arXiv:2303.10641v1 [math.ST] 19 Mar 2023

基于空间符号的高维白噪声检验

Ping Zhao、Dachuan Chen 和 Zhaojun Wang，南开大学

摘要

本文提出了一种用于高维白噪声检验的基于空间符号的检验程序。我们建立了该检验的极限零分布，并在某些特殊备择假设下，给出了相对于 Feng 等人（2022）提出的检验的渐近相对效率。模拟研究还表明，该检验对于重尾分布具有较高的效率和稳健性。

关键词：高维数据、空间符号、白噪声检验

1 引言

本文研究白噪声或序列相关检验，这是统计推断中的一个基本问题。对于单变量时间序列，著名的 Box-Pierce portmanteau 检验及其变体因便于实际应用而广受欢迎（Li，2004；L¨utkepohl，2005）。许多研究致力于将这些方法扩展至多变量时间序列检验，例如 Hosking（1980）；Li 和 Mcleod（1981）。近年来，高维时间序列数据频繁出现在许多应用领域，包括金融和计量经济学、生物学和环境研究等；在这些领域中，时间序列的维度与观测长度相当，甚至更大。在这种情况下，上述传统白噪声检验无法直接应用于高维数据。

近年来，人们提出了两类综合检验来处理高维白噪声检验问题。一类是最大值型检验。Chang 等人（2017）利用分量序列的最大绝对自相关和交叉相关构造了检验统计量。Tsay（2020）利用 Spearman 秩相关提出了基于秩的最大值型检验。Chen 和 Feng（2022）将 Tsay（2020）的工作扩展到其他类型的基于秩的相关指标，例如 Kendall tau 相关和 Hoeffding D 统计量等。众所周知，最大值型检验在稀疏备择下表现良好，即只有少数自相关

非零且较大；但在稠密备择下检验效能较低，因为此时许多自相关均为较小的非零值。因此，研究人员针对高维白噪声检验提出了和型检验。Li 等人（2019）利用若干滞后样本自协方差矩阵的奇异值平方之和构造了检验统计量。Feng 等人（2022）通过剔除 Li 等人（2019）所提检验统计量中的若干项，提出了一种新的和型检验统计量，并表明其尺寸表现更好。然而，上述两种和型检验均基于独立成分模型，该模型仅允许时间序列的底层分布为轻尾分布。遗憾的是，对于许多应用场景（例如股票证券收益），轻尾分布这一假设可能并不合适。因此，我们需要构建一种适用于重尾分布的稳健高维白噪声检验程序。

经典的基于空间符号的程序在传统多元分析中具有很强的稳健性和效率，综述可参见 Oja（2010）。近年来，许多文献表明，基于空间符号的程序在高维情形下也表现出色。Wang 等人（2015）、Feng 和 Sun（2016）以及 Feng 等人（2021）针对高维单样本位置问题提出了一些基于空间符号的检验程序。Feng 等人（2016）和 Huang 等人（2022）研究了高维双样本位置问题。Zou 等人（2014）和 Feng 和 Liu（2017）还将基于空间符号的方法扩展到高维球形性检验。Liu 等人（2023）、Zhao 等人（2022）和 Zhao（2023）提出了一些用于因子定价模型中高维 α 检验的基于空间符号的检验程序。在一项重要研究中，Paindaveine 和 Verdebout（2016）提出了一种基于空间符号的检验，用于检验独立同分布性，以对抗序列相关。然而，他们假设随机向量具有相互独立的球面方向，这一假设在应用中限制过大。实际上，随机向量之间总是存在一定的相关性。因此，本文提出一种新的基于空间符号的高维白噪声检验程序。在椭圆对称分布假设下，我们建立了所提出检验统计量在原假设和一种特殊备择假设下的渐近正态性。我们还表明，我们的方法相对于 Feng 等人（2022）所提出检验的渐近相对效率，与高维情形下基于空间符号的方法相对于基于最小二乘的程序的相应渐近相对效率相同（Wang 等人（2015）；Feng 和 Sun（2016）；Liu 等人（2023）；Zhao（2023））。模拟研究还表明，我们的方法在重尾分布下具有优越性。

