arXiv:2303.10447v1 [math.SG] 18 Mar 2023

广义伽利略群余伴随轨道的分类

Richard Cushman[1]

摘要

我们的目标是为广义伽利略群在其李代数对偶空间上的余伴随作用的每个轨道寻找一个代表元。我们的方法遵循 Cushman 和 van der Kallen 的思路，但在细节上有所不同。

1 基本设定

设 $V \subseteq V \subseteq V^\vee$ 是一列实向量空间，其维数依次为 n、$n+2$和 $n+3$，并分别配有内积 $\widetilde{\gamma}$、γ和 $\gamma^\vee$；相对于标准基 $\widetilde{\mathfrak{e}} = \{e_2, \ldots, e_{n+1}\}$、$\mathfrak{e} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}, e_{n+2}\}$和 $\mathfrak{e}^\vee = \{e_0, e_1, \ldots, e_{n+1}, e_{n+2}\}$，它们的 Gram 矩阵 K、K和 $K^\vee$分别为 $\widetilde{K}$、$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \widetilde{K} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $K^\vee = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & K \end{array}\right)$。我们假设 $K^2 = \mathrm{id}$。因此，$\widetilde{\gamma}$ 和 γ是非退化的，且 $\ker K^\vee = \mathrm{span}\{e_0\}$。

设 (W, Γ) 为 (V, γ) 或 $(V, \widetilde{\gamma})$。则

$$\mathrm{O}(W, \Gamma) = \{Q \in \mathrm{Gl}(W, \mathbb{R}) \,|\, \Gamma(Qw, Qw') = \Gamma(w, w') \text{ for all } w, w' \in W\}$$

是作用于 (W, Γ) 的正交群，其李代数为

$$\mathrm{o}(W, \Gamma) = \{Z \in \mathrm{gl}(W, \mathbb{R}) \,|\, \Gamma(Zw, w') + \Gamma(w, Zw') = 0 \text{ for all } w, w' \in W\}.$$

Let

$$\mathrm{O}(V^\vee, \gamma^\vee) = \left\{P^\vee \in \mathrm{Gl}(V^\vee, \mathbb{R}) \,|\, \gamma^\vee(P^\vee v^\vee, P^\vee w^\vee) = \gamma^\vee(v^\vee, w^\vee)\right\}$$

是作用于（$V^\vee$，$\gamma^\vee$）上的广义正交群。固定 $v_0^\vee \in \ker \gamma^\vee$。则$P^\vee v_0^\vee = v_0^\vee$ 对于每个 $P^\vee \in \mathrm{O}(V^\vee, \gamma^\vee)$。$\mathrm{O}(V^\vee, \gamma^\vee)$ 的李代数 $\mathrm{o}(V^\vee, \gamma^\vee)$ 等于

$$\left\{X^\vee \in \mathrm{gl}(V^\vee, \mathbb{R}) \,|\, \gamma^\vee(X^\vee v^\vee, w^\vee) + \gamma^\vee(v^\vee, X^\vee w^\vee) = 0 \;\&\; X^\vee(v_0^\vee) = 0\right\}.$$

[1]印刷日期：2023年3月21日

~ ~令 $U = V$、V、$V^\vee$，并令 $\mathcal{K} = K$、K、$K^\vee$。对于 $u = \widetilde{v}$、v、$v^\vee \in U$，令$u^* = (\mathcal{K}u)^T = u^T\mathcal{K} \in U^*$。对于所有 u、$v \in U$，令

$$L_{u,v} = u \otimes v^* - v \otimes u^*.$$

于是 $L_{u,\ v} = -L_{v,\ u}$。因此 $L_{u,\ u} = 0$。

事实 A. 对任意 $v^\vee, w^\vee \in V^\vee$，我们有 $L_{v^\vee,\ w^\vee} \in \mathfrak{o}(V^\vee, \gamma^\vee)$。

类似地，对任意 $v, w \in V$，我们有 $L_{v,\ w} \in \mathfrak{o}(V, \gamma)$；并且对任意 $\widetilde{v}$, ~ ~，我们有 $\widetilde{w} \in V^{L_{\widetilde{v},\ \widetilde{w}}} \in \mathfrak{o}(V, \widetilde{\gamma})$。

事实 B. 若 $P^\vee \in \mathrm{O}(V^\vee, \gamma^\vee)$，则 $P^\vee L_{v^\vee,\ w^\vee}(P^\vee)^{-1} = L_{P^\vee v^\vee,\ P^\vee w^\vee}$。

类似地，若 $P \in \mathrm{O}(V, \gamma)$，则 $PL_{v,\ w}P^{-1} = L_{Pv,\ Pw}$。此外，若 $\widetilde{P} \in \mathrm{O}(\widetilde{V}, \widetilde{\gamma})$，则 $\widetilde{P}L_{\widetilde{v},\ \widetilde{w}}(\widetilde{P})^{-1} = L_{\widetilde{P}\widetilde{v},\ \widetilde{P}\widetilde{w}}$。

相对于 $V^\vee$ 的标准基 $\mathfrak{e}^\vee$，广义正交群 $\mathrm{O}(V^\vee, K^\vee)$ 的每个元素 $P^\vee$ 都由矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & p^* \\ 0 & P \end{smallmatrix}\right)$ 给出。这里$p \in V$，并且 $P \in \mathrm{O}(V, K)$，使用 V 的标准基 $\mathfrak{e}$。

断言 1. 映射

$$\mathrm{O}(V, K) \ltimes V^* \to \mathrm{O}(V^\vee, K^\vee) : (P, p^*) \mapsto \left(\begin{array}{c|c} 1 & p^* \\ \hline 0 & P \end{array}\right) = P^\vee \tag{1}$$

是李群同构，其中 $\mathrm{O}(V, K)$ 上的乘法 $\cdot \ltimes V^*$ 由 $(P, p^*) \cdot (\overline{P}, \overline{p}^*) = (P\overline{P}, p^*\overline{P} + \overline{p}^*)$ 给出，而 $\mathrm{O}(V^\vee, K^\vee)$ 上的乘法是矩阵乘法。

方程 (1) 给出的同构诱导出映射

$$\mathrm{o}(V, K) \ltimes V^* \to \mathrm{o}(V^\vee, K^\vee) : (X, x^*) \mapsto \left(\begin{array}{c|c} 0 & x^* \\ \hline 0 & X \end{array}\right) = X^\vee. \tag{2}$$

映射 (2) 是李代数同构。从现在起，我们将 $\mathrm{O}(V^\vee, K^\vee)$ 与 $\mathrm{O}(V, K) \ltimes V^*$ 以及 $\mathfrak{o}(V^\vee, K^\vee)$ 与 $\mathfrak{o}(V, K) \ltimes V^*$视为相同。

相对于（$V^\vee, K^\vee$）的标准基 $\mathfrak{e}^\vee$，李代数 $\mathfrak{o}(V^\vee, K^\vee)$ 的每个元素 $X^\vee = (X, x^*)$ 都可表示为矩阵 $\left(\begin{array}{c|c} 0 & x^* \\ \hline 0 & X \end{array}\right)$，其中$x = x_1 e_1 + \widetilde{x} + x_{n+2} e_{n+2} \in V$，这意味着 $x^* = x_{n+2} e_1^T + \widetilde{x}^* + x_1 e_{n+2}^T$。利用 V 的标准基 $\mathfrak{e}$，X 的矩阵为 $\left(\begin{array}{c|c|c} a & -\widetilde{e}^* & 0 \\ \hline \widetilde{d} & \widetilde{X} & \widetilde{e} \\ \hline 0 & -\widetilde{d}^* & -a \end{array}\right) \in \mathfrak{o}(V, K)$~ ~ ~ ~，其中 $a \in \mathbb{R}$；$d, \widetilde{e} \in V$；以及 $X \in \mathfrak{o}(V, K)$。因此

$$\dim \mathrm{o}(V^\vee, K^\vee) = n + 2 + \dim \mathrm{o}(V, K) = 3n + 3 + \dim \mathrm{o}(\widetilde{V}, \widetilde{K}).$$

现在我们计算 $\mathrm{Ad}_{P^\vee} X^\vee$，其中 $X^\vee = (X, x^*) \in \mathfrak{o}(V^\vee, K^\vee)$，且 $P^\vee = (P, p^*) \in \mathrm{O}(V^\vee, K^\vee)$。根据定义

$$\mathrm{Ad}_{P^\vee} X^\vee = P^\vee X^\vee (P^\vee)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & p^* X P^{-1} + x^* P^{-1} \\ 0 & P X P^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

由于

$$\begin{aligned} p^* X P^{-1} &= p^T (K X P^{-1}) = -p^T (X^T K P^{-1}) \\ &= -p^T (X^T P^T K) = -(PXp)^T K = -(PXp)^* \end{aligned}$$

and

$$x^* P^{-1} = x^T K P^{-1} = x^T P^T K = (Px)^T K = (Px)^*,$$

方程 (3) 变为

$$\mathrm{Ad}_{P^\vee} X^\vee = \mathrm{Ad}_{(P,p^*)}(X, x^*) = \big(PXP^{-1}, -(PXp)^* + (Px)^*\big). \tag{4}$$

