arXiv:2303.10602v1 [math.OA] 19 Mar 2023

关于 II_1 型因子中算子的 Diximier 平均定理

SHILIN WEN、JUNSHENG FANG 和 ZHAOLIN YAO

Abstract. 设 $\mathcal{M}$ 是一个 II_1 型因子，τ 是 $\mathcal{M}$上的忠实正规迹态。本文证明，对于给定的有限元 $X_1,\cdots X_n \in \mathcal{M}$，存在恒等算子的有限分解，由 $N \in \mathbb{N}$ 两两正交的非零投影 $E_j \in \mathcal{M}$, $I=\sum_{j=1}^{N} E_j$组成，使得 $E_jX_iE_j=\tau(X_i)E_j$对所有 $j=1,\cdots,N$以及 $i=1,\cdots,n$均成立。等价地，存在一个酉算子 $U \in \mathcal{M}$，使得 $\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} U^{*j}X_iU^j=\tau(X_i)I$对 $i=1,\cdots,n$成立。该结果是 II_1 型因子的 Dixmier 平均定理的一个加强版本。作为第一个应用，我们证明，II_1 型因子中所有迹为零的元素都是单个交换子，且任意迹为零的自伴元素都是单个自交换子。该结果对 [**10**]中的问题 1.1 给出了肯定回答。作为第二个应用，我们证明，II_1 型因子中的任意自伴元都可以写成 4 个投影的线性组合。该结果对 [**15**]中的问题 6(2) 给出了肯定回答。作为第三个应用，我们证明，若 $(\mathcal{M},\tau)$ 是一个有限因子，$X \in \mathcal{M}$，则存在一个正规算子 $N \in \mathcal{M}$ 和一个幂零算子 K，使得 $X=N+K$。该结果对 [**9**]中的问题 1.1 给出了肯定回答。

关键词：II_1 型因子，Dixmier 平均定理，交换子；2010 年数学学科分类：47C15

1. 引言

设 $\mathcal{M}$ 是一个 II_1 型因子，τ 是 $\mathcal{M}$ 上的忠实正规迹态。在 [**7**], 中证明了以下结果：若 $X=X^* \in \mathcal{M}$，则存在一个将单位元分解为 $N \in \mathbb{N}$ 个两两正交的非零投影 E_j、$I=\sum_{j=1}^{N} E_j$ 的恒等算子分解，使得对所有 $j=1,...,N$，$E_jXE_j=\tau(X)E_j$；等价地，存在一个酉元

SHILIN WEN 部分受到国家自然科学基金委员会（项目编号：12001437）和西华师范大学基本科研业务费（21E027）的资助。JUNSHENG FANG 部分受到国家自然科学基金委员会（项目编号：12071109）和河北师范大学启动经费的资助。ZHAOLIN YAO 部分受到河北师范大学科学基金（项目编号：13113115）的资助。

算子 $U \in \mathcal{M}$ 满足 $\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} U^{*j} X U^j = \tau(X)I$。一个自然的问题是：能否去掉关于 X 的自伴假设? 在 [29], 中，作者证明，对于超有限 II_1 型因子 $\mathcal{R}^w$ 的超幂代数中的任意算子 X，存在一个将单位元分解为 $N \in \mathbb{N}$ 个两两正交的非零投影 $E_j \in \mathcal{R}^w$、$I = \sum_{j=1}^{N} E_j$ 的恒等算子分解，使得对所有 $j = 1, ..., N$，$E_j X E_j = \tau(X)E_j$。本文的主要结果将上述结果推广到任意 II_1 型因子中的任意算子。确切地说，我们证明以下结果。

THEOREM 1.1（主定理）。设 $(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个 II_1 型因子，$X_1, \cdots, X_n \in \mathcal{M}$。那么存在一个由有限个两两正交的非零投影组成的族$_N\{E_i\}_{i=1}^N$，它们属于 $\mathcal{M}$，满足 $\sum E_i = I$ 且 $E_i X_j E_i = \tau(X_j)E_i$，对 $1 \le i \le N$ 和$_{i=1}1 \le j \le n$成立。也就是说，X_j 可写成如下形式

$$X_j = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & \cdots & E_N \end{array} \\ \begin{pmatrix} \tau(X_j) & (X_j)_{12} & \cdots & (X_j)_{1N} \\ (X_j)_{21} & \tau(X_j) & \cdots & (X_j)_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_j)_{N1} & (X_j)_{N2} & \cdots & \tau(X_j) \end{pmatrix} \end{array}.$$

等价地，存在一个酉算子 $U \in \mathcal{M}$，使得

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} (U^i)^* X_j U^i = \tau(X_j)I$$

