbb{Z}+2$,

$$V^+_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes(M^{i,\frac{i}{2}})^+\oplus V^-_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes(M^{i,\frac{i}{2}})^-\subseteq L(k,i)^3,\quad V^+_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes(M^{i,\frac{i}{2}})^-\oplus V^-_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes(M^{i,\frac{i}{2}})^+\subseteq L(k,i)^4. \tag{53}$$

如果 $i\in 4\mathbb{Z}$，那么

$$V^+_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes(M^{i,\frac{i}{2}})^+\oplus V^-_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes(M^{i,\frac{i}{2}})^-\subseteq L(k,i)^1,\quad V^+_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes(M^{i,\frac{i}{2}})^-\oplus V^-_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes(M^{i,\frac{i}{2}})^+\subseteq L(k,i)^2. \tag{54}$$

由（14），可得

$$\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1}=\oplus_{j=0}^{k-1}V_{\mathbb{Z}\gamma-\frac{j}{k}\gamma}\otimes M^{\frac{k}{2},j},$$

and

$$V^+_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes(M^{\frac{k}{2},0})^+\oplus V^-_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes(M^{\frac{k}{2},0})^-\subseteq \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,1},\ V^+_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes(M^{\frac{k}{2},0})^-\oplus V^-_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes(M^{\frac{k}{2},0})^+\subseteq \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,2}. \tag{55}$$

根据 [JW20],的定理 5.1

$$(M^{i,\frac{i}{2}})^+\boxtimes(M^{\frac{k}{2},0})^\pm=\sum_{\substack{|\frac{k}{2}-i|\le l<\frac{k}{2}\\ i+j+l\in 2\mathbb{Z}\\ i+j+l\le 2k}} M^{l,(\overline{\frac{2l-k}{4}})}+(M^{\frac{k}{2},0})^\pm, \tag{56}$$

其中$\overline{a}$ 表示整数 a 模 k 的剩余，其中 $0\le a\le k$。由（53）、（55）-（56）和命题3.12，对于 $i\in 4\mathbb{Z}+2$，有

$$L(k,i)^j\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,1}=\sum_{\substack{0\le l\le\frac{k}{2}-1\\ \frac{k}{2}+l\in 2\mathbb{Z}}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_1,sign(i,\frac{k}{2},l)^+}\oplus\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,j-2},\ j=3,4.$$

Then

$$L(k,i)^1\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}=L(k,0)^3\boxtimes L(k,i)^3\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}$$

$$=\sum_{\substack{0\le l\le\frac{k}{2}-1\\ \frac{k}{2}+l\in 2\mathbb{Z}}}L(k,0)^3\boxtimes\overline{L(k,l)}^{\sigma_1,sign(i,\frac{k}{2},l)^+}\oplus L(k,0)^3\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}$$

$$=\sum_{\substack{0\le l\le\frac{k}{2}-1\\ \frac{k}{2}+l\in 2\mathbb{Z}}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_1,sign(i,\frac{k}{2},l)^-}\oplus\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,3},$$

and

$$L(k,i)^2 \boxtimes \overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1} = L(k,0)^4 \boxtimes L(k,i)^3 \boxtimes \overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}$$

$$= \sum_{\substack{0 \le l \le \frac{k}{2}-1 \\ \frac{k}{2}+l \in 2\mathbb{Z}}} L(k,0)^4 \boxtimes \overline{L(k,l)}^{\sigma_1,sign(i,\frac{k}{2},l)^+} \oplus L(k,0)^4 \boxtimes \overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}$$

$$= \sum_{\substack{0 \le l \le \frac{k}{2}-1 \\ \frac{k}{2}+l \in 2\mathbb{Z}}} \overline{L(k,l)}^{\sigma_1,sign(i,\frac{k}{2},l)^-} \oplus \overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,4}.$$

对于 $i \in 4\mathbb{Z}$，由（54）、（55）-（56）和命题3.12，可得

$$L(k,i)^j \boxtimes \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,1} = \sum_{\substack{0 \le l \le \frac{k}{2}-1 \\ \frac{k}{2}+l \in 2\mathbb{Z}}} \overline{L(k,l)}^{\sigma_1,sign(i,\frac{k}{2},l)^+} \oplus \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,j}, \quad j=1,2.$$

