arXiv:2303.10433v1 [math.RT] 18 Mar 2023

O岩永-戈伦斯坦环中的 N 个自正交模

雷内·Marczinzik

Abstract. 设 A 是一个岩永-戈伦斯坦环。Enomoto 猜想，自正交 A模具有有限投射维数。我们证明了对于满足以下性质的 A，该猜想成立：每个不可分解非投射极大科恩-麦考利模都是周期的。这回答了 Enomoto 提出的问题，并证明该猜想对单项式箭图代数和超曲面环成立。

Introduction

除非另有说明，我们始终假设 A 是一个双侧诺特半完美环，且所有模都是有限生成右模。回顾一下，如果 A 的左、右模内射维数都等于 n，则称其为 n-岩永-戈伦斯坦。如果 n 无关紧要，我们通常直接称之为岩永-戈伦斯坦环，而不称为 n-岩永-戈伦斯坦环。岩永-戈伦斯坦环的极大 Cohen-Macaulay 模范畴 CM A 定义为 n 阶上同调模 $\Omega^n(\text{mod } A)$ 所构成的范畴，其中包含的模 X 要么是投射模，要么是形如 $\Omega^n(M)$ 的模的直和项，其中 $M \in \text{mod } A$。若一个模 M满足对所有 $i \geq 1$都有 $\text{Ext}^i_A(M, M) = 0$，则称其为自正交模。岩永 - 戈伦斯坦环的定义涵盖了经典情形，即交换局部戈伦斯坦环和岩永-戈伦斯坦阿廷代数。

我们 对以下问题感兴趣，该问题在 [E] 中作为阿廷代数的猜想4.8提出： s.

问题 **0.1.** 设 A 是岩永-戈伦斯坦的，且 M 是自正交的。那么 M 具有有限投影 *ive*
维数。

若此问题有肯定解，将对岩永-戈伦斯坦阿廷代数的倾斜模理论产生重要影响，参见 [E]第3节和第4节。对于阿廷代数，Enomoto猜想是经典Tachikawa猜想的推广；后者指出，自内射代数上的自正交模必为投射模。Tachikawa猜想可视为阿廷代数最重要的同调猜想之一，因为若该猜想存在反例，则会导致其他同调猜想也出现反例，例如中山猜想、Auslander-Reiten猜想和有限维数猜想。关于这些猜想的综述，参见例如 [Y] 。我们的主要结果对上述问题给出了肯定解，适用于一类重要的岩永-戈伦斯坦代数：

定理 0.2. 设 A 是一个 n-岩永-戈伦斯坦环，其中每个不可分解非投射模 $X \in \text{CM } A$ 都是周期的。假设 M具有如下性质：对于所有 $u > n$，均有 $\text{Ext}^u_A(M, M) = 0$。那么， M具有有限投射维数。特别地，所有自正交模都具有有限投射维数。

在 [E] 中，利用广义倾斜模理论，已证明上述问题对于表示有限的岩永-戈伦斯坦阿廷代数有肯定解。在 [E] 的问题 4.7 中，有人要求针对这一情形给出更直接的证明；我们的主要结果为范围大得多的一类岩永-戈伦斯坦阿廷代数给出了这样的直接证明，其中包括所有 CM-有限 Iwanaga-Gorenstein 环，尤其包括这类表示有限代数的子类。

1. Proof of the main results

在本节中，CMA 表示极大 Cohen-Macaulay 模对投射模取商所得的范畴。

Date：2023年3月21日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：16G10、16E10。*Key words and phrases.* 自正交模，Iwanaga-Gorenstein 环。

引理 1.1。 假设 A 是一个 n-岩永-戈伦斯坦环，并且 $M \in \mathrm{CM}\, A$ 和 $N \in$ 模 A.
(1) 对所有 $s \geq 0$, $Hom_A(M, N) \cong Hom_A(\Omega^s(M), \Omega^s(N))$。 *(2)* 对所有 $p \geq 1$, $Ext^p_A(M, N) \cong Hom_A(\Omega^p(M), N)$。 *(3)* 若 M 不可分解，则对所有 $i \geq 1$, $\Omega^i(M) \in CM\ A$ 也不可分解。 *(4)* 若 $M, N \in$ 是不可分解的 *CM* A，且满足 $\Omega^1(M) \cong \Omega^1(N)$，则 $M \cong N$。