对 $1 \le j \le n$成立。

主定理有几个有趣的应用。

II_1 型因子中交换子的应用。

若存在算子 B 和 C 属于 $\mathcal{M}$，使得 $A = BC - CB$，则冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$ 中的算子 A 在 $\mathcal{M}$ 中是一个交换子。自交换子是 $\mathcal{M}$ 中形如 $X^*X - XX^*$ 的自伴算子，其中 $X \in \mathcal{M}$ 是某个算子。多位作者研究了如何确定 $\mathcal{M}$ 中哪些算子是 $\mathcal{M}$ 中的交换子，并在某些特殊情形下解决了这一问题。K. Shoda 在[28] 中证明，若 $\mathcal{M}$ 是 I_n 型因子，则矩阵的迹为零，当且仅当它是 $\mathcal{M}$ 中的交换子。A. Brown 和 C. Pearcy 证明，若 $\mathcal{M}$ 是 I_∞ 型因子，则 $\mathcal{M}$ 中的非交换子恰好是那些模紧算子理想 [5] 同余于非零标量的算子。A. Brown 和 C. Pearcy 在 [4] 中证明，若 $\mathcal{M}$ 是作用于可分希尔伯特空间上的 III 型因子，则 $\mathcal{M}$ 中的交换子恰好由非标量算子和零算子构成。在 [6], 中，A. Brown、C. Pearcy 和 D. Topping 证明，在任意真无限冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$ 中，$\mathcal{M}$ 的强根基中的每个算子都是一个交换子。

然而，理论远未完善，而最棘手的未解决问题之一，就是确定有限冯·诺依曼

代数中的交换子。有限冯·诺依曼代数中的交换子必定具有零中心迹，因此希望这类代数中的交换子恰好就是中心迹为零的算子，也并非不合理。

II_1 型因子的情形仍未解决。目前已知一些部分结果。Fack 和 de la Harpe 在 [12] 证明，每个迹为零的元素都是十个交换子之和（并且对这些元素的范数有所控制）。S. Goldstein 和 A. Paszkiewicz 改进了这一数量（见 [15]）。他们证明，在 II_1 型冯·诺依曼代数中，每个中心迹为零的自伴算子都是四个交换子之和。此前最好的估计来自 Marcoux，他在 [20] 证明，II_1 型因子中每个迹为零的元素都是两个交换子之和，而每个迹为零的自伴元都是四个或更少自交换子之和。Pearcy 和 Topping 在 [26], 证明，在 Wright 的 II_1 型因子中，每个迹为零的自伴元都是单个交换子，因此每个迹为零的元素都是两个交换子之和。最近，K. Dykema 和 A. Skripka 证明，所有幂零元都是单个交换子；每个迹为零且分布为纯原子分布的正规元也是单个交换子（见 [10]）。

利用我们的主定理，我们证明，II_1 因子中所有迹为零的元素都是单个交换子，且任何迹为零的自伴元素都是单个自伴交换子。这一结果解决了 II_1 型因子中的交换子问题 [10]。

投影的线性组合在 II_1 型因子中的应用。

冯·诺依曼代数因子中投影的线性组合是一个活跃的研究课题。例如，在有限维希尔伯特空间上作用的任何自伴算子，都可以写成有限个投影的线性组合。一个自然的问题是：投影的数量能否不依赖于希尔伯特空间的维数？如果希尔伯特空间是无限维的，这是否可能？如果代数中的元素都能写成投影的线性组合，那么自然会产生一个问题：所需投影的最少数量是多少？

最早的肯定结果由 Fillmore 得出（见 [13]）。他证明，在可分无穷维希尔伯特空间上作用的任何有界算子，都可以写成 257 个投影的线性组合。此外，Fillmore 在 [14] 中将投影数量减少到 9 个。Pearcy 和 Topping 在 [25] 中将其减少到 8 个，随后 A. Paszkiewicz 将其减至 6 个（见 [24]）。利用 [24] , 中的技巧，Matsumoto 于 1984年 证明 5 个投影就足够了。同样在 1984年，Nakamura [22] 证明，任何自伴算子都可以写成 4 个投影的线性组合。

在 [15],[16] 和 [17], 中，S. Goldstein 和 A. Paszkiewicz 证明，II_1 型因子中的每个自伴算子都是 12 个投影的线性组合，并且任意 II_1 型代数中都存在不能写成 3 个投影的线性组合的自伴算子；此外，对于 II_∞ 型因子，任意自伴算子都可以写成 4 个投影的线性组合，并且存在不能写成 3 个投影的线性组合的自伴算子；对于可数可分解 III 型因子，每个自伴元都是 3 个投影的线性组合。