Then

$$L(k,i)^j \boxtimes \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,1} = \sum_{\substack{0 \le l \le \frac{k}{2}-1 \\ \frac{k}{2}+l \in 2\mathbb{Z}}} \overline{L(k,l)}^{\sigma_1,sign(i,\frac{k}{2},l)^-} \oplus \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,j}, \quad j=3,4.$$

我们证明（51）和（52）。最后三个关系由（3）-（5）以及引理 3.2。定理 4.4。 □

对于 $0 \le i,\ j < \frac{k}{2}$，$a,\ b \in \{+,-\}$，以及 $\{r,s,t\} = \{1,2,3\}$，

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_r,a} \boxtimes \overline{L(k,j)}^{\sigma_s,b} = \sum_{\substack{|i-j| \leqslant l \leqslant i+j \\ i+j+l \in 2\mathbb{Z} \\ i+j+l \leqslant 2k}} (\overline{L(k,l)}^{\sigma_t,+} + \overline{L(k,l)}^{\sigma_t,-}). \tag{57}$$

对于 $k \in 2\mathbb{Z}$、$i \in 2\mathbb{Z}+1$、$i \neq \frac{k}{2}$、$j = 1$、2、3、4、$\{r,s,t\} = \{1,2,3\}$，

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_r,\pm} \boxtimes \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_s,j} = \sum_{\substack{0 \leqslant l \leqslant \frac{k}{2}-1 \\ i+\frac{k}{2}+l \in 2\mathbb{Z}}} (\overline{L(k,l)}^{\sigma_t} + \overline{L(k,l)}^{\sigma_t,-}). \tag{58}$$

对于 $k \in 2\mathbb{Z}$, $i \in 2\mathbb{Z}$, $i \neq \frac{k}{2}$,

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_1,+} \boxtimes \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,1} = \sum_{\substack{0 \leqslant l \leqslant \frac{k}{2}-1 \\ i+\frac{k}{2}+l \in 2\mathbb{Z}}} (\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+} + \overline{L(k,l)}^{\sigma_3,-}) \oplus (\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,1} \oplus \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,4}), \tag{59}$$

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_1,-}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,1}=\sum_{\substack{0\leqslant l\leqslant\frac{k}{2}-1\\ i+\frac{k}{2}+l\in 2\mathbb{Z}}}(\overline{L(k,l)}^{\sigma_3}+\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,-})\oplus(\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,2}\oplus\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,3}),\tag{60}$$

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_1,\pm}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,2}=\overline{L(k,i)}^{\sigma_1,\mp}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,1},\tag{61}$$

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_1,\pm}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,3}=\overline{L(k,i)}^{\sigma_1,\pm}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,1},\tag{62}$$

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_1,\pm}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,4}=\overline{L(k,i)}^{\sigma_1,\mp}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,1}.\tag{63}$$

证明。 我们先证明（57）。不妨设 $r=1,\ s=2,\ t=3$。注意，根据引理 3.2和定理 4.2,

$$\begin{aligned}&\overline{L(k,i)}^{\sigma_1,+}\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_2,+}=L(k,0)^2\boxtimes\overline{L(k,i)}^{\sigma_1,+}\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_2,+}\\&=L(k,0)^{\sigma_2,3}\boxtimes\overline{L(k,i)}^{\sigma_1,+}\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_2,+}\\&=\overline{L(k,i)}^{\sigma_1,+}\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_2,-}.\end{aligned}$$

同理

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_1,-}\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_2,\pm}=\overline{L(k,i)}^{\sigma_1,+}\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_2,+}.$$

另一方面，由命题 3.12可得

$$\dim_q\overline{L(k,i)}^{\sigma_r,+}=\dim_q\overline{L(k,i)}^{\sigma_r,-}=2\frac{\sin\frac{(i+1)\pi}{k+2}}{\sin\frac{\pi}{k+2}},\ i\neq\frac{k}{2},\ r=1,2,3.$$

Then

$$\dim_q\overline{L(k,0)}^{\sigma_r,\pm}=2,\ r=1,2,3,$$

and

$$\dim_q(\overline{L(k,0)}^{\sigma_1,+}\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_2,\pm})=2\frac{\sin\frac{(j+1)\pi}{k+2}}{\sin\frac{\pi}{k+2}}.$$

若 $k\in 2\mathbb{Z}_+$，则由引理 3.9 和引理 3.10可得

$$\overline{L(k,0)}^{\sigma_1,+}\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_2,+}=\overline{L(k,j)}^{\sigma_3,+}\oplus\overline{L(k,j)}^{\sigma_3,-}.$$

