arXiv:2303.10486v1 [math.AC] 18 Mar 2023

单项式理想的核

LOUIZA FOULI、JONATHAN MONTAÑO[1],CLAUDIA POLINI[2],和 BERND ULRICH[3]

摘要。理想的核定义为其所有约化的交。本文对满足某些剩余条件的单项式理想 I 的核给出了显式描述，并证明 core(I) 等于包含在 I 的一般约化中的最大单项式理想。我们证明字典序分段理想满足这些剩余条件，并研究由同一次数元素生成的字典序分段理想的核。对于不一定满足剩余条件且由同一次数元素生成的单项式理想，我们猜想其核存在一个显式公式，并对这一猜想取得了一些进展。

1. 引言

理想 I 的核 是诺特环中 I 的所有约化的交，即所有使 I 成整的理想。由于约化（甚至是极小约化）高度不唯一，核可用于汇集关于所有这些约化的信息。核自然出现在布里昂松–斯科达定理的背景中，这些定理比较理想的整闭包滤过与阿代尔滤过 [41, 25, 40, 39]。它也与伴随理想和乘子理想 [40, 30], 、Kawamata 关于某些线丛截面不消失的猜想 [34, 35], 以及射影空间中有限点集的 Cayley-Bacharach 性质 [18]有关。了解核，例如局部 Cohen-Macaulay 环中的零维理想的核，有助于通过约化到阿廷情形来进行证明；因为 I \核(I) 中的元素恰好是 I 中的那些元素：当模去 I 中某个一般参数系后仍非零，参见 [15, 29]。

由于核是约化的先验无限交，因此难以计算。虽然已有核的显式公式，但这些公式需要很强的假设 [30, 10, 34, 44, 32, 45, 55, 17, 18, 50, 16, 37,38, 12, 52]。若没有这样的假设，我们所能期望的最好结果，就是核可以表示为有限个一般约化的交。在局部情形下，假设剩余条件相当弱时，已证明了这一点 [9],定义见第 2 节。本文的第一个主定理，定理 3.9，将这一结果推广到非局部情形。由于尚不清楚核是否与局部化相容，这并非一个平凡的推广。事实上，我们的结果事后表明，在该定理的情形下核确实与局部化相容，见推论 3.10。此外，I 若由次数相同的齐次多项式生成，我们还证明核与分次核相等；分次核是I的所有齐次约化的交，见推论 3.12；Hyry 和 Smith 在研究 Kawamata 猜想时，也曾探讨何时这一等式成立 [34]。若没有类似定理 3.9这样的结果，核实际上是无法计算的，因为我们不知道如何确定在特殊约化中所需的那些约化

2020 数学主题分类。主要分类：13A30、13B22、05E40。次要分类：14F18、13C40、13P10。关键词与短语。单项式理想、约化、核、字典序分段理想、典范模、特殊纤维环、伴随理想。[1] 第二作者获得美国国家科学基金会资助 DMS #2001645/2303605 的部分资助。[2] 第三作者获得美国国家科学基金会资助 DMS #2201110 的部分资助。[3] 第四作者获得美国国家科学基金会资助 DMS #2201149 的部分资助。

交。本文提出一种方法，用于寻找单项式理想情形下的此类约化，见第 5 节。

在与定理 3.9 相同的较弱剩余条件下，我们通过将单项式情形中的核表示为某个一般约化的形式，得以接近证明一个关于核的公式。这一结果基于这样一个事实：单项式理想I 的核仍是单项式理想，因此包含在任意约化(K)中所含的最大单项式理想 mono$K$。当约化K 是一般的时，它具有很强的非单项式性，因此 mono(K)尽可能接近核。在定理 4.7 中，我们证明，若满足上述剩余条件，则实际上 core(I) =mono(K) 。这推广了 [45] 中关于零维单项式理想的结果。任意理想的 mono 都可以通过 Saito、Sturmfels 和 Takayama 的算法计算 [48], ，该算法已在 Macaulay2 中实现，可使用命令`monomialSubideal` [20]调用。

例子表明，若没有任何剩余条件，上述结果并不成立，参见例 4.8 和例 4.9。在第 5 节中，我们讨论由同一次数的单项式生成、但不满足任何其他假设的单项式理想的分次核。对于一般约化 K，分次核总是包含于 mono(K) 中；而在定理 5.4 中，我们给出了一个包含于分次核中的单项式理想 $\mathfrak{A}$ ，并猜想事实上 gradedcore(I) $=\mathfrak{A}$，参见猜想 5.5。我们还提出了一种方法，用以找出分次核所对应的交中所需的特殊约化，参见讨论 5.8。这些结果从根本上依赖于理想 J：它由 I 的单项式生成元的 d 个线性组合生成， $\subset$R =k[x1, . . . , x$_d$] 以新变量 z =z$_{ij}$为系数。将 k[z][x1, . . . , x$_d$] 视为变量 x1, . . . , x$_d$上的多项式环，我们构造理想 mono(J)，它由单项式 m $\in$k[x1, . . . , x$_d$] 与理想 C$_m$ $\subset$k[z]. 的乘积生成。由于理想 C$_m$的变化，理想 mono(J) 所包含的信息远多于一般约化 K $\subset$R 的 mono(K)；后者只记录单项式 m，不足以确定 gradedcore(I)。作为应用，我们证明，若理想 C$_m$ 在根基意义下均相同，则无须任何剩余条件，分次核就是一般极小约化的 mono，参见定理 5.10。

本文最后一节聚焦于字典序分段理想这一特殊类。我们首先证明，这些理想满足定理 3.9中所述的剩余条件。我们猜想，单一次数生成的字典序分段理想I 的核等于I 乘以极大齐次理想的某个幂，见猜想 6.1。我们在一般情形下证明了一个包含关系，并在许多情形下证实了该猜想，见定理 6.9 和注 6.2。我们还证明，I 的核包含于I^g的伴随理想中，其中g =ht(I)。核与伴随理想之间的联系在单项式理想的背景下尤其引人关注，因为伴随理想可以用牛顿多面体作显式的组合描述 [26], 而核却缺乏这样的描述，即使在零维情形下也是如此。

2. 背景

本节提供一些背景信息，并确定本文后续部分所需的记号，包括引言中提到的剩余条件。更多信息请参见[53, 8, 31]。

设 R 是一个 Cohen-Macaulay 环，I 是一个理想。子理想 $J \subseteq I$ 是 I 的一个约化 ，当且仅当 I 与 J 具有相同的整闭包，等价地，

$$I^{n+1} = JI^n \qquad \text{for} \qquad n \gg 0. \tag{1}$$

关于 J 的 I 的约化数记作 $r_J(I)$，是使下式(1)成立的最小非负整数 n。

假设 R 是以极大理想 $\mathfrak{m}$ 和剩余域 k 为基础的局部环，或者 R 是域 k 上的正分次环，其极大齐次理想为 $\mathfrak{m}$，且 I 是由单一次数的齐次元素生成的理想。我们用$\ell(I)$表示I的解析扩张度，即特殊纤维环 $\mathscr{F}(I) = \oplus_{n\geqslant 0} I^n/\mathfrak{m}I^n$的维数。若 k 是无限域，则 $\ell(I)$等于J 作为I的任意极小约化时的最小生成元个数 $\mu(J)$。回顾一下，极小约化是指关于包含关系极小的约化。I 的约化数 定义为$r(I) = \min\{r_J(I) \mid J \text{ 是} I\text{的极小约化}\}$.

在 [4], Artin 和 Nagata 定义了 s-剩余交的概念，将链接推广到相链接的理想可能具有不同高度的情形。准确地说，在任意 Cohen-Macaulay 环 R 中，若某个由 s 个元素生成的理想 $\mathfrak{a} \subsetneq I$ 满足 $K = \mathfrak{a} : I$，且 $\mathrm{ht}(K) \geqslant s$，则 R-理想 K 是 I 的 s-剩余交。若此外还满足 $\mathrm{ht}(I + K) > s$，则称 K 是 I 的几何 s-剩余交。若对于每个$0 \leqslant i \leqslant s$ 以及 I 的每个几何 i-余剩交 K，环 R/K 都满足 Serre 条件 S_2，则称理想 I 弱满足 s-剩余 S_2。若对于每个满足 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leqslant s-1$ 的 $\mathfrak{p} \in V(I)$，均有 $\mu(I_{\mathfrak{p}}) \leqslant \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$，则称 I 满足 G_s。

本文讨论满足剩余条件 G_d 且弱 $(d-2)$-剩余 S_2, 的理想，其中 $d = \dim(R)$。满足这两个条件的理想类包括一维且一般完全交的理想。此外，若理想 I 满足 G_d，那么当 I 是强 Cohen-Macaulay 时，或者更一般地，当 I 局部化后具有滑动深度性质时，I 就是弱 $(d-2)$-剩余 S_2 的，参见 [28, 定理 3.1] 和 [24, 定理 3.3]。强 Cohen-Macaulay 理想的例子包括 Cohen-Macaulay 几乎完全交、Gorenstein 环中由 $\mathrm{ht}(I)+2$ 个元素生成的 Cohen-Macaulay 理想 [3, 第 259], 页，以及完全交链接类中的理想 [27, 定理 1.11],，例如高度为 2 [1, 19] 的完美理想和高度为 3 [56]的完美 Gorenstein 理想。本文通过证明字典序分段理想满足这两个剩余条件，将其也纳入这一列表，参见命题 6.5。

3. 核与一般约化

本节中，我们将定义一般约化这一概念，适用于不一定由同一次数的元素生成的齐次理想，并利用这一新概念证明 [9, 定理45]的齐次版本，该版本适用于解析扩张度最大的理想（见定理 3.9）。我们先介绍一些记号。

记号 3.1. 设 k 为无限域，R 为诺特 k-代数，$I \subset R$ 为一个理想。取正整数 s，并设 $f = f_1, \ldots, f_u$ 为 I 的一个生成序列。考虑一个 $s \times u$ 变量矩阵 $[z] = [z_{i,j}]$ 其中$1 \leqslant i \leqslant s$ 且 $1 \leqslant j \leqslant u$。若理想 $J_{s,z} := J_{s,z}(f)$ 属于 $R[z]$，且由列向量 $[z][f]^T$. 的各项生成，则称其由 I 的 s 个一般元（相对于 f）生成

对于每个 $\lambda = (\lambda_{ij}) \in A_{\Bbbk}^{su}$，我们定义 $\pi_\lambda : R[z] \to R$ 为由 $z_{i,j} \mapsto \lambda_{i,j}$给出的求值映射。对于正整数 n，如果 R-理想 $J_1, \ldots, J_n$ 由 s 个一般元素 （相对于 f）生成，则称之为 I 的一般元素；其中 $J_i = \pi_{\lambda_i}(J_{s,z})$ 和 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 遍历 $A_{\Bbbk}^{nsu}$ 的一个扎里斯基稠密开子集。

注记 3.2。 使用记号 3.1，令 $A \in GL_u(R)$，并考虑将矩阵 $[z]$ 映至 $[z]A$ 的 $R[z]$ 自同构 ϕ。若 $[g]^T := A[f]^T$，则 $\phi(J_{s,z}(f)) = J_{s,z}(g)$。

下面的引理表明，将理想 $J_{s,z}$ 关于 I 饱和，与将其关于任意非零元 $f \in I$ 饱和是一样的。

引理 3.3. 我们使用 记号 *3.1*。设 $f \in I$ 是一个非零元。若 R 是整环，则

$$J_{s,\underline{z}} :_{R[\underline{z}]} I^{\infty} = J_{s,\underline{z}} :_{R[\underline{z}]} f^{\infty}$$

并且这是一个高度为 s 的素理想。

证明。显然有 $J_{s,z} : I^{\infty} \subseteq J_{s,z} : f^{\infty}$。要证明这一等式，只需证明左边的理想是一个高度为 s 的素理想，而右边的理想高度至多为 s。注意，$\operatorname{ht}(J_{s,z} : f^{\infty}) \leqslant \operatorname{ht}\left((J_{s,z} : f^{\infty}) f\right) = \operatorname{ht}\left((J_{s,z}) f\right) \leqslant s$。最后一个不等式由 Krull 高度定理得出；注意，$(J_{s,z}) f$ 是一个真理想，因为 $f \notin \sqrt{J_{s,z}}$。

由于 I 模 $J_{s,z} : I^{\infty}$ 含有一个非零因子，因此 $f_1, \ldots, f_u$ 的一般 k-线性组合模 $J_{s,z} : I^{\infty}$ 是非零因子。因此，存在 $A \in GL_u(k)$，使得 $\begin{bmatrix} g_1 \cdots g_u \end{bmatrix}^T = A \begin{bmatrix} f_1 \cdots f_u \end{bmatrix}^T$，其中 g_1 模 $J_{s,z} : I^{\infty}$ 是非零因子。由注记 3.2，我们可以用 $g_1, \ldots, g_u$ 替换 $f_1, \ldots, f_u$，从而假设 f_1 模 $J_{s,z} : I^{\infty}$ 是非零因子。注意

$$(J_{s,\underline{z}} : I^{\infty})_{f_1} = (J_{s,\underline{z}})_{f_1} = \left(\{ z_{i,1} + f_1^{-1} \sum_{j=2}^{u} z_{i,j} f_j \mid 1 \leqslant i \leqslant s \} \right) R[\underline{z}]_{f_1},$$

它是一个高度为 s 的素理想。由于 f_1 模 $J_{s,z} : I^{\infty}$ 是非零因子，因此 $J_{s,z} : I^{\infty}$ 是一个高度为 s 的素理想。□

下面的引理是 命题 3.5 证明中所需的，它反过来提供了一种构造理想的一般约化的方法。

引理 3.4. 设 $\Bbbk$ 为无限域，R 为有限生成的 $\Bbbk$-代数，I 为一个理想。若 J 是由 I 中的 s 个一般元素生成的理想，则

$$\dim(R/(J :_R I^{\infty})) \leqslant \dim(R) - s$$

and

$$\dim(R/((J :_R I^{\infty}) + I)) \leqslant \dim(R) - s - 1.$$

证明。第一个不等式由 [17, 引理 2。2]得出。第二个不等式由第一个不等式可知，因为 I 模 J 后含有一个非零因子：I^{∞}。□

若环境环 R 是局部环，或者理想 I 由次数相同的齐次形式生成，且 R 是正分次 $\Bbbk$-代数，则 d 个 I 中的一般元素 I 生成一个约化，其中 $d = \dim(R)$。下面的命题给出了一种方法，可为任意诺特 $\Bbbk$-代数中的任意理想构造有限个一般约化（见 定义 3.6）。

命题 3.5. 设 $\Bbbk$ 为无限域，R 为维数 d 的有限生成 $\Bbbk$-代数，I 为一个正高度理想。若 R 是正分次的，且 I 由次数相同的齐次形式生成，则令 $f := 0 \in R$。否则，令 $f \in I$ 为一个不属于 R 中任何维数为 d 的极小素理想的元素。若 J 是由 I 中 d 个一般元素生成的理想，则 $J + (f)$ 是 I 的一个约化。

证明。令 $H = J + (f)$，并令 $\bar{}$ 表示 $R = R/(f)$ 中的像。将引理 3.4 应用于 H 和 I 在 R 中的像，我们得到 $\bar{H} :_{\bar{R}} \bar{I}^{\infty} = \bar{R}$，因此 $\bar{H}$ 和 $\bar{I}$ 具有相同的根基。由于对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $HI^{n-1} : I^n \subseteq HI^n : I^{n+1}$，这个理想序列最终会稳定。因此，只需证明

对每个 $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(\mathrm{I})$，$\mathrm{H}_{\mathfrak{p}}$ 都是 $\mathrm{I}_{\mathfrak{p}}$ 的约化。由引理 3.4 可得 $(\mathrm{J} : \mathrm{I}^{\infty}) + \mathrm{I} = \mathrm{R}$，因此对 $\mathrm{n} \gg 0$ 以及每个 $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(\mathrm{I})$，都有 $\mathrm{I}_{\mathfrak{p}}^{n} \subseteq \mathrm{J}_{\mathfrak{p}}$。令 $\mathrm{gr}_{I}(\mathrm{R}) = \oplus_{n \geqslant 0} \mathrm{I}^{n} / \mathrm{I}^{n+1}$。我们可以按照命题 2.3] 中的方法证明，J 的 d 个生成元在 $\mathrm{I}/\mathrm{I}^{2} = [\mathrm{gr}_{I}(\mathrm{R})]_{1}$ 中的像，关于 $\mathrm{gr}_{I}(\mathrm{R})_{+} = \oplus_{n>0} \mathrm{I}^{n} / \mathrm{I}^{n+1}$构成一个滤正则序列。因此，J 由 I 的一个表浅序列生成。于是，由引理 8.5.11]，对 $\mathrm{n} \gg 0$ 有 $\mathrm{J} \cap \mathrm{I}^{n+1} = \mathrm{JI}^{n}$。因此，对每个 $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(\mathrm{I})$，$\mathrm{J}_{\mathfrak{p}}$ 都是 $\mathrm{I}_{\mathfrak{p}}$ 的约化。由此，$\mathrm{H}_{\mathfrak{p}}$ 是 $\mathrm{I}_{\mathfrak{p}}$的约化，证明完毕。□