作为第二个应用，我们证明，II_1 型因子中的任意自伴元都可以写成 4 个投影的线性组合。该结果对 [15] 中的问题 6(2) 作出了肯定回答。

舒尔定理推广的应用。

我们陈述著名的舒尔定理。对于任意矩阵 $T \in M_n(\mathbb{C})$，存在一个酉矩阵 $U \in M_n(\mathbb{C})$，使得 $U^{-1}TU$是一个上三角矩阵。$U^{-1}TU$的对角元是 T的特征值，按重数计重复出现；并且可以选择 U，使这些特征值以任意顺序排列。因此， T 的谱的每一种排列都给出一个分解 $T = N + Q$，其中 N 是正规算子， Q 是幂零算子。

Dykema、Sukochev 和 Zanin 在 [11] 中使用一条覆盖弥散有限冯·诺依曼代数中算子 T 的布朗测度支撑集的皮亚诺曲线，为布朗测度的支撑集确定一个顺序，并构造分解 $T = N + Q$，其中 N 是正规算子， Q 是强算子拓扑拟幂零算子。这些构造推广了 $n \times n$ 矩阵的舒尔上三角形式。正规部分 N是将 T 条件期望到由 T的一列递增 Haagerup-Schultz 投影生成的阿贝尔代数上而构造的。自然会提出这样一个问题：在什么条件下，强算子拓扑拟幂零算子 Q 实际上是拟幂零的。

作为第三个应用，我们证明，若 $(\mathcal{M},\tau)$ 是有限因子 $X \in \mathcal{M}$，则存在正规算子 $N \in \mathcal{M}$ 和幂零算子 K，使得 $X = N + K$。该结果肯定地回答了 [9] 中的问题 1.1。

本文的结构安排如下。下面的第 2 节将介绍一些结果，这些结果对第 3 节和第 4 节非常有用。第 3 节证明主定理。第 4 节给出主定理的三个应用。

2. 预备知识

THEOREM 2.1.（ [7] 中的定理 1.1）设 $(\mathcal{M},\tau)$ 是一个 II_1 型因子， $X \in \mathcal{M}, X = X^*$。则以下结论等价。

(1) 存在恒等算子分解 $N \in \mathbb{N}$，由两两正交的非零投影 E_j, $I = \sum_{j=1}^{N} E_j$ 构成，使得对所有 $j = 1, ..., N$，均有 $E_j X E_j = \tau(X)E_j$；(2) 存在有限维阿贝尔冯·诺依曼代数 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$，使得

$$E_{\mathcal{B}'\cap\mathcal{M}}(X) = \tau(X)I;$$

其中 $E_{\mathcal{B}'\cap\mathcal{M}}$ 是从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{B}' \cap \mathcal{M}$的条件期望；

(3) 存在一个酉算子 $U \in \mathcal{M}$ 使得

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} U^{*j} X U^{j} = \tau(X)I;$$

(4) 存在一个酉算子 $W \in \mathcal{M}$，满足 $W^N = I$ 且

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} W^{*j} X W^j = \tau(X) I.$$

LEMMA 2.2.（[8] 中的命题 1.5 或 [7]中的引理 3.2）设 $(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个 II_1型因子，$A \in \mathcal{M}^+$, $\tau(A) = 1$ 和 $N \in \mathbb{N}$。则下列条件等价。

(1) A 是 N 个非零投影之和；(2) 存在酉算子 $U \in \mathcal{M}$，使得

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} U^{*j} A U^j = I.$$

3. 主定理

THEOREM 3.1. 设 $(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个 II_1 型因子，$X_1, \cdots, X_n \in \mathcal{M}$。则存在有限个两两正交的非零投影组成的族 $\{E_i\}_{i=1}^N$，属于 $\mathcal{M}_N$，使得 $\sum E_i = I$ 且对于 $1 \le i \le N$ 和 $1 \le j \le n$，有 $E_i X_j E_i = \tau(X_j) E_i$。也就是说，$_{i=1} X_j$ 可以表示如下

$$X_j = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & \cdots & E_N \end{array} \\ \begin{pmatrix} \tau(X_j) & (X_j)_{12} & \cdots & (X_j)_{1N} \\ (X_j)_{21} & \tau(X_j) & \cdots & (X_j)_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_j)_{N1} & (X_j)_{N2} & \cdots & \tau(X_j) \end{pmatrix} \end{array}.$$

等价地，存在酉算子 $U \in \mathcal{M}$，使得

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} (U^i)^* X_j U^i = \tau(X_j) I$$