若 $k\in 2\mathbb{Z}_++1$，令 $\beta=2\gamma$。则 $V_{\mathbb{Z}\beta}^+\otimes K_0\subseteq L(k,0)^K$，并且作为 $V_{\mathbb{Z}\beta}^+\otimes K_0^+$-模,

$$V_{\mathbb{Z}\beta+\frac{1}{8}\beta}\otimes K_0\subseteq\overline{L(k,0)}^{\sigma_1,+},$$

$$V_{\mathbb{Z}\beta}^{T_1,+}\otimes W(k,j)^+ \text{ or } V_{\mathbb{Z}\beta}^{T_2,+}\otimes W(k,j)^+ \subseteq \overline{L(k,0)}^{\sigma_2,+},$$
$$V_{\mathbb{Z}\beta}^{T_1,+}\otimes W(k,j)^+ \text{ or } V_{\mathbb{Z}\beta}^{T_2,+}\otimes W(k,j)^+ \subseteq \overline{L(k,0)}^{\sigma_3,+}.$$

此外，我们还有

$$\overline{L(k,0)}^{\sigma_1,+}\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_2,\pm}=\overline{L(k,0)}^{\sigma_1,-}\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_2,\pm}=\overline{L(k,j)}^{\sigma_3,+}\oplus\overline{L(k,j)}^{\sigma_3,-}.$$

通过考察 $L(k,i)^+\boxtimes L(k,0)^{\sigma_1,+}\boxtimes L(k,j)^{\sigma_2,\pm}$ 并利用 (49)，我们可推出，对于$0\leq i,j<\frac{k}{2}$,

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_1,a}\boxtimes\overline{L(k,j)}^{\sigma_2,b}=\sum_{\substack{|i-j|\leqslant l\leqslant i+j\\ i+j+l\in 2\mathbb{Z}\\ i+j+l\leqslant 2k}}(\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+}+\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,-}),\ a,b\in\{+,-\}.$$

对于 (58)，只需证明

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_1,\pm}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,j}=\sum_{\substack{0\leqslant l\leqslant\frac{k}{2}-1\\ i+\frac{k}{2}+l\in 2\mathbb{Z}}}(\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+}\oplus\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,-}),\quad j=1,2,3,4. \tag{64}$$

回顾引理 3.9，对于 $k\in 2\mathbb{Z}$, $0\leq i\leq k$,

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_1,+}=\bigoplus_{j\in 2\mathbb{Z},0\leq j\leq k-1}V_{\mathbb{Z}\gamma+(\frac{k-2i}{4k}-\frac{j}{k})\gamma}\otimes M^{i,j},$$

$$\overline{L(k,i)}^{\sigma_1,-}=\bigoplus_{j\in 2\mathbb{Z}+1,0\leq j\leq k-1}V_{\mathbb{Z}\gamma+(\frac{k-2i}{4k}-\frac{j}{k})\gamma}\otimes M^{i,j}.$$

根据 $V_{\mathbb{Z}\gamma}^+$ [Ab01], 的融合规则，我们有

$$V_{\mathbb{Z}\gamma+(\frac{k-2i}{4k}-\frac{j}{k})\gamma}\boxtimes V^{T_r,\pm}=V^{T_r,+}\oplus V^{T_r,-},\quad \text{if } \frac{k}{2}-i \text{ is even},\quad r=1,2.$$

$V_{\mathbb{Z}\gamma+(\frac{k-2i}{4k}-\frac{j}{k})\gamma}\boxtimes V^{T_1,\pm}=V^{T_2,+}\oplus V^{T_2,-}$，$V_{\mathbb{Z}\gamma+(\frac{k-2i}{4k}-\frac{j}{k})\gamma}\boxtimes V^{T_2,\pm}=V^{T_1,+}\oplus V^{T_1,-}$，若$\frac{k}{2}-i$为奇数。根据 [JW20] , 作为 $K_0^{\sigma_2}$-模，对于 $k\in 2\mathbb{Z}$, $i\in 2\mathbb{Z}+1$,

$$M^{i,i'}\boxtimes W^+=M^{i,i'}\boxtimes W^-=\sum_{\substack{|i-\frac{k}{2}|\leq l<\frac{k}{2}\\ i+\frac{k}{2}+l\in 2\mathbb{Z}\\ i+l\leq\frac{3k}{2}}}\Big(W(k,l)^+ + W(k,l)^-\Big), \tag{65}$$