定义 3.6. 在 命题 3.5中的假设和记号下，若 $K_1, \ldots, K_n$ 是 I的 一般约化，则称它们为 $K_i = J_i + (f)$，其中 $J_1, \ldots, J_n$ 是 n 个由 d 个 I的一般元素生成的理想，如记号 3.1所示。

注 3.7. 注意，对每个 $\mathrm{r} > 0$，根据命题 3.5，$\mathrm{K}_i' := \mathrm{J}_i + (\mathrm{f}^{r})$ 都是 I 的一个约化。此外，对于固定的极大理想 $\mathfrak{m} \in \mathrm{V}(\mathrm{I})$，$(\mathrm{J}_i)_{\mathfrak{m}}$ 是 $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}$的一个约化；若 $\mathrm{r} > \mathrm{r}(\mathrm{I}_{\mathfrak{m}})$ [31, ，则 $(\mathrm{K}_i')_{\mathfrak{m}} = (\mathrm{J}_i)_{\mathfrak{m}}$，见定理 8.6. 6]。如果进一步有 $\ell(\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}) = \mathrm{d}$，那么 $(\mathrm{K}_i')_{\mathfrak{m}}$ 是 $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}$的一个极小约化。若 $\mathrm{R}_{\mathfrak{m}}$ 是正则的且 $\dim(\mathrm{R}_{\mathfrak{m}}) = \mathrm{d}$，则当 $\mathrm{r} \geqslant \mathrm{d}$ 时，我们还有 $(\mathrm{K}_i')_{\mathfrak{m}} = (\mathrm{J}_i)_{\mathfrak{m}}$，见推论 13.3.4]。对于任意选取的 r，我们也称理想 K_i' 为 I 的一般约化。

引理 3.8。 设 R 是 *Cohen-Macaulay* 环，s 是一个非负整数，I 是满足 G_{s+1}的理想。那么，当且仅当对每个 $\mathfrak{p} \in V(I)$，$I_{\mathfrak{p}}$ 都弱 s-剩余 S_2 时，I 才弱 s-剩余 S_2。

证明。 弱s-剩余S_2 这一性质在局部化下保持（见 [9, 引理 2.1(a)]）。反过来，设$i \leqslant s$，设$K = J$: I 是I的一个几何i-剩余交，并设 $\mathfrak{p} \in V(K)$。若 $\mathfrak{p} \in V(I)$，则根据我们的假设，$R_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}$是$S_2$。若 $\mathfrak{p} \notin V(I)$，则$K_{\mathfrak{p}} = J_{\mathfrak{p}}$ 是一个完全交，因此$R_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}$ 是 Cohen-Macaulay。□

定理 3.9 将 [9, 定理 4。5] 从局部环推广到域上的有限生成代数。回顾一下，若理想 I 是 线性型 的，则它的对称代数到 Rees 代数的自然映射是同构。若 I 是线性型，则它没有真约化，因此核$(I) = I$。

定理 3.9. 设 $\Bbbk$ 是一个无限域，R 是一个 *Cohen-Macaulay* 有限生成的 $\Bbbk$-代数，维数为 d，I 是一个正高度理想。假设 I 满足 G_d 且弱 $(d-2)$-剩余 S_2。设 $f \in I$ 如 定义 *3.6*所述。则存在正整数 n 和 r，使得

$$\operatorname{core}(I) = K_1 \cap \cdots \cap K_n,$$

其中 $K_i = J_i + (f_r)$ 对于 $1 \leqslant i \leqslant n$ 是如 注 *3.7*所述的 I 的一般约化。若进一步假设 R 正则，则 r 可取为 d。

证明。对于每个 $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(\mathrm{I})$，理想 $\mathrm{I}_{\mathfrak{p}}$ 满足 G_d，由引理 3.8 可知 $\mathrm{I}_{\mathfrak{p}}$ 弱 $(\mathrm{d}-2)$-剩余 S_2。因此，[8, 推论 3.6 (b)] 和 [54, 定理 2.3.2] 表明，对于每个满足 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) < \mathrm{d}$ 的$\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(\mathrm{I})$，$\mathrm{I}_{\mathfrak{p}}$ 均为线性型。显然，对于每个素理想 $\mathfrak{p} \notin \mathrm{V}(\mathrm{I})$，$\mathrm{I}_{\mathfrak{p}}$均为线性型。

设 Sym(*I*) 和 $\mathscr{R}(I)$ 分别为 I 的对称代数和 Rees 代数。考虑下面的正合列

$$0 \to \mathscr{A} \to \operatorname{Sym}(I) \to \mathscr{R}(I) \to 0.$$

理想 $\mathscr{A}$由次数至多为e的齐次元素生成，其中e是某个非负整数。$_e$因此，$\operatorname{Supp}_R(\mathscr{A}) = \bigcup \operatorname{Supp}_R$ $(\mathscr{A}_i)$ 是 Spec(R) 的闭子集。由此可知，素理想集合$_{i=0}$

$\mathfrak{p}$ 使得 $I_{\mathfrak{p}}$ 不是线性型的元素仅由有限个极大理想组成，记为 $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_t$。注意，对于每个 $1 \leqslant i \leqslant t$，都有 $\ell(I_{\mathfrak{m}_i}) = d$；事实上，若 $\ell(I_{\mathfrak{m}_i}) < d$，则根据 [9,引理 2.1(g)]，$I_{\mathfrak{m}_i}$ 由 $d-1$ 个元素生成，因此根据 [8, 推论 3.6 (b)] 和 [54, 定理 2.3.2]，$I_{\mathfrak{m}_i}$ 将是线性型。

理想 $I_{\mathfrak{m}_i}$ 的解析扩张度为 d，满足 G_d，且是弱 $(d-2)$-剩余 S_2,，因此是弱 $(d-1)$-剩余 S_2（见 [8, 命题 3.4 (a)]）。将 [9, 定理 4.5] 和注 3.7 应用于有限多个理想 $I_{\mathfrak{m}_i}$，我们得到 $\operatorname{core}(I_{\mathfrak{m}_i}) = (K_1)_{\mathfrak{m}_i} \cap \cdots \cap (K_n)_{\mathfrak{m}_i}$，其中 n 为某个整数，$K_1, \ldots, K_n$ 是 I 的一般约化，且 $r = 1 + \max\{r(I_{\mathfrak{m}_i}) \mid 1 \leqslant i \leqslant t\}$，或者在 R 为正则时 $r = d$。

我们断言 $\operatorname{core}(I) = K_1 \cap \cdots \cap K_n$。显然，$\operatorname{core}(I) \subseteq K_1 \cap \cdots \cap K_n$，因为根据命题 3.5，$K_1, \ldots, K_n$ 是 I 的约化。为证明反向包含，设 K 是 I 的任意一个约化。我们需要证明 $K_1 \cap \cdots \cap K_n \subseteq K$，或者等价地，对每个 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$，都有 $(K_1)_{\mathfrak{p}} \cap \cdots \cap (K_n)_{\mathfrak{p}} \subseteq K_{\mathfrak{p}}$。若 $\mathfrak{p} \notin \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_t\}$，则 $I_{\mathfrak{p}}$ 是线性型。因此 $K_{\mathfrak{p}} = I_{\mathfrak{p}}$，结论显然成立。否则，$(K_1)_{\mathfrak{p}} \cap \cdots \cap (K_n)_{\mathfrak{p}} = \operatorname{core}(I_{\mathfrak{p}}) \subset K_{\mathfrak{p}}$。□

定理 3.9 及其证明使我们能够说明，在其假设下，I 的核可以局部化（参见 [9, 定理 4。8]）。

推论 3.10 **0.** 若满足定理 *3.9* 的假设，则核$(I_{\mathfrak{p}}) = (\text{核}(I))_{\mathfrak{p}}$ 对每个 $\mathfrak{p} \in \text{素谱}(R)$均成立。

证明。在定理 3.9 的证明中，我们证明了 $\operatorname{core}(I_{\mathfrak{m}_i}) = (K_1)_{\mathfrak{m}_i} \cap \cdots \cap (K_n)_{\mathfrak{m}_i}$，根据定理 3.9，这就是 $(\operatorname{core}(I))_{\mathfrak{m}_i}$。若 $\mathfrak{p} \notin \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_t\}$，则 $I_{\mathfrak{p}}$ 是线性型，因此 $\operatorname{core}(I_{\mathfrak{p}}) = I_{\mathfrak{p}}$，且 $(\operatorname{core}(I))_{\mathfrak{p}} = (K_1)_{\mathfrak{p}} \cap \cdots \cap (K_n)_{\mathfrak{p}} = I_{\mathfrak{p}}$。□

注 3.11. 除定理 3.9 的假设外，若环 R 是正分次 k-代数，极大齐次理想为 $\mathfrak{m}$，且理想 I 是齐次的，那么我们可以将 I 弱 $(d-2)$-剩余 S_2 的假设替换为 $I_{\mathfrak{m}}$ 弱 $(d-2)$-剩余 S_2 的假设。此外，r 可以选为 $1 + r(I_{\mathfrak{m}})$。

证明。按照定理 3.9 的证明，只需证明当 $\mathfrak{p} \in V(I)$ 且 $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ 时，$I_{\mathfrak{p}}$ 是线性型。由于 I 是齐次的，$\operatorname{Supp}_R(\mathscr{A})$ 的极小素理想都是齐次的，因此都包含在 $\mathfrak{m}$ 中。另一方面，如果 $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$，那么根据我们对 $I_{\mathfrak{m}}$ 的假设，$I_{\mathfrak{p}}$ 是线性型（见[8,推论 3.6 (b)] 和 [54,定理 2.3.2]）。□

对于由同次数形式生成的理想，定理3.9有如下更简单的版本。

推论 3.12。 设$\Bbbk$ 是一个无限域，R 是一个维数为 d 的 *Cohen-Macaulay* 正分次$\Bbbk$-代数，$\mathfrak{m}$ 是 R 的齐次极大理想。设 I 是一个正高度理想，由次数相同的齐次元素生成 δ。若 I 满足 G_d 且 $I_{\mathfrak{m}}$ 是弱$(d-2)$-余剩 S_2,，则存在一个正整数 n，使得

$$\operatorname{core}(I) = J_1 \cap \cdots \cap J_n,$$

其中 J_1，...，J_n 是由 I 的 d 个一般元素生成的，这些一般元素相对于包含在 I 中的 I 的生成集而言$_\delta$ (参见记号 *3.1*)。特别地，

$$\operatorname{core}(I) = \operatorname{gradedcore}(I).$$

证明。 我们选取 $f = 0$ 如 命题 3.5所述，使得 $J_i = K_i$。现在根据定理 3.9 和注3.11，断言成立。□

注3.13。 定理 定理 3.9的证明表明，在满足 推论 3.12 的假设时，$\ell(I) = d$ 或核$(I) = I$。

问题 3.14. 能否将 推论 3.12 中关于 I 满足 G_d 且 $I_{\mathfrak{m}}$ 弱 $(d-2)$-剩余 S_2 的假设，替换为以下条件：I满足 G_ℓ 且 $I_{\mathfrak{m}}$弱 $(\ell-1)$-剩余 S_2 对于$\ell = \ell(I)$，即

$$\operatorname{core}(I) = J_1 \cap \cdots \cap J_n,$$

其中$J1$，. . .，J_n由I相对于I的一个生成集所包含的 ℓ个一般元素生成，而该生成集包含于I_δ中?

4. 核与单项式

本节将 [45] 的主要结果推广到更高维数的单项式理想。我们证明，在满足适当剩余条件的情况下，单项式理想 I 的核与 I的一个一般约化中最大的单项式理想一致，前提是 I 具有最大解析扩张度。

命题 *4.1.* 设 k 是一个无限域，$x = x1,\ldots, x_r$、$y = y1,\ldots, y_s$ 和 $z = z1,\ldots, z_t$ 是三组变量。设 H 是 $k[x, y, z]$ 的一个理想。对每个$\underline{\lambda} = (\lambda_i) \in A^t_{\Bbbk}$，令 $\pi_\lambda\colon k[x, y, z] \to k[x, y]$ 表示由 $z_i \mapsto \lambda_i$ 给出的求值映射。那么对一般的 λ，有 $\pi_\lambda(H \cap k[x, z]) = \pi_\lambda(H) \cap k[x]$。

证明。 显然， $\pi_\lambda(H \cap \mathrm{k}[x,y]) \subseteq \pi_\lambda(H) \cap \mathrm{k}[x]$。

为证明反向包含，我们在变量 x,y 上，对两个多项式环 $\mathrm{k}[z][x,y]$ 和 $A := \mathrm{k}(z)[x,y]$ 采用字典序单项式序$<$，其中 $x_i < y_j$。令$G = \{g1,\ldots,g_m\} \subset H$为$HA$ 关于 $<$的格罗布纳基。

显然， $\pi_\lambda(G)$是一般情况下 $\pi_\lambda(H)$的生成集。我们断言，对于一般的 λ，集合 $\pi_\lambda(G)$也是格罗布纳基。根据布赫伯格判据，只需证明对每个$i \neq j$， S-对$S_{ij} := S(\pi_\lambda(g_i)\ \pi_\lambda(g_j))$可以表示为一个表达式

$$h_1\pi_\lambda(g_1) + \cdots + h_m\pi_\lambda(g_m), \tag{2}$$

其中$h_k \in \mathrm{k}[x,y]$， 且初始单项式满足：对每个 $1 \leqslant k \leqslant m$，$\mathrm{in}_<(h_k\pi_\lambda(g_k)) \leqslant \mathrm{in}_<(S_{ij})$。由于$G$ 是HA的格罗布纳基，存在一个表达式

$$S(g_i, g_j) = \widetilde{h}_1 g_1 + \cdots + \widetilde{h}_m g_m, \tag{3}$$

其中 $\widetilde{h}_k \in A$ 且 $\mathrm{in}_<(h_k g_k) \leqslant \mathrm{in}_<(S(g_i, g_j))$ 对每个 $1 \leqslant k \leqslant m$ 都成立。

如果 $\mathrm{c}_{g_k} \in \mathrm{k}[\mathrm{z}]$ 是 $\mathrm{in}_<(g_k)$ 的系数，那么 $\pi_\lambda(\mathrm{c}_{g_k})$ 是一般 λ下 $\mathrm{in}_<(\pi_\lambda(g_k))$ 的系数。因此，$\mathrm{in}_<(\pi_\lambda(g_k)) = \mathrm{in}_<(g_k)$，并且 $\mathrm{S}_{ij} = \pi_\lambda(\mathrm{S}(g_i, g_j))$，因为 $\mathrm{S}(g_i, g_j) \in \mathrm{k}[\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}]$。因此，在 (3) 中清除分母并应用一般 λ下的 π_λ 后，即可得到 (2) 中所需的 S_{ij}表达式。

由于一般 λ下 $\pi_\lambda(G)$ 是 $\pi_\lambda(H)$ 的格罗布纳基，且 $<$ 是消去序，因此$\pi_\lambda(H) \cap \mathrm{k}[x]$ 由 $\pi_\lambda(G) \cap \mathrm{k}[x]$生成。最后，在一般 λ下，我们有

$$\pi_\lambda(G) \cap \Bbbk[x] = \pi_\lambda(G \cap \Bbbk[x,z]) \subseteq \pi_\lambda(H \cap \Bbbk[x,z]),$$

由此得出结论。 □

本节旨在说明，在对单项式理想I作出适当假设的情况下，I的核可表示为I的一般约化的单项式部分，即 $\operatorname{core}(I) = \operatorname{mono}(K)$，其中$K$ 是一个一般

约化I，如定义 3.6 所述，而 mono(K)表示包含于K中的最大单项式理想。为计算 mono(K)，我们采用 Saito、Sturmfels 和 Takayama 提出的算法 [48, 算法 4.4。2]。

为了证明我们的主要结果，我们需要一个概念：在任意诺特环上的多项式环中，理想的单项式部分。设 A 为诺特环。对于多项式环 $A[x1,\ldots,x_d]$，~中的理想 L，其多重齐次化记作 L，是多项式环 $A[x1,\ldots,x_d,y1,\ldots,y_d]$中由下列元素生成的理想

$$\left\{\widetilde{g}=g\left(\frac{x_1}{y_1},\ldots,\frac{x_d}{y_d}\right)y_1^{\deg_{x_1}(g)}\cdots y_d^{\deg_{x_d}(g)}\,\middle|\, g\in L\right\}.$$

我们考虑 $A[x1,\ldots,x_d,y1,\ldots,y_d]$，并赋予其由 $\deg(x_i)=\deg(y_i)=\mathbf{e}_i$诱导的 $\mathbb{N}^d$-分次。注意，~g确实是多重齐次的，且 $\deg(\widetilde{g})=\left(\deg_{x1}(g)\ldots,\deg_{x_d}(g)\right)\in\mathbb{N}^d$。

下一个例子展示了对一个元素进行多重齐次化的过程。

例 4.2. 设 $g=c_1x_1^2x_2+c_2x_1x_3^2+c_3x_2^3x_3\in A[x_1,x_2,x_3]$ 其中 $c_1,c_2,c_3\in A$。则 $\widetilde{g}=c_1x_1^2x_2y_2^2y_3^2+c_2x_1x_3^2y_1y_2^3+c_3x_2^3x_3y_1^2y_3$.