对于 $1 \le j \le n$。

为证明定理 3.1，我们可以假设 $X_i = X_i^*$ and $\tau(X_i) = 0$ for $1 \le i \le n$。下文假设 $n = 2$。一般情形可通过数学归纳法证明。我们假设 $H = H^*$, $K = K^*$ in $\mathcal{M}$such that$\tau(H) = \tau(K) = 0$。根据定理 2.1，存在一族两两正交的非零$_N$投影 $\{E_i\}_{i=1}^N$ in $\mathcal{M}$，使得 $\sum E_i = I$ and $E_i H E_i = 0$ for $1 \le i \le N$。因此我们$_{i=1}$有

$$H = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & \cdots & E_N \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ * & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad K = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & \cdots & E_N \end{array} \\ \begin{pmatrix} K_1 & * & \cdots & * \\ * & K_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & K_N \end{pmatrix} \end{array}.$$

再次根据定理 2.1，存在一族两两正交的非零投影$_L\{F_i\}_{i=1}^L$ in $\mathcal{M}$，使得 $\sum F_i = I$ and $F_iHF_i = 0$, $F_iKF_i = \alpha_iF_i$ for $1 \le i \le L$。现在$_{i=1}$我们有

$$H = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} F_1 & F_2 & \cdots & F_L \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ * & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad K = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} F_1 & F_2 & \cdots & F_L \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ * & \alpha_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \alpha_L \end{pmatrix} \end{array}.$$

根据数学归纳法，我们只需证明对于

$$H = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} F_1 & F_2 & \cdots & F_L \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ * & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad K = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} F_1 & F_2 & \cdots & F_L \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ * & \alpha & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \beta \end{pmatrix} \end{array}$$

我们可以将 H 和 K 重写为

$$H = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & \cdots & P_s \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ * & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad K = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & \cdots & P_s \end{array} \\ \begin{pmatrix} \tau(K) & * & \cdots & * \\ * & \tau(K) & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \tau(K) \end{pmatrix} \end{array}$$

对于有限分解 $I = P_1 + \cdots + P_s$。我们可以假设 $\tau(K) = 0$，即$\alpha(\tau(F_1) + \cdots + \tau(F_{L-1}))$ $+ \beta\tau(F_L) = 0$。通过将 F_L 切分为适当的小块，即 $F_L = F_{L,\ 1} + \cdots + F_{L,\ L-1}$，我们可以假设对于 $1 \le i \le L-1$，$\alpha\tau(F_i) + \beta\tau(F_{L,\ i}) = 0$。因此，我们只需考虑以下情形:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ * & \beta \end{pmatrix},$$

其中 $\tau(K) = 0$。

我们先考虑特殊情形 $\alpha = 1$ 和 $\beta = -1$。那么我们可以写成

$$K = \begin{pmatrix} 1 & C \\ C^* & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & D \\ D^* & 0 \end{pmatrix}.$$

由极分解定理，$D = U|D|$，其中 U 是一个酉算子。因此

$$\begin{pmatrix} 0 & D \\ D^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & |D| \\ |D| & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^* & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U^* & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & C \\ C^* & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & U^*C \\ C^*U & -1 \end{pmatrix}.$$

因此，我们可以假设 $D \geq 0$。于是，存在一个包含 D的 $\mathcal{M}$ 的极大阿贝尔冯·诺依曼代数 $\mathcal{A}$。取投影 P、$Q \in \mathcal{A}$，使得 $P+Q=I$ 和$\tau(P)=\tau(Q)=\frac{1}{2}$。因此，我们可以写成

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 0 & PD & 0 \\ 0 & 0 & 0 & QD \\ PD & 0 & 0 & 0 \\ 0 & QD & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } K=\begin{pmatrix} P & 0 & * & * \\ 0 & Q & * & * \\ * & * & -P & 0 \\ * & * & 0 & -Q \end{pmatrix}.$$

注意，我们可以将 H 和 K 改写为以下形式（分别交换 H 和K的第二行与第四行，并交换第二列与第四列）。

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 0 & PD & 0 \\ 0 & 0 & 0 & QD \\ PD & 0 & 0 & 0 \\ 0 & QD & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } K=\begin{pmatrix} P & * & * & 0 \\ * & -Q & 0 & * \\ * & 0 & -P & * \\ 0 & * & * & Q \end{pmatrix}.$$

由于 $\tau(P)=\tau(Q)$，根据定理 2.1，存在有限多个投影 E_i，使得

$$\tilde{E}_i \begin{pmatrix} P & * \\ * & -Q \end{pmatrix} \tilde{E}_i = 0$$

并且存在有限多个投影 F_j，使得

$$\tilde{F}_j \begin{pmatrix} -P & * \\ * & Q \end{pmatrix} \tilde{F}_j = 0$$

现在，$\{E_i, F_j\}$ 满足 $\sum E_i + \sum F_j = I$、$E_iHE_i = E_iKE_i = 0$和 $F_jHF_j = F_jKF_j = 0$。

现在，我们考虑一般情形:

$$H=\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix}, \quad K=\begin{pmatrix} \alpha & * \\ * & \beta \end{pmatrix} \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix},$$