证明。 注意，每个模 $X \in \mathrm{CM}\, A$ 都满足对所有 $i > 0$ 有 $\mathrm{Ext}^i_A(X, A) = 0$，因为 X 是形如 $\Omega^n(Y)$ 的模的一个直和项，并且由于 A 的内射维数为 n，对所有 $i > 0$ 有 $\mathrm{Ext}^i_A(\Omega^n(Y)\ A) = \mathrm{Ext}^{n+i}_A(Y, A) = 0$。于是 (1) 和 (2) 是 [I, 2.1] 的特例。(3) 由 [RZ, Corollary 3.3] 得出，而 (4) 是 [KKN, Theorem 5.5] 的推论。

□

回顾一下，若某个模 $X \in \mathrm{mod}\, A$ 满足对某个 $l \geq 1$ 有 $\Omega^l(X) \cong X$，则称其为周期的。

定理 1.2。 设 A 是一个 n-*Iwanaga-Gorenstein* 环，并且每个不可分解非投射模 $X \in \mathrm{CM}\ A$ 都是周期的。假设 M 满足性质：对所有 $u > n$，都有$\mathrm{Ext}^u_A(M, M) = 0$。那么 M 具有有限投射维数。特别地，所有自正交模都具有有限投射维数。
证明。 假设 M 满足性质：对所有 $l \geq 1$，都有 $\mathrm{Ext}^{n+l}_A(M, M) = 0$。于是

$$\mathrm{Ext}^{n+l}_A(M, M) \cong \mathrm{Ext}^l_A(\Omega^n(M), M) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_A(\Omega^{l+n}(M), M)$$

由维数移位和 1.1 (2) 可得；由于 $\Omega^n(M) \in$ CM A，因此我们可以使用该结论。利用 1.1 (1) 和 $s = n$，再一次使用 (2)，得到：

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(\Omega^{l+n}(M), M) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_A(\Omega^{l+n+n}(M), \Omega^n(M)) \cong \mathrm{Ext}^{n+l}_A(\Omega^n(M), \Omega^n(M)).$$

因此，对所有 $l \geq 1$，都有 $\mathrm{Ext}^{n+l}_A(\Omega^n(M), \Omega^n(M)) = 0$，因为我们假设对所有 $l \geq 1$，都有 $\mathrm{Ext}^{n+l}_A(M, M) = 0$。设 X 是 $\Omega^n(M)$ 的一个不可分解直和项。那么 $X \in$ CM A，且对所有$l \geq 1$，都有 $\mathrm{Ext}^{n+l}_A(X, X) = 0$。假设 X 非零。根据假设， X 是周期的。因此，设对某个 $q \geq 1$ 有 $X \cong \Omega^q(X)$。注意，这也意味着对所有 $m \geq 1$，都有 $X \cong \Omega^{qm}(X)$。于是，对所有 $p \geq 1$ 和 $m \geq 1$，可得:

$$\mathrm{Ext}^p_A(X, X) \cong \mathrm{Ext}^p_A(\Omega^{qm}(X), X) \cong \mathrm{Ext}^{p+qm}_A(X, X).$$

现在取足够大的 m，使得 $p + qm > n$。于是

$$\mathrm{Ext}^p_A(X, X) \cong \mathrm{Ext}^{p+qm}_A(X, X) = 0.$$

因此 X 是自正交的。但由 1.1(2)，我们还有

$$\mathrm{Ext}^q_A(X, X) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_A(\Omega^q(X), X) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_A(X, X) \neq 0,$$