本文结构如下。第 2 节介绍我们提出的基于空间符号的高维白噪声检验程序，并建立相应的理论结果。第 3 节展示模拟研究。所有技术细节汇总于第 4 节。

2 检验程序

设 ε_1、$\cdots$、ε_n 是一个均值为零的 p 维弱平稳时间序列。我们考虑以下检验问题：

$$H_0 : \{\varepsilon_t\} \, is \; white \; noise \; v.s. \; H_1 : \{\varepsilon_t\} \; is \; not \; white \; noise, \tag{2.1}$$

其中，时间序列 p 的维数与样本量n相当，甚至更大。在原假设下，$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+k}^\top) = \mathbf{0}$。因此，Li 等人（2019）提出了以下检验统计量

$$G_H = \sum_{h=1}^{H} \mathrm{tr}(\hat{\mathbf{S}}_h^\top \hat{\mathbf{S}}_h), \; \hat{\mathbf{S}}_h = \frac{1}{n} \sum_{t=h+1}^{n} \varepsilon_t \varepsilon_{t-h}^\top.$$

他们利用随机矩阵理论建立了 G_H 的渐近正态性。Feng 等人（2022）从求和中去除了对角元素 $\varepsilon_i^\top \varepsilon_i \varepsilon_{i+h}^\top \varepsilon_{i+h}$，并提出了以下检验统计量

$$T_{FLM} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{h=1}^{H} \sum \sum_{s \neq t} \varepsilon_t^\top \varepsilon_s \varepsilon_{t+h}^\top \varepsilon_{s+h}.$$

他们还利用鞅中心极限定理建立了 T_{FLM} 的渐近正态性。上述两种检验都需要满足独立分量模型假设，即$\varepsilon_t = \mathbf{S}^{1/2} \mathbf{z}_t$ 且 $\mathbf{z}_t = (z_{t1}, \cdots, z_{tp})^\top$ 是由 p维、具有独立分量的独立随机向量组成的序列。然而，独立分量模型的一个常见缺点是无法处理许多众所周知的重尾分布，例如多元 Student t 分布和多元正态分布混合。因此，我们需要针对重尾分布提出一种稳健高效的检验程序。

在 ε_t 具有独立球面方向的假设下，Paindaveine 和 Verdebout（2016）提出了一种标准化检验统计量

$$T_{PV} = \frac{\sqrt{2p^2}}{\sqrt{H}} \sum_{h=1}^{H} \frac{1}{n-h} \sum_{h+1 \leq s < t \leq n} \boldsymbol{U}_{s-h}^\top \boldsymbol{U}_{t-h} \boldsymbol{U}_s^\top \boldsymbol{U}_t \tag{2.2}$$

其中 $\boldsymbol{U}_t = U(\varepsilon_t)$ 和 $U(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||} I(\boldsymbol{x} \neq 0)$。他们证明，在原假设下，当 n 时，$T_{PV} \xrightarrow{d} N(0, 1)$，$p \to \infty$。然而，独立球面方向的假设在实践中往往并不成立。此外，他们没有给出 T_{PV}在备择假设下的功效函数。因此，我们需要在更一般的散布矩阵假设下建立基于空间符号的检验统计量的理论结果。

我们考虑以下检验统计量

$$T_S = \sum_{h=1}^{H} \frac{1}{n-h} \sum_{h+1 \leq s < t \leq n} \boldsymbol{U}_{s-h}^\top \boldsymbol{U}_{t-h} \boldsymbol{U}_s^\top \boldsymbol{U}_t \tag{2.3}$$

它与检验统计量 (2.2) 类似。接下来，我们将证明，在原假设下， T_S 的渐近方差为 $\frac{H}{2}\text{tr}^2(\Omega^2)$，且 $\Omega = E(\boldsymbol{U}_t\boldsymbol{U}_t^\top)$；当 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 具有独立球面方向时，该方差等于 $\frac{H}{2}p^2$。