其中 $\tau(K)=\alpha\tau(P)+\beta\tau(Q)=0$。

LEMMA 3.2. 设 $A=PAQ$ 如上。则存在投影 P_1, P_2 和Q_1, Q_2，使得 $P_1+P_2=P$, $\tau(P_1)=\tau(P_2)=\frac{1}{2}\tau(P)$, $Q_1+Q_2=Q$, $\tau(Q_1)=\tau(Q_2)=\frac{1}{2}\tau(Q)$ 和 $P_1AQ_2=P_2AQ_1=0$。

PROOF. 设 $A=V|A|$ 是 A的极分解。设 $Q=R(A^*) \leq Q$，并设 $P=R(A) \leq P$。则 $V: Q \to P$ 是一个酉算子。注意，$Q=R(A^*)=R(A^*A)=R(|A|)$。因此我们有 $Q|A|=|A|=|A|Q$。设 $\mathcal{A}$ 是一个包含 $W^*(|A|, Q)$ 的极大阿贝尔冯·诺依曼代数。于是存在两个投影 $\tilde{Q}_1$、$\tilde{Q}_2$属于 $\mathcal{A}$，使得 $\tilde{Q}_1+\tilde{Q}_2=\tilde{Q}$且 $\tau(\tilde{Q}_1)=\tau(\tilde{Q}_2)=\frac{1}{2}\tau(\tilde{Q})$。注意，$Q_1|A|=|A|Q_1$且 $Q_2|A|=|A|Q_2$。设 $P_1=VQ_1V^*$, $P_2=VQ_2V^*$。则$\tilde{P}_1+\tilde{P}_2=\tilde{P}$且 $\tau(\tilde{P}_1)=\tau(\tilde{P}_2)=\frac{1}{2}\tau(\tilde{P})$。注意

$$\tilde{P}_2A\tilde{Q}_1=V\tilde{Q}_2V^*V|A|\tilde{Q}_1=V\tilde{Q}_2|A|\tilde{Q}_1=V\tilde{Q}_2\tilde{Q}_1|A|=0,$$

$$\tilde{P}_1 A\tilde{Q}_2 = V\tilde{Q}_1 V^* V|A|\tilde{Q}_2 = V\tilde{Q}_1|A|\tilde{Q}_2 = V\tilde{Q}_1\tilde{Q}_2|A| = 0.$$

设 Q_1', Q_2'是投影，满足 $Q_1' + Q_2' = Q - \tilde{Q}$且 $\tau(Q_1') = \tau(Q_2') = \frac{1}{2}\tau(Q - \tilde{Q})$。设 P_1', P_2'是投影，满足 $P_1' + P_2' = P - \tilde{P}$且 $\tau(P_1') = \tau(P_2') = \frac{1}{2}\tau(P - \tilde{P})$。设 $Q_1 = Q_1' + Q_1$, $Q_2 = Q_2' + Q_2$, $P_1 = P_1' + P_1$, $P_2 = P_2' + P_2$。则 P_1, P_2, Q_1, Q_2满足该引理。□

现在我们回到一般情形的证明。设

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \\ * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ Q_1 \\ Q_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \\ Q_1 \end{matrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & * & * \\ 0 & \alpha & * & * \\ * & * & \beta & 0 \\ * & * & 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ Q_1 \\ Q_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} \alpha & * & * & * \\ * & \beta & * & * \\ * & * & \alpha & * \\ * & * & * & \beta \end{pmatrix} \begin{matrix} P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \\ Q_1 \end{matrix}.$$

由于 $\alpha\tau(P_1) + \beta\tau(Q_2) = \alpha\tau(P_2) + \beta\tau(Q_1) = 0$，根据定理 2.1，存在有限个投影 E_i，使得 $E_1 + \cdots + E_N = I$，且 $E_i H E_i = E_i K E_i = 0$ 对于$1 \le i \le N$成立。

4. 应用

下述定理肯定地回答了 [10] 中的问题 1.1。

THEOREM 4.1. 若 $(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个 II_1 型因子，且 $A \in \mathcal{M}$ 满足 $\tau(A) = 0$，则 A 是单个交换子。若 A 是一个自伴算子，且 $\tau(A) = 0$，则 A 是一个自交换子。

PROOF. 根据定理 3.1，存在一组有限个两两正交的N非零投影 $\{E_i\}_{i=1}^N$，属于 $\mathcal{M}$，使得 $\sum E_i = I$ 且 $E_i A E_i = 0$ 对 $1 \le i \le N$ 成立。$_{i=1}$也就是说，A 可以写成如下形式

$$A = \begin{matrix} \\ E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_N \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} E_1 & E_2 & \cdots & E_N \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & 0 & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