其中 $W=W(k,\ \frac{k}{2})$ 或 $W=W(k,\ \frac{k}{2})$。然后根据引理 3.9，对于 $i\in 2\mathbb{Z}+1$,

$$\sum_{\substack{0\leqslant l\leqslant \frac{k}{2}-1\\ i+j+l\in 2\mathbb{Z}}}(\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+}\oplus\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,-})\subseteq\overline{L(k,i)}^{\sigma_1,\pm}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,j}.$$

由于等式两边的量子维数相等，我们有 (64)。对于 (59)-(60)，由 [JW20], 定理 5.3，若 $k\in 2\mathbb{Z},\ \ i\in 2\mathbb{Z},\ \ i^{'}\in 2\mathbb{Z}+1$,

$$\begin{aligned}&M^{i,i^{'}}\boxtimes W^{+}=M^{i,i^{'}}\boxtimes W^{-}\\&=\sum_{\substack{|i-\frac{k}{2}|\leq l<\frac{k}{2}\\ i+\frac{k}{2}+l\in 2\mathbb{Z}\\ i+l\leq\frac{3k}{2}}}\Big(W(k,l)^{+}+W(k,l)^{-}\Big)+\Big(\bar{W}^{+}+\bar{W}^{-}\Big),\end{aligned}\tag{66}$$

其中若 $W=W(k,\frac{k}{2})$，则 $\bar{W}=\widetilde{W(k,\frac{k}{2})}$，且若 $W=\widetilde{W(k,\frac{k}{2})}$，则 $\bar{W}=W(k,\frac{k}{2})$。若 $k\in 2\mathbb{Z}, i\in 2\mathbb{Z}, i^{'}\in 2\mathbb{Z}$，我们有

$$\begin{aligned}&M^{i,i^{'}}\boxtimes W^{+}=M^{i,i^{'}}\boxtimes W^{-}\\&=\sum_{\substack{|i-\frac{k}{2}|\leq l<\frac{k}{2}\\ i+\frac{k}{2}+l\in 2\mathbb{Z}\\ i+l\leq\frac{3k}{2}}}\Big(W(k,l)^{+}+W(k,l)^{-}\Big)+\Big(W^{+}+W^{-}\Big),\end{aligned}\tag{67}$$

其中 $W=W(k,\frac{k}{2})$ 或 $W=W(k,\frac{k}{2})$。由 (22), (24)，以及 (18)-(21)，对于 $i\in 2\mathbb{Z}, i\neq\frac{k}{2}$,

$$\sum_{\substack{0\leqslant l\leqslant \frac{k}{2}-1\\ i+\frac{k}{2}+l\in 2\mathbb{Z}}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_3}\oplus(\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,1}\oplus\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,4})\subseteq\overline{L(k,i)}^{\sigma_1,+}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,1},$$

and

$$\sum_{\substack{0\leqslant l\leqslant \frac{k}{2}-1\\ i+\frac{k}{2}+l\in 2\mathbb{Z}}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_3}\oplus(\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,2}\oplus\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,3})\subseteq\overline{L(k,i)}^{\sigma_1,-}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,1}.$$