我们需要满足以下条件：

(C1)（误差分布）误差向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是来自 p 维零均值椭圆分布的独立同分布样本，其概率密度函数为：

$$\det(\boldsymbol{\Xi})^{-1/2} g(\|\boldsymbol{\Xi}^{-1/2}\boldsymbol{\varepsilon}\|),\ \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^p.$$

其中 $\boldsymbol{\Xi}$ 是正定散布矩阵。

(C2)（协方差矩阵）$\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^4) = o(\text{tr}^2(\boldsymbol{\Sigma}^2))$ 和 $\frac{\text{tr}^4(\boldsymbol{\Sigma})}{\text{tr}^2(\boldsymbol{\Sigma}^2)} \exp\left\{-\frac{\text{tr}^2(\boldsymbol{\Sigma})}{128N\lambda_{\max}^2(\boldsymbol{\Sigma})}\right\} \to 0$ 其中 $\boldsymbol{\Sigma} = \text{Cov}(\boldsymbol{e}_t) \doteq (\sigma_{ij})_{1\le i,j\le N}$ 且 $\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Sigma})$ 是 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的最大特征值。

在条件 (C1) 下， $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 可以分解为 $\boldsymbol{\Xi}^{1/2}R_iu_i$，其中 u_i 是在 $\mathbb{R}^p$ 中单位球面上均匀分布的随机向量， R_i 是与 u_i 相互独立的非负随机变量。协方差矩阵可写为 $\boldsymbol{\Sigma} = p^{-1}E(R_i^2)\boldsymbol{\Xi}$。条件 (C2) 与 Wang 等人（2015）中的条件 (C1) 和 (C2) 相同。若 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的特征值均有界，则条件 (C2) 成立。

定理 1 在条件 (C1)-(C2) 下，我们有 $T_S/\sigma_S \xrightarrow{d} N(0,1)$，其中 $\sigma_S^2 = \frac{H}{2}\text{tr}^2(\Omega^2)$。

然后，我们将 $\text{tr}(\Omega^2)$ 估计为

$$\widehat{\text{tr}(\boldsymbol{\Omega}^2)} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1\le s<t\le n} (\boldsymbol{U}_s^\top \boldsymbol{U}_t)^2.$$

根据 Zhao（2023）的命题 1，在原假设下，我们有 $\text{tr}(\Omega^2)/\text{tr}(\Omega^2) \xrightarrow{p} 1$，其中 $n, p \to \infty$。因此，根据定理 1，若 $T_S/\hat{}\sigma_S > z_\alpha$，则拒绝原假设，其中 $\hat{}\sigma_S^2 = \frac{H}{2}\text{tr}^2(\Omega^2)$，且 z_α 是标准正态分布的上 α 分位数。

接下来，我们考虑检验程序的功效函数。具体而言，我们考虑以下备择假设：

$$H_1 : \boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{A}_0 r_t \boldsymbol{u}_t + \mathbf{A}_1 r_{t-1}\boldsymbol{u}_{t-1} \tag{2.4}$$

其中， $\boldsymbol{u}_t$ 是一个在 $\mathbb{R}^p$ 的单位球面上均匀分布的随机向量， r_t 是一个与 $\boldsymbol{u}_t$相互独立的非负随机变量。令 $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \mathrm{A}_0^\top \mathrm{A}_0$， $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \mathrm{A}_1^\top \mathrm{A}_1$，且 $\boldsymbol{\Sigma}_{01} = \mathrm{A}_0^\top \mathrm{A}_1$。我们还对 A_0 和 A_1作如下假设：

(C3) $\boldsymbol{\Sigma}_0$ 的特征值均有界，且 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_1) = O(p/n)$、$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_1^2) = O(p/n)$、$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0\boldsymbol{\Sigma}_1) = O(p/n)$。

定理 2 在 H_1 in (2.4) 满足条件（C3）的情况下，若 $p/n \to \gamma \in (0, \infty)$，则对于 $H = 1$,

$$\frac{T_S - \frac{1}{2}c_1^2\omega^4 np^{-2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0\boldsymbol{\Sigma}_1)}{\sqrt{1/2}p^{-2}\omega^4\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0^2)} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