那么 $A = BC - CB$，其中

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} & \cdots & B_{1N} \\ B_{21} & 0 & \cdots & B_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N1} & B_{N2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{N}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\frac{(N-1)2\pi i}{N}} \end{pmatrix}$$

并且 B_{kj} 的选取满足 $(e^{(j-1)N^{2\pi i}} - e^{\frac{(k-1)2\pi i}{N}})B_{kj} = A_{kj}$、$1 \leq k$、$j \leq N$ 和 $k \neq j$。

现在，假设 A 是一个自伴元，且满足 $\tau(A) = 0$。再次由定理 3.1

$$A = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & \cdots & E_N \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{12}^* & 0 & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1N}^* & A_{2N}^* & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

于是 $A = D - CDC^*$，其中

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D_{12} & \cdots & D_{1N} \\ D_{12}^* & 0 & \cdots & D_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1N}^* & D_{2N}^* & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{N}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\frac{(N-1)2\pi i}{N}} \end{pmatrix}$$

并且选取 D_{kj}，使得 $(1 - e^{\frac{(k-j)2\pi i}{N}})D_{kj} = A_{kj}, 1 \leq k, j \leq N$和 $k \neq j$。由于 D 是自伴算子，因此当 $\lambda \in \mathbb{R}$足够大时，$D + \lambda \geqslant 0$。令$X := C(D + \lambda)^{\frac{1}{2}},$，我们有 $A = X^*X - XX^*$。□

下面的引理是文献 [19]中的命题 2.10。为方便读者，我们给出完整的证明。

Lemma 4.2. 设 $(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个 II_1型因子，且 $A^* = A \in \mathcal{M}$ 满足 $\tau(A) = 0$。若存在一个酉元 $U \in \mathcal{M}$ 使得 $A + U^*AU = 0$，则 A 可表示为$A = aP + bQ$，其中投影为 $P, Q \in \mathcal{M}$ 和 a, $b \in \mathbb{R}$。

Proof. 令 $B := \frac{A}{\|A\|}$，则 $\tau(B + I) = 1$且 $B + I \geq 0$。由于 $A + U^*AU = 0$,~~$(B+I)+U^*(B+I)U = I$~~)。根据引理 2.2，存在投影 $P, Q \in \mathcal{M}$，使得 $B + I = P + Q$。因此我们有 $A = \|A\|P - \|A\|(I - Q)$。□

以下定理的证明思路源自 [27]。这一结果对 [15] 中的问题 6(2) 给出了肯定的回答。

Theorem 4.3. 设 $(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个 II_1 型因子，且 $A^* = A \in \mathcal{M}$，则 A 是 4 个投影的线性组合。

Proof. 当 $\tau(A) \neq 0$时，通过考虑 $\tau^{A}{}_{A()}$, ~~我~~们可以假设 $\tau(A) = 1$。当 $\tau(A) = 0$ 时的证明类似。通过考虑 $R_A\mathcal{M}R_A$，我们可以假设 $R_A = I$。令 $\mathcal{A}$ 为包含 A的极大阿贝尔冯·诺依曼代数。由于 $\mathcal{M}$ 是一个 II_1 型因子，$\mathcal{A}$ 是弥散的。因此，存在投影 E_1、$E_2 \in \mathcal{A}$，使得 $E_1 + E_2 = I$ 且 $E_1 \sim E_2$。注意，$\mathcal{M} \cong M_2(\mathbb{C}) \otimes E_1\mathcal{M}E_1$。记$\mathcal{N} := E_1\mathcal{M}E_1$。因此，$A - I$ 可写为

$$A - I = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{N},$$

其中 A_1、A_2 是 $\mathcal{N}$中的自伴算子。记

$$A = \begin{pmatrix} A_1 + A_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

由于 $\tau(A - I) = 0$, $\tau_{E_1}(A_1 + A_2) = \frac{\tau}{\tau(A_1+A_2)}\tau(E_1) = 0$。由定理 **4.1**，存在 $X \in \mathcal{N}$ 使得 $A_1 + A_2 = X^*X - XX^*$。由于交换子 $X^*X - XX^* = (X^* + tI)(X + tI) - (X + tI)(X^* + tI)$ $t \in \mathbb{C}$ 的不变性，我们可以假设 X 可逆且$X^*X > 3I$。于是

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} X^*X - XX^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X^*X & 0 \\ 0 & -XX^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -XX^* & 0 \\ 0 & XX^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X^*X & 0 \\ 0 & 2I - XX^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -XX^* - A_2 + I & 0 \\ 0 & XX^* + A_2 - I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由引理 **4.2**，上述等式的最后一项可以写成 $\lambda P_1 - \lambda P_2$，其中$P_1$、$P_2 \in \mathcal{M}$ 是投影，且 $\lambda \in \mathbb{R}$。因此，要证明此定理，我们只需证明上述等式的第一项是两个投影的线性组合。这个结论可见于 [**23**]。为方便读者，我们将重述证明。