要得到理想 $L\subset A[x1,\ldots,x_d]$ 的多重齐次化，只需对给定的d生成集 $g1,\ldots,g_u$进行多重齐次化 L，并对$Y=\prod_{j=1}y_j$进行饱和，也就是说

$$\widetilde{L}=(\widetilde{g_1},\ldots,\widetilde{g_u}):Y^\infty. \tag{4}$$

定义 4.3. 设 A 是一个诺特环，且L是多项式环 $A[x1,\ldots,x_d]$中的一个理想。我们将 mono(L) 定义为由L 中形如 am的元素生成的理想，其中 $a\in A$ 且m 是一个单项式。

按照 [48, 算法 4.4.2], ，我们得到

$$\text{mono}(L)=\widetilde{L}\cap A[x_1,\ldots,x_d]. \tag{5}$$

命题 4.4. 设 $A=\Bbbk[z_1,\ldots,z_t]$ 是无限域 $\Bbbk$ 上的多项式环，且 L 是多项式环 $A[x_1,\ldots,x_d]$ 中的真理想。对于 $\lambda\in\mathbb{A}^t_\Bbbk$，令 $\pi_\lambda:A[x_1,\ldots,x_d]\to\Bbbk[x_1,\ldots,x_d]$ 为由 $z_i\mapsto\lambda_i$给出的求值映射。对于一般的 $\lambda\in\mathbb{A}^t_\Bbbk$，有如下结论

(a) $\widetilde{\pi_\lambda(L)}=\pi_\lambda(L)$ (b) 单项式部分$(\pi_\lambda(L))=\pi_\lambda($单项式部分$(L))$

(c) 单项式部分$(\pi_\lambda(L))$ 不依赖于 λ。

证明。我们从 (a) 的证明开始。首先注意，对于任意 $g\in A[x1,\ldots,x_d]$ 以及一般的 λ，我们有 $\widetilde{\pi_\lambda(g)}=\pi_\lambda(\widetilde{g})$。设 $L=(g1,\ldots,g_u)$，则

$$\left(\widetilde{\pi_\lambda(g_1)},\ldots,\widetilde{\pi_\lambda(g_u)}\right)=\left(\pi_\lambda(\widetilde{g_1}),\ldots,\pi_\lambda(\widetilde{g_u})\right)=\pi_\lambda(\widetilde{g_1},\ldots,\widetilde{g_u}).$$

因此，

$$\widetilde{\pi_\lambda(L)}=\left(\widetilde{\pi_\lambda(g_1)},\ldots,\widetilde{\pi_\lambda(g_u)}\right):Y^\infty=\pi_\lambda(\widetilde{g_1},\ldots,\widetilde{g_u}):Y^\infty.$$

另一方面，

$$\pi_\lambda(\widetilde{L})=\pi_\lambda((\widetilde{g_1},\ldots,\widetilde{g_u}):Y^\infty).$$

注意到

$$\pi_\lambda(\widetilde{g_1},\ldots,\widetilde{g_u})\subseteq\pi_\lambda((\widetilde{g_1},\ldots,\widetilde{g_u}):Y^\infty)\subseteq\pi_\lambda(\widetilde{g_1},\ldots,\widetilde{g_u}):Y^\infty.$$

~~ ~因此，要证明 $\pi_\lambda(L) = \pi_\lambda(L)$，只需证明 $\pi_\lambda((\tilde{g}1,\ldots,\tilde{g}_u) : Y^\infty)$ 关于 $\tilde{Y}$ 是饱和的。为此，只需证明 Y 在 $k[x,y]/\pi_\lambda((\tilde{g}1,\ldots,\tilde{g}_u) : Y^\infty) = k[x,y]/\pi_\lambda(L)$ 上是非零因子。

~ ~Y 在 $k[x,y]/\pi_\lambda(L)$ 中的像不是单位元，因此 $k[x,y]/(\pi_\lambda(L),Y) \neq 0$.

Set

$$T = \frac{\mathbb{k}[z]_{(z-\lambda)}[x,y]}{\widetilde{L}}$$

~并注意到 $T/(z-\lambda) = k[x,y]/\pi_\lambda(L)$。由一般自由性 [14, 定理 14.4]，对一般的 λ，映射 $k[z]_{(z-\lambda)} \to T/(Y)$ 是平坦的，因此元素 $z-\lambda$ 在 $T/(Y)$ 上构成正则序列。对此还要回忆

$$T/(Y, z-\lambda) = \mathbb{k}[x,y]/(Y, \pi_\lambda(\widetilde{L})) \neq 0.$$

由于Y是T上的非零因子，因此$Y, z-\lambda$是一个T-正则序列。由于该序列由T中的齐次元素组成，且T是局部环上的正分次环，我们可得$z-\lambda, Y$也是一个正则序列 [42, 定理 16.2 和定理 16.3]。由此得出Y是$T/(z-\lambda) = k[x,y]/\pi_\lambda(L)$.上的非零因子

部分 (b)是 (a) 和 命题 4.1的直接推论。

最后，部分（c）由（b）得出，因为 $\pi_\lambda \operatorname{mono}(L)$ 不依赖于 λ一般的 λ。事实上，若$\{a_i m_i\}$是 $\operatorname{mono}(L)$ 的有限生成集，其中 $a_i \in k[z]$，且 m_i是 $x1,\ldots,x_d$中的单项式，那么对任意 $\lambda \in D(\prod_i a_i)$，理想 $\pi_\lambda(\operatorname{mono}(L))$ 均与 λ无关。□

推论 4.5. 设 $\mathbb{k}$ 是一个无限域，$R = \mathbb{k}[x_1,\ldots,x_d]$ 是一个多项式环，I 是一个单项式理想。对任意 $n \in \mathbb{N}$，令 K 和 $K_1,\ldots,K_n$ 为 I 的一般约化，如注 *3.7*所述。我们有

$$\operatorname{core}(I) \subseteq \operatorname{mono}(K) \subseteq K_1 \cap \cdots \cap K_n.$$

证明。显然，$\operatorname{core}(I) \subseteq \operatorname{mono}(K)$，因为根据命题 3.5，K 是 I 的一个约化，且由注 5.1] 的证明可知 core(I) 是一个单项式理想。对于第二个包含关系，注意到根据命题 4.4(c)，对所有$1 \leqslant i \leqslant n$，都有 $\operatorname{mono}(K) = \operatorname{mono}(K_i)$。□

注 4.6。 如果在 推论 4.5中，理想I 由次数为 δ 的单项式生成，并且$f_1,\ldots,f_u$（见 记号 3.1 ）选为次数为 δ的齐次多项式，且 $f = 0$，那么 K是I的齐次约化。因此

$$\operatorname{gradedcore}(I) \subseteq \operatorname{mono}(K).$$

现在我们证明本节的主定理。

定理 4.7。 设 $\mathbb{k}$是一个无限域，$R = \mathbb{k}[x_1,\ldots,x_d]$ 为一个多项式环，$\mathfrak{m} := (x_1,\ldots,x_d)$，且 I 为一个单项式理想。若 I 满足 G_d 且 $I_{\mathfrak{m}}$ 是弱$(d-2)$-剩余 S_2，则

$$\operatorname{core}(I) = \operatorname{mono}(K)$$

对于 I 的一般约化 K，若 $r = d$，如 注 *3.7*所述。

证明。 证明可由推论 4.5、定理 3.9以及 注 3.11直接推出。 □

下面的例子表明，定理 3.9 和定理 4.7 在没有假设I 满足G_d时并不成立。

例 4.8. 令 $R = \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$，并令 $I = (x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_3^2, x_3^3)$。理想 I 的高度为 2，解析扩张度为 3。它弱 2-剩余 s_2，因为 I 的每个链接都是无混合的，因而是 Cohen-Macaulay。然而，I 不满足 G_3。利用 Macaulay2 [20] 进行计算可知，存在非零多项式 h 和 g，属于 $\mathbb{Q}[z]$，使得

$$\operatorname{mono}(J_{3,\underline{z}}) = (h)\left(x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_3^2\right) I + (hg)\left(x_1^2x_2^3, x_1x_2^2x_3^2, x_2^2x_3^3\right) =: (h)\mathfrak{A} + (hg)\mathfrak{B}.$$

对于一般的 $\underline{\lambda}$，我们有 $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \underline{\pi_\lambda}(\operatorname{mono}(J_{3,\underline{z}})) = \operatorname{mono}(K)$，其中 $K := \underline{\pi_\lambda}(J_{3,\underline{z}})$（见命题 4.4）。因此，$\operatorname{core}(I) \subseteq \operatorname{gradedcore}(I) \subseteq \mathfrak{A} + \mathfrak{B} = I\,\mathfrak{m}^2$（见注 4.6）。理想 $H = (x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_3^2 + x_3^3)$ 是 I 的一个极小约化，因为 $I^3 = HI^2$。另一方面，$\operatorname{mono}(K) = I\mathfrak{m}^2 \not\subseteq H$。因此，对于一般约化 K，gradedcore(I) 不等于 mono(K)，所以 core(I) 不是 I 的一般约化的有限交（见推论 4.5）。特别地，定理 3.9 和定理 4.7 均不成立。

下一个例子中的理想是 G_d（事实上 G_∞），但 $\ell(I) < d$ 且 $I_{\mathfrak{m}}$ 不是弱 $(d-2)$-剩余的s_2（见 注3.13 和 推论 3.12）。同样，核(I)不是 I 的一般极小约化的有限交，且它不是 I 的某个一般极小约化的单项式部分I。

例 4.9. 令

$$R = \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6] \quad \text{and} \quad I = (x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_1, x_4x_5, x_5x_6).$$

容易验证，I 的高度为 3，且满足 G_∞。然而，$\ell(I) = 5$ 且 $I_{\mathfrak{m}}$ 不是弱 3-剩余的 s_2。在 [16, 例 4.8] 中证明了，核(I) $\neq \mathfrak{m}I$。利用 Macaulay2 [20] 可以验证，对于 I 的一个一般极小约化 J，有 mono(J) $= \mathfrak{m}I$；也就是说，J 是由 I 的 5 个一般元素生成的理想，这些元素是相对于 I 的六个单项式生成元而言的。因此，核(I) 不等于 mono(J)。

5. 单项式理想的核：由同一次数生成

如果不满足前几节所要求的剩余条件，目前尚无已知方法可以计算给定理想的核。本节旨在提出一种方法，在不作任何额外假设的情况下计算由单一次数生成的单项式理想的核。

在上一节中，我们证明，对于单项式理想 I，任意一般约化 K 的 mono(K) 都包含 core(I) 和 gradedcore(I)。这一包含关系普遍成立，并且在满足适当的剩余条件时成为等式（见推论 4.5、注 4.6、定理 4.7）。对于由单一次数生成的单项式理想 I，我们构造了一个包含于 gradedcore(I) 中的理想，并猜想一般情况下两者相等（见定理 5.4 和猜想 5.5）。我们在例 5.9 中验证了一个特定理想满足该猜想。此外，在满足相同剩余条件时，core(I) 可表示为有限个一般约化的交（推论 3.12）。然而，正如例 4.8 所示，在不满足剩余条件时，需要用到特殊约化。本节将介绍一种求出这些特殊约化的方法。

记号 5.1. 设 k 是一个无限域，$R = k[x1, \ldots, x_d]$ 是一个多项式环，$\mathfrak{m} = (x1, \ldots, x_d)$ 是其齐次极大理想。设 I 是由次数相同的齐次元素生成的非零理想 δ。令 $\mathscr{F} := \mathscr{F}(I)$ 为 I的特殊纤维环，$\mathscr{F}_+$ 为由 $\mathscr{F}$ 中正次数元素生成的理想。注意，由于 I 由单一次数的元素生成，$\mathscr{F} \cong k[I_\delta] \subseteq R$。令$\ell := \ell(I) = \dim(\mathscr{F})$ 为 I 的解析扩张度。

取 I 的一个生成序列 f =f1, . . . , f$_u$，其中各元素属于 I$_\delta$。考虑 ℓu 个变量 z = {z$_{ij}$ | 1 ⩽i ⩽ ℓ和 1 ⩽j ⩽u}。记 b$_i$ = $\sum_{j=1}^{u}$ z$_{i,j}$f j。令 $\mathscr{H}$ ⊆J :=J$_{\ell,z}$(f) 分别为环 $\mathscr{F}$[z] ⊆R[z], 中由 b1, . . . , b$_\ell$ 生成的理想。对于 $\lambda \in \mathbb{A}_{\Bbbk}^{\ell u}$，记 $\mathscr{H}_\lambda = \pi_\lambda(\mathscr{H}) \subseteq \mathscr{F}$和 J$_\lambda$ = π_λ(J) ⊆R，其中 π_λ表示求值映射。

注意，$\mathscr{F}_+R = I$，$\mathscr{H}R[z] = J$，且 $\mathscr{H}_\lambda R = J_\lambda$。此外，$J_\lambda$ 是I 的约化，当且仅当$I^{r+1} = J_\lambda I^r$ 对某个$r \geqslant 0$成立；当且仅当 $\mathscr{F}_+^{r+1} = \mathscr{H}_\lambda \mathscr{F}^{r+}$ 对某个$r \geqslant 0$成立；当且仅当 $\mathscr{F}_+ \subseteq \sqrt{\mathscr{H}_\lambda}$。

下面的结果描述了点的轨迹 λ，对于这些点，J_λ 不是I的约化。我们还证明，这个轨迹由一个来自k[z]的单个不可约多项式决定。需要指出的是，这里我们只假设I 是齐次的，并不要求它必定由单项式生成。

命题 5.2. 在记号 *5.1* 中的假设下，令 $\mathscr{A} = (\mathscr{H} :_{\mathscr{F}[z]} \mathscr{F}_+^\infty) \cap \Bbbk[z]$。

(*a*) $\Bbbk[z]$-理想 $\mathscr{A}$ 定义了 J_λ 不是 I 的约化时对应的轨迹。(*b*) 理想 $\mathscr{A}$ 是高度一的素理想。因此 $\mathscr{A} = (h)$，其中 h 是$\Bbbk[z]$中的不可约多项式。

证明。为了证明 (a)，我们写作 T = $\mathscr{F}$[z]/$\mathscr{H}$并考虑自然映射 ϕ: 射影谱(T) →素谱(k[z])。显然 Im(ϕ) ⊆V ($\mathscr{A}$)；我们断言 V ($\mathscr{A}$) =Im(ϕ)。为此，首先注意到 $\mathscr{H} :_{\mathscr{F}[z]} \mathscr{F}_+^\infty$是一个高度为 ℓ的素理想（由引理 3.3）。因此，我们有一个整环的包含关系

$$U := \Bbbk[z]/\mathscr{A} \hookrightarrow V := \mathscr{F}[z]/(\mathscr{H} :_{\mathscr{F}[z]} \mathscr{F}_+^\infty).$$

由于

$$\dim(V \otimes_U \mathrm{Quot}(U)) = \mathrm{ht}(\mathscr{F}_+ V) \geqslant 1, \tag{6}$$

根据纤维维数半连续性 [14, 定理 14.8 (b)] 我们有 dim($V \otimes_U \kappa(P)$) ⩾ 1 对每个P ∈素谱 (U)。因此 P ∈属于 (ϕ) 对每个 P ∈素谱 (U)，由此可得所需结论。

点 $\lambda \in \mathbb{A}_{\Bbbk}^{\ell u}$属于 Im($\phi$) 当且仅当 dim $\left(T \otimes_{\Bbbk[z]} (\Bbbk[z]/(z - \lambda))\right) > 0$。由于

$$T \otimes_{\Bbbk[z]} (\Bbbk[z]/(z - \lambda)) \cong \mathscr{F}/\mathscr{H}_\lambda,$$