因为 $\mathrm{Hom}_A(X, X)$ 中的恒等映射显然非零。这就产生了矛盾，因此 X 必须为零。因此，$\Omega^n(M)$ 的每个不可分解直和项都是零模，所以 $\Omega^n(M)$ 本身必为零模，这意味着 $\Omega^n(M) = 0$ 和 M 具有有限投射维数。□

回顾一下，如果一个 Iwanaga-Gorenstein 环的 $\mathrm{CM}\, A$ 中只有有限多个不可分解模，就称它为 *CM*-有限 。

推论 1.3. 设 A 是一个 *CM*-有限的 *Iwanaga-Gorenstein* 环。那么每个自正交模都有有限投射维数。

证明。 我们证明每个不可分解模 $X \in \mathrm{CM}\, A$ 都是周期的。由此可得结论 1.2。设 X 不可分解。由 1.1 (3)，对所有 $i \geq 0$，$\Omega^i(X) \in \mathrm{CM}\, A$ 也不可分解；又因为 $\mathrm{CM}\, A$ 中只有有限多个不可分解模，所以对某些 $i \geq 0$ 和 $l \geq 1$，有 $\Omega^i(X) \cong \Omega^{i+l}(X)$。由 1.1 (4)，这意味着 $X \cong \Omega^l(X)$，因此 X 是周期的。□

我们给出两个重要例子。第一个针对有限维代数，第二个针对交换局部环。

例 1.4. 设 A 是一个有限维箭图代数 KQ/I，其容许单项式理想为 I。那么 A 具有这样的性质：$\Omega^2(\mathrm{mod} - A)$ 是表示有限的，见 [Z], ；因此，若 A是岩永-戈伦斯坦的，则 A 是 CM-有限的。特别地，所有温和代数都是 CM-有限的岩永-戈伦斯坦代数，因为根据 [GR]，温和箭图代数总是岩永-戈伦斯坦的。因此，对于单项式岩永-戈伦斯坦代数这一类，根据我们的主要结果，每个自正交模都有有限投射维数。

例1.5. 设 R 是一个正则交换局部环，且 $f \neq 0$。那么超曲面环$A = R/(f)$ 是岩永-戈伦斯坦的，并且根据 Eisenbud 关于矩阵分解的经典结果，每个 $X \in \mathsf{CM}\, A$ 模都是周期的，周期至多为 2，见 [Ei]。根据我们的主要结果，每个自正交A-模都有有限投射维数。

References

[Ei] Eisenbud, D: *Homological algebra on a complete intersection, with an Application to Group Representations.* 《美国数学会汇刊》第260卷第1期（1980），第35–64页。[E] Enomoto, H.: *Maximal self-orthogonal modules and a new generalization of tilting modules.* `https://arxiv.org/abs/2301.13498` 。[GR] Geiss, C.; Reiten, I.: *Gentle algebras are Gorenstein.* 载于《代数表示及相关主题》。第十届国际会议（ICRA X）论文集，多伦多，加拿大，2002年。美国数学会（AMS）菲尔兹研究所通讯第45卷，129–133页（2005）。[I] Iyama, O.: *Auslander correspondence.* 《数学进展》第210卷第1期，2007年，第51–82页。[KKN] Kameyama, N; Kimura, Y.; Nishida, K.: *On stable equivalences of module subcategories over a semiperfect noetherian ring.* 2014 137, 1, 7 26 《数学讨论会》（），第卷：期：页码–。[RZ] Ringel, C.M.; Zhang, P.: *Gorenstein-projective and semi-Gorenstein-projective modules.* 《代数与数论》第14卷（2020），第1期，1–36页。[Y] Yamagata, K.: *Frobenius algebras.* 载于《代数手册》第1卷。阿姆斯特丹：北荷兰出版社。841–887页（1996）。[Z] Zimmermann-Huisgen, B.: *Predicting syzygies over monomial relations algebras.* 《数学手稿》，1991年，第70卷第1期，第157–182页。

(Marczinzik) Mathematical Institute of the University of Bonn, Endenicher Allee 60, 53115 Bonn, Germany
Email address: `marczire@math.uni-bonn.de`