令 $B := \begin{pmatrix} X^*X & 0 \\ 0 & 2I - XX^* \end{pmatrix}$。由于可以假设 X 在 $\mathcal{N}$中可逆，根据极分解定理，存在一个酉算子 $U \in \mathcal{N}$和一个可逆正算子 $|X|$，使得 $X = U|X|$。于是我们可以验证

$$B - I = \begin{pmatrix} X^*X - I & 0 \\ 0 & I - XX^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^*X - I & 0 \\ 0 & I - X^*X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix}$$

由于 $X^*X > 3I$, $X^*X - I$ 是一个可逆正算子。任取实数 d 使得 $X^*X - I < dI$，并定义 S_1 和 S_2 为

$$S_1 = \frac{1}{1+d}(X^*X - 1 + d(X^*X - 1)^{-1}) \quad \text{and} \quad S_2 = \frac{1}{d-1}(-X^*X + 1 + d(X^*X - 1)^{-1}).$$

定义 P_3 和 P_4 为

$$P_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I + S_1 & (I - S_1^2)^{\frac{1}{2}} \\ (I - S_1^2)^{\frac{1}{2}} & I - S_1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad P_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I + S_2 & (I - S_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ (I - S_2^2)^{\frac{1}{2}} & I - S_2 \end{pmatrix}.$$

可以验证，P_3, P_4是 $\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{N}$中的投影。定义 $a = 1 + d$和$b = 1 - d$。经计算可得

$$\begin{pmatrix} X^*X - I & 0 \\ 0 & I - X^*X \end{pmatrix} = aP_3 + bP_4 - I.$$

因此，B 是两个投影的线性组合。证明完毕。 □

以下结果对 [**9**] 中的问题 **1.1** 给出了肯定的回答。

THEOREM 4.4. 设 $(\mathcal{M},\tau)$ 是一个有限因子， $X\in\mathcal{M}$。那么存在一个正规算子 $N\in\mathcal{M}$ 和一个幂零算子 K，使得 $X=N+K$。

PROOF. 我们只需考虑 $(\mathcal{M},\tau)$ 是一个 II_1 型因子的情形。根据定理 3.1，存在一个有限个两两正交的非零投影组成的族$N\{E_i\}_{i=1}^N$，位于 $\mathcal{M}$中，使得 $\sum E_i=I$，且对于 $1\le i\le N$，有 $E_iXE_i=\tau(X)E_i$。也就是说， $X_{i=1}$可以写成如下形式

$$X=\begin{array}{c} \\ E_1\\E_2\\\vdots\\E_N\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}E_1&E_2&\cdots&E_N\end{array}\\\begin{pmatrix}\tau(X)&X_{12}&\cdots&X_{1N}\\X_{21}&\tau(X)&\cdots&X_{2N}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\X_{N1}&X_{N2}&\cdots&\tau(X)\end{pmatrix}\end{array}.$$

令 $\lambda:=\tau(X)$，则对于某个 θ，有 $\lambda=\exp(i\theta)|\lambda|$。

Let

$$S=\begin{pmatrix}|\lambda|&\exp(-i\theta)X_{12}&\cdots&\exp(-i\theta)X_{1N}\\\exp(i\theta)X_{12}^*&|\lambda|&\cdots&\exp(-i\theta)X_{2N}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\exp(i\theta)X_{1N}^*&\exp(i\theta)X_{2N}^*&\cdots&|\lambda|\end{pmatrix},$$

则 S 是自伴的。

定义

$$\begin{aligned}K&=X-\exp(i\theta)\begin{pmatrix}|\lambda|&\exp(-i\theta)X_{12}&\cdots&\exp(-i\theta)X_{1N}\\\exp(i\theta)X_{12}^*&|\lambda|&\cdots&\exp(-i\theta)X_{2N}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\exp(i\theta)X_{1N}^*&\exp(i\theta)X_{2N}^*&\cdots&|\lambda|\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\X_{21}-\exp(2i\theta)X_{12}^*&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\X_{N1}-\exp(2i\theta)X_{1N}^*&X_{N2}-\exp(2i\theta)X_{2N}^*&\cdots&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