最后一个条件等价于 $\mathscr{F}_+ \not\subseteq \sqrt{\mathscr{H}_\lambda}$，这意味着$J_\lambda$ 不是I的约化。

对于 (b) 部分，尚需证明 ht($\mathscr{A}$) = 1。我们首先注意到

$$\dim(V) = \dim(\mathscr{F}[z]) - \mathrm{ht}\left(\mathscr{H} :_{\mathscr{F}[z]} \mathscr{F}_+^\infty\right) = (\ell + \dim(\Bbbk[z])) - \ell = \dim(\Bbbk[z]).$$

我们将 $\mathbb{A}_{\Bbbk}^{\ell u}$中的点视为 $\ell \times$ u 矩阵。如果 $\lambda_0 \in \mathbb{A}_{\Bbbk}^{\ell u}$是一个矩阵，其前 $\ell - 1$ 行是一般的，而最后一行由零组成，那么 ht $\left(\mathscr{H}_{\lambda_0}\right) = \ell - 1$。因此，$\mathscr{F}/\mathscr{H}_{\lambda_0}$ =V $\otimes_U$(U /(z − λ_0)) 的维数为一，这表明 dim (V $\otimes_U$Quot(U)) = 1，由 [14, 定理 14.8 (b)] 和 (6) 得出。因此，

$$1 = \mathrm{trdeg}_U(V) = \mathrm{trdeg}_{\Bbbk}(V) - \mathrm{trdeg}_{\Bbbk}(U) = \dim(V) - \dim(U) = \dim(\Bbbk[z]) - \dim(U) = \mathrm{ht}(\mathscr{A}),$$

证明完毕。 □

根据 记号 5.1，可知 I 的每个齐次约化都包含一个由 ℓ 次数为 δ的齐次元素生成的约化，它必定具有 J_λ 的形式，其中 $\lambda \in \mathbb{A}_{\Bbbk}^{\ell u}$。

推论 5.3。 在 记号 *5.1* 和 命题 *5.2*的假设下，我们有

$$\mathrm{gradedcore}(I) = \bigcap_{\lambda \notin V(\mathscr{A})} J_\lambda.$$

在下面的结果中，我们证明，对于单项式理想 I，$(\text{mono(J)} :_{R[z]} (h)^{\infty}) \cap R$ 包含于 I 的每个齐次约化中。事实上，我们猜想这个理想等于分次核(I)（见猜想 5.5）。这里我们将 J 视为多项式环 $A[x1,..,x_d]$ 中的一个理想，其中 $A = k[z]$（见定义 4.3）。对于向量 $w = (w1,\dots,w_d) \in N^d$，我们用 x^w 表示单项式 $x_1^{w_1}\cdots x^{w_d}d$。

定理 5.4。 除 记号 *5.1* 中的假设外，设 $f_1,\dots,f_u$ 均为单项式。若 $h \in \Bbbk[z]$ 如 命题 *5.2*(b)中所述，则

$$\left(\text{mono}(J) :_{R[z]} (h)^{\infty}\right) \cap R \subseteq \text{gradedcore}(I).$$

证明。设 $x^v \in$ (单项式部分(J) $:_{R[z]}$ (h)$^{\infty}$) $\cap$R。则对任意 $N \gg 0$，有 $x^v h^N \in$ 单项式部分(J)。由命题 5.2，对于每个 λ 使得 J_λ 是 I 的约化的 π_λ，我们有 $(h) \neq 0$。因此，令 $Y = \prod y_i$ 如式 (4) 所示，并利用 (5)，得到

$$\begin{aligned} x^v \in \pi_\underline{\lambda}(\text{mono}(J)) &= \pi_\underline{\lambda}\left(\left((\widetilde{b_1},\dots,\widetilde{b_\ell}) :_{R[z,y]} Y^{\infty}\right) \cap R[z]\right) \\ &\subseteq \pi_\underline{\lambda}\left((\widetilde{b_1},\dots,\widetilde{b_\ell}) :_{R[z,y]} Y^{\infty}\right) \cap R \\ &\subseteq (\pi_\underline{\lambda}(\widetilde{b_1},\dots,\widetilde{b_\ell}) :_{R[y]} Y^{\infty}) \cap R = \text{mono}(J_\underline{\lambda}) \subseteq J_\underline{\lambda}. \end{aligned}$$

对所有这样的 λ 取交，得到 $x^v \in$分次核(*I*)，证毕。 □

W基于前面的结果和计算证据，我们提出以下猜想 .

猜想 5.5。 设 I 和 h 如定理 *5.4*中所述

$$\text{gradedcore}(I) = (\text{mono}(J) :_{R[z]} (h)^{\infty}) \cap R.$$

在下一个结果中，我们将证明 mono 的内容理想(J)是主理想，且由不可约多项式 h 生成，该多项式来自 命题 5.2 (b)。在本节末尾，我们将用这一结果验证具体例子中的 猜想 5.5 。继续之前，我们需要补充一些记号。

记号 5.6。除记号 5.1 中的假设外，我们还假设 f1,.., f_u 是单项式。设 $v1,\dots,v_r \in N^d$ 是互不相同的向量，使得 $\text{mono(J)} = C_1(x^{v_1}) + \dots + C_r(x^{v_r})$，其中 $C1,\dots,C_r$ 是 k[z] 的理想（见定义 4.3）。理想 $\mathscr{C} = C_1 + \dots + C_r$ 称为 mono(J) 的内容理想。注意，根据命题 4.4 (b)，对于一般的 λ，单项式集合 $\mathscr{M} := \{x_1^v,\dots,x_r^v\}$ 生成 $\text{mono}(J_\lambda)$。

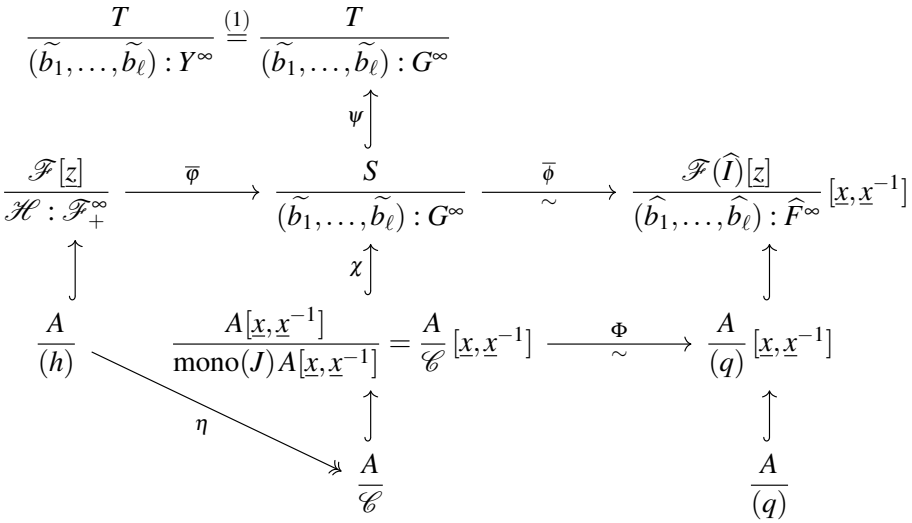
令 $x^v = \text{lcm}(f1,\dots,f_u)$，并对每个 f_i，令 g_i为 $R[y] = R[y1,\dots,y_d]$中的单项式，使得 $\deg(g_i) = \widetilde{v}$，且对每个 i 和 j，$\deg_{x_j}(g_i) = \deg_{x_j}(f_i)$。注意，$\sum_{j=1}^{u} z_i$, jg j 是 b_i，即 $b_i \in k[z][x1,\dots,x_d]$ 的多重齐次化。令 f_i 为 k[y] 中满足 $\deg_{y_j}(f_i) = \deg_{y_j}(g_i)$ 的元素，也就是说 $g_i = f_i f_i$，并令 $\widehat{\ }\quad \widehat{\ }\quad \widehat{\ }\quad \widehat{I} = (f1,\dots,f_u) \subseteq k[y]$。理想 I 是 I 的牛顿补对偶，定义见 [11]（另见 [2]）。

定理 5. 7. 设 $\mathscr{C}$如记号 *5.6* 所述，并设 $h \in \Bbbk[z]$ 如命题 *5.2* (b)所述。那么 $\mathscr{C} = (h)$.

证明。 我们通过构造一个 k[z]-同构来证明该结论

$$\eta : \frac{\Bbbk[z]}{(h)} \xrightarrow{\sim} \frac{\Bbbk[z]}{\mathscr{C}}.$$

为此，我们考虑下面的图，并将在证明的其余部分对其进行说明。



记

$$A := \Bbbk[\underline{z}] \subseteq S := A[\underline{x},\underline{x}^{-1}][g_1,\ldots,g_u] \subseteq T := A[\underline{x},\underline{x}^{-1}][y_1,\ldots,y_d],$$

$d \quad u \quad u \quad \frown \quad u$ 并设 $Y = \prod_{j=1} y_j, F = \prod_j$ $=1 f_j, G = \prod_{j=1} g_j$，以及 $F = \prod_{j=1} f_j$。

图顶端的等式 (1) 由 引理 3.3 推出，因为 $Y \in \sqrt{(g1,\ldots,g_u)\Bbbk[x,x^{-1}][y1,\ldots,y_d]}$，而 $\underline{x}_i$ 是单位元。

我们继续构造映射 ψ。包含关系 $S \subset T$ 诱导出一个 A-代数同态

$$\psi : \frac{S}{(\widetilde{b_1},\ldots,\widetilde{b_\ell}) :_S G^\infty} \longrightarrow \frac{T}{(\widetilde{b_1},\ldots,\widetilde{b_\ell}) :_T G^\infty}.$$

$\sim \quad \sim$ 我们断言 ψ 是单射。由于 G 模 $(b1,\ldots,b_\ell) :_S G^\infty$ 是非零因子，只需证明 $\psi \otimes_S S_G$ 是单射。设 $z'_i = z_{i,1} + g_1^{-1}\sum_{j=2}^{u} z_{i,j} g_j \in S_G$，其中 $1 \leqslant i \leqslant \ell$。注意，

$$\left((\widetilde{b_1},\ldots,\widetilde{b_\ell}) :_S G^\infty\right)_G = (\widetilde{b_1},\ldots,\widetilde{b_\ell})S_G = (z'_1,\ldots,z'_\ell)S_G$$

并且类似地

$$\left((\widetilde{b_1},\ldots,\widetilde{b_\ell}) :_T G^\infty\right)_G = (z'_1,\ldots,z'_\ell)T_G.$$

考虑这两个环

$$B := \Bbbk[\underline{x},\underline{x}^{-1}][\underline{g},G^{-1}][\{z_{i,j} \mid j \geqslant 2\}] \subseteq C := \Bbbk[\underline{x},\underline{x}^{-1}][\underline{y},G^{-1}][\{z_{i,j} \mid j \geqslant 2\}].$$

其中 $S_G = B[z'_1,\ldots,z'_\ell]$ 和 $T_G = C[z'_1,\ldots,z'_\ell]$，以及 $z'_1,\ldots,z'_\ell$ 是 B 和 C 上的变量。显然，

$$\frac{B[z'_1,\ldots,z'_\ell]}{(z'_1,\ldots,z'_\ell)} \hookrightarrow \frac{C[z'_1,\ldots,z'_\ell]}{(z'_1,\ldots,z'_\ell)},$$

这就证明了该断言。

接下来我们处理映射 φ。定义一个 A-代数映射

$$\varphi : \mathscr{F}[\underline{z}] \to S$$

由 $\varphi(f_i) = g_i$ 给出。为了证明 φ 定义良好，设 p 是一个系数属于 A 的多项式，满足 $p(f_1,\dots,f_u) = 0$，并固定 $\mathbf{w} = (w_1,\dots,w_d) \in \mathbb{N}^d$。令 $p_{\mathbf{w}}$ 为 p 中满足 $\deg(p'(f_1,\dots,f_u)) = \mathbf{w}$ 的各项 p' 之和。因此

$$p_{\mathbf{w}}(g_1,\dots,g_u) = \mathbf{y}^{\frac{\sum_i w_i}{\delta}\mathbf{v}-\mathbf{w}} p_{\mathbf{w}}(f_1,\dots,f_u) = 0.$$

我们得出 $p(g_1,\dots,g_u) = 0$，这表明 φ 是定义良好的。注意，$\varphi(b_i) = \sum z_{i,j} g_j = b_i$，因此 $\varphi(\mathscr{H}) \subseteq (b_1,\dots,b_\ell)$。于是，我们有 $\varphi(\mathscr{H} :_{\mathscr{F}[z]} F^\infty) \subseteq (b_1,\dots,b_\ell) :_S G^\infty$。现在，引理 3.3 表明 $\mathscr{H} :_{\mathscr{F}[z]} \mathscr{F}_+^\infty = \mathscr{H} :_{\mathscr{F}[z]} F^\infty$。由此可知，$\varphi$ 诱导出一个 A-代数同态

$$\overline{\varphi} : \frac{\mathscr{F}[z]}{\mathscr{H} : \mathscr{F}_+^\infty} \longrightarrow \frac{S}{(\widetilde{b_1},\dots,\widetilde{b_\ell}) : G^\infty}.$$

现在我们构造同构 ϕ。注意，$\widetilde{f_j} = a_j g_j$ 其中 $a_j = f^{-1} j \in k[x,x^{-1}]$ 是一个单位元，特别地，$\widehat{F}$ 等于 G 乘以 $k[x,x^{-1}]$ 中的一个单位元。现在

$$S = \Bbbk[\widehat{f_1},\dots,\widehat{f_u}][z][x,x^{-1}] = \mathscr{F}(\widehat{I})[z][x,x^{-1}].$$

考虑 S 作为 $k[g_1,\dots,g_u][x, x^{-1}]$ 上代数的自同构 ϕ，它将 $z_{i,j}$ 映射为 $a_j z_{i,j}$。注意，ϕ 将 $A[x, x^{-1}]$ 映射到自身，并将 $\widetilde{b}_i$ 映射为 $\widehat{b}_i := u\sum_{j=1} z_{i,j} \widehat{f}_j$。因此，$\phi$ 诱导出一个同构

$$\overline{\phi} : \frac{S}{(\widetilde{b_1},\dots,\widetilde{b_\ell}) : G^\infty} \longrightarrow \frac{\mathscr{F}(\widehat{I})[z]}{(\widehat{b_1},\dots,\widehat{b_\ell}) : \widehat{F}^\infty}[x,x^{-1}]$$

将 $A[x,x^{-1}]$ 的像映射到自身。

现在来处理映射 χ。回想一下，由图顶端的等式 (1) 可知 $(b_1,\dots,b_\ell) :_T Y^\infty = (b_1,\dots,b_\ell) :_T G^\infty$。因此，包含关系 $A[x,x^{-1}] \subseteq S \subseteq T$ 诱导出自然嵌入

$$\chi : \frac{A[x,x^{-1}]}{\left((\widetilde{b_1},\dots,\widetilde{b_\ell}) :_T Y^\infty\right) \cap A[x,x^{-1}]} \hookrightarrow \frac{S}{(\widetilde{b_1},\dots,\widetilde{b_\ell}) : G^\infty}.$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\left((\widetilde{b_1},\dots,\widetilde{b_\ell}) :_T Y^\infty\right) \cap A[x,x^{-1}] &= \left(\left((\widetilde{b_1},\dots,\widetilde{b_\ell}) :_{A[x,y]} Y^\infty\right) \cap A[x]\right) A[x,x^{-1}] \\ &= \operatorname{mono}(J) A[x,x^{-1}] = \mathscr{C} A[x,x^{-1}],\end{aligned}$$

其中倒数第二个等式由（5）得到。

我们接下来证明同构 Φ。由于同构 ϕ 将像 $A[x, x^{-1}]$ 映射到自身，因此该映射限制为一个同构

$$\Phi : \frac{A}{\mathscr{C}}[x,x^{-1}] \longrightarrow \frac{A}{\left((\widehat{b_1},\dots,\widehat{b_\ell}) : \widehat{F}^\infty\right) \cap A}[x,x^{-1}].$$

根据命题 5.2 (b)和引理 3.3，理想 $\left((\widehat{b}_1,\dots,\widehat{b}_\ell) :_{\mathscr{F}(\widehat{I})[z]} \widehat{F}^\infty\right) \cap A$ 由一个不可约多项式 q 生成。

最后，我们构造所需的映射 η。回忆一下，$(\mathscr{H}\colon \mathscr{F}_+^\infty)\cap A=(h)$ 由命题 5.2 (b)给出。由于φ是一个A-代数同态，它诱导出一个A-代数满同态

$$\eta:\frac{A}{(h)}\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow\frac{A}{\mathscr{C}}.$$