在方程 (4) 中将 $P^\vee$ 替换为 $(P^\vee)^{-1} = (P^{-1}, -(Pp)^*)$，得到

$$\mathrm{Ad}_{(P^\vee)^{-1}} X^\vee = \big(P^{-1} X P, (P^{-1} X P p)^* + (P^{-1} x)^*\big). \tag{5}$$

在 $\mathfrak{o}(V^\vee, K^\vee)$ 上定义内积 $\langle \,|\, \rangle$ 如下

$$\langle (X, x^*) | (\overline{X}, \overline{x}^*) \rangle = \tfrac{1}{2} \operatorname{tr}(X \overline{X}) + \langle x, \overline{x} \rangle,$$

其中 (X, x^*)、$(\overline{X}, \overline{x}^*) \in \mathfrak{o}(V^\vee, K^\vee)$，且 $\langle x, \overline{x} \rangle = \overline{x}^T K x$。

断言 2. 内积 $\langle \,|\, \rangle$ 在 $\mathfrak{o}(V^\vee, K^\vee)$ 上是非退化的。换言之，实线性映射

$$\sharp : \mathfrak{o}(V^\vee, K^\vee) \to \mathfrak{o}(V^\vee, K^\vee)^* : X^\vee \mapsto (X^\vee)^\sharp$$

是双射。这里，对于每个 $\overline{X}^\vee \in \mathfrak{o}(V^\vee, K^\vee)$，都有 $(X^\vee)^\sharp(\overline{X}^\vee) = \langle X^\vee | \overline{X}^\vee \rangle$。

证明。假设对于每个 $(\overline{X}, \overline{x}^*) \in \mathfrak{o}(V^\vee, K^\vee)$，都有 $0 = \langle (X, x^*) | (\overline{X}, \overline{x}^*) \rangle$。令 $\overline{x}^* = 0$。那么，对于每个 $\overline{X} \in \mathfrak{o}(V, K)$，都有 $0 = \frac{1}{2} \operatorname{tr} X \overline{X}$。由于 $K^2 = \mathrm{id}$，若 $\overline{X} \in \mathfrak{o}(V, K)$，则 $\overline{X}^T \in \mathfrak{o}(V, K)$。这是因为 $0 = \overline{X}^T K + K \overline{X}$ 推出 $0 = \overline{X} K + K \overline{X}^T$，在右侧和左侧分别乘以 K，并利用 $K^2 = \mathrm{id}$ 这一事实即可得到。因此 $0 = (\overline{X}^T)^T K + K \overline{X}^T$，也就是说，$\overline{X}^T \in \mathfrak{o}(V, K)$。取 $\overline{X} = X^T$。那么 $0 = \frac{1}{2} \operatorname{tr} X \overline{X} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} X X^T$，由此可得 $X = 0$。现在令 $\overline{X} = 0$。那么，对每个 $\overline{x} \in V$，都有 $0 = \langle (0, x^*) | (0, \overline{x}^*) \rangle = \langle x, \overline{x} \rangle = \overline{x}^T K x$。但是 K 是非退化的。因此 $x = 0$。所以 $\langle \,|\, \rangle$ 是非退化的。□

事实 C。设 $X \in \mathfrak{o}(V,K)$。对于 $v,w \in V$，有 $\langle Xv,w\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(L_{v,\ w}X)$。
证明。对于每个 $y \in V$，都有

$$\begin{aligned}(L_{v,w}X)y = L_{v,w}(Xy) &= (v\otimes w^*)(Xy) - (w\otimes v^*)(Xy)\\ &= \langle Xy,w\rangle\, v - \langle Xy,v\rangle\, w\\ &= -\langle y,Xw\rangle\, v + \langle y,Xv\rangle\, w, \quad \text{since } X\in \mathrm{o}(V,K)\\ &= -(v\otimes (Xw)^*)y + (w\otimes (Xv)^*)y,\end{aligned}$$

也就是说，$L_{v,w}X = -v\otimes (Xw)^* + w\otimes (Xv)^*$。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(L_{v,w}X) &= -\mathrm{tr}(v\otimes (Xw)^*) + \mathrm{tr}(w\otimes (Xv)^*)\\ &= -\langle v,Xw\rangle + \langle w,Xv\rangle = \langle Xv,w\rangle + \langle w,Xv\rangle = 2\langle Xv,w\rangle. \quad \square\end{aligned}$$

~对于每个 $P^\vee \in \mathrm{O}(V^\vee,K^\vee)$，令 $\mathrm{Ad}_{P^\vee}$ 为从 $\mathrm{o}(V^\vee,K^\vee)$ 到其自身的映射，使得

$$(\widetilde{\mathrm{Ad}}_{P^\vee}(X^\vee))^\sharp = \mathrm{Ad}^T_{(P^\vee)^{-1}}\big((X^\vee)^\sharp\big) \tag{6}$$

对于每个 $X^\vee \in \mathrm{o}(V^\vee,K^\vee)$。
引理 3. 对于 $P^\vee = (P,p^*) \in \mathrm{O}(V^\vee,K^\vee)$ 和 $X^\vee = (X,x^*) \in \mathrm{o}(V^\vee,K^\vee)$，有

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_{(P,p^*)}(X,x^*) = \big(PXP^{-1} + L_{Pp,Px}, (Px)^*\big). \tag{7}$$

~证明。注意，映射 Ad 的定义等价于

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{\mathrm{Ad}}_{(P,p)}(X,x^*)|(Y,y^*)\rangle &= \langle (X,x^*)|\mathrm{Ad}_{(P^{-1},-(Pp)^*)}(Y,y^*)\rangle,\\ &\qquad \text{for every } (Y,y^*)\in \mathrm{o}(V^\vee,K^\vee)_{v_0^\vee}\\ &= \langle (X,x^*)|(P^{-1}YP,(P^{-1}YPp)^* + (P^{-1}y)^*)\rangle, \text{ by (5)}\\ &= \tfrac{1}{2}\ \mathrm{tr}\big[(XP^{-1}Y)P\big] + \langle x,P^{-1}YPp\rangle + \langle x,P^{-1}y\rangle\\ &\qquad \text{by definition of } \langle\ |\ \rangle\\ &= \tfrac{1}{2}\ \mathrm{tr}\big[(PXP^{-1})Y\big] + \langle YPp,Px\rangle + \langle Px,y\rangle\\ &\qquad \text{since } P\in \mathrm{O}(V,K)\\ &= \tfrac{1}{2}\ \mathrm{tr}\big[(PXP^{-1} + L_{Pp,Px})Y\big] + \langle Px,y\rangle, \text{ see fact C}\\ &= \langle (PXP^{-1} + L_{Pp,Px},(Px)^*)|(Y,y^*)\rangle,\\ &\qquad \text{for every } (Y,y^*)\in \mathrm{o}(V^\vee,K^\vee).\end{aligned}$$

公式（7）成立，因为 $\langle\ |\ \rangle$ 是非退化的。 $\square$

2 广义伽利略群

首先，我们用矩阵来描述广义伽利略群。相对于 V 的标准基 $\mathfrak{e}$，广义伽利略群 Gal_n 是由形如 $\begin{pmatrix}1 & \widetilde{a}^* & b\\ 0 & \widetilde{A} & \widetilde{c}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 的所有$(n+2)\times(n+2)$实矩阵构成的集合，其中 $b\in\mathbb{R}$；$\widetilde{a}$、$\widetilde{c}\in\widetilde{V}$；且 $\widetilde{A}\in\mathrm{O}(\widetilde{V},\widetilde{K})$。这里$\widetilde{a}^*=\widetilde{a}^T\widetilde{K}=(\widetilde{K}\widetilde{a})^T$。[2]

设 $y^\vee$ 是 $V^\vee$ 中一个非零的 $\gamma^\vee$-各向同性向量，且不属于 $\ker\gamma^\vee$。令 $\mathrm{O}(V^\vee,\gamma^\vee)_{y^\vee}$ 为 $\mathrm{O}(V^\vee,\gamma^\vee)$ 中满足 $P^\vee y^\vee=y^\vee$ 的元素 $P^\vee$ 所构成的子群。存在 $V^\vee$ 的一个基 $\mathfrak{e}^\vee$，使得 $y^\vee=e_{n+2}$，且 $\gamma^\vee$ 的矩阵为 $K^\vee$。于是

$$\begin{aligned}&\mathrm{O}(V^\vee,K^\vee)_{e_{n+2}}=\{P^\vee\in\mathrm{O}(V^\vee,K^\vee)\,\big|\,P^\vee e_{n+2}=e_{n+2}\}\\&=\{P^\vee=\left(\begin{array}{c|c}1 & p^*\\ \hline 0 & P\end{array}\right)\in\mathrm{O}(V^\vee,K^\vee)\,\big|\,p^*(e_{n+2})=0,\ P\in\mathrm{O}(V,K)_{e_{n+2}}\}.\end{aligned}$$