其中 $c_1 = E(r_t)E(r_t^{-1})$，且 $\omega = p^{-1/2}\mathrm{tr}^{1/2}(\boldsymbol{\Sigma}_0)$。

注意，在条件（C3）下，在原假设下有 $\mathrm{tr}(\Omega^2) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0^2)\mathrm{tr}^2(\boldsymbol{\Sigma}_0)(1 + o(1))$。因此，根据定理 2，$T_S$ 的功效函数为

$$\beta_S = \lim_{n,p\to\infty} \Phi\left(-z_\alpha + \frac{c_1^2 n\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0\boldsymbol{\Sigma}_1)}{\sqrt{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0^2)}\right).$$

此外，根据 Feng 等人（2022）的定理 5，Feng 等人（2022）提出的和型检验的功效函数为

$$\beta_{FLM} = \lim_{n,p\to\infty} \Phi\left(-z_\alpha + \frac{nE^2(r_t)\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0\boldsymbol{\Sigma}_1)}{\sqrt{2}E(r_t^2)\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0^2)}\right)$$

在条件（C3）下。因此，我们的 SS检验相对于 FLM检验的渐近相对效率为

$$ARE(SS, FLM) = \lim_{p\to\infty} E^2(r_t^{-1})E(r_t^2) \geq \lim_{p\to\infty}\{E(r_t)E(r_t^{-1})\}^2 \geq 1$$

根据柯西不等式。接下来，我们考虑 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 的三种特殊分布：

(1) $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$. So, $r_t E(r_t^{-1}) \xrightarrow{p} 1$ and then $ARE(SS, FLM) = 1$.

(2) $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim t_p(\mathbf{0}, \mathrm{I}_p, v)$。因此

$$E(r_t^{-1}) = \frac{\Gamma\{(v+1)/2\}}{v^{1/2}\Gamma(v/2)}\frac{\Gamma\{(p-1)/2\}}{\Gamma(p/2)}, E(r_t^2) = \frac{pv}{v-2}$$

然后

$$ARE(SS, FLM) = \frac{2}{v-2}\left(\frac{\Gamma((v+1)/2)}{\Gamma(v/2)}\right)^2 > 1.$$

对于 $v = 3$，该值约为 2.54；对于 $v = 4$，约为 1.76；对于 $v = \infty$ （多元正态分布），它收敛于 1。

(3) $\varepsilon_t \sim (1-v)N(0, I_p) + vN(0, \sigma^2 I_p)$。因此

$$E(r_t^{-1}) = \frac{\{v+(1-v)/\sigma\}\{v+(1-v)\sigma^2\}^{1/2}}{2^{1/2}} \frac{\Gamma\{(p-1)/2\}}{\Gamma(p/2)}, E(r_t^2) = p(1-v+v\sigma^2)$$

然后

$$ARE(SS, FLM) = \frac{1+v(1-v)\left(\sigma-\sigma^{-1}\right)^2}{1+v(1-v)\left(1-\sigma^{-1}\right)^2} > 1.$$

3 模拟

我们将本方法与 Chang、Yao 和 Zhou（2017）提出的最大值型检验（简称 MAX）、和型检验（简称 FLM），以及 Feng 等人（2022）提出的 Fisher合并概率检验（简称 FC）进行比较。首先，我们考虑原假设。为了验证所提出检验方法的稳健性，我们针对 ε_t考虑以下三种情形：

（I）多元正态分布。 $\varepsilon_t \overset{i.i.d}{\sim} N(0, \Sigma)$;

（II）多元 t 分布。 $\varepsilon_t \overset{i.i.d}{\sim} t(0, \Sigma, 3)$;

（III）多元混合正态分布。 ε_t相互独立地由 $\gamma f_p(0, \Sigma)+(1-\gamma) f_p(0, 9\Sigma)$生成，记为 $MN_{p,\gamma,9}(0, \Sigma)$，其中 $f_p(\cdot;\cdot)$是 p元多元正态分布的密度函数。 γ 取值为 0.8。