那么， K 是严格下三角算子，因此是幂零的。记作 $N=\exp(i\theta)S$。那么， N 是正规的，且 $X=N+K$。

□

参考文献

[1] A. Brown、P. Halmos 和 C. Pearcy，《希尔伯特空间上算子的交换子》。《加拿大数学杂志》17 (1965)，695-708。[2] A. Brown 和 C. Pearcy，《算子交换子的结构定理》。《美国数学会通报》70 (1964)，779-780。[3] A. Brown 和 C. Pearcy，《算子的乘法交换子》。《加拿大数学杂志》18 (1966)，737-749。[4] A. Brown 和 C. Pearcy，《III 型因子中的交换子》。《加拿大数学杂志》18 (1966)，1152-1160。

[5] A. Brown 和 C. Pearcy，《算子交换子的结构》。《数学年刊》（第 2 辑）82 (1965)，112-127。[6] Arlen Brown；Carl Pearcy；David Topping，《交换子与强根基》。《杜克数学杂志》35 (1968)，853-859。[7] X. Cao、J. Fang 和 Z. Yao，《关于投影的有限和与 II 型$_1$ 因子的 Dixmier 平均定理》，arXiv:2012.00440。[8] M.D. Choi 和 P. Y. Wu，《正交投影之和》，《泛函分析杂志》267(2014)，第 2 期，384-404。[9] K. Dykema、J. Noles 和 D. Zanin，《有限冯·诺依曼代数中的可分解性与范数收敛性质》。《积分方程与算子理论》90 (2018)，第 5 期，论文编号 54，共 32 页。[10] K. Dykema 和 A. Skripka，《II$_1$因子中的单个交换子》。《美国数学会会刊》140 (2012)，第 3 期，931-940。47B47 (47C15)[11] K. Dykema、F. Sukochev 和 D. Zanin，《II$_1$ 因子中的分解定理》。《纯粹与应用数学杂志》708 (2015)，97-114。[12] T. Fack 和 P. de la Harpe，《连续有限 von Neumann 代数中的交换子之和》。（法文）《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）30 (1980)，第 3 期，49C73。[13] Peter A. Fillmore，《平方为零的算子之和》，《塞格德数学学报》28 (1967)，285-288。[14] Peter A. Fillmore，《关于投影之和》，《泛函分析杂志》4 (1969)，146-152。[15] S. Goldstein 和 A. Paszkiewicz，《von Neumann 代数中投影的线性组合》。《美国数学会会刊》116 (1992)，第 1 期，175-183。[16] S. Goldstein 和 A. Paszkiewicz，《von Neumann 因子中投影的线性组合》。《数学分析与应用杂志》489(1)，124-135，17 (2020)。[17] S. Goldstein 和 A. Paszkiewicz，《III 型因子中投影的线性组合》，《积分方程与算子理论》第 94 卷，文章编号：34(2022)。[18] H. Halpern，《真无限冯·诺依曼代数中的交换子》，《美国数学会汇刊》139 (1969)，55-73。[19] V. Kaftal、P.W. Ng 和 S. Zhang，《von Neumann 因子中投影的强和》，《泛函分析杂志》257 (2009)，2497-2529。[20] L. Marcoux，《少数交换子之和》，《算子理论杂志》56 (2006)，111-142。[21] K. Matsumoto，《作为 5 个投影实线性张成的自伴算子》，《日本数学》29(1984)，第 2 期，291-294。[22] Y. Nakamura，《任意厄米矩阵都是四个投影的线性组合》，《线性代数及其应用》61 (1984)，133-139。[23] KatauyoshiNishio，《两个投影实线性组合的结构》。《线性代数及其应用》66 (1985)，169-176。[24] A. Paszkiewicz，《任意自伴算子都是投影算子的有限线性组合》，《波兰科学院通报，数学、天文学与物理学丛刊》28 (1980)，第 7-8 期，337-345(1980)。[25] C. Pearcy 和 D. Topping，《少数幂等元之和》，《密歇根数学杂志》14 (1967)，453-465。[26] C. Pearcy 和 D. Topping，《交换子与某些 II$_1$ 因子》。《泛函分析杂志》3 (1969)，69-78。[27] V. Rabanovich，《每个有界自伴算子都是 4 个正交投影的实线性组合》，arXiv:1608.04445v1[28] K. Shoda，《关于矩阵的一些定理》，《日本数学杂志》13 (1937)，第 3 期，361-365。[29] S. Wen 和 L. Cao，《关于 II$_1$ 因子中算子的各向同性子空间》，预印本。

关于 Diximier 关于 II_1 型因子中算子的平均定理 13

School of Mathematics and Information Sciences,
China West Normal Univer-sity, Nanchong, Sichuan, 637000, China电子邮箱:
shilinwen127@hotmail.comSchool of Mathematical Sciences,
Hebei Normal University, Shijiazhuang, Hebei, 050024, China电子邮箱:
jfang@hebtu.edu.cnSchool of Mathematical Sciences, Hebei Normal University,
Shijiazhuang, Hebei, 050024, China电子邮箱：zyao@hebtu.edu.cn