这里，$P\in$ 属于 $\mathrm{O}(V,K)_{e_{n+2}}$ 当且仅当 $P\in$ 属于 $\mathrm{O}(V,K)$ 且 $Pe_{n+2}=e_{n+2}$。为了更明确地描述 $\mathrm{O}(V^\vee,K^\vee)_{e_{n+2}}$ 的一个元素 (P,p^*)，我们先求出 $\mathrm{O}(V,K)_{e_{n+2}}$ 的矩阵相对于 V 的标准基 $\mathfrak{e}$ 的表示。令 $P=\begin{pmatrix}a & \widetilde{b}^T & c\\ \widetilde{d} & \widetilde{P} & \widetilde{e}\\ f & \widetilde{g}^T & h\end{pmatrix}$ 为一个实 $(n+2)\times(n+2)$ 矩阵，其中 $a,c,f,h\in\mathbb{R}$；$\widetilde{b},\widetilde{d},\widetilde{e},\widetilde{g}\in\widetilde{V}$；且 $\widetilde{P}\in$ 属于 $\mathrm{gl}(\widetilde{V},\mathbb{R})$。由于 $Pe_{n+2}=e_{n+2}$，我们得到 $P=\begin{pmatrix}a & \widetilde{b}^T & 0\\ \widetilde{d} & \widetilde{P} & 0\\ f & \widetilde{g}^T & 1\end{pmatrix}$。但 $P\in$ 属于 $\mathrm{O}(V,K)$，也就是说，$K=P^TKP$。这意味着 $\mathrm{O}(V,K)_{e_{n+2}}$ 是所有形如 $\begin{pmatrix}1 & \widetilde{d} & 0\\ -\frac{1}{2}\widetilde{d}^T\widetilde{K}\widetilde{d} & -\widetilde{d}^*\widetilde{P} & 0\\ \widetilde{} & \widetilde{} & \widetilde{}\end{pmatrix}$，$\widetilde{}\quad\widetilde{}\quad\widetilde{}\quad\widetilde{}\quad\widetilde{}$ 的 $(n+2)\times(n+2)$ 实矩阵的集合，其中 $d\in V$ 且 $P\in$ 属于 $\mathrm{O}(V,K)$。若 $p=p_1e_1+\widetilde{p}+p_{n+2}e_{n+2}\in V$，则 $p^*=p_{n+2}e_1^T+\widetilde{p}^*+p_1e_{n+2}^T$。但 $0=p^*(e_{n+2})=p_1$。因此

$$\mathrm{O}(V^\vee,K^\vee)_{e_{n+2}}=\left\{\left(\begin{array}{c|ccc}1 & p_{n+2} & \widetilde{p}^* & 0\\ \hline 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \widetilde{d} & \widetilde{P} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\widetilde{d}^T\widetilde{K}\widetilde{d} & -\widetilde{d}^*\widetilde{P} & 1\end{array}\right)\,\middle|\,\begin{array}{l}p_{n+2}\in\mathbb{R};\ \widetilde{d},\,\widetilde{p}\in\widetilde{V};\\ \widetilde{P}\in\mathrm{O}(\widetilde{V},\widetilde{K})\end{array}\right\}.$$

由于映射

$$\Xi:\mathrm{O}(V^\vee,K^\vee)_{e_{n+2}}\to\mathrm{Gal}_n:\left(\begin{array}{c|ccc}1 & p_{n+2} & \widetilde{p}^* & 0\\ \hline 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \widetilde{d} & \widetilde{P} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\widetilde{d}^T\widetilde{K}\widetilde{d} & -\widetilde{d}^*\widetilde{P} & 1\end{array}\right)\mapsto\begin{pmatrix}1 & \widetilde{p}^* & p_{n+2}\\ 0 & \widetilde{P} & \widetilde{d}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad(8)$$

是一个群同构，因此我们可以将 $\mathrm{O}(V^\vee,K^\vee)_{e_{n+2}}$ 与广义伽利略群 Gal_n 等同起来。

[2]在伽利略群中，有 $\widetilde{A}\in$SO(3)。

The Lie algebra $\mathrm{o}(V^\vee,K^\vee)_{e_{n+2}}$ of $\mathrm{O}(V^\vee,K^\vee)_{e_{n+2}}$ is

$$\{X^\vee\in\mathrm{o}(V^\vee,K^\vee)\big|\,X^\vee(e_{n+2})=0\},$$

其等于

$$\{X^\vee=\left(\begin{array}{c|c}0&x^*\\\hline 0&X\end{array}\right)\in\mathrm{o}(V^\vee,K^\vee)\big|\,x^*(e_{n+2})=0,\ X\in\mathrm{o}(V,K)_{e_{n+2}}\}.$$

这里，$X\in\mathsf{o}(V,K)_{e_{n+2}}$ 当且仅当 $X\in\mathsf{o}(V,K)$ 且 $X(e_{n+2})=0$。由于 $x^*(e_{n+2})=0$ 且 $X(e_{n+2})=0$，我们发现，$\mathsf{o}(V^\vee,K^\vee)_{e_{n+2}}$ 的每个元素 $X^\vee$ 都可由矩阵 $\begin{pmatrix}0&x_{n+2}&\widetilde{x}^*&0\\0&0&0&0\\0&\widetilde{y}&\widetilde{X}&0\\0&0&-\widetilde{y}^*&0\end{pmatrix}$ 表示，其中 $x_{n+2}\in\mathbb{R}$；$\sim\quad\sim\quad\sim\ \widetilde{x},\widetilde{y}\in V$；且 $X\in\mathsf{o}(V,K)$。因此映射

$$\xi=T_I\Xi:\mathrm{o}(V^\vee,K^\vee)_{e_{n+2}}\to\mathrm{gal}_n:\begin{pmatrix}0&x_{n+2}&\widetilde{x}^*&0\\0&0&0&0\\0&\widetilde{y}&\widetilde{X}&0\\0&0&-\widetilde{y}^*&0\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}0&\widetilde{x}^*&x_{n+2}\\0&\widetilde{X}&\widetilde{y}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

是李代数的一个同构。因此

$$\dim\mathrm{o}(V^\vee,K^\vee)_{e_{n+2}}=1+2n+\dim\mathrm{o}(\widetilde{V},\widetilde{K}).$$

3 特殊余型与伴随余轨道

取 V 的标准基 $\mathfrak{e}$，特殊元组 $(V,Y,y;K)$ 由二元组 $(V,Y;K)$（其中 $Y\in\mathsf{o}(V,K)$）和向量 $y\in V$ 构成。若且唯若存在一个 $P\in\mathsf{O}(V,K)_{e_{n+2}}$、两个向量 $v,p\in V$（满足 $p^*(e_{n+2})=0$）以及一个实数 v_0，使得特殊元组 $(V,Y,y;K)$ 和 $(V,Y',y';K)$ 等价

$$Y'+L_{v,e_{n+2}}=P(Y+L_{p,y})P^{-1}\tag{9a}$$

and

$$y'=Py+v_0e_{n+2}.\tag{9b}$$

等价是一种定义在特殊元组集合上的等价关系。特殊元组的一个等价类称为特殊余型。若 $y=0$ 和$V=\{0\}$，则 $\big(\{0\}、0、0;\ (0)\big)$ 是一个特殊元组，它表示零特殊余型 0。

若存在 Y-不变且两两正交的子空间 V_1 和 V_2，它们属于 V，且 K 在其上非退化，并满足 $V=V_1\oplus V_2$、$y\in V_1$ 和 $V_2\neq 0$，则特殊元组 $(V,Y,y;K)$ 是可分解的。令 ∇ 为特殊余型

由元组 $(V, Y, y; K)$ 表示。特殊余型 ∇ 是特殊余型 ∇'（由元组 $(V_1, Y|V_1, y; K|V_1)$ 表示）与型 Δ（由对 $(V_2, Y|V_2; K|V_2)$ 表示）之和。记作 $\nabla = \nabla' + \Delta$。若特殊余型 ∇ 不能写成特殊余型 ∇' 与型 Δ 之和，则 ∇ 是不可分解特殊余型。

本节余下部分将用于证明

命题4。映射

$$(V, Y, y; K) \mapsto (Y^\vee)^\sharp | \mathrm{o}(V^\vee, K^\vee)_{e_{n+2}},$$

其中 $Y^\vee = (Y, y^*) \in \mathsf{o}(V^\vee, K^\vee)$，在由特殊元组 $(V, Y, y; K)$ 表示的特殊余型 ∇ 与经过 $(Y^\vee)^\sharp | \mathsf{o}(V^\vee, K^\vee)_{e_{n+2}}$ 的 $\mathsf{O}(V^\vee, K^\vee)_{e_{n+2}}$ 余伴随轨道之间诱导出一个双射。

为了证明这个命题，我们需要一些预备信息。

事实D。对于 $v^\vee = v_0\, e_0 + v_1\, e_1 + \widetilde{v} + v_{n+2}\, e_{n+2} \in V^\vee$，线性映射的矩阵 r
映射 $L_{v^\vee, e_{n+2}} \in \mathsf{o}(V^\vee, K^\vee)$ 关于标准基 $\mathfrak{e}^\vee$ of $V^\vee$ i s

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & v_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & v_1 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\widetilde{v}^* & -v_1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & v_0 e_1^T \\ \hline & L_{v, e_{n+2}} \end{array}\right) \text{ with } v = v_1\, e_1 + \widetilde{v} + v_{n+2}\, e_{n+2} \in V.$$