其中 $\Sigma = (\sigma_{ij})_{1\le i,j\le p}$, $\sigma_{ii} = 1$, $i = 1, \cdots, p$, $\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(i-j)^{-2}$，且 $i \neq j$。表1报告了在 $n = 100$、200 和 $p = 40$、80、100 条件下，SS、MAX、FLM、FC检验的经验尺寸。从表1可以看出，在大多数情况下，FLM和SS检验都能控制经验尺寸。然而，在多元正态分布下，MAX检验的经验尺寸略显保守；而在多元 t 分布下，其经验尺寸略高于名义水平。FC检验的经验尺寸表现也与MAX检验相同。

接下来，我们比较上述四种检验的经验功效表现。我们考虑了以下三种 ε_t模型：

(i) VAR(1)模型： $\varepsilon_t = A\varepsilon_{t-1} + z_t$；(ii) VMA(1)模型： $\varepsilon_t = z_t + Az_{t-1}$；(iii) VARMA(1)模型： $\varepsilon_t = 0.5A\varepsilon_{t-1} + z_t + 0.5Az_{t-1}$。

表1：不同检验的尺寸表现。

		$H=1$				$H=2$				$H=3$			
n	p	MAX	SS	FLM	FC	MAX	SS	FLM	FC	MAX	SS	FLM	FC
		多元正态分布											
100	40	0.011	0.053	0.055	0.042	0.005	0.051	0.052	0.028	0.008	0.042	0.044	0.023
100	80	0.008	0.035	0.041	0.022	0.008	0.038	0.039	0.019	0.007	0.059	0.058	0.03
100	120	0.003	0.049	0.049	0.029	0.008	0.057	0.059	0.029	0.006	0.053	0.052	0.017
200	40	0.015	0.069	0.061	0.046	0.017	0.062	0.058	0.048	0.017	0.037	0.044	0.037
200	80	0.014	0.054	0.051	0.038	0.018	0.053	0.059	0.031	0.012	0.05	0.05	0.038
200	120	0.01	0.05	0.051	0.035	0.011	0.054	0.05	0.031	0.012	0.044	0.039	0.016
		多元 t 分布											
100	40	0.068	0.053	0.049	0.079	0.082	0.059	0.052	0.079	0.097	0.065	0.044	0.104
100	80	0.067	0.049	0.047	0.074	0.11	0.047	0.054	0.118	0.115	0.039	0.044	0.116
100	120	0.088	0.04	0.045	0.091	0.11	0.045	0.036	0.113	0.132	0.045	0.036	0.129
200	40	0.075	0.06	0.046	0.095	0.097	0.058	0.056	0.115	0.126	0.061	0.046	0.133
200	80	0.1	0.049	0.04	0.107	0.14	0.048	0.029	0.131	0.177	0.061	0.037	0.173
200	120	0.113	0.05	0.053	0.11	0.162	0.047	0.048	0.166	0.22	0.06	0.05	0.207
		多元正态分布混合											
100	40	0.035	0.057	0.058	0.072	0.047	0.068	0.05	0.056	0.029	0.043	0.052	0.051
100	80	0.047	0.046	0.048	0.075	0.039	0.041	0.038	0.051	0.043	0.036	0.037	0.045
100	120	0.04	0.046	0.045	0.058	0.046	0.048	0.041	0.057	0.033	0.05	0.053	0.049
200	40	0.031	0.054	0.055	0.068	0.031	0.052	0.047	0.052	0.025	0.059	0.045	0.049
200	80	0.044	0.053	0.061	0.064	0.045	0.052	0.063	0.073	0.038	0.051	0.036	0.066
200	120	0.035	0.054	0.049	0.058	0.049	0.049	0.048	0.067	0.045	0.034	0.039	0.064