由于上述两个关系两边的量子维数相等，因此得到（59）和（60）。（61）–（63）由引理 3.3 和（3）–（5）可得。

□

定理 4.5。对于 $k \in 4\mathbb{Z}_+ + 2$，我们有

$$\begin{aligned}&\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,i} \boxtimes \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,j} = \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,r} \boxtimes \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,s}\\ &= \bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2}, l\in 2\mathbb{Z}} \overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+}, \quad i,j=1,4,\ r,s=2,3;\end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned}&\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,i} \boxtimes \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,j} = \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,j} \boxtimes \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,i}\\ &= \bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2}, l\in 2\mathbb{Z}} \overline{L(k,l)}^{\sigma_3,-}, \quad i=1,4,\ j=2,3;\end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}&\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,i} \boxtimes \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,j} = \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,r} \boxtimes \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,s}\\ &= \bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2}, l\in 2\mathbb{Z}} \overline{L(k,l)}^{\sigma_2,+}, \quad i,j=1,3,\ r,s=2,4;\end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned}&\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,i} \boxtimes \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,j} = \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,j} \boxtimes \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,i}\\ &= \bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2}, l\in 2\mathbb{Z}} \overline{L(k,l)}^{\sigma_2,-}, \quad i=2,4,\ j=1,3;\end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned}&\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,i} \boxtimes \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,j} = \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,r} \boxtimes \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,s}\\ &= \bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2}, l\in 2\mathbb{Z}} \overline{L(k,l)}^{\sigma_1,+}, \quad i=1,3,\ j=1,4;\ r=2,4,\ s=2,3;\end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned}&\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,i} \boxtimes \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,j} = \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,r} \boxtimes \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,s}\\ &= \bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2}, l\in 2\mathbb{Z}} \overline{L(k,l)}^{\sigma_1,-}, \quad i=1,3,\ j=2,3;\ r=2,4,\ s=1,4;\end{aligned} \tag{73}$$

证明。我们首先证明（68），对于 $j=1$。注意到

$$V_{\mathbb{Z}\gamma}^+ \otimes (M^{\frac{k}{2},0})^+ \oplus V_{\mathbb{Z}\gamma}^- \otimes (M^{\frac{k}{2},0})^- \subseteq \overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,1},$$

并且由（24），对于 $k \in 4\mathbb{Z}_+ + 2$,

$$\overline{L(k, \frac{k}{2})}^{\sigma_2,1} = V^{T_2,+} \otimes W(k, \frac{k}{2})^+ \oplus V^{T_2,-} \otimes W(k, \frac{k}{2})^-.$$

由（32）和（33），可得 $k \in 4\mathbb{Z} + 2$,

$$(M^{\frac{k}{2},0})^+ \boxtimes W^\pm = \bigoplus_{0 \le i < \frac{k}{2}, l \in 2\mathbb{Z}} W(k,l)^\pm,$$

$$(M^{\frac{k}{2},0})^- \boxtimes W^\pm = \bigoplus_{0 \le i < \frac{k}{2}, l \in 2\mathbb{Z}} W(k,l)^\mp,$$

其中 $W = W(k, \frac{k}{2})$ 或 $W = \widetilde{W(k, \frac{k}{2})}$。由 $V^+_{\mathbb{Z}\gamma}$ [Ab01] 的融合规则以及引理3.9，可得

$$\bigoplus_{0 \le l < \frac{k}{2}, l \in 2\mathbb{Z}} \overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+} \subseteq \overline{L(k, \frac{k}{2})}^{\sigma_1,1} \boxtimes \overline{L(k, \frac{k}{2})}^{\sigma_2,1}.$$

回顾命题 3.12 可知

$$\dim_q \overline{L(k,i)}^{\sigma_r,+} = \dim_q \overline{L(k,i)}^{\sigma_r,-} = 2\frac{\sin\frac{(i+1)\pi}{k+2}}{\sin\frac{\pi}{k+2}}, \ i \neq \frac{k}{2}, \ r = 1,2,3,$$

$$\dim_q L(k, \frac{k}{2})^{\sigma_r,j} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{k+2}}, \ r = 1,2,3, \ j = 1,2,3,4.$$

由于对于 $0 \le i \le k$,

$$\frac{\sin\frac{(i+1)\pi}{k+2}}{\sin\frac{\pi}{k+2}} = \frac{\sin\frac{(k-i+1)\pi}{k+2}}{\sin\frac{\pi}{k+2}},$$

我们有

$$\oplus_{0 \le l < \frac{k}{2}, l \in 2\mathbb{Z}} \dim_q \overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+} = \oplus_{0 \le l < \frac{k}{2}, l \in 2\mathbb{Z}} 2\frac{\sin\frac{(l+1)\pi}{k+2}}{\sin\frac{\pi}{k+2}}$$

$$= \oplus_{0 \le l \le k, l \in 2\mathbb{Z}} \frac{\sin\frac{(l+1)\pi}{k+2}}{\sin\frac{\pi}{k+2}} = (\frac{1}{\sin\frac{\pi}{k+2}})^2$$

$$= \dim_q (L(k, \tfrac{k}{2})^{\sigma_1,1} \boxtimes L(k, \tfrac{k}{2})^{\sigma_2,1}).$$

于是我们推出

$$\overline{L(k, \frac{k}{2})}^{\sigma_1,1} \boxtimes \overline{L(k, \frac{k}{2})}^{\sigma_2,1} = \bigoplus_{0 \le l < \frac{k}{2}, l \in 2\mathbb{Z}} \overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+},$$