证明。根据事实 A，从 $V^\vee$ 到其自身的线性映射 $L_{v^\vee, e_{n+2}}$ 属于 $\mathsf{o}(V^\vee, K^\vee)$。下面的计算将确定相对于基 $\mathfrak{e}^\vee$ 的 $L_{v^\vee, e_{n+2}}$ 的矩阵。我们有

$$\begin{aligned} L_{v^\vee, e_{n+2}}(e_0) &= (v^\vee \otimes e_{n+2}^*)(e_0) - (e_{n+2} \otimes (v^\vee)^*)(e_0) \\ &= (e_{n+2}^T K^\vee e_0) v^\vee - ((v^\vee)^T K^\vee e_0) e_{n+2} = 0 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} L_{v^\vee, e_{n+2}}(e_1) &= (e_{n+2}^T K^\vee e_1) v^\vee - ((v^\vee)^T K^\vee e_1) e_{n+2} \\ &= e_{n+2}^T (e_{n+2}) v^\vee - (v^\vee)^T (e_{n+2}) e_{n+2} \\ &= v^\vee - v_{n+2} e_{n+2} = v_0 e_0 + v_1 e_1 + \widetilde{v}. \end{aligned}$$

对于 $2 \le i \le n+1$

$$L_{v^\vee, e_{n+2}}(e_i) = (e_{n+2}^T K^\vee e_i) v^\vee - ((v^\vee)^T K^\vee e_i) e_{n+2} = -\widetilde{v}^*(e_i) e_{n+2}.$$

最后

$$L_{v^\vee, e_{n+2}}(e_{n+2}) = (e_{n+2}^T K^\vee e_{n+2}) v^\vee - ((v^\vee)^T K^\vee e_{n+2}) e_{n+2} = -v_1 e_{n+2}. \quad \square$$

令 $\mathfrak{o}(V^\vee,K^\vee)^0_{e_{n+2}}$ 为满足以下条件的 $(Y^\vee)^\sharp\in\mathfrak{o}(V^\vee,K^\vee)^*$ 的集合：$Y^\vee\in\mathfrak{o}(V^\vee,K^\vee)_{e_{n+2}}$，使得 $(Y^\vee)^\sharp(Z^\vee)=0$ 对每个 $Z^\vee\in\mathfrak{o}(V^\vee,K^\vee)_{e_{n+2}}$ 都成立。

事实 E. 我们有

$$\mathfrak{o}(V^\vee,K^\vee)^0_{e_{n+2}}=\{(L_{v^\vee,e_{n+2}})^\sharp\in\mathfrak{o}(V^\vee,K^\vee)^*\,\big|\,v^\vee=v_0\,e_0+v_1\,e_1+\widetilde{v}\in V^\vee\}.$$

证明。令 $Y^\vee=(Y,y^*)\in\mathfrak{o}(V^\vee,K^\vee)$。假设对于每个 $Z^\vee=(Z,z^*)\in\mathfrak{o}(V^\vee,K^\vee)_{e_{n+2}}$，都有 $0=(Y^\vee)^\sharp Z^\vee$。换言之，假设 $(Y^\vee)^\sharp\in\mathfrak{o}(V^\vee,K^\vee)^0_{e_{n+2}}$。那么对于每个 $Z\in\mathfrak{o}(V,K)$（其中 $Z(e_{n+2})=0$）以及每个满足 $0=z^*(e_{n+2})=z_1$ 的 $z\in V$，都有 $0=\langle(Y,y^*)|(Z,z^*)\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\;YZ+\langle y,z\rangle$。因此，对于每个 $Z\in\mathfrak{o}(V,K)$、每个 $f\in V$ 和每个 $z=\widetilde{z}+z_{n+2}e_{n+2}\in V$，我们有

$$0=\tfrac{1}{2}\;\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix}a&-\widetilde{e}^*&0\\ \widetilde{d}&\widetilde{Y}&\widetilde{e}\\ 0&-\widetilde{d}^*&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\ \widetilde{f}&\widetilde{Z}&0\\ 0&-\widetilde{f}^*&0\end{pmatrix}\right]+(0,\widetilde{z}^T,z_{n+2})\begin{pmatrix}0&0&1\\ 0&\widetilde{K}&0\\ 1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \widetilde{y}\\ y_{n+2}\end{pmatrix},$$

其中 $Y=\begin{pmatrix}a&-\widetilde{e}^*&0\\ \widetilde{d}&\widetilde{Y}&\widetilde{e}\\ 0&-\widetilde{d}^*&-a\end{pmatrix}\in\mathfrak{o}(V,K)$ 且 $y=y_1e_1+\widetilde{y}+y_{n+2}e_{n+2}\in V$。换言之，

$$\begin{aligned}0&=-\tfrac{1}{2}\widetilde{e}^*(\widetilde{f})+\tfrac{1}{2}\;\mathrm{tr}(\widetilde{Y}\widetilde{Z})-\tfrac{1}{2}\;\mathrm{tr}(e\otimes\widetilde{f}^*)+y_1z_{n+2}+\widetilde{y}^T\widetilde{K}\widetilde{z}\\ &=\tfrac{1}{2}\;\mathrm{tr}(\widetilde{Y}\widetilde{Z})-\widetilde{e}^T\widetilde{K}\widetilde{f}+y_1z_{n+2}+\widetilde{y}^T\widetilde{K}\widetilde{z},\end{aligned}\tag{10}$$

对于每个 $Z\in\mathfrak{o}(V,K)$、每个 f、$\widetilde{z}\in V$ 以及每个 $z_{n+2}\in\mathbb{R}$，$f=$。在 (10) 中令 $Y=0$，$\widetilde{z}=0$，$z_{n+2}=0$) 中令 $\widetilde{z}=0$ 和 $z_{n+2}=0$，可得。在 (10) 中令和，并取 $Y=0$，可得 $f=0$。再重复此过程两次，得到 $Y=0$、$\widetilde{e}=0$、$y_1=0$ 和 $\widetilde{y}=0$，即 $Y^\vee=(Y,y^*)$，其中 $Y=\begin{pmatrix}a&0&0\\ \widetilde{d}&0&0\\ 0&-\widetilde{d}^*&-a\end{pmatrix}\in\mathfrak{o}(V,K)$、$a\in\mathbb{R}$；$\widetilde{d}\in\widetilde{V}$；以及 $y=y_{n+2}e_{n+2}$。因此

$$\mathfrak{o}(V^\vee,K^\vee)^0_{e_{n+2}}\subseteq\{(L_{v^\vee,e_{n+2}})^\sharp\in\mathfrak{o}(V^\vee,K^\vee)^*\,\big|\,v^\vee=y_{n+2}e_0+a\,e_1+\widetilde{d}\in V^\vee\}.\tag{11}$$

由于

$$\begin{aligned}\dim\mathfrak{o}(V^\vee,K^\vee)^0_{e_{n+2}}&=\dim\mathfrak{o}(V^\vee,K^\vee)-\dim\mathfrak{o}(V^\vee,K^\vee)_{e_{n+2}}\\ &=3+3n+\dim\mathfrak{o}(\widetilde{V},\widetilde{K})-1-2n-\dim\mathfrak{o}(\widetilde{V},\widetilde{K})\\ &=2+n\end{aligned}$$

而由形如 $(L_{v^\vee,e_{n+2}})^\sharp$（其中 $v^\vee=y_{n+2}e_0+ae_1+\widetilde{d}$）的余向量张成的 $\mathfrak{o}(V^\vee,K^\vee)^*$ 子空间的维数为 $2+n$，因此（11）中等号成立。□

命题4的证明。假设特殊元组 $(V, Y', y'; K)$ 与特殊元组 $(V, Y, y;\ K)$ 等价。那么，对于某个 $P \in \mathsf{O}(V, K)^{e_{n+2}}$、某些满足 $p^*(e_{n+2}) = 0$ 的向量 $-v$, $p \in V$，以及某个实数 v_0，我们有

$$Y' + L_{-v,e_{n+2}} = P(Y + L_{p,y})P^{-1} \text{ and } y' = Py + v_0 e_{n+2},$$

也就是说,

$$(Y', (y')^*) = (PYP^{-1} + L_{Pp,Py}, (Py)^*) + (L_{v,e_{n+2}}, v_0 e^*_{n+2} = v_0 e_1^T) \quad (12)$$

现在，$(Y')^\vee = (Y', (y')^*)$ 和 $Y^\vee = (Y, y^*)$ 属于 $\mathsf{o}(V^\vee, K^\vee)$。由于 $P \in \mathsf{O}(V, K)^{e_{n+2}}$ 且 $p^*(e_{n+2}) = 0$，因此 $P^\vee = (P, p^*) \in \mathsf{O}(V^\vee, K^\vee)^{e_{n+2}}$。令 $v^\vee = v_0 e_0 + v \in V^\vee$。于是，(12) 等价于

$$\begin{aligned}(L_{v^\vee,e_{n+2}})^\sharp &= (Y', (y')^*)^\sharp - (\widetilde{\mathrm{Ad}}_{(P,p^*)}(Y, y^*))^\sharp \\ &= ((Y')^\vee)^\sharp - \mathrm{Ad}^T_{(P^\vee)^{-1}}(Y^\vee)^\sharp. \end{aligned} \quad (13)$$

因此，我们有

$$(Y')^\vee)^\sharp|\mathrm{o}(V^\vee, K^\vee)_{e_{n+2}} = \mathrm{Ad}^T_{(P^\vee)^{-1}}((Y^\vee)^\sharp|\mathrm{o}(V^\vee, K^\vee)_{e_{n+2}},$$