这里，“VAR(1)”、“VMA(1)”和“VARMA(1)”分别是一阶向量自回归过程、向量移动平均过程和一阶向量自回归移动平均过程的简称。这里，$\mathbf{z}_t$ 由情景（I）–（III）在 $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{I}_p$下生成。令 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\le i,\ j\le p}$。对于 $1 \le i、\ j \le m$和 $a_{ij} = 0$，我们分别考虑满足 $a_{ij} \neq 0$ 的备择假设以及其他情形。这里，m 控制 A 的信号强度和稀疏性。对于 m，我们考虑两种情形：(1) 稠密情形：$m = [0.8p]$，且 $1 \le i、\ j \le m$时满足 $a_{ij} \sim U(-\frac{1}{4\sqrt{m}}, \frac{1}{4\sqrt{m}})$；(2) 稀疏情形：$m = [0.05p]$，且 $1 \le i、\ j \le m$时满足 $a_{ij} \sim U(-\frac{3}{4\sqrt{m}}, \frac{3}{4\sqrt{m}})$。表2报告了在 $n = 200$、$p = 80$下上述四种检验的经验功效。在多元正态分布下，SS检验的表现与FLM检验相近，这与理论结果一致。在稠密情形下，和型检验——SS和FLM的功效优于MAX和FC检验。然而，在稀疏情形下，MAX和FC检验优于SS和FLM检验。对于重尾分布，我们的SS检验表现优于FLM检验，这体现了基于空间符号的方法的优势。此外，我们发现，当 $H = 1$ 时，SS和FLM检验的功效高于

那些带有 $H=2$ 的检验为 3。这并不奇怪，因为我们考虑的是一阶备择假设。一般情况下如何选择最佳的 H，还值得进一步研究。

表2：带有 $n=200$、$p=80$ 的不同检验的功效表现。

		$H=1$				$H=2$				$H=3$			
模型		MAX	SS	FLM	FC	MAX	SS	FLM	FC	MAX	SS	FLM	FC
		多元正态分布											
稠密	(i)	0.021	0.729	0.725	0.585	0.024	0.497	0.51	0.35	0.02	0.38	0.39	0.262
	(ii)	0.016	0.698	0.71	0.559	0.016	0.46	0.465	0.318	0.015	0.358	0.374	0.222
	(iii)	0.01	0.732	0.737	0.595	0.016	0.49	0.484	0.348	0.011	0.368	0.379	0.242
稀疏	(i)	0.733	0.613	0.625	0.852	0.701	0.528	0.534	0.802	0.658	0.417	0.423	0.742
	(ii)	0.464	0.371	0.374	0.603	0.383	0.234	0.24	0.482	0.326	0.185	0.191	0.411
	(iii)	0.603	0.476	0.488	0.738	0.524	0.303	0.32	0.622	0.467	0.254	0.261	0.563
		多元 t 分布											
稠密	(i)	0.193	0.952	0.718	0.673	0.188	0.809	0.482	0.487	0.204	0.637	0.39	0.44
	(ii)	0.195	0.939	0.709	0.669	0.192	0.745	0.445	0.456	0.213	0.588	0.366	0.427
	(iii)	0.174	0.939	0.736	0.674	0.197	0.758	0.497	0.477	0.238	0.629	0.379	0.449
稀疏	(i)	0.766	0.879	0.597	0.862	0.768	0.813	0.506	0.834	0.745	0.708	0.436	0.813
	(ii)	0.595	0.559	0.361	0.697	0.546	0.353	0.235	0.609	0.536	0.266	0.194	0.594
	(iii)	0.688	0.739	0.456	0.791	0.683	0.567	0.309	0.742	0.636	0.43	0.243	0.684
		多元正态分布混合											
稠密	(i)	0.059	0.931	0.748	0.641	0.048	0.771	0.533	0.429	0.052	0.596	0.379	0.311
	(ii)	0.042	0.917	0.723	0.612	0.043	0.703	0.49	0.388	0.058	0.525	0.386	0.305
	(iii)	0.042	0.938	0.743	0.609	0.056	0.723	0.47	0.368	0.055	0.571	0.382	0.301
稀疏	(i)	0.75	0.846	0.597	0.86	0.736	0.771	0.513	0.807	0.697	0.667	0.444	0.778
	(ii)	0.486	0.515	0.363	0.635	0.438	0.341	0.245	0.531	0.399	0.267	0.195	0.472
	(iii)	0.635	0.711	0.488	0.778	0.585	0.544	0.323	0.669	0.523	0.413	0.255	0.605