这就是（68）对于 $j=1$。对于其他情形，注意到由（3）-（5）以及引理3.3,

$$\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,4} = L(k,0)^{\sigma_2,4}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,1},$$

$$L(k,0)^{\sigma_3,2}\boxtimes\overline{L(k,i)}^{\sigma_3,\pm} = \overline{L(k,i)}^{\sigma_3,\pm},\ L(k,0)^{\sigma_2,4} = L(k,0)^{\sigma_3,2}.$$

于是我们有

$$\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,4} = \overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes L(k,0)^{\sigma_2,4}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$= \bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}} L(k,0)^{\sigma_3,2}\boxtimes\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+} = \bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+}.$$

类似地，由（3）-（5），引理3.13 和引理3.3,

$$\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,2}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,3} = L(k,0)^{\sigma_1,2}\boxtimes L(k,0)^{\sigma_2,3}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$= L(k,0)^2\boxtimes L(k,0)^2\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$= L(k,0)^1\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1} = \bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+};$$

$$\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,2} = L(k,0)^3\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$= \bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}} L(k,0)^3\boxtimes\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+} = \bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}} L(k,0)^{\sigma_3,3}\boxtimes\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+}$$

$$= \bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,-};$$

$$\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,3} = L(k,0)^2\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$= \bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}} L(k,0)^2\boxtimes\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+} = \bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}} L(k,0)^{\sigma_3,4}\boxtimes\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+}$$

$$= \bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,-};$$

$$\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,2}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,4} = L(k,0)^2\boxtimes L(k,0)^{\sigma_2,4}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$= L(k,0)^2\boxtimes L(k,0)^4\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1} = L(k,0)^3\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$= \bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}} L(k,0)^3\boxtimes\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+} = \bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}} L(k,0)^{\sigma_3,3}\boxtimes\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+}$$

$$= \bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,-};$$

$$\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,3}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,4}=L(k,0)^3\boxtimes L(k,0)^{\sigma_2,4}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$=L(k,0)^3\boxtimes L(k,0)^4\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}=L(k,0)^2\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$=\bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}}L(k,0)^2\boxtimes\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+}=\bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}}L(k,0)^{\sigma_3,4}\boxtimes\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+}$$

$$=\bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,-};$$

$$\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,2}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}=L(k,0)^2\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$=\bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}}L(k,0)^2\boxtimes\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+}=\bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}}L(k,0)^{\sigma_3,4}\boxtimes\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+}$$

$$=\bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,-};$$

$$\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,3}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}=L(k,0)^3\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$=\bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}}L(k,0)^{\sigma_3,3}\boxtimes\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+}=\bigoplus_{0\le l<\frac{k}{1},l\in2\mathbb{Z}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,-};$$

$$\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,4}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}=L(k,0)^4\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$=L(k,0)^{\sigma_2,4}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}=\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,4};$$

$$\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,3}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,2}=L(k,0)^3\boxtimes L(k,0)^3\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$=L(k,0)^1\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}=\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1};$$

$$\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,4}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,3}=L(k,0)^4\boxtimes L(k,0)^2\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$=L(k,0)^3\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}=L(k,0)^{\sigma_3,3}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$=\bigoplus_{0\le l<\frac{k}{1},l\in2\mathbb{Z}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,-};$$

$$\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,2}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,2}=L(k,0)^2\boxtimes L(k,0)^3\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$=L(k,0)^4\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}=L(k,0)^{\sigma_3,2}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$=\bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+};$$

$$\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,3}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,3}=L(k,0)^3\boxtimes L(k,0)^2\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$=L(k,0)^4\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}=L(k,0)^{\sigma_3,2}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$=\bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+};$$

$$\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,4}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,4}=L(k,0)^4\boxtimes L(k,0)^4\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$=L(k,0)^1\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}=\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}.$$

（69）-（73）的证明类似。

□

定理 4.6. 对于 $k\in4\mathbb{Z}_+$，我们有

$$\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,1}=\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,2}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,3}=\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,3}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,2}$$

$$=\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,4}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,4}=\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,1}\bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+},\tag{74}$$

$$\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,2}=\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,2}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,4}=\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,3}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$=\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,4}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,3}=\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,3}\bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,-},\tag{75}$$

$$\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,3}=\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,2}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,1}=\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,3}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,4}$$

$$=\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,4}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,2}=\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,4}\bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,-},\tag{76}$$

$$\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,4}=\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,4}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,1}=\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,2}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,2}$$
$$=\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,3}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,3}=\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,2}\bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+}. \tag{77}$$