根据事实 E，这是因为 $(L_{v^\vee,e_{n+2}})^\sharp \in \mathsf{o}(V^\vee, K^\vee)^0_{e_{n+2}}$。换言之，$((Y')^\vee)^\sharp|\mathsf{o}(V^\vee, K^\vee)^{e_{n+2}}$ 位于经过 $(Y^\vee)^\sharp|\mathsf{o}(V^\vee, K^\vee)^{e_{n+2}}$ 的 $\mathsf{O}(V^\vee, K^\vee)^{e_{n+2}}$-余伴随轨道上。当特殊元组 $(V, Y', y';\ K)$ 遍历与 $(V, Y, y;\ K)$ 等价的特殊元组集合时，根据等价的定义，矩阵 $P \in \mathsf{O}(V, K)$ 和满足 $p^*(e_{n+2}) = 0$ 的向量 $p \in V$ 随之变化，使得 $P^\vee = (P, p^*)$ 遍历 $\mathsf{O}(V^\vee, K^\vee)^{e_{n+2}}$ 中的所有元素。因此，我们看到诱导映射是良定义的。

假设对于某个 $(Y')^\vee \in \mathsf{o}(V^\vee, K^\vee)$ 和某个 $P^\vee \in \mathsf{O}(V^\vee, K^\vee)^{e_{n+2}}$，我们有 $((Y')^\vee)^\sharp = \mathsf{Ad}^T_{(P^\vee)^{-1}}(Y^\vee)^\sharp$ on $\mathsf{o}(V^\vee, K^\vee)^{e_{n+2}}$。换言之，我们假设 $(Y')^\vee)^\sharp|\mathsf{o}(V^\vee, K^\vee)^{e_{n+2}}$ 位于经过 $(Y^\vee)^\sharp|\mathsf{o}(V^\vee, K^\vee)^{e_{n+2}}$ 的 $\mathsf{O}(V^\vee, K^\vee)^{e_{n+2}}$-余伴随轨道上。那么，对于每个 $Z^\vee \in \mathsf{o}(V^\vee, K^\vee)^{e_{n+2}}$，都有$\big((Y')^\vee)^\sharp - (\widetilde{\ }\mathsf{Ad}_{P^\vee} Y^\vee)^\sharp\big) Z^\vee = 0$，也就是说，$((Y')^\vee)^\sharp - (\widetilde{\ }\mathsf{Ad}_{P^\vee} Y^\vee)^\sharp \in \mathsf{o}(V^\vee, K^\vee)^0_{e_{n+2}}$。因此，根据事实 E，存在一个向量 $v^\vee = v_0 e_0 - v \in V^\vee$，使得 $((Y')^\vee)^\sharp - (\widetilde{\ }\mathsf{Ad}_{P^\vee} Y^\vee)^\sharp = (L_{v^\vee,e_{n+2}})^\sharp$。换言之，

$$(Y')^\vee = \widetilde{\mathrm{Ad}}_{P^\vee} Y^\vee + L_{v^\vee,e_{n+2}}. \quad (14)$$

写作 $(Y')^\vee = (Y', (y')^*)$，$Y^\vee = (Y, y^*)$，其中 $Y', Y \in \mathsf{o}(V, K)$ 和 $y', y \in V$。另外，将 $P^\vee = (P, p^*)$ 写作 $P \in \mathsf{O}(V, K)^{e_{n+2}}$ 和 $p^*(e_{n+2}) = 0$。现在$L_{v^\vee,e_{n+2}} = (L_{-v,e_{n+2}}, v_0 e_1^T = v_0 e^*_{n+2})$。于是 (14) 可写为

$$(Y', (y')^*) = (PYP^{-1} + L_{Pp,Py}, (Py)^*) + (L_{-v,e_{n+2}}, v_0 e^*_{n+2}), \quad (15)$$

也就是说,

$$Y' + L_{v,e_{n+2}} = P(Y + L_{p,y})P^{-1} \tag{16a}$$

并且 $(y')^* = (Py)^* + v_0 e^*_{n+2}$，或者等价地,

$$y' = Py + v_0 e_{n+2}. \tag{16b}$$

现在，(16a) 和 (16b) 表明，特殊元组 $(V, Y, y; K)$ 与 $(V, Y', y'; K)$ 等价，因而确定相同的特殊余型。因此，诱导映射是单射。由于 $\mathsf{o}(V^\vee, K^\vee)^*_{e_{n+2}}$ 中的每个元素都可以写成 $(Y^\vee)^\sharp | \mathsf{o}(V^\vee, K^\vee)_{e_{n+2}}$ 的形式，其中某个 $Y^\vee \in \mathsf{o}(V^\vee, K^\vee)$，可知诱导映射是满射。因此，诱导映射是双射。这就证明了命题4。□

4 等价特殊元组的分类

根据命题4，要对 $\mathsf{O}(V^\vee, K^\vee)_{e_{n+2}}$ 在 $\mathsf{o}(V^\vee, K^\vee)^*_{e_{n+2}}$ 上的伴随余轨道进行分类，我们需要对等价的特殊元组进行分类。

首先，我们将特殊元组 $(V, Y, y; K)$ 化为标准形式。记 $y = (y_1, \widetilde{y}, y_{n+2})^T$，并注意到，$P \in \mathsf{O}(V, K)_{e_{n+2}}$ 相对于标准基 $\mathfrak{e}$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \widetilde{d} & \widetilde{P} & 0 \\ -\frac{1}{2}\widetilde{d}^* \widetilde{d} & -\widetilde{d}^* \widetilde{P} & 1 \end{pmatrix}$()，其中 $\widetilde{d} \in \widetilde{V}$ 且 $\widetilde{P} \in \mathsf{O}(\widetilde{V}, \widetilde{K})$。设 $(V, Y', y'; K)$ 是与 $(V, Y, y;\ K)$ 等价的特殊元组。特殊元组等价关系的定义中的方程（9b）为

$$y' = Py + v_0 e_{n+2} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \widetilde{d} + \widetilde{P}\widetilde{y} \\ -\frac{1}{2} y_1 \widetilde{d}^*(\widetilde{d}) - \widetilde{d}^*(\widetilde{P}\widetilde{y}) + y_{n+2} + v_0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

因此，我们证明了

引理5。以 $\mathfrak{e}$ 作为 V 的标准基时，特殊元组 $(V, Y, y; K)$ 中向量 y 的第一分量 y_1 在特殊元组的等价变换下保持不变。

我们称 y_1 为特殊余型 ∇^{y_1} 的参数，由特殊元组 $(V, Y, y; K)$ 表示。

有三种情况。

~CASE 1。 $y_1 \neq 0$。根据假设 $y_1 \neq 0$，因此我们可以选取 d，使（17）中的 d 等于 $-y_1^{-1}\widetilde{P}\widetilde{y}$。于是 y' 的第二个分量为 0。（17）中 y' 的第三个分量为 $\frac{1}{2} y_1^{-1}(\widetilde{d}^*(\widetilde{d})) + y_{n+2} + v_0$。现在选取 $v_0 = -\frac{1}{2} y_1^{-1}(\widetilde{d}^*(\widetilde{d})) - y_{n+2}$。因此

$y' = y_1 e_1$。在等价关系的定义中取向量 v 和 p 为 0，可知参数 y_1 非零的特殊元组（V， Y， y； K）等价于标准化特殊元组（V， Y'， $y_1 e_1$； K），其中 $y_1 \neq 0$ 和$Y' = PYP^{-1}$，且 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{P} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 满足 $\widetilde{P} \in \mathsf{O}(V, K)$。两个标准化特殊元组（$V$， Y， $y_1 e_1$； K）和（V， Y'， $y_1 e_1$； K）等价，当且仅当存在一个$P \in \mathsf{O}(V, K)^{e_{n+2}}$和一个实数 v_0，使得 $Y' = PYP^{-1}$并且

$$y_1 e_1 = y_1 P(e_1) + v_0 e_{n+2} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \widetilde{d} \\ -\frac{1}{2}\widetilde{d}^*(\widetilde{d}) + v_0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

这里 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \widetilde{d} & \widetilde{P} & 0 \\ -\frac{1}{2}\widetilde{d}^*\ \widetilde{d} & -\widetilde{d}^*\widetilde{P} & 1 \end{pmatrix}$() 其中 $\widetilde{d} \in \widetilde{V}$且 $\widetilde{P} \in \mathsf{O}(\widetilde{V}, \widetilde{K})$。由 (18) 可推得 $y_1\widetilde{d} = 0 = y_1(-\frac{1}{2}\widetilde{d}^*(\widetilde{d}) + v_0)$。但是根据假设， $y_1 \neq 0$。因此 $\widetilde{d} = 0$，进而 $v_0 = 0$。所以 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{P} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 且 $Pe_1 = e_1$。因此，标准化特殊元组 $(V, Y, y_1 e_1; K)$ 和 $(V, Y', y_1 e_1; K)$ 等价，当且仅当存在一个 $P \in \mathsf{O}(V, K)^{e_{n+2}}$，使得 $Pe_1 = e_1$ 且 $Y' = PYP^{-1}$。标准化特殊元组的一个等价类就是特殊余型 ∇^{y_1}。