4 附录

4.1 定理1的证明

定义

$$V_{nj}=\sum_{l=1}^{H}\frac{1}{n-l}\sum_{i=l+1}^{j-1}\boldsymbol{U}_{i-l}^{\top}\boldsymbol{U}_{j-l}\boldsymbol{U}_{i}^{T}\boldsymbol{U}_{j},$$

对于 $j\in\{3,\cdots,n\}$和 $W_{nk}=\sum_{i=3}^{k}V_{ni},\quad k\in\{3,\cdots,n\}$。令 $\mathcal{F}_i\doteq\sigma\{\boldsymbol{U}_1,\cdots,\boldsymbol{U}_i\}$为由 $\{\boldsymbol{U}_j\}_{j\le i}$生成的$\sigma$域。容易证明 $\mathbb{E}(V_{ni}|\mathcal{F}_{i-1})=0$，由此可得

$\{W_{nk}, \mathcal{F}_k : \ 3 \le k \le n\}$ 是一个零均值鞅。令 $v_{ni} = \mathbb{E}(V_{ni}^2|\mathcal{F}_{i-1}), \ \ 3 \le i \le n$ 和$V_n = \sum_{i=3}^n v_{ni}$。
如果我们能够证明以下结论，则中心极限定理（Hall and Hyde，1980）成立

$$\frac{V_n}{\mathrm{Var}(W_{nn})} \xrightarrow{p} 1, \tag{4.1}$$

并且对于任意 $\epsilon > 0$,

$$\sum_{i=3}^{n} \sigma_S^{-2} E\left[V_{ni}^2 \mathbb{I}\left\{|V_{ni}| > \epsilon\sigma_S\right\} |\mathcal{F}_{i-1}\right] \xrightarrow{p} 0. \tag{4.2}$$

可以证明,

$$\begin{aligned} v_{ni} =& \sum_{h,g=1}^{H} \frac{1}{(n-h)(n-g)} \sum_{s=h+1}^{i-1} \sum_{t=g+1}^{i-1} E(\boldsymbol{U}_{s-h}^\top \boldsymbol{U}_{i-h} \boldsymbol{U}_s^T \boldsymbol{U}_i \boldsymbol{U}_{t-g}^\top \boldsymbol{U}_{i-g} \boldsymbol{U}_t^T \boldsymbol{U}_i \mid \mathcal{F}_{i-1}) \\ =& \sum_{h=1}^{H} \frac{1}{(n-h)^2} \sum_{s=h+1}^{i-1} (\boldsymbol{U}_{s-h}^\top \boldsymbol{U}_{i-h})^2 \boldsymbol{U}_s^\top \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{U}_s \\ &+ \sum_{h=1}^{H} \frac{2}{(n-h)^2} \sum_{h+1 \le s < t \le i-1} \boldsymbol{U}_{s-h}^\top \boldsymbol{U}_{i-h} \boldsymbol{U}_{t-h}^\top \boldsymbol{U}_{i-h} \boldsymbol{U}_s^\top \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{U}_t \end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned} \frac{V_n}{\mathrm{Var}(W_{nn})} =& \sigma_S^{-2} \sum_{i=3}^{n} \sum_{h=1}^{H} \frac{1}{(n-h)^2} \sum_{s=h+1}^{i-1} (\boldsymbol{U}_{s-h}^\top \boldsymbol{U}_{i-h})^2 \boldsymbol{U}_s^\top \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{U}_s \\ &+ \sigma_S^{-2} \sum_{i=3}^{n} \sum_{h=1}^{H} \frac{2}{(n-h)^2} \sum_{h+1 \le s < t \le i-1} \boldsymbol{U}_{s-h}^\top \boldsymbol{U}_{i-h} \boldsymbol{U}_{t-h}^\top \boldsymbol{U}_{i-h} \boldsymbol{U}_s^\top \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{U}_t \\ \doteq& C_{n1} + C_{n2} \end{aligned}$$

简单代数导致

$$E(C_{n1}) = \frac{2}{H} \sum_{h=1}^{H} \frac{1}{(n-h)^2} \sum_{i=h+2}^{n} (i-h-1) = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^{H} \frac{n-h-1}{n-h} \to 1,$$