证明. 我们只证明（74），因为其他公式的证明类似。由（34）和（35），对于 $k\in4\mathbb{Z}$,

$$(M^{\frac{k}{2},0})^+\boxtimes W(k,\frac{k}{2})^+=\sum_{\substack{0\le l\le\frac{k}{2}-1\\ l\in2\mathbb{Z}}}W(k,l)^++W(k,\frac{k}{2})^+,$$

$$(M^{\frac{k}{2},0})^-\boxtimes W(k,\frac{k}{2})^+=\sum_{\substack{0\le l\le\frac{k}{2}-1\\ l\in2\mathbb{Z}}}W(k,l)^-+W(k,\frac{k}{2})^-.$$

注意到

$$V^+_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes(M^{\frac{k}{2},0})^+\oplus V^-_{\mathbb{Z}\gamma}\otimes(M^{\frac{k}{2},0})^-\subseteq\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,1},$$

并且由（18）和（23），

$$\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,1}=V^{T_1,+}\otimes W(k,\frac{k}{2})^+\oplus V^{T_1,-}\otimes W(k,\frac{k}{2})^-.$$

因此由（18）可得

$$\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,1}\bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+}\subseteq\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,1}.$$

由于两边的量子维数相等，我们推得

$$\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_2,1}=\overline{L(k,\frac{k}{2})}^{\sigma_3,1}\bigoplus_{0\le l<\frac{k}{2},l\in2\mathbb{Z}}\overline{L(k,l)}^{\sigma_3,+}.$$

对于（74）的其他情形，由（3）-（5），引理 3.13 和引理 3.3，可得

$$\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,2}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,3}$$
$$=L(k,0)^2\boxtimes L(k,0)^{\sigma_2,3}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$
$$=L(k,0)^2\boxtimes L(k,0)^2\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$
$$=L(k,0)^1\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}=\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1};$$

$$\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,3}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,2}$$

$$=L(k,0)^3\boxtimes L(k,0)^{\sigma_2,2}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$=L(k,0)^3\boxtimes L(k,0)^3\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$=L(k,0)^1\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}=\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1};$$

$$\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,4}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,4}$$

$$=L(k,0)^4\boxtimes L(k,0)^{\sigma_2,4}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$=L(k,0)^4\boxtimes L(k,0)^4\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}$$

$$=L(k,0)^1\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}=\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_1,1}\boxtimes\overline{L(k,\tfrac{k}{2})}^{\sigma_2,1}.$$

□

参考文献

[Ab01] T. Abe，《复共轭轨道折叠的融合规则》，《代数杂志》242 (2001)，624-655。[ABD04] T. Abe、G. Buhl、C. Dong，《有理性、正则性与 C_2-余有限性》，《美国数学会汇刊》356 (2004)，3391-3402。[ALY14]T. Arakawa、C.H. Lam 和 H. Yamada，Zhu 代数， C_2副费米子顶点算子代数的余有限性，《数学进展》264 (2014)，261-295。[ALY19] T. Arakawa、C.H. Lam 和 H. Yamada，副费米子顶点算子代数 CMc 与 W-代数，《美国数学会汇刊》371 (2019)，4277-4301。[Bor86] R. E. Borcherds，《顶点代数、Kac-Moody 代数与怪兽群》，《美国国家科学院院刊》83 (1986)，3068-3071。[CM16] S. Carnahan、M. Miyamoto，定点顶点算子子代数的正则性，arXiv: 1603.16045v3。[D94] C. Dong，与偶格相关的顶点代数的扭曲模，《代数杂志》165 (1994)，90-112。[DJX13] C. Dong、X. Jiao 和 F. Xu，量子维数与量子伽罗瓦理论，《美国数学会汇刊》365 (2013)，6441-6469。