由此可得（h）$\subseteq\mathscr{C}$。另一方面，

$$\mathrm{ht}(\mathscr{C})=\mathrm{ht}\left(\mathscr{C}A[\underline{x},\underline{x}^{-1}]\right)=\mathrm{ht}\left(qA[\underline{x},\underline{x}^{-1}]\right)=\mathrm{ht}(q)=1,$$

其中第二个等式成立是因为存在同构 Φ。由于（h）是高度为 1 的素理想，我们得出 $\mathscr{C}=$（h），证明完毕。□

mono(J) 中系数理想的变化提供了一种区分 $\mathscr{M}$ 中单项式并可能筛选出相关单项式的方法：

讨论 5.8. 采用记号 5.6 和定理 5.7 中的假设。现在我们可以筛选出集合 $\mathscr{N}=\{\mathrm{x}^{\mathrm{v}_i}\in\mathscr{M}\mid\sqrt{\mathrm{C}_i}=(\mathrm{h})\}$ 中系数理想“极大”的单项式，并考虑“非极大”系数理想之和 $\mathscr{D}=\sum_i\mathrm{C}_i$，其中 $\mathrm{x}^{\mathrm{v}_i}$ 遍历集合 $\mathscr{M}\setminus\mathscr{N}$。注意，$\mathscr{N}$ 中的单项式生成猜想 5.5 中的理想 $\left(\mathrm{mono(J)}:_{R[z]}(\mathrm{h})^\infty\right)\cap\mathrm{R}$。

我们认为，理想 $\mathscr{D}$ 定义了 $\mathrm{A}_{\Bbbk}^{\ell u}$中的闭子集，它标识了描述分次核所需的“通常特殊”约化J_λ。也就是说，我们猜想：
(a) gradedcore(I) $=J_\lambda^{n+1}$：当$n\gg0$时，若 λ在$V(\mathscr{D})$中一般，则I^n。(b) gradedcore(I)可由一般极小约化的单项式部分与有限多个J_λ取交得到，其中 λ在$V(\mathscr{D})$中一般。

现在，我们用一个具体例子来验证 猜想 5.5 以及 讨论 5.8 中的猜想 (b)。

例 5.9。设 $\mathrm{I}=(\mathrm{x}_1^3,\mathrm{x}_1^2\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_1\mathrm{x}_3^2,\mathrm{x}_3^3)\subseteq\mathrm{R}=\mathrm{Q}[\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3]$如例 4.8 所示。回顾一下，gradedcore(I) 不是 I 的一般约化的有限交，也不是一般约化 K 的 mono(K)。然而，事实证明，gradedcore(I) 是 I 的特殊约化的有限交。

存在互素的非恒定多项式h 和g，它们属于 $\mathrm{Q}[z]$，使得

$$\mathrm{mono}(J)=(h)(x_1^2,x_1x_2,x_1x_3,x_2x_3,x_3^2)I+(hg)(x_1^2x_2^3,x_1x_2^2x_3^2,x_2^2x_3^3)=:(h)\mathfrak{A}+(hg)\mathfrak{B}.$$

根据命题 5.2 和定理 5.7，多项式 h 不可约，并定义了使 J_λ 不是 I 的约化的轨迹。正如我们在例 4.8 核$(I)\subseteq$分次核$(I)\subseteq\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=I\,\mathfrak{m}^2$ 所见。

由于 h和 g 互素，因此得到 (单项式部分$(J):(h)^\infty)\cap R=\mathfrak{A}$，其中 J如 记号 5.1 所述。因此，根据 $\mathfrak{A}\subseteq$分次核(I)，由 定理 5.4 可知。接下来我们寻找计算分次核所需的特殊约化。

使用 Macaulay 进行计算2 [20] 表明

$$g=z_{1,4}z_{2,3}z_{3,2}-z_{1,3}z_{2,4}z_{3,2}-z_{1,4}z_{2,2}z_{3,3}+z_{1,2}z_{2,4}z_{3,3}+z_{1,3}z_{2,2}z_{3,4}-z_{1,2}z_{2,3}z_{3,4}.$$

考虑

$$\underline{\lambda}_0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\quad\text{and}\quad\underline{\lambda}_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

那么 $\pi_{\underline{\lambda}_0}(g) = \pi_{\underline{\lambda}_1}(g) = 0$, $\pi_{\underline{\lambda}_0}(h) \neq 0$，并且 $\pi_{\underline{\lambda}_1}(h) \neq 0$。因此，这些理想

$$J_{\underline{\lambda}_0} = (x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_3^2 + x_3^3) \quad \text{and} \quad J_{\underline{\lambda}_1} = (x_1^3, x_1^2x_2 + x_1x_3^2, x_3^3)$$

是I的特殊约化。因此

$$\mathfrak{A} \subseteq \operatorname{gradedcore}(I) \subseteq I\mathfrak{m}^2 \cap \operatorname{mono}(J_{\underline{\lambda}_0} \cap J_{\underline{\lambda}_1}) = \mathfrak{A},$$

其中 $\operatorname{mono}(-)$是使用 Macaulay2 中的命令 `monomialSubideal` 计算得到的。由此可得 $\operatorname{gradedcore}(I) = \mathfrak{A}$，这验证了猜想 5.5。

下面的定理给出了一个实例：在没有任何剩余条件的情况下，分次核等于一般极小约化的单项式部分。

定理 5.10. 根据 记号 *5.6*，若 $\sqrt{C_i} = \mathscr{C}$对每个 i 都成立，则 分次核(I) = 单项式部分$(J_{\underline{\lambda}})$对一般的 $\underline{\lambda}$成立。

证明。 该假设意味着 $\mathscr{M} = \mathscr{N}$对于 $\mathscr{M}$ 以及 $\mathscr{N}$讨论 5.8中的 。现在我们使用以下包含关系

$$(\mathscr{N}) = \left(\operatorname{mono}(J) :_{R[z]} (h)^{\infty}\right) \cap R \subseteq \operatorname{gradedcore}(I) \subseteq \operatorname{mono}(J_{\underline{\lambda}}) = (\mathscr{M})$$

由讨论 5.8、定理 5.4以及记号 5.6. □

6. 字典序分段理想的核

本节研究一类特殊单项式理想——字典序分段理想的核。全文中，R表示域 k 上的多项式环 $k[x1, \ldots, x_d]$，而I表示一个齐次理想。

我们先回顾一些关于字典序分段理想的基本事实；详尽论述参见 [43] 或[21]。令 H_M 表示有限生成分次 R-模 M 的希尔伯特函数。记 $R = \bigoplus_{i\geqslant 0} R_i$，并考虑满足 $x_1 > x_2 > \cdots > x_d$ 的字典序单项式序。令 L_i 为 R_i中由最大的 $H_I(i)$ 个单项式生成的子空间，并令 $L = \bigoplus_{i\geqslant 0} L_i$. 。向量空间 L 是一个理想，以此方式构造的任意理想都称为字典序分段理想。字典序分段理想是强稳定的，即若 $u \in L$ 是一个单项式，且对某个 j 有 $x_j | u$，则对每个 $i < j$，都有 $x^i u\, x\, j \in L$。然而，也存在不是字典序分段理想的强稳定理想。

本节旨在探讨以下猜想。

猜想 6.1。 设 $R = \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_d]$ 是域$\mathbb{k}$上的特征零多项式环，且$\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_d)$ 是 R 的齐次极大理想。若 L 是高度为 $g \geqslant 2$且由次数为 $\delta \geqslant 2$的元素生成的字典序分段理想，则

$$\operatorname{core}(L) = L\mathfrak{m}^{d(\delta-2)+g-\delta+1}.$$

注 6.2. 有充分证据支持这一猜想。 $\delta = 2$ 的情形已在 [50,定理 5.1], 中证明，而 $g = d$ 的情形，即 I 是 $\mathfrak{m}$的幂，已在 [10, 命题 4.2]中证明。$d \leqslant 3$ 的情形即为推论 6.14。此外，我们还用 Macaulay2 [20]验证了大量情形。事实上，我们基于定理 4.7、命题 6.5 和注 6.10 开发了一种算法，在以下情形下对每个字典序分段理想检验了该猜想：$d = 4$ 且 $\delta \leqslant 12$；$d = 5$ 且 $\delta \leqslant 5$；$d = 6$ 且 $\delta \leqslant 3$。此外，在定理 6.9、定理 6.11 和定理 6.13 中，我们还得到了关于该猜想的其他部分结果。

对于单项式理想 $I \subset R = k[x1, \ldots, x_d]$，我们用 Γ(I)表示 I 中单项式的集合，用 G(I) 表示 I 的单项式生成元的极小集合 $\{x^{v_1}, \ldots, x^{v_u}\}$。对于 R 中的单项式集合 W，我们用 $\log(W) \subseteq N^d$ 表示 W 中单项式的指数集合。对于 $w = (w1, \ldots, w_d) \in N^d$，我们将 min(w) 和 max(w) 分别定义为满足 $w_i \neq 0$ 的最小和最大 i；此外，我们还令 $|w| = \sum_i w_i$。

本节主要结果的证明需要以下技术性结果。第一个结果给出了强稳定理想的解析扩张度和高度的刻画。

命题 6.3. 设 $R = \Bbbk[x_1, \ldots, x_d]$ 是域 $\Bbbk$ 上的多项式环，I 是一个强稳定理想。
$(a)\, \mathrm{ht}(I) = \max\{\min(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in \log(G(I))\}.(b)$ 此外，
若 I 由同一次数的元素生成，则

$$\ell(I) = \max\{\max(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in \log(G(I))\}.$$

证明。为证明 (a) 部分，令 $r = \max\{\min(v) \mid v \in \log(G(I))\}$。显然 $I \subseteq (x1, \ldots, x_r)$，因此 $\mathrm{ht}(I) \leqslant r$。另一方面，取 $\mathfrak{p} \in V(I)$，并令 $v \in \log(G(I))$。若 $i \leqslant \min(v)$，则由于 I 是强稳定理想，$x^{|v|} i \in I$。因此，对于每个 $1 \leqslant i \leqslant r$，都有 $x_i \in \mathfrak{p}$，结论得证。

现在证明 (b) 部分。令 $s = \max\{\max(v) \mid v \in \log(G(I))\}$。注意，G(I) 由变量 $x1, \ldots, x_s$ 的单项式部分组成。因此 $\ell(I) \leqslant s$。另一方面，由于 I 是强稳定的，且由同一次数的元素生成，设该次数为 δ，可知 $x_1^{\delta-1}(x1, \ldots, x_s) \subseteq I$。因此 $\ell(I) = \mathrm{trdeg}_{\Bbbk}(k[I_\delta]) \geqslant \mathrm{trdeg}_{\Bbbk}\left(k[x_1^{\delta-1}x1, \ldots, x_1^{\delta-1} x_s]\right) = s$。□

注 6.4。若 L 是高度为 $g \geqslant 2$ 且由次数为 $\delta \geqslant 2$ 的元素生成的字典序分段理想，则 $\ell(L) = d$，且 L 的最小生成元个数至少为 $d + 1$。事实上，在这种情况下，$x_2^{\delta} \in L$，进而 $x_1^{\delta-1}(x1, \ldots, x_d) \subset L$。关于 $\ell(L)$ 的结论现在可由命题 6.3 (b) 得出。

下面的命题使我们能够利用 [9] 和 [44] 的结果来计算字典序分段理想的核。证明中的一些技巧源自 [50, 定理 3.3]。回顾一下，高度为 g 的理想 I 若满足 AN_s^-，其中 s 为整数，是指对每个满足 $g \leqslant i \leqslant s$ 的 i，以及 I 的每个几何 i-余剩交 K，环 R/K 都是 Cohen-Macaulay。注意，如果 $I_{\mathfrak{p}}$ 对每个 $\mathfrak{p} \in V(I)$ 都满足 AN_s^-，那么 I 满足 AN_s^-。

令 $a1, \ldots, a_n$ 为 R 中的齐次元素，I 为它们生成的理想。记 H_i 为 i^{th} 阶 Koszul 同调，对应于 $a1, \ldots, a_n$。若对每个 i，都有 $\mathrm{depth}(H_i) \geqslant d - n + i$，则理想 I 满足滑动深度 条件；这里采用约定 $\mathrm{depth}(0) = \infty$（见 [24]）。

命题 6.5. 设 $R = \Bbbk[x_1, \ldots, x_d]$ 是域 $\Bbbk$ 上的多项式环，$\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_d)$ 是 R 的极大齐次理想，L 是一个字典序分段理想。那么 $L^{\mathrm{sat}} = L : \mathfrak{m}^{\infty}$ 满足 G_∞、滑动深度和 AN_{d-1}^-。此外，L 满足 G_d 和 AN_{d-1}^-。

证明。我们可以假设 $L \neq 0$ 且 $L \neq R$。令 $g = \mathrm{ht}(L)$。我们断言，L^{sat} 满足 G_∞ 和滑动深度。设 δ 为 L 的单项式生成元的最大次数。我们对 δ 使用归纳。若 $\delta = 1$，则 $L = (x1, \ldots, x_g)$，断言显然成立。假设 $\delta \geqslant 2$，且对于所有由次数小于 δ 的单项式生成的字典序分段理想，断言均成立。我们可以假设 $g < d$，否则 $L^{\mathrm{sat}} = R$。令 $S := k[x_g, \ldots, x_d]$。根据命题 6.3 (a)，可将 L 写成 $L = I + x_g L'$，其中 I 和 L' 是某些理想，满足 $I \subseteq (x1, \ldots, x_{g-1})$，$L'$ 的生成元只涉及变量 $x_g, \ldots, x_d$，且 $L' \cap S$ 是 S 中由次数小于

δ 生成的字典序分段理想。显然，$x_g^\delta \in L$，于是 $(x1,\dots,xg-1)\mathfrak{m}^{\delta-1} \subseteq I$。我们得出

$$(x_1,\dots,x_{g-1})\mathfrak{m}^{\delta-1} + x_g L' \subseteq L \subseteq (x_1,\dots,x_{g-1}) + x_g L'.$$

因此

$$\begin{aligned} L^{\mathrm{sat}} &= (x_1,\dots,x_{g-1}) + \big((x_g L' \cap S) :_S (x_g,\dots,x_d)^\infty\big)R \\ &= (x_1,\dots,x_{g-1}) + x_g\big((L' \cap S) :_S (x_g,\dots,x_d)^\infty\big)R \quad \text{since } g < d. \end{aligned}$$

由归纳假设可知，$\mathrm{L}^{\mathrm{sat}}$ 满足 G_∞。现在，由于 $\mathrm{x1},\dots,\mathrm{x}_{g-1}$ 是一个正则序列，且 $\mathrm{L}^{\mathrm{sat}}$ 在 $\mathrm{S} \cong \mathrm{R}/(\mathrm{x1},\dots,\mathrm{x}_{g-1})$ 中的像是 $\mathrm{x}_g\big((\mathrm{L}' \cap \mathrm{S}) :_S (\mathrm{x}_g,\dots,\mathrm{x}_d)^\infty\big)$，根据引理 3.5]，理想 $\mathrm{L}^{\mathrm{sat}}$ 满足滑动深度，当且仅当 $\mathrm{x}_g\big((\mathrm{L}' \cap \mathrm{S}) :_S (\mathrm{x}_g,\dots,\mathrm{x}_d)^\infty\big)$ 满足滑动深度。由于 x_g 是一个正则元，后者等价于 $((\mathrm{L}' \cap \mathrm{S}) :_S (\mathrm{x}_g,\dots,\mathrm{x}_d)^\infty)$ 满足滑动深度。结论现由归纳假设得出。

现在，对每个 $\mathfrak{p} \in V(L^{\mathrm{sat}})$，理想 $L_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{sat}}$都满足 G_∞和滑动深度。由 [24, 定理 3.3]可知，该理想是 AN_{d-1}^-。因此，L^{sat} 满足AN_{d-1}^-。

注意，理想L 和L^{sat} 在每个素理想 $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$处局部相等。因此，性质$G_d$从$L^{\mathrm{sat}}$ 传递到L。根据 [53, 注 1.12]，性质AN_{d-1}^- 从$L_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{sat}}$传递到$L^{\mathfrak{p}}$，因为这两个理想在余维$d-1$处局部相同。因此，$L$ 满足AN_s^-。□

设R 是一个 Cohen-Macaulay *局部环，且具有分次典范模 ω_R（参见 [7, 第 3 节6]）。对于分次R-模M，我们用$M^\vee = \mathrm{Hom}_R(M\ \omega_R)$表示$M$的 ω-对偶。以下命题及其证明实质上已包含在 [53, 引理 2.1] 中（另见 [8, 引理 4.9]），这里给出其分次版本。

命题 6.6。设 R 是 *Cohen-Macaulay* *局部环，具有分次典范模 ω_R。设 I 是齐次理想。设 $x \in I$ 是齐次正则元，且 $J = (x) : I$。那么

$$\omega_{R/J} \cong \big((I\omega_R)^{\vee\vee}/x\omega_R\big)(\deg(x)).$$

证明。我们不妨假设 $J \neq R$。存在齐次同构

$$\begin{aligned} J &= x(R :_{\mathrm{Quot}(R)} I) \\ &\cong x\,\mathrm{Hom}_R\big(I, R\big) \\ &\cong x\,\mathrm{Hom}_R\big(I, \mathrm{Hom}_R(\omega_R, \omega_R)\big) \\ &\cong x\,\mathrm{Hom}_R\big(I \otimes_R \omega_R, \omega_R\big) \\ &\cong x\,\mathrm{Hom}_R\big(I\omega_R, \omega_R\big), \qquad \text{因为 } \mathrm{Ker}\,(I \otimes_R \omega_R \twoheadrightarrow I\omega_R) \text{ 是挠。} \end{aligned}$$

由此可得 $J \cong x(I\omega_R)^\vee$，因此

$$J^\vee \cong \big(x(I\omega_R)^\vee\big)^\vee \cong x^{-1}(I\omega_R)^{\vee\vee}. \tag{7}$$

对正合列取对偶

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow R \longrightarrow R/J \longrightarrow 0,$$

到 ω_R 中，可得到一个正合列

$$\mathrm{Hom}_R(R/J, \omega_R) \longrightarrow R^\vee \longrightarrow J^\vee \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(R/J, \omega_R) \longrightarrow 0. \tag{8}$$

Sinc高 $\mathrm{ht}(J)=1$ 我们有 $\mathrm{Hom}_R(R/J\ \omega_R)=0$ 以及 $\mathrm{Ext}^1_R(R/J\ \omega_R)\cong\omega_{R/J}$。因此 (7) 和 (8) 给出

$$0\longrightarrow\omega_R\longrightarrow x^{-1}(I\omega_R)^{\vee\vee}\longrightarrow\omega_{R/J}\longrightarrow 0.$$

因此

$$\omega_{R/J}\cong\left(x^{-1}(I\omega_R)^{\vee\vee}\right)/\omega_R\cong\left((I\omega_R)^{\vee\vee}/x\omega_R\right)(\deg(x)),$$

如所需。 □

对于分次模 $M=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}M_i$，我们用 indeg(M) 表示M的初始次数，即 $\mathrm{indeg}(M)=\inf\{i\mid M_i\neq 0\}$.