设 $(V, Y, y_1 e_1; K)$ 是一个标准化特殊元组。假设 $Y \in \mathsf{o}(V, K)$ 关于标准基 $\mathfrak{e}$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix} \widetilde{a} & -\widetilde{e}^* & 0 \\ \widetilde{b} & \widetilde{Y} & \widetilde{e} \\ 0 & -\widetilde{b}^* & -\widetilde{a} \end{pmatrix}$，$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$，其中 $\widetilde{a} \in \mathbb{R}$； b, $\widetilde{e} \in V$； 且 $Y \in \mathsf{o}(V, K)$。与 $(V, Y, y_1 e_1; K)$ 对应的是关联对 $(V, Y; K)$。设 $(V, Y', (y')_1 e_1; K)$ 是另一个标准化特殊元组。假设 Y' 关于标准基 $\mathfrak{e}$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix} \widetilde{a}' & -\widetilde{e}'^* & 0 \\ \widetilde{b}' & \widetilde{Y}' & \widetilde{e}' \\ 0 & -\widetilde{b}'^* & -\widetilde{a}' \end{pmatrix}$，其中 $\widetilde{a}' \in \mathbb{R}, \widetilde{b}', \widetilde{e}' \in \widetilde{V}$， 且 $\widetilde{Y}' \in \mathsf{o}(\widetilde{V}, \widetilde{K})$。$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$那么 (V, Y', K) 是它的关联对。若存在 $\widetilde{P} \in \mathsf{O}(\widetilde{V}, \widetilde{K})$， 使得 $\widetilde{Y}' = \widetilde{P}\widetilde{Y}(\widetilde{P})^{-1}$， 则关联对 $(V, Y; K)$ 和 $(\widetilde{V}, \widetilde{Y}', \widetilde{K})$ 等价。我们称关联对的一个等价类为关联型，并将其记为 Δ。现在我们证明

命题 6. 非零参数 y_1 的特殊余型 $\nabla^{y_1\,\widetilde{\ }}$ 唯一确定其关联型 Δ 和非零实数 y_1，反之亦然。

证明。假设标准化特殊元组 $(V, Y, y_1 e_1; K)$ 和 $(V, Y', y_1 e_1, K)$ 等价。那么存在 $P \in \mathsf{O}(V, K)^{e_{n+2}}$， 满足 $Pe_1 = e_1$， 以及两个向量 v、 $p \in V$， 满足 $p^*(e_{n+2}) = p_1 = 0$， 使得

$$Y' = PYP^{-1} + L_{Pp, e_1} + L_{-v, e_{n+2}}, \tag{19}$$

参见 (9a)。由于 $Pe_1 = e_1$，方程 (9b) 与 $y = y' = y_1 e_1$ 蕴含实数 $v_0 = 0$。这里 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{P} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，其中 $\widetilde{P} \in \mathsf{O}(\widetilde{V}, \widetilde{K})$。展开 (19) 得到

$$\begin{pmatrix} \widetilde{a}' & (-\widetilde{e}')^* & 0 \\ \widetilde{b}' & \widetilde{Y}' & \widetilde{e}' \\ 0 & -(\widetilde{b}')^* & -\widetilde{a}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{a} - p_{n+2} + v_1 & -(\widetilde{P}\widetilde{e})^* - \widetilde{p}^* & 0 \\ \widetilde{P}\widetilde{b} + \widetilde{v} & \widetilde{P}\widetilde{Y}(\widetilde{P})^{-1} & \widetilde{P}\widetilde{e} + \widetilde{p} \\ 0 & -(\widetilde{P}\widetilde{b})^* - \widetilde{v}^* & -\widetilde{a} + p_{n+2} - v_1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

这里，$p = (0, \widetilde{p}, p_{n+2})^T$ 和 $v = (v_1, \widetilde{v}, 0)^T$ 是相对于基 $\mathfrak{e}$ 而言的 V 中的向量。因此，$\widetilde{Y}' = P\widetilde{Y}P^{-1}$。换言之，关联的 $\widetilde{\ }$ 对 $(V, Y;\ K)$ 和 $(V, Y';\ K)$ 等价，因而确定了唯一的 $\widetilde{\ }$ 关联型 Δ。

现在假设，对应于标准化特殊元组 $(V, Y, y_1 e_1; K)$ 和 $(V, Y', y_1 e_1;\ K)$ 的对 $(V, Y;\ K)$ 和 $(V, Y';\ K)$ 以及非零实数 y_1 等价。那么存在 $P \in \mathsf{O}(V, K)$ 使得 $\widetilde{Y}' = \widetilde{P}\widetilde{Y}$，$\widetilde{P}^{(-1)} \in$。我们希望确定满足 $Pe_1 = e_1$ 和 $\widetilde{Y}' = \widetilde{P}\widetilde{Y}$ 的 $V\mathsf{O}(K)^{e_{n+2}}$，并找到两个向量 $v, p \in V$，使得 $p_1 = p^*(e_{n+2}) = 0$，从而满足 (20)。令 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{P} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。那么 $P \in \mathsf{O}(V, K)^{e_{n+2}}$，且 $Pe_1 = e_1$。现在取 $\widetilde{p} = -P\widetilde{e} + \widetilde{e}'$，并设 $p_1 = p_{n+2} = 0$。这确定了向量 p，使得 $\sim\sim p^*(e_{n+2}) = 0$。接下来选取 $v_1 = \widetilde{a}' - \widetilde{a}$，$\widetilde{v} = b' - P\,b$ 和 $v_{n+2} = 0$。这确定了向量 v。为了使方程 (9b) 成立，实数 $v_0 = 0$。结合 $\widetilde{Y}' = \widetilde{P}\widetilde{Y}(\widetilde{P})^{-1}$ 以及上述选取，可知 (20) 成立。换言之，标准化特殊元组 $(V, Y, y_1 e_1; K)$ 和 $(V, Y', y_1 e_1; K)$ 等价，因而确定了特殊余型 ∇^{y_1}。□

如果特殊元组 $(V, Y, y\colon\ K)$ 等价于标准化特殊元组 $(V, Y, y_1 e_1;\ K)$，且 $y_1 \neq 0$，那么由 $(V, Y, y_1 e_1; K)$ 表示的特殊型 ∇^{y_1}，是不可分解余型 $\nabla_2^{y_1}(0)$，$y_1 \neq 0$（由特殊元组 $\left(\mathsf{span}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_{n+2}\}, 0, y_1 e_1; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ 表示，且 $y_1 \neq 0$）与关联型 Δ（由数对 (V, K) 表示）之和。注意，$\nabla_2^{y_1}(0)$ $y_1 \neq 0$ 的维数为 2。非零实数 y_1 是余型 $\nabla_2^{y_1}(0)$，$y_1 \neq 0$ 的模数。

情况 1 到此完成。

CASE 2。$y_1 = 0$，$y = 0$。特殊元组为（V，Y，0；K），它是零元组 $(\{0\}, 0, 0;\ (0))$ 与元组（V，Y；K）之和。因此，由（V，Y，0；K）表示的余型 ∇，是零余型 0 与由元组（V，Y；K）表示的型 Δ 之和。

情况 2 到此结束。

CASE 3。 $y_1 = 0$ 和 $y \neq 0$。

有两个子情形。

SUBCASE A. 若参数为 0，且 y 是一个非零的 K-各向同性向量，则称特殊元组 $(V, Y, y = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{y} \end{pmatrix}; K)$ 为仿射特殊元组。仿射特殊元组的一个等价类称为仿射特殊余型 ∇。由于 $\mathsf{O}(V, K)$ 在 V 中所有非零 K-各向同性向量构成的集合上具有传递作用，因此存在一个 $P \in \mathsf{O}(V, K)$，使得 $Py = e_{n+2}$。因此，仿射特殊元组 $(V, Y, y; K)$ 等价于标准化仿射特殊元组 $(V, Y' = PYP^{-1}, e_{n+2}; K)$。为证明这一点，我们在特殊元组等价关系的定义中取 $p = 0$、$v = 0$ 和 $v_0 = 0$。

现在假设两个标准化仿射特殊元组 $(V, Y, e_{n+2}; K)$ 和 (V, Y', e_{n+2}, K) 等价。则存在一个 $P \in \mathsf{O}(V, K)_{e_{n+2}}$、两个向量 $-v, p \in V$（满足 $p_1 = p^*(e_{n+2}) = 0$），以及一个实数 v_0，使得

$$Y' + L_{-v, e_{n+2}} = P(Y + L_{p, e_{n+2}})P^{-1} \tag{21a}$$

and

$$e_{n+2} = Pe_{n+2} + v_0 e_{n+2}. \tag{21b}$$

由 $Pe_{n+2} = e_{n+2}$ 可知，方程 (21b) 等价于$v_0 = 0$。因此，我们只需考虑方程 (21a)。现在将方程 (21a) 写为

$$\begin{aligned} Y' &= P(Y + L_{P^{-1}v, e_{n+2}} + L_{p, e_{n+2}})P^{-1}, \quad \text{since } Pe_{n+2} = e_{n+2} \\ &= P(Y + L_{w, e_{n+2}})P^{-1}, \end{aligned}$$

其中 $w = p + P^{-1}v$。因此，如果标准化仿射特殊元组 $(V, Y, e_{n+2}; K)$ 和 $(V, Y', e_{n+2}; K)$ 等价，那么条件