[DJWY10] C. Dong, C. Lam, Q. Wang, H. Yamada, 《副费米子顶点算子代数的结构》, 《代数杂志》323 (2010) 371-381。[DLY09] C. Dong, C. Lam, H. Yamada, 《与副费米子顶点算子代数相关的 W-代数》, 《代数杂志》322 (2009) 2366-2403。[DLM96] C. Dong, H. Li, G. Mason, 《单流与顶点算子代数的扩张》, 《数学物理通讯》180 (1996) 671-707。[DLM97] C. Dong, H. Li, G. Mason, 《有理顶点算子代数的正则性》, 《数学进展》132 (1997) 148-166。[DLM98] C. Dong, H. Li, G. Mason, 《顶点算子代数的扭曲表示》, 《数学年刊》310 (1998) 571-600。[DLM00] C. Dong, H. Li, G. Mason, 《轨形理论中迹函数的模不变性与广义月光》, 《数学物理通讯》214 (2000) 1-56。[DMZ94] C. Dong, G. Mason 和 Y. Zhu, 《Virasoro代数的离散级数与月光模》, 《纯粹数学研讨会论文集》, 美国数学会 56 II (1994), 295-316。[DN99] C. Dong, K. Nagatomo, 《秩一格 L 的顶点算子代数表示》V_L^+, 《数学物理通讯》202 (1999) 169–195。[FHL93] I. B. Frenkel, Y.-Z. Huang, J. Lepowsky, 《顶点算子代数及模的公理化方法》, 《美国数学会回忆录》104 (1993)。[FKRW95] E. Frenkel, V. G. Kac, A. Radul, and W. Wang, 《中心荷为 N 的 $\mathcal{W}_{1+\infty}$ 和 $\mathcal{W}(gl_N)$》, 《数学物理通讯》170 (1995), 337-357。[FLM88] I. B. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman, 《顶点算子代数与怪兽群》, 《纯粹与应用数学》, 第 134 卷, Academic Press, 马萨诸塞州, 1988。[FZ92] I. B. Frenkel, Y. Zhu, 《与仿射代数和 Virasoro代数表示相关的顶点算子代数》, 《杜克数学杂志》66 (1992) 123-168。[JLam19] C. Jiang, C. Lam, 《类型 B 和 D 的顶点算子代数的层级-秩对偶》, 《中央研究院数学研究所通讯》（新系列）14 (2019) 第 1 期, 55–86。[JWa21] C. Jiang, B. Wang, 《轨形顶点算子代数 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(k,0)^K$ 及交换子顶点算子代数 $C_{L_{\widehat{\mathfrak{so}_m}}(1,0)^{\otimes 3}}(L_{\widehat{\mathfrak{so}_m}}(3,0))$ 的表示》, 《马来西亚数学科学学会公报》44 (1) (2021) 353-373。[JW19] C. Jiang, Q. Wang, 《副费米子顶点算子代数 $K(\mathfrak{sl}_2, k)$ 的 $\mathbb{Z}_2$-轨形表示》, 《代数杂志》529 (2019) 174-195。[JW20] C. Jiang, Q. Wang, 《仿射与副费米子顶点算子代数的 $\mathbb{Z}_2$-轨形融合规则》, 《以色列数学杂志》240 (2020) 837-887。

[KMY00] M. Kitazume, M. Miyamoto, H. Yamada, 《三元码与顶点算子代数》, 《代数杂志》223 (2000) 379-395。[Li96-1] H. Li, 《顶点算子、顶点超代数及模的局部系统》, 《纯粹与应用代数》109 (1996) 143-195。[Li96-2] H. Li, 《扭曲顶点算子、顶点算子超代数及扭曲模的局部系统》, 《当代数学》193 (1996) 203–236。[Li97-2] H. Li, 《顶点算子代数理论中的物理超选择原理》, 《代数杂志》196(2) (1997) 436-457。[LL04] J. Lepowsky 和 H. Li, 《顶点算子代数及其表示导论》, 《数学进展》第 227 卷, Birkh¨auser, 波士顿, 2004。[M15] M. Miyamoto, 《循环轨形模型的 C_2-余有限性》, 《数学物理通讯》335 (2015) 1279-1286。[MT04] M. Miyamoto, K. Tanabe, 《轨形模型的 $A_{g,n}(V)$ 与 G-扭曲 Zhu 代数的统一乘积》 V, 《代数杂志》274 (2004) 80-96。[W93] W. Wang, 《Virasoro 顶点算子代数的有理性》, 《国际数学研究通知》7 (1993), 197-211。[Z96] Y. Zhu, 《顶点算子代数特征标的模不变性》, 《美国数学会杂志》9 (1996) 237-302。