引理 6.7. 设 R 是域 $\Bbbk$ 上的标准分次 *Cohen–Macaulay* 环，且$\dim(R)=d$，ω_R 为 R 的分次典范模，I 为齐次理想。假设 I 满足 G_{d-1} 且弱$(d-2)$-剩余 S_2。设 n 和 $\delta\geqslant 0$ 为整数，并考虑以下命题：

(i) $\mathrm{indeg}\left(\omega_{R/((a_1,\dots,a_{d-1}):\ I)}\right)\geqslant -n$ 对某个$(d-1)$-剩余交成立

$$(a_1,\dots,a_{d-1}):I$$

I 中使每个 a_i 都是次数为 δ 的齐次元，

(ii) 最小次数$\left(\omega_{R/((a_1,\dots,a_{d-1}):\ I)}\right)\geqslant -n$ 对每个 $(d-1)$-剩余交

$$(a_1,\dots,a_{d-1}):I$$

I 中使每个 a_i 都是次数为 δ 的齐次元，

(iii) 最小次数$\left(\omega_{R/((a_1,\dots,a_d):\ I)}\right)\geqslant -n$ 对每个 d-剩余交

$$(a_1,\dots,a_d):I$$

I 中使每个 a_i 都是次数为 δ 的齐次元。

那么，(i) 等价于(ii)。此外，若最小次数$(I)\geqslant\delta$，则(ii) 推出(iii)。

证明。 对于诺特分次 k-代数T，我们用 $\mathrm{HS}_T(t)$ 表示T的希尔伯特级数。我们可以假设域 k 是无限的。

(i) $\Rightarrow$(ii)：令 $\mathrm{a}=\{\mathrm{a1},\dots,\mathrm{a}_{d-1}\}$，并令 $\mathrm{R}=\mathrm{R}/((\mathrm{a}):\mathrm{I})$。由于 R 是一维 Cohen-Macaulay（见 [8, 命题 3.4 (a)]），我们可以写成 $\mathrm{HS}_R(\mathrm{t})=\mathrm{Q}_R(\mathrm{t})\,1-\mathrm{t}$，其中 $\mathrm{Q}_R(\mathrm{t})\in\mathrm{Z}[\mathrm{t}]$。由 [7, 推论 4.4.6 (a)]及 (i) 中的假设，可得

$$\deg\left(Q_{\overline{R}}(t)\right)=1-\mathrm{indeg}\left(\omega_{\overline{R}}\right)\leqslant 1+n. \tag{9}$$

由 [8, 命题 3.1 和定理 2.1 (b)], $\mathrm{HS}^{R/((a):I)}(t)$ 对于每个 $(d-1)$-剩余交$((a):I)$ 都相同，其中 I 的每个a_i 都是次数为 δ的齐次元。现在再次应用 (9)即可得出结论。

(ii) $\Rightarrow$(iii)：我们假设 $\mathrm{indeg(I)}\geqslant\delta$。令 $(\mathrm{a},\mathrm{a}_d):\mathrm{I}=(\mathrm{a1},\dots,\mathrm{a}_{d-1},\mathrm{a}_d):\mathrm{I}$ 为 I 的一个 d-剩余交。由 [53, 推论 1.6 (a)]，我们可以假设 $(\mathrm{a}):\mathrm{I}$ 是 I 的一个几何 $(\mathrm{d}-1)$-剩余交。用 $\mathrm{R}=\mathrm{R}/((\mathrm{a}):\mathrm{I})$ 表示像。由 [8, 命题 3.1、命题 3.3 和引理 2.4 (b)] 可知，R 是一维 Cohen-Macaulay 环，$\mathrm{a}_d\in\mathrm{I}$ 是 R 中次数为 δ 的齐次 R-正则元，并且 $(\mathrm{a},\mathrm{a}_d):_R\mathrm{I}=(\mathrm{a}_d):_R\mathrm{I}$。因此，由命题 6.6 以及 I ω_R 是极大

Cohen-Macaulay$R$-模，我们有

$$\omega_{R/((\underline{a},a_d):I)} = \omega_{\overline{R}/((\overline{a_d}):\overline{I})} \cong \left((I\omega_{\overline{R}})^{\vee\vee}/a_d\omega_{\overline{R}}\right)(\delta) \cong (I\omega_{\overline{R}}/a_d\omega_{\overline{R}})(\delta),$$

其中 $(-)^{\vee} = \mathrm{Hom}_R(-,\ \omega_R)$。因此，$\mathrm{indeg}\left(\omega_{R/((a,a_d):I)}\right) \geqslant -n$正如所需。 □

注 6.8. 设$R = \mathrm{k}[x1,\ldots,x_d]$是域 k 上的多项式环，且$L$是高度为$g$、由次数为 δ的元素生成的字典序分段理想。设$R' = \mathrm{k}[x1,\ldots,x_{d-1}]$。那么$L \cap R'$是$R'$的一个字典序分段理想，由次数为 δ的元素生成，且 $\mathrm{ht}\,(L') = \min\{g, d-1\}$。

证明。若 $\mathrm{g} = \mathrm{d}$，则 $\mathrm{L} = (\mathrm{x1},\ldots,\mathrm{x}_d)^{\delta}$，结论显然成立。因此，我们可以假设 $\mathrm{g} < \mathrm{d}$。令$\{\mathrm{x}^{\mathrm{v}_1},\ldots,\mathrm{x}^{\mathrm{v}_u}\}$ 为 L 的最小单项式生成集。因此，$\mathrm{L} \cap \mathrm{R}'$ 由满足 $\mathrm{x}_d \nmid \mathrm{x}^{\mathrm{v}_i}$ 的单项式 $\mathrm{x}^{\mathrm{v}_i}$ 生成，故它是 R' 的一个字典序分段理想。最后，由命题 6.3 (a)，我们有 $\mathrm{ht}(\mathrm{L}') = \mathrm{g}$。 □

下面我们将以完全一般的情形证明猜想 6.1 的一个包含关系。

定理 6.9. 设 $R = \mathbb{k}[x_1,\ldots,x_d]$ 是无限域$\mathbb{k}$上的多项式环，且 $\mathfrak{m} = (x_1,\ldots,x_d)$ 是 R 的极大齐次理想。若 L 是高度为 $g \geqslant 2$、由次数为 $\delta \geqslant 2$的元素生成的字典序分段理想，则

$$L\mathfrak{m}^{d(\delta-2)+g-\delta+1} \subseteq \mathrm{core}(L).$$

证明. 回顾命题6.5 可知，理想L 满足G_d 和AN^-_{d-1}。根据推论 3.12，core(L)是有限多个约化的交，这些约化是相对于L的一个生成集而言，由L 中的d 个一般元素生成的，且该生成集包含于L_δ。设$a = a1,\ldots,a_d$为这类一般元素。要证明定理中的结论，只需证明 $\mathfrak{m}^{d(\delta-2)+g-\delta+1} \subseteq (a) : L$。这等价于

$$H_{R/((\underline{a}):L)}(n) = 0 \quad \text{for every } n \geqslant d(\delta-2)+g-\delta+1. \tag{10}$$

由于 L 是 G_d，根据 [46, 引理 3.1 (a)] 和备注 6.4，$(\underline{\mathrm{a}}) : \mathrm{L}$ 是 L 的一个 d-剩余交。因此，环 $\mathrm{R}/((\mathrm{a}) : \mathrm{L})$ 是 Artin 环。于是 (10) 等价于 $\mathrm{indeg}(\omega_{R/((a):L)}) \geqslant -(\mathrm{d}(\delta-2) + \mathrm{g} - \delta)$。

我们声称存在 L 的一个 $(\mathrm{d}-1)$-剩余交 $(\mathrm{b1},\ldots,\mathrm{b}_{d-1}) : \mathrm{L}$，使得每个 b_i都是次数为 δ的齐次元素，且 $\mathrm{indeg}\left(\omega_{R/((b_1,\ldots,\mathrm{b}_{d-1}):\mathrm{L})}\right) \geqslant -\left(\mathrm{d}(\delta-2) + \mathrm{g} - \delta\right)$。由此断言以及引理 6.7 中的蕴含 (i) $\Rightarrow$ (iii) 可得结论。

现在，我们通过对 $\sigma(L) = d - g \geqslant 0$进行归纳来证明这一断言。如果 $\sigma(L) = 0$，那么 $L = \mathfrak{m}^{\delta}$，取 $b_i = x_i^{\delta}$即可使对每个 i 该断言成立（见 [7, 推论 3.6。14]）。

对于归纳步骤，假设 $\sigma(\mathrm{L}) > 0$，并令 $\mathrm{R}' = \mathrm{k}[\mathrm{x1},\ldots,\mathrm{x}_{d-1}]$，且 $\mathrm{L}' = \mathrm{L} \cap \mathrm{R}'$。根据注 6.8，理想 L'是一个高度为 g、由次数为 δ 的元素生成的字典序分段理想。特别地，$\sigma(\mathrm{L}') = \mathrm{d} - 1 - \mathrm{g} < \sigma(\mathrm{L})$。根据归纳假设，存在一个 $(\mathrm{d}-2)$-剩余交 $(\mathrm{b}) :_{R'} \mathrm{L}' = (\underline{\mathrm{b}}1,\ldots,\mathrm{b}_{d-2}) :_{R'} \mathrm{L}'$，使得每个 b_i都是次数为 δ的齐次元素，并且

$$\mathrm{indeg}\left(\omega_{R'/((\underline{b}):_{R'}L')}\right) \geqslant -\left((d-1)(\delta-2)+g-\delta\right). \tag{11}$$

因此，$\Rightarrow$引理 6.7 中的引理 6.7 表明，每个$(d-2)$-剩余交$(b) :_{R'} L'$，只要其中每个b_i 都是次数为 δ 的齐次多项式，就具有这一性质。因此，我们可以选择该剩余交为几何余交；根据命题 6.5和 [53, 引理 1 的证明4]。

为了回到L，我们考虑其饱和L^{sat}，并记$(L^{\mathrm{sat}})' = L^{\mathrm{sat}} \cap R'$。由 [14, 命题 15。24] 可得$L^{\mathrm{sat}} = L : (x_d)^{\infty}$，因此，$L^{\mathrm{sat}}$ 的极小单项式生成元都不能被x_d整除，即:

$$L^{\mathrm{sat}} = (L^{\mathrm{sat}})' R. \tag{12}$$

由 命题 6.5，L^{sat} 满足 G_∞ 和 AN^-_{d-1}，因此 $(L^{\mathrm{sat}})'$也满足。齐次包含关系$(L^{\mathrm{sat}})'/L' \hookrightarrow L^{\mathrm{sat}}/L$ 意味着 $(L^{\mathrm{sat}})'/L'$ 的希尔伯特函数最终为零，因此

$$\operatorname{ht}\left(L' :_{R'} (L^{\mathrm{sat}})'\right) \geqslant d-1\,. \tag{13}$$

注意，$(\mathrm{b}) :_{R'} (\mathrm{L}^{\mathrm{sat}})' \subset (\mathrm{b}) :_{R'} \mathrm{L}'$。由于 $(\mathrm{b}) :_{R'} \mathrm{L}'$ 是一个几何 $(\mathrm{d}-2)$-剩余交，(13) 蕴含 $(\mathrm{b}) :_{R'} (\mathrm{L}^{\mathrm{sat}})'$ 是一个几何 $(\mathrm{d}-2)$-剩余交。根据 [53, 命题1.7 (a)]，理想 $(\mathrm{b}) :_{R'} (\mathrm{L}^{\mathrm{sat}})'$ 是高度为 $\mathrm{d}-2$ 的无混合理想。因此，由 (13)

$$(\underline{b}) :_{R'} (L^{\mathrm{sat}})' = (\underline{b}) :_{R'} L'. \tag{14}$$

令其表示环 $\mathrm{R}' = \mathrm{R}'/((\mathrm{b}) :_{R'} (\mathrm{L}^{\overline{\mathrm{sat}}})') = \mathrm{R}'/((\mathrm{b}) :_{R'} \mathrm{L}')$ 中的像。注意，R' 是维数为一的 Cohen-Macaulay 环。由于 $(\mathrm{b}) :_{R'} \mathrm{L}'$ 是 L' 的一个几何 $(\mathrm{d}-2)$-剩余交，我们有 $\operatorname{ht}(\mathrm{L}') = 1$。因此，存在一个 R'-正则元 $\mathrm{b}_{d-1} \in \mathrm{L}'_{\delta}$。于是由 (14)，理想 $(\mathrm{b}, \mathrm{b}_{d-1}) :_{R'} (\mathrm{L}^{\mathrm{sat}})'$是一个 $(\mathrm{d}-1)$-剩余交。由 [53, 命题1.7(f)] 可知，$(\mathrm{b}, \mathrm{b}_{d-1}) :_{R'} (\mathrm{L}^{\mathrm{sat}})' = (\mathrm{b}_{d-1}) :_{R'} (\mathrm{L}^{\mathrm{sat}})'$。此外，$(\mathrm{L}^{\mathrm{sat}})'\omega_{R'}$ 是一个极大 Cohen-Macaulay R'-模。因此，命题 6.6 蕴含

$$\omega_{R'/((\underline{b}, b_{d-1}) :_{R'} (L^{\mathrm{sat}})')} \cong \left((L^{\mathrm{sat}})'\omega_{\overline{R'}}/b_{d-1}\omega_{\overline{R'}}\right)(\delta).$$

由 (12)可知

$$\omega_{R/((\underline{b}, b_{d-1}) :_R L^{\mathrm{sat}})} \cong \omega_{R'/((\underline{b}, b_{d-1}) :_{R'} (L^{\mathrm{sat}})')} \otimes_{R'} R(-1)\,.$$

因此

$$\begin{aligned}
\operatorname{indeg}\left(\omega_{R/((\underline{b}, b_{d-1}) :_R L^{\mathrm{sat}})}\right) &= \operatorname{indeg}\left(\omega_{R'/((\underline{b}, b_{d-1}) :_{R'} (L^{\mathrm{sat}})')}\right) + 1 \\
&= \operatorname{indeg}\left(\left((L^{\mathrm{sat}})'\omega_{\overline{R'}}/b_{d-1}\omega_{\overline{R'}}\right)(\delta)\right) + 1 \\
&\geqslant \operatorname{indeg}\left(\omega_{\overline{R'}}\right) - \delta + 2 \\
&\geqslant -((d-1)(\delta-2) + g - \delta) - \delta + 2 \qquad \text{by (11)} \\
&= -(d(\delta-2) + g - \delta)\,.
\end{aligned}$$