$(*)$ there is a $P \in \mathrm{O}(V, K)_{e_{n+2}}$ and a vector $w \in V$ such that

$$Y' = P(Y + L_{w, e_{n+2}})P^{-1} \tag{22}$$

成立。反过来，设 $(V, Y, e_{n+2}; K)$ 和 $(V, Y', e_{n+2}; K)$ 是标准化仿射特殊元组，且满足条件 $(*)$。令 $v_0 = 0$。由于$P \in \mathsf{O}(V, K)_{e_{n+2}}$，方程 (21b) 成立。写作

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \tilde{w} \\ w_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{w} \\ w_{n+2} \end{pmatrix} = P^{-1}v + p,$$

其中 $v = P\begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$。那么 $p_1 = p^*(e_{n+2}) = 0$。因为 $P \in \mathsf{O}(V,K)^{e_{n+2}}$, 方程 (22) 可写为

$$Y' = P(Y + L_{P^{-1}v,e_{n+2}} + L_{p,e_{n+2}})P^{-1} = L_{v,e_{n+2}} + P(Y + L_{p,e_{n+2}})P^{-1},$$

也就是说，(21a) 中的方程成立。由于 $P \in \mathsf{O}(V,K)^{e_{n+2}}$和 $v_0 = 0$，方程 (22) 成立。因此我们证明了

引理 7. 标准化仿射特殊元组 $(V,Y,e_{n+2};K)$ 和 $(V,Y',e_{n+2};K)$ 等价，当且仅当它们满足条件 $(*)$，且实数 v_0 为 0。

仿照 [2, p.78] ，我们将标准化仿射特殊元组的一个等价类称为仿射余型，记作 ∇_{a}。若特殊元组 $(V,Y,y;K)$ 是表示仿射余型 ∇_{a} 的仿射特殊元组，且可分解，则 $\nabla_{\mathrm{a}} = (\nabla_{\mathrm{a}})' + \Delta_3$，其中 $(\nabla_{\mathrm{a}})'$ 是仿射余型，而 Δ_3 是型。若不存在这样的分解，则 ∇_{a} 不可分解。每个仿射余型 ∇_{a} 都是一个不可分解仿射余型与若干不可分解型之和。除加项的排列顺序外，这种分解是唯一的。

注：不可分解仿射余型已在 [2, p.83] 中分类。

子情形 A 至此完成。

SUBCASE B. 设 $(V,Y,y = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{y} \\ y_{n+2} \end{pmatrix}; K)$ 是参数为 0 的非仿射特殊元组，也就是说，y 不是一个 K-各向同性向量。换言之，我们有 $y^T K y \neq 0$。这样的元组称为非仿射特殊元组。

引理 8. 非仿射特殊元组与等价无关。

证明。为说明这一点，假设参数为 0 的特殊元组 $(V,Y',y';K)$ 与参数为 0 的特殊元组 $(V,Y,y;K)$ 等价。那么存在 $P \in \mathsf{O}(V,K)^{e_{n+2}}$、两个向量 v 和 p 属于 V，满足 $p_1 = p^*(e_{n+2}) = 0$，以及一个实数 v_0，使得 $Y' + L_{-v,\ e_{n+2}} = P(Y + L_{p,\ e_{n+2}})P^{-1}$ 且 $y' = Py + v_0 e_{n+2}$ 满足 $(y')_1 = y_1 = 0$。因此

$$\begin{aligned}
(y')^T K y' &= (Py + v_0 e_{n+2})^T K (Py + v_0 e_{n+2}) \\
&= (y + v_0 e_{n+2})^T P^T K P (y + v_0 e_{n+2}), \quad \text{since } P e_{n+2} = e_{n+2} \\
&= y^T K y + 2 v_0\, y^T K e_{n+2} + (v_0)^2\, e_{n+2}^T K e_{n+2}, \quad \text{since } P \in \mathrm{O}(V,K)_{e_{n+2}} \\
&= y^T K y, \quad \text{since } K e_{n+2} = e_1 \text{ implies } y^T K e_{n+2} = y^T(e_1) = y_1 = \\
&\qquad 0 \text{ and } e_{n+2}^T K e_{n+2} = e_{n+2}^T(e_1) = 0
\end{aligned}$$

$\neq 0$，根据假设。

因此，参数为 0 的特殊元组 $(V, Y', y'; K)$ 不是仿射的。 □

根据引理 8，我们可以将非仿射特殊元组的一个等价类称为非仿射特殊余型，记作 ∇_{na}。

现在我们对不可分解非仿射特殊余型进行分类，见 [2, p.82]。假设 $(V, Y, y; K)$ 是一个非仿射特殊元组。由于非零向量 y 不是 K-各向同性的，$y^T K y \neq 0$。令 $f_{n+2} = y$。因此，在以 $\mathfrak{f}_2 = \{f_{n+2}\}$ 为基的 $V_2 = \text{span}\{f_{n+2}\}$ 上，内积 K 是非退化的。令 $V_1 = \text{span}\{f_{n+2}\}^{\perp}$。那么 V_1 也是 K-非退化的。相对于 V_1 的基 $\mathfrak{f}_1 = \{f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}\}$，$K|V_1$ 的矩阵为 F；相对于 V_2 的基 $\mathfrak{f}_2$，$K|V_2$ 的矩阵为 $\varepsilon\alpha^2$，其中 $\alpha \neq 0$ 和$\varepsilon = \pm 1$。因此，相对于$V = V_1 \oplus V_2$ 的基 $\mathfrak{f} = \{f_1, \ldots, f_{n+1}, \alpha^{-1} f_{n+2}\}$，$K$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$。

由于 $Y \in \mathfrak{o}(V, K)$，Y 关于基 $\mathfrak{f}$ 的矩阵满足

$$\begin{aligned} 0 = Y^T K + KY &= \begin{pmatrix} Y_1 & \varepsilon\widetilde{b} \\ \widetilde{c}^T & \widetilde{a} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 & \varepsilon\widetilde{b} \\ \widetilde{c}^T & \widetilde{a} \end{pmatrix}, \\ &\qquad \text{where } Y_1 \in \mathrm{gl}(V_1, \mathbb{R}); \widetilde{b}, \widetilde{c} \in V_1; \text{ and } \widetilde{a} \in \mathbb{R} \\ &= \begin{pmatrix} Y_1^T F & \varepsilon\widetilde{c} \\ \varepsilon\widetilde{b}^T F & \varepsilon\widetilde{a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} FY_1 & \varepsilon F\widetilde{b} \\ \varepsilon\widetilde{c}^T & \varepsilon\widetilde{a} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

也就是说，$Y_1^T F + FY_1 = 0$、$\widetilde{c} = -F\widetilde{b} \in V_1$和 $\widetilde{a} = 0$。换言之，$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & \varepsilon\widetilde{b} \\ -F\widetilde{b}^T & 0 \end{pmatrix}$，其中 $Y_1^T F + FY_1 = 0$ 和 $\widetilde{b} \in V_1$。

设 $w = w' + w_{n+2} f_{n+2} \in V$。现在我们计算 $L_{w, f_{n+2}}$ 关于基 $\mathfrak{f}$ 的矩阵。对于 $1 \leq i \leq n+1$，我们有

$$\begin{aligned} L_{w, f_{n+2}}(f_i) &= (w \otimes f_{n+2}^*)(f_i) - (f_{n+2} \otimes w^*)(f_i) \\ &= (f_{n+2}^T K f_i) w - w^T (K f_i) f_{n+2} \\ &= -(w')^T (F f_i) f_{n+2} = -(w')^*(f_i) f_{n+2} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} L_{w, f_{n+2}}(f_{n+2}) &= (w \otimes f_{n+2}^*)(f_{n+2}) - (f_{n+2} \otimes w^*)(f_{n+2}) \\ &= (f_{n+2}^T K f_{n+2}) w - (w^T K f_{n+2}) f_{n+2} \\ &= \varepsilon w - \varepsilon w_{n+2} f_{n+2} = \varepsilon w'. \end{aligned}$$

因此，$L_{w,\ f_{n+2}}$ 相对于基 $\mathfrak{f}$ 的矩阵为 $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & \varepsilon w' & \\ (w')^* & & 0 \end{array}\right)$。由于 $Y = \left(\begin{array}{cc|c} Y_1 & \varepsilon\widetilde{b} & \\ -F\widetilde{b}^T & 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} Y_1 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{array}\right) + L_{\widetilde{b},\ f_{n+2}}$ 且 $\widetilde{b} \in V_1$，非仿射特殊

元组 $(V, Y, y; K)$ 等价于非仿射特殊元组 $(V, Y' = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f_{n+2}; K = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix})$。

现在，子空间

$$V_2 = \{f_{n+2}\} \quad K \qquad Y' f_{n+2} \text{ span } \text{是} = 0 \ V_2 \quad Y' \qquad Y' \in \quad V \ K \qquad V_1 = \{f_{n+2}\}^{\perp}$$

非退化的。因为 , , 是 -不变的。由于 o(,), 子空间 span 是 Y'-不变且 K-非退化的。因此，由特殊元组 $(V, Y, y; K)$ 表示的非仿射特殊余型 ∇_{na}，是由非仿射特殊元组 $\left(V_2, 0, f_{n+2}; K|V_2 = (\varepsilon)\right)$ 表示的非仿射余型 $(\nabla_{\mathrm{na}})'$，与由对 $(V_1, Y_1 = Y|V_1; K|V_1 = F)$ 表示的型 Δ_1 之和。由于 $y = \alpha f_{n+2}$, α 是 $(\nabla_{\mathrm{na}})'$ 的一个模数。必要时改变 f_{n+2} 的符号，我们可以假设 $\alpha > 0$。我们用记号 $\nabla^{\varepsilon}_{\mathrm{na}}, \alpha > 0$ 表示 $(\nabla_{\mathrm{na}})'$。显然，$\nabla^{\varepsilon}_{\mathrm{na}}, \alpha > 0$ 是一个不可分解非仿射特殊余型。