最后，由于 $(\mathrm{b}, \mathrm{b}_{d-1}) :_{R'} (\mathrm{L}^{\mathrm{sat}})'$ 是一个 $(\mathrm{d}-1)$-剩余交，(12) 表明 $(\mathrm{b}, \mathrm{b}_{d-1}) :_R \mathrm{L}^{\mathrm{sat}}$ 是一个 $(\mathrm{d}-1)$-剩余交。根据命题1.7 (a)]，，这个理想是高度为 $\mathrm{d}-1$ 的无混合理想 [53,，并且 $\operatorname{ht}(\mathrm{L} :_R \mathrm{L}^{\mathrm{sat}}) \geqslant \mathrm{d}$。因此，$(\mathrm{b}, \mathrm{b}_{d-1}) :_R \mathrm{L}^{\mathrm{sat}} = (\mathrm{b}, \mathrm{b}_{d=1}) :_R \mathrm{L}$ 是 L 的一个 $(\mathrm{d}-1)$- 剩余交，证明完毕。□

注 6.10. 我们指出，为了证明定理 6.9 中的反向包含，若 k 是特征为零的域，只需证明对于 L 的某个约化 J，有 $\mathrm{x}_1^{d(\delta-2)+g} \notin \mathrm{J}$。为此，注意到 $\mathrm{L} \cap \mathfrak{m}^{d(\delta-2)+g+1} = \mathrm{L}\,\mathfrak{m}^{d(\delta-2)+g-\delta+1}$，因为 L 是由次数 δ 的元素生成的。因此，只需证明 $\operatorname{core}(\mathrm{L}) \subseteq \mathfrak{m}^{d(\delta-2)+g+1}$。由于 core(L) 是一个强稳定单项式理想 [50,，根据命题 2.3],，这个包含关系等价于 $\mathrm{x}_1^{d(\delta-2)+g} \notin \operatorname{core}(\mathrm{L})$。

接下来的两个定理在某些特定情况下解决了 猜想 6.1 。在第一个定理中，我们证明，对于固定的 猜想 6.1 ，最小和最大的字典序分段理想都成立，其中 d、g 和 δ。

定理 6.11。 设 $R = \Bbbk[x_1, \ldots, x_d]$ 是域 $\Bbbk$ 上特征零的多项式环，且$\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_d)$ 是 R 的极大齐次理想。设 g 和 δ是满足 $2 \leqslant g \leqslant d$ 且$\delta \geqslant 2$的整数。令 L 为以下字典序分段理想之一

(1) $(x_1, \ldots, x_{g-1})\mathfrak{m}^{\delta-1} + (x_g)^{\delta}$,
或(2) $(x_1, \ldots, x_g)\mathfrak{m}^{\delta-1}$。
那么 核$(L) = L\,\mathfrak{m}^{d(\delta-2)+g-\delta+1}$.

证明定理 6.11.

引理 6.12. 设 $R = \Bbbk[x_1, \ldots, x_d]$ 是域$\Bbbk$上的多项式环，其中 k 的特征为零，L 是由次数为 $\delta \geqslant 2$ 的字典序分段理想生成的。若 J 是 L 的任意约化，则对每个 $n \geqslant 0$，都有

$$\operatorname{core}(L) \subseteq J^{n+1} : L^n.$$

证明。由于根据命题 6.5，L 满足 G_d 和 AN^-_{d-1}，由推论 3.10，只需证明对每个 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ 以及 $L_{\mathfrak{p}}$ 的每个约化 K，都有 $\operatorname{core}(L_{\mathfrak{p}}) \subseteq K^{n+1} :_{R_{\mathfrak{p}}} L^n_{\mathfrak{p}}$。我们还可进一步假设 K 是 $L_{\mathfrak{p}}$ 的极小约化，因此尤其有 $\mu(K) \leqslant \dim(R_{\mathfrak{p}})$。根据 [53, Lemma 1.10 (b)]，理想 $L_{\mathfrak{p}}$ 满足 G_d 和 AN^-_{d-1}；根据 [36, Remark 2.7]，有 $\operatorname{ht}(K :_{R_{\mathfrak{p}}} L_{\mathfrak{p}}) \geqslant \dim(R_{\mathfrak{p}})$。因此 K 满足 G_∞。于是根据 [53, 注 1.12 和推论 1.8 (c)], , K 满足滑动深度。现在， [44,Theorem 4.4] 的证明表明，对所有 $n \geqslant 0$

$$\operatorname{core}(L_{\mathfrak{p}}) \subseteq K^{n+1} :_{R_{\mathfrak{p}}} \sum_{y \in L_{\mathfrak{p}}} (K, y)^n = K^{n+1} :_{R_{\mathfrak{p}}} L^n_{\mathfrak{p}},$$

其中，最后一个等式成立，是因为 k 的特征为零，因此 $L^n_{\mathfrak{p}} = \sum_{y \in L_{\mathfrak{p}}} (y^n)$。 □

*Proo*定理定理 *6.11*。记 $L_1 = (x_1, \ldots, x_{g-1})\mathfrak{m}^{\delta-1} + (x_g^{\delta})$ 以及 $L_2 = (x_1, \ldots, x_g)\mathfrak{m}^{\delta-1}$。令 t

$$J_1 = (x_1^{\delta}, \ldots, x_g^{\delta}) + (x_1, \ldots, x_{g-1})(x_{g+1}^{\delta-1}, \ldots, x_d^{\delta-1}), \text{ and}$$
$$J_2 = (x_1^{\delta}, \ldots, x_g^{\delta}) + (x_1, \ldots, x_g)(x_{g+1}^{\delta-1}, \ldots, x_d^{\delta-1}).$$

我们断言 J_1 是 L_1 的一个约化，且 J_2 是 L_2的一个约化。为此，注意到根据 [31, 命题 8.1.7]，理想 $(x1, \ldots, x_{g-1})(x_1^{\delta-1}, \ldots, x_d^{\delta-1}) + (x_g^{\delta})$ 是L_1,的一个约化，而这个理想等于

$$(x_1, \ldots, x_{g-1})(x_1^{\delta-1}, \ldots, x_g^{\delta-1}) + (x_g^{\delta}) + (x_1, \ldots, x_{g-1})(x_{g+1}^{\delta-1}, \ldots, x_d^{\delta-1}).$$

显然，理想 $(x_1^{\delta}, \ldots, x_g^{\delta})$ 是理想 $(x1, \ldots, x_{g-1})(x_1^{\delta-1}, \ldots, x_g^{\delta-1}) + (x_g^{\delta}) \subset (x1, \ldots, x_g)^{\delta}$的一个约化。因此，根据 [31, 命题 8.1.7] 以及约化的传递性，我们再次得出，J_1 是L_1的一个约化。同理，J_2 是L_2的一个约化。

现在由注 6.10 和引理 6.12，只需证明 $x_1^{d(\delta-2)+g} \notin J_1^d$: L_1^{d-1} 和 $x_1^{d(\delta-2)+g} \notin J_2^d$: L_2^{d-1}。令 $\alpha = x_1^{2d-g-1} x_2^{\delta-1} \cdots x_g^{\delta-1} x_{g+1}^{\delta-2} \cdots x_d^{\delta-2}$，并注意到 $\alpha \in L_1^{d-1} \subseteq L_2^{d-1}$。现在我们证明 $x_1^{d(\delta-2)+g}\alpha \notin J_2^d$，从而 $x_1^{d(\delta-2)+g}\alpha \notin J_1^d$，这就完成了证明。事实上，反设

$$\beta := x_1^{d(\delta-2)+g}\alpha = x_1^{d\delta-1} x_2^{\delta-1} \cdots x_g^{\delta-1} x_{g+1}^{\delta-2} \cdots x_d^{\delta-2} \in J_2^d.$$

由于 J_2, 的极小单项式生成元中，除 x_1^{δ} 外，没有任何一个能整除 β，因此必有 $x_1^{d\delta}$ 整除 β，这就产生了矛盾。□

下面的定理表明，猜想 6.1 对任意 δ 若 $g = d - 1 \geqslant 2$，则成立。

定理 6.13. 设 $R = \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_d]$ 是域 $\mathbb{k}$ 上的特征零多项式环，$\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_d)$ 是 R 的极大齐次理想，L 是由次数为 $\delta \geqslant 2$ 的元素生成的字典序分段理想。假设 $d \geqslant 3$，且 L 的高度 $g = d - 1$。那么

$$\operatorname{core}(L) = L\mathfrak{m}^{d(\delta-2)+g-\delta+1}.$$

证明. 由注 6.10 可知，只需证明 $x_1^{d(\delta-1)-1} \notin \operatorname{core}(L)$。因此，根据引理 6.12，只需证明对于 L 的某个约化 J，有 $x_1^{d(\delta-1)-1} \notin J^d : L^{d-1}$。由于 $g = d - 1$，可得 $L = (x_1, \ldots, x_{d-2})\mathfrak{m}^{\delta-1} + x_{d-1}L'$，其中 L' 是变量 x_{d-1} 和 x_d 中由次数为 $\delta - 1$ 的元素生成的字典序分段理想。根据定理 6.11，我们可以假设

$$L = (x_1, \ldots, x_{d-2})\mathfrak{m}^{\delta-1} + \left(x_{d-1}^{\delta}, x_{d-1}^{\delta-1}x_d, \ldots, x_{d-1}^{\delta-i}x_d^i\right)$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant \delta - 2$。因此 $K = \left(x_1^{\delta}, \ldots, x_{d-1}^{\delta}, x_{d-1}^{\delta-i}x_d^i\right) + (x_1, \ldots, x_{d-2})x_d^{\delta-1}$ 是 L 的约化，这由 [47,命题 2。1]给出。

我们断言

$$J = \left(x_1^{\delta} - x_{d-1}^{\delta-i}x_d^i, x_2^{\delta}, \ldots, x_{d-1}^{\delta}\right) + (x_1, \ldots, x_{d-2})x_d^{\delta-1}$$

是 L 的约化，并且 $x_1^{d(\delta-1)-1} \notin J^d : L^{d-1}$。

首先证明 J 是 L 的约化。设

$$K' = (x_1^{\delta}, x_1x_d^{\delta-1}, x_{d-1}^{\delta}, x_{d-1}^{\delta-i}x_d^i,) \qquad \text{and} \qquad J' = \left(x_1^{\delta} - x_{d-1}^{\delta-i}x_d^i, x_1x_d^{\delta-1}, x_{d-1}^{\delta}\right).$$

令 $\mathscr{F}(K')$ 表示 K' 的特殊纤维环。则 $\mathscr{F}(K') \cong \mathrm{k}[T_1, T_2, T_3, T_4]/\mathscr{D}$，其中 $\mathscr{D}$ 是某个齐次理想，同构由映射诱导，该映射将 T_1 送到 x_1^{δ}，将 T_2 送到 $x_1x_d^{\delta-1}$，将 T_3 送到 x_{d-1}^{δ}，并将 T_4 送到 $x_{d-1}^{\delta-i}x_d^i$。注意，$T\,i1T\,\delta(\delta-1)\,4 \quad -T\,^{\delta}i2\,T\,(\delta-1)(\delta-i)\,_3 \quad \in \mathscr{D}$。因此，环

$$\mathscr{F}(K')/J'\mathscr{F}(K') \cong \mathscr{F}(K')/(T_1 - T_4, T_2, T_3)\mathscr{F}(K')$$

是 Artinian；这里我们用 $J'\mathscr{F}(K')$ 表示由 J' 在 $[\mathscr{F}(K')]_1$ 中的像生成的 $\mathscr{F}(K')$-理想。因此，J' 是 K' 的约化，因而 J 是 K 的约化。由此可得，J 是 L 的约化，从而证明了该结论。

接下来我们证明 $x_1^{d(\delta-1)-1} \notin J^d : L^{d-1}$。令 $\alpha = x_1^d x_2^{\delta-1} \cdots x_{d-1}^{\delta-1}x_d^{\delta-2}$，并注意到 $\alpha \in L^{d-1}$。我们声称 $\alpha x_1^{d(\delta-1)-1} \notin J^d$，这将完成证明。

Let

$$H = \left(x_1^{\delta} - x_{d-1}^{\delta-i}x_d^i, x_{d-1}^{\delta}\right) + (x_1, \ldots, x_{d-2})x_d^{\delta-1} \subset J.$$

显然，$\alpha x_1^{d(\delta-1)-1} \in J^d$ 当且仅当 $\alpha x_1^{d(\delta-1)-1} \in H^d$。因此，证明的其余部分着重于说明 $\alpha x_1^{d(\delta-1)-1} \notin H^d$。为此，我们考虑序列 $f = f_1, f_2, f_3, ,$ 其中

$$f_1 = x_1^{2d\delta-\delta}, \quad f_2 = x_{d-1}^{d\delta}, \quad f_3 = x_d^{d(\delta-1)},$$

并注意，只需证明

$$C := (\underline{f}) : \alpha x_1^{d(\delta-1)-1} \supsetneq (\underline{f}) : H^d.$$

容易看出

$$C = \left(x_1^{(d-1)\delta+1}, x_{d-1}^{(d-1)\delta+1}, x_d^{(d-1)(\delta-1)+1}\right).$$

考虑元素

$$\beta := \left(x_1^{\delta} + d x_{d-1}^{\delta-i} x_d^{i}\right) M, \quad \text{where} \quad M = x_1^{(d-2)\delta} x_{d-1}^{(d-1)\delta} x_d^{(d-1)(\delta-1)}.$$

由于

$$x_1^{\delta} M = x_1^{(d-1)\delta} x_{d-1}^{(d-1)\delta} x_d^{(d-1)(\delta-1)} \notin C,$$

我们有 $\beta \notin C$。因此，只需证明 $\beta \in (f) : H^d$。由于 $x_{d-1}^{\delta} M \in (f)$ 且 $x_d^{\delta-1} M \in (f)$，接下来只需验证 $\beta \left(x_1^{\delta} - x_{d-1}^{\delta-i} x_d^{i}\right)^d \in (f)$。

注意

$$\begin{aligned}
\beta (x_1^{\delta} - x_{d-1}^{\delta-i} x_d^{i})^d &= \beta \sum_{j=0}^{d} (-1)^j \binom{d}{j} x_1^{\delta(d-j)} x_{d-1}^{(\delta-i)j} x_d^{ij} \\
&= x_1^{(d-1)\delta} x_{d-1}^{(d-1)\delta} x_d^{(d-1)(\delta-1)} \sum_{j=0}^{d} (-1)^j \binom{d}{j} x_1^{\delta(d-j)} x_{d-1}^{(\delta-i)j} x_d^{ij} \\
&\quad + d x_1^{d\delta-2\delta} x_{d-1}^{d\delta-i} x_d^{(d-1)(\delta-1)+i} \sum_{j=0}^{d} (-1)^j \binom{d}{j} x_1^{\delta(d-j)} x_{d-1}^{(\delta-i)j} x_d^{ij}.
\end{aligned}$$

为简化记号，令

$$\beta_1 := x_1^{(d-1)\delta} x_{d-1}^{(d-1)\delta} x_d^{(d-1)(\delta-1)} \quad \text{and} \quad \beta_2 := d x_1^{d\delta-2\delta} x_{d-1}^{d\delta-i} x_d^{(d-1)(\delta-1)+i},$$

且对于 $0 \leqslant j \leqslant d$ 集

$$h_j := (-1)^j \binom{d}{j} x_1^{\delta(d-j)} x_{d-1}^{(\delta-i)j} x_d^{ij}.$$

容易看出，$\beta_1 h_0 \in (f)$，且 $\beta_1 h_1 + \beta_2 h_0 = 0$。下面证明，对于每个 $j \geqslant 2$，都有 $\beta_1 h_j \in (f)$；并且对于每个 $j \geqslant 1$，都有 $\beta_2 h_j \in (f)$。

考虑项 $\beta_1 h_j$，其中 $j \geqslant 2$。在 $\beta_1 h_j$ 中，x_{d-1} 的次数为 $(d-1)\delta + (\delta - i) j$，而 x_d 的次数为 $(d-1)(\delta-1) + ij$。因此，要证明 $\beta_1 h_j \in (f)$，我们需要证明，对于每个 $2 \leqslant j \leqslant d$，以下不等式至少有一个成立

$$(d-1)\delta + (\delta - i) j \geqslant d\delta \quad \text{or} \quad (d-1)(\delta-1) + ij \geqslant d(\delta-1). \tag{15}$$

第一个不等式等价于 $i \leqslant \delta_{(j-1)j}$，第二个不等式等价于 $i \geqslant \delta_{j-1}$。由于 $\delta_{(j-1)j} \geqslant \delta_{j-1}$ 当 $j \geqslant 2$ 时，对于任何这样的 (15)，其中一个不等式必定成立 j。

最后，考虑项 $\beta_2 h_j$，其中 $j \geqslant 1$。在 $\beta_2 h_j$ 中，x_{d-1} 的次数为 $d\delta - i + (\delta - i) j$，而 x_d 的次数为 $(d-1)(\delta-1) + i + ij$。因此，为了证明 $\beta_2 h_j \in (f)$，我们需要证明，对于每个 $1 \leqslant j \leqslant d$，以下不等式之一成立

$$d\delta - i + (\delta - i) j \geqslant d\delta \quad \text{or} \quad (d-1)(\delta-1) + i + ij \geqslant d(\delta-1). \tag{16}$$

第一个不等式等价于 $i \leqslant \delta_{j\,j+1}$，第二个不等式等价于 $i \geqslant \delta_{j+1\,j}^{-1}$。由于 $\delta_{j\,j+1} \geqslant \delta_{j+1\,j}^{-1}$ for $j \geqslant 1$，因此对于任意这样的 (16)，其中一个不等式必定成立 j。□

推论 6.14. 猜想 *6.1* 在 $d \leqslant 3$ 时成立。

证明。 该结果由 定理 6.13 和 [10,命题 4。2]。 □

下一个事实可由文献中的若干结果直接结合得出。我们在此陈述它，既为完整起见，也便于引用。有关整闭包和约化的更多信息，请参见[31]。

命题 6.15. 设 $R = \Bbbk[x_1, \ldots, x_d]$ 是域 $\Bbbk$ 上的多项式环，L 是由次数为 $\delta \geqslant 1$ 的字典序分段理想生成的。理想 L 是正规理想，即对于每个 $n \in \mathbb{N}$，L^n 都是整闭的。

证明。 证明由 [22, 定理 5.1], [13, 命题 2.14 及其证明], 和 [51, 命题 13.15] 得出。

□

以下两个结果给出了由单一次数生成的字典序分段理想的核的上界。

定理 6.16. 设 $R = \Bbbk[x_1, \ldots, x_d]$ 是特征零域 $\Bbbk$ 上的多项式环。若 L 是高度为 $g \geqslant 2$、由次数为 $\delta \geqslant 2$ 的字典序分段理想，则

$$\operatorname{core}(L) \subseteq \operatorname{adj}(L^g),$$

其中 伴随理想(L^g)表示 L^g 的伴随理想，如 [40, 定义 1。1] 所述。

证明。 设 J 是L的任意一个极小约化。令$A = R[Jt, t^{-1}]$，且$B = R[Lt, t^{-1}]$，它们分别是J 和L的扩张 Rees 代数，ω_A 和 ω_B 是它们的分次典范模。注意到

$$\omega_A \subset (\omega_A)_{t^{-1}} = \omega_{A_{t^{-1}}} = \omega_{R[t,t^{-1}]}.$$

因此，作如下识别：$\omega_{R[t,t^{-1}]} = R[t,t^{-1}]$，我们得到一个嵌入 $\omega_A \subset R[t,t^{-1}]$，使得（$\omega_A$）$_{t^{-1}} = R[t,t^{-1}]$。因此，当$n$ 充分小时，$[\omega_A]_n t^{-n} = R$。

根据 命题 6.15 L 是正规单项式理想，因此B 是正规 Cohen-Macaulay 代数，并且根据 [6, 定理6.10 and 定理4.43]. 因此，B 具有有理奇点 [5, 定理]。我们得出

$$[\omega_B]_i t^{-i} = \operatorname{adj}(L^i). \tag{17}$$

对每个 $i \geqslant 0$，由推论 3.5] 的证明可得。令 $K := \operatorname{Quot}(R)$ 为 R 的分式域，并令$r := r_J(L)$ 为 L 相对于 J 的约化数。我们有以下分次A-模的同构

$$\begin{aligned}
\omega_B \cong \operatorname{Hom}_A(B, \omega_A) &\cong \omega_A :_{K(t)} B \\
&= \omega_A :_{R[t,t^{-1}]} B \\
&= \omega_A :_{R[t,t^{-1}]} (R \oplus Lt \oplus \ldots \oplus L^r t^r) \\
&= \bigcap_{i=0}^{r} \left(\omega_A :_{R[t,t^{-1}]} L^i\right) t^{-i} \\
&= \bigcap_{i=0}^{r} \left(\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} [\omega_A]_j\right) :_{R[t,t^{-1}]} L^i\right) t^{-i} \\
&= \bigcap_{i=0}^{r} \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \left([\omega_A]_j t^{-j} :_R L^i\right) t^{j-i}
\end{aligned}$$

$$= \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} \left(\bigcap_{i=0}^{r} \left([\omega_A]_{s+i} t^{-s-i} :_R L^i \right) \right) t^s.$$

特别是，

$$[\omega_B]_g t^{-g} = \bigcap_{i=0}^{r} \left([\omega_A]_{g+i} t^{-g-i} :_R L^i \right). \tag{18}$$

由命题 6.5 以及 [53, 命题 1.11、注 1.12 和推论 1.8 (c)]，，J 满足 G_∞和滑动深度。因此由 [23, 定理 6.1] 可知，$\mathrm{gr}_J(R) = \oplus_{n\geqslant 0} J^n/J^{n+1}$ 是 Cohen-Macaulay 的。此外，$\{J^{n+1} : L^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 构成一个递减的理想序列。事实上，由于 $\mathrm{gr}_J(R)$ 是 Cohen-Macaulay 的，对于任意非负整数 i 和 n，我们有 $J^{n+i} : J^n = J^i$。因此

$$J^{n+1} : L^n = (J^{n+2} : J) : L^n = J^{n+2} : JL^n \supseteq J^{n+2} : L^{n+1}.$$

计算 a-不变量可得 $a(A) = a(\mathrm{gr}_J(R)) + 1$，因为 $\mathrm{gr}_J(R) \cong A/(t^{-1})$。此外，由 [49, 定理 3.5]，$a(\mathrm{gr}_J(R)) = -g$。因此 $[\omega_A]_{g-1} t^{1-g} = R$，这意味着 $At^{g-1} \subseteq \omega_A$。于是由引理 6.12，对于所有 $0 \leqslant i \leqslant r$，我们有

$$\mathrm{core}(L) \subseteq J^{r+1} :_R L^r \subseteq J^{i+1} :_R L^i = [At^{g-1}]_{g+i} t^{-g-i} :_R L^i \subseteq [\omega_A]_{g+i} t^{-g-i} :_R L^i.$$

因此 $\mathrm{core}(L) \subseteq \bigcap_{i=0}^{r} ([\omega_A]_{g+i} t^{-g-i} :_R L^i) = [\omega_B]_g t^{-g} =$ 伴随(L^g) 由 (18) 和 (17)得证。□

推论 6.17。 设 $R = \Bbbk[x_1, \ldots, x_d]$ 是域 $\Bbbk$ 上的特征零多项式环，且 $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_d)$ 是 R 的极大齐次理想。若 L 是高度为 $g \geqslant 2$ 且由次数为 $\delta \geqslant 2$ 的元素生成的字典序分段理想，则

$$\mathrm{core}(L) \subseteq L\mathfrak{m}^{(g-1)\delta - d + 1}.$$

证明。理想 L^g 由命题 6.15 可知是整闭的，且由同一个次数的元素生成。因此[26, 主定理] 表明，若 $x^{\mathbf{v}} \in$ 属于 $\mathrm{adj}(L^g)$，则 $x^{\mathbf{v}} x_1 x_2 \cdots x_d \in L^g \mathfrak{m}$。因此 $\mathrm{adj}(L^g) \subseteq \mathfrak{m}^{g\delta - d + 1}$。最后，根据定理 6.16，我们得出 $\mathrm{core}(L) \subseteq L \cap \mathrm{adj}(L^g) \subseteq L \cap \mathfrak{m}^{g\delta - d + 1} = L\mathfrak{m}^{(g-1)\delta - d + 1}$。□

致谢

第二作者部分研究经费由美国国家科学基金会资助 DMS #2001645/2303605 提供。第三作者部分研究经费由美国国家科学基金会资助 DMS #2201110 提供。第四作者部分研究经费由美国国家科学基金会资助 DMS #2201149 提供。本研究的部分工作是在奥伯沃尔法赫数学研究所（MFO）完成的，当时部分作者正在此进行数次访问研究。作者感谢 MFO 的热情接待和优越的工作条件。

参考文献

[1] R. Apéry, 三维空间中的第一类曲线，《巴黎科学院院刊》 Sér. I **220** (1945), 271–272.[2] K. Ansaldi, K. N. Lin, and Y. H. Shen, 单项式理想的广义牛顿互补对偶，《代数应用杂志》 **20**(2021), 26 pp.[3] L. Avramov, and J. Herzog, 余维二嵌入的 *Koszul* 代数，《数学杂志》 **175**(1980), 249–260.[4] M. Artin and M. Nagata,*Cohen-Macaulay* 环中的残余交，《京都大学数学杂志》 **12** (1972), 307–323.[5] J.-F. Boutot,有理奇点与约化群商，《数学发明》 **88** (1987), 65–68.

[6] W. Bruns and J. Gubeladze, 多胞体、环与 K 理论，Springer，多德雷赫特，2009.[7] W. Bruns and J. Herzog, 科恩–麦考利环，剑桥高等数学研究丛书，39，剑桥，剑桥大学出版社，1993.[8] M. Chardin, D. Eisenbud, and B. Ulrich, 希尔伯特函数、残余交与残余 S_2 理想，《组合数学》125 (2001), 193–219.[9] A. Corso, C. Polini, and B. Ulrich, 理想核的结构，《数学年刊》321 (2001), 89–105.[10] A. Corso, C. Polini, and B. Ulrich, 理想的核与残余交，《美国数学会汇刊》354 (2002), 2579–2594.[11] B. Costa and A. Simis, 克雷莫纳映射的新构造，《数学研究快报》20 (2013), 629–645.[12] C. Cumming, Cohen-Macaulay 环中理想的核，《交换代数杂志》10 (2018), 163–170.[13] E. De Negri, 由特殊稳定单项式集生成的托里克环，《数学新报》203 (1999), 31–45.[14] D. Eisenbud, 交换代数：代数几何导引，数学研究生教材150，施普林格出版社，纽约，1995.[15] B. Engheta, 几乎完全交的重数界，《交换代数通讯》37, (2009), 948–953.[16] L. Fouli and S. Morey, 边理想的极小约化与核，《代数杂志》364 (2012), 52–66.[17] L. Fouli, C. Polini, and B. Ulrich, 任意特征下理想的核，《密歇根数学杂志》57 (2008), 305–319.[18] L. Fouli, C. Polini, and B. Ulrich, 典范模分次分量的湮灭子与标准分次代数的核，《美国数学会汇刊》362 (2010), 6183–6203.[19] F. Gaeta, 射影空间代数簇分类的若干最新进展，《第二届代数几何讨论会》，列日，1952年.[20]D. Grayson and M. Stillman, Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统，网址：http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2.[21] J. Herzog and T. Hibi, 单项式理想，伦敦施普林格，2011.[22] J. Herzog, T. Hibi, and M. Vladoiu, 纤维型理想与多拟阵，《大阪数学杂志》42 (2005), 第4期，807–829.[23] J. Herzog, A. Simis, and W.V. Vasconcelos, 膨胀环的逼近复形，II，《代数杂志》82 (1983), 53–83.[24] J. Herzog, W.V. Vasconcelos, and R. Villarreal, 滑动深度理想，《名古屋数学杂志》99 (1985), 159–172.[25] M. Hochster and C. Huneke, 紧闭包、不变式理论与布里昂松–斯科达定理，《美国数学会杂志》3 (1990), 31–116.[26] J. Howald, 单项式理想的乘子理想，《美国数学会汇刊》353 (2001), 2665–2671.[27] C. Huneke, 理想的链接与 Koszul 同调，《美国数学杂志》104 (1982), 1043–1062.[28] C. Huneke, 强科恩–麦考利概形与残余交，《美国数学会汇刊》277 (1983), 739–763.[29] C. Huneke, P. Mantero, J. McCullough, and A. Seceleanu, 分次环的重数界与 Cohen-Macaulay 性质的判据，《美国数学会会刊》143 (2015), 2365–2377.[30] C. Huneke and I. Swanson, 二维正则局部环中理想的核，《密歇根数学杂志》42 (1995), 193–208.[31] C. Huneke and I. Swanson, 理想、环与模的整闭包，伦敦数学学会讲义丛书336，剑桥大学出版社，2006.[32] C. Huneke and N. V. Trung, 关于理想的核，《组合数学》141 (2005), 1–18.[33] E. Hyry, 系数理想与 Rees 代数的 Cohen-Macaulay 性质，《美国数学会会刊》129 (2001), 1299–1308.[34] E. Hyry and K. Smith, 关于 Kawamata 的非消失猜想与理想的核，《美国数学杂志》125 (2003), 1349–1410.[35] E. Hyry and K. Smith, 核与分次核，以及线丛的整体截面，《美国数学会汇刊》356 (2003), 3143–3166.[36] M. Johnson and B. Ulrich, Artin–Nagata 性质与 Cohen-Macaulay 伴随分次环，《组合数学》103 (1996), 7–29.[37] A. Kohlhaas, 二维中的系数理想，《伊利诺伊数学杂志》58 (2014), 1041—1053.[38] A. Kohlhaas, 零维单项式理想核的对称性，《代数杂志》453 (2016), 364—376.[39] R. Lazarsfeld, 代数几何中的正性，I & II，数学与相关领域成果（第三辑），48 & 49，施普林格出版社，柏林，2004.[40] J. Lipman, 正则局部环中理想的伴随理想，《数学研究快报》1, (1994), 739–755.[41] J. Lipman and A. Sathaye, 雅可比理想与布里昂松–斯科达定理，《密歇根数学杂志》28 (1981), 199–222.

[42] H. Matsumura，《交换环理论》，剑桥高级数学研究 8，剑桥大学出版社，1986。[43] E. Miller 和 B. Sturmfels，《组合交换代数》，数学研究生教材 227，Springer，纽约，2004。[44] C. Polini 和 B. Ulrich，《理想的核的一个公式》，《数学年刊》331（2005），487–503。[45] C. Polini、B. Ulrich 和 M. A. Vitulli，《零维单项式理想的核》，《数学进展》211（2007），72–93。[46] C. Polini 和 Y. Xie，《j-重数与伴随分次模的深度》，《代数杂志》379（2013），31–49。[47] P. Singla，《极小单项式约化与极值理想的约化纤维环》，《伊利诺伊数学杂志》51（2007），1085–1102。[48] M. Saito、B. Sturmfels、N. Takayama，《超几何微分方程的格罗布纳变形》，算法与计算数学，Springer，柏林，2000。[49] A. Simis、B. Ulrich 和 W. Vasconcelos，《科恩-麦考利雷斯代数与多项式关系的次数》，《数学年刊》301（1995），421–444。[50] B. Smith，《某些强稳定理想的核的一个公式》，《代数杂志》347（2011），40–52。[51] B. Sturmfels，《格罗布纳基与凸多胞体》，美国数学学会大学讲座系列 8，（1995）。[52] T. Okuma、K.-I. Watanabe 和 K.-I. Yoshida，《通过理想的核刻画二维有理奇点》，《代数杂志》499（2018），450–468。[53] B. Ulrich，《Artin–Nagata 性质与理想的约化》，《当代数学》159（1994），99–113。[54] W. Vasconcelos，《爆破代数的算术》，195，剑桥大学出版社，1994。[55] H.-J. Wang，《诺特局部环的理想的核》，《美国数学会会刊》136（2008），801–807。[56] J. Watanabe，《关于嵌入余维为三的 Gorenstein 环的注记》，《名古屋数学杂志》50（1973），227–232。[57] Y. Xie，《分次代数重数的公式》，《美国数学会汇刊》364（2012），4085–4106。LOUIZA FOULI，数学科学系，新墨西哥州立大学，邮政信箱 30001，拉斯克鲁塞斯，NM 88003-8001 电子邮件地址：lfouli@nmsu.edu JONATHAN MONTAÑO，数学与统计科学学院，亚利桑那州立大学，邮政信箱 871804，坦佩，AZ 85287-18041 电子邮件地址：montano@asu.edu CLAUDIA POLINI，数学系，圣母大学，255 HURLEY，圣母镇，IN 46556 电子邮件地址：cpolini@nd.edu BERND ULRICH，数学系，普渡大学，150 NORTH UNIVERSITY STREET，西拉斐特，IN 47907 电子邮件地址：bulrich@purdue.edu