至此，子情形 B 以及特殊余型的分类便告完成。 □

5 主要结果

本节旨在证明

定理 9. 设 ∇ 是一个非零特殊余型。若其参数 y_1 非零，则 ∇ 是不可分解型 $\nabla_2^{y_1}(0)$ $y_1 \neq 0$ 与不可分解关联型之和。若 ∇ 的参数为 0，且 ∇ 是非仿射特殊余型 ∇_{na}，则 ∇ 是不可分解非仿射特殊余型 $\nabla^{\varepsilon}_{\mathrm{na}}, \alpha > 0$ 与不可分解型之和。若 ∇ 是仿射特殊余型 ∇_{a}，则 ∇ 是不可分解仿射余型与不可分解型之和。上述各和除加项的排列顺序外均唯一。

证明。假设 ∇ 是由特殊元组 $(V, Y, y; K)$ 表示的非零特殊余型。若 y_1（即相对于标准基 $\mathfrak{e}$ 的 y 的第一分量）非零，则 ∇ 是一个不可分解余型$\nabla_2^{y_1}$ (0) $y_1 \neq 0$与由关联型 Δ 唯一确定的型之和；前者由标准化元组 (span $_{\mathbb{R}}\{e_1, e_{n+2}, 0, y_1 e_1; \sim K|\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_{n+2}\}$) 表示，后者由关联对 $(V, Y;\ K)$ 表示。型 Δ 是不可分解类型的唯一和（至多相差重排），见 [1]。论证到此结束。若 y_1 为零且 ∇ 是非仿射特殊余型 ∇_{na}，则 $\nabla_{\mathrm{na}} = \nabla^{\varepsilon}_{\mathrm{na}}, \alpha > 0 + \Delta$，其中型 Δ 是不可分解类型的唯一和（至多相差重排）。论证到此结束。若 y_1 为零且 ∇ 是仿射特殊余型 ∇_{a}，则 ∇_{a} 由其小余型 $(\nabla_{\mathrm{a}})_{\ell}$ 唯一确定，见 [2, 第80]页。$(\nabla_{\mathrm{a}})_{\ell}$ 或为零余型、非仿射余型，或为仿射特殊余型。若 $(\nabla_{\mathrm{a}})_{\ell}$ 是零余型，则论证到此结束。若是第二种

情况，应用引理 8 可得，$(\nabla_{\mathrm{a}})_{\ell}$ 是一个唯一的不可分解非仿射特殊余型与若干不可分解型之和。论证到此结束。否则，改用仿射余型 $(\nabla_{\mathrm{a}})_{\ell}$ 代替余型 ∇_{a}，重复上述论证，见 [2, 引理 15，第83]页。由于 $\dim(\nabla_{\mathrm{a}})_{\ell} < \dim \nabla_{\mathrm{a}}$，这一迭代过程最终会终止；最终 $(\nabla_{\mathrm{a}})_{\ell}$ 是零余型，论证也随之结束。因此，∇_{a} 是一个不可分解仿射余型与若干不可分解型的唯一和（至多相差重排）。□

6 一般伽利略群的伴随余轨道

本节运用第 4 节的理论，对一般伽利略群 $\mathrm{Gal}_3 = \mathrm{O}(\mathbb{R}^6, K^{\vee})_{e_5}$的余伴随轨道进行分类。相对于 $\mathbb{R}^6$ 的标准基 $\mathfrak{e}_5^{\vee} = \{e_0, e_1, \ldots, e_5\}$，$V^{\vee}$ 上内积 $\gamma^{\vee}$的矩阵 $K^{\vee}$ 为 $\left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & K \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \hline & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & I_3 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$，其惯性指数对为$(p, n) = (4, 1)$，零度为 1，指标为 1，维数为 6。$\gamma^{\vee}$ 的核由 e_0张成。

表1列出了可能的 $\mathrm{o}(\mathbb{R}^5, K)$ 不可分解类型。

	type	维数	指标
1.	$\Delta_2^-(0)$	3	1
2.	$\Delta_0(\zeta, \mathrm{RP})$	2	1
3.	$\Delta_0(\mathrm{i}\beta, \mathrm{IP})$	2	0
3.	$\Delta_0^-(0)$	1	1
4.	$\Delta^+(0)$	1	0

表1. $\mathrm{o}(V, K)$ 的可能不可分解类型

在表1中，我们采用如下记号：$\Delta_0(\zeta, \mathrm{RP}) = \Delta_0(\zeta, -\zeta), \zeta = \overline{\zeta}, \zeta \neq 0$，其中 ζ是 Y的一个实特征值；以及 $\Delta_0(\mathrm{i}\beta, \mathrm{IP}) = \Delta_0(\zeta, -\zeta)$，$\zeta = -\overline{\zeta} = \mathrm{i}\beta, \zeta \neq 0$，其中 ζ 是 Y的一个纯虚特征值，且 $Y^2 - \beta^2 = 0$。不可分解型 $\Delta_0^{\varepsilon}(0)$，其中 $\varepsilon^2 = 1$，由元组$(\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{f\}, 0; (\varepsilon))$表示。表1摘自 [1, p.349]中的不可分解类型分类。表2列出了可能的不可分解仿射类型。

	type	维数	指标
1.	$\nabla_3^+(0)$ $\mu \neq 0$	3	1
2.	$\nabla_2(0, 0)$	2	1

表2. 可能的 $\mathrm{o}(V, K)$ 不可分解仿射余型

表2摘自[2, p.15]中的不可分解仿射余型分类。

利用第4节的结果，我们得到 Gal_3，的非零不可分解余型列表，由此得到 Gal_3 的伴随余轨道列表。

	不可分解余型	维数	指标
1.	$\nabla_3^+(0)\ \mu \neq 0 + \Delta_0(\mathrm{i}\beta, \mathrm{IP})$	$3+2$	$1+0$
2.	$\nabla_3^+(0)\ \mu \neq 0 + \Delta_0^+(0) + \Delta_0^+(0)$	$3+1+1$	$1+0+0$
3.	$\nabla_2^y(0)\ y \neq 0 + \Delta_2^-(0)$	$2+3$	$0+1$
4.	$\nabla_2^y(0)\ y \neq 0 + \Delta_0(\zeta, \mathrm{RP}) + \Delta_0^+(0)$	$2+2+1$	$0+1+0$
5.	$\nabla_2^y(0)\ y \neq 0 + \Delta_0(\mathrm{i}\beta, \mathrm{IP}) + \Delta_0^-(0)$	$2+2+1$	$0+0+1$
6.	$\nabla_2(0,0) + \Delta_0(\mathrm{i}\beta, \mathrm{IP}) + \Delta_0^+(0)$	$2+2+1$	$1+0+0$
7.	$\nabla_2(0,0) + \Delta_0^+(0) + \Delta_0^+(0) + \Delta_0^+(0)$	$2+1+1+1$	$1+0+0+0$
8.	$\nabla_2^y(0)\ y \neq 0 + \Delta_0^-(0) + \Delta_0^+(0) + \Delta_0^+(0)$	$2+1+1+1$	$0+1+0+0$
9.	$\nabla_0^-(0) + \Delta_0(\mathrm{i}\beta, \mathrm{IP}) + \Delta_0^+(0) + \Delta_0^+(0)$	$1+2+1+1$	$1+0+0+0$
10.	$\nabla_0^-(0) + \Delta_0^+(0) + \Delta_0^+(0) + \Delta_0^+(0) + \Delta_0^+(0)$	$1+1+1+1+1$	$1+0+0+0+0$
11.	$\nabla_0^+(0) + \Delta_2^-(0) + \Delta_0^+(0)$	$1+3+1$	$0+1+0$
12.	$\nabla_0^+(0) + \Delta_0(\zeta, \mathrm{RP}) + \Delta_0(\mathrm{i}\beta, \mathrm{IP})$	$1+2+2$	$0+1+0$
13.	$\nabla_0^+(0) + \Delta_0(\zeta, \mathrm{RP}) + \Delta_0^+(0) + \Delta_0^+(0)$	$1+2+1+1$	$0+1+0+0$
14.	$\nabla_0^+(0) + \Delta_0(\mathrm{i}\beta, \mathrm{IP}) + \Delta_0^-(0) + \Delta_0^+(0)$	$1+2+1+1$	$0+0+1+0$
15.	$\nabla_0^+(0) + \Delta_0^-(0) + \Delta_0^+(0) + \Delta_0^+(0) + \Delta_0^+(0)$	$1+1+1+1+1$	$0+1+0+0+0$

表3. 一般伽利略群 Gal_3 的伴随余轨道。

参考文献

[1] N. Burgoyne 和 R. Cushman, 《线性群中的共轭类》, 《代数杂志》 44（1977）, 333–362。[2] Richard Cushman 和 Wilberd van der Kallen, 《庞加莱群的伴随轨道与余伴随轨道》, 《应用数学学报》90（2006）, 65–89。修订版：arxiv:math/0305442。