作为 $n \to \infty$。并且

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(C_{n1}) &\le H\sigma_S^{-4} \sum_{h=1}^{H} \frac{1}{(n-h)^4} \mathrm{Var}\left[\sum_{i=3}^{n} \sum_{s=h+1}^{i-1} (\boldsymbol{U}_{s-h}^\top \boldsymbol{U}_{i-h})^2 \boldsymbol{U}_s^\top \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{U}_s\right] \\ &\le \frac{H}{(n-H)^4 \sigma_S^4} \sum_{h=1}^{H} \mathrm{Var}\left[\sum_{i=3}^{n} \sum_{s=h+1}^{i-1} (\boldsymbol{U}_{s-h}^\top \boldsymbol{U}_{i-h})^2 \boldsymbol{U}_s^\top \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{U}_s\right] \end{aligned}$$

$$= O\left(n^{-1}\frac{E^2((\boldsymbol{U}_t^\top \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{U}_t)^2)}{\mathrm{tr}^4(\boldsymbol{\Omega}^2)}\right) \to 0$$

根据引理1　根据 Wang 等人（2015）。因此，我们有 $C_{n1} \xrightarrow{p} 1$。类似地， $E(C_{n2}) = 0$ an　　d

$$\mathrm{Var}(C_{n2}) = O\left\{\frac{E^2\left\{\left(\boldsymbol{U}_1^T\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{U}_2\right)^2\right\} + n^{-1}E^2\left\{\left(\boldsymbol{U}_1^T\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{U}_1\right)^2\right\}}{\mathrm{tr}^4(\boldsymbol{\Omega}^2)}\right\} \to 0,$$

因此 $C_{n2} \xrightarrow{p} 0$。由此，(4.1) 成立。

为了证明 (4.2)，我们只需证明

$$\sum_{i=3}^{n} E(V_{ni}^4) = o(\sigma_S^4).$$

根据 Wang 等人（2015）中的引理1，我们可以证明

$$\sum_{i=3}^{n} E(V_{ni}^4) = O(n^{-2}E^2(\boldsymbol{U}_1^\top\boldsymbol{U}_2)^4 + n^{-1}E^2((\boldsymbol{U}_1^\top\boldsymbol{U}_2)^2(\boldsymbol{U}_1^\top\boldsymbol{U}_3)^2)) = o(\mathrm{tr}^4(\boldsymbol{\Omega}^2)).$$

至此，证明完成。 □

4.2 定理2的证明

$$\begin{aligned}
U(\boldsymbol{\varepsilon}_t) =& U(\mathbf{A}_0 r_t\boldsymbol{u}_t + \mathbf{A}_1 r_{t-1}\boldsymbol{u}_{t-1}) = \frac{\mathbf{A}_0 r_t\boldsymbol{u}_t + \mathbf{A}_1 r_{t-1}\boldsymbol{u}_{t-1}}{||\mathbf{A}_0 r_t\boldsymbol{u}_t + \mathbf{A}_1 r_{t-1}\boldsymbol{u}_{t-1}||} \\
=& \frac{\mathbf{A}_0 r_t\boldsymbol{u}_t + \mathbf{A}_1 r_{t-1}\boldsymbol{u}_{t-1}}{r_t p^{-1/2}\mathrm{tr}^{1/2}(\boldsymbol{\Sigma}_0)}\frac{r_t p^{-1/2}\mathrm{tr}^{1/2}(\boldsymbol{\Sigma}_0)}{||\mathbf{A}_0 r_t\boldsymbol{u}_t + \mathbf{A}_1 r_{t-1}\boldsymbol{u}_{t-1}||} \\
=& (\mathbf{A}_0 p^{-1/2}\mathrm{tr}^{1/2}(\boldsymbol{\Sigma}_0)\boldsymbol{u}_t + \mathbf{A}_1 r_{t-1}r_t^{-1}p^{-1/2}\mathrm{tr}^{1/2}(\boldsymbol{\Sigma}_0)\boldsymbol{u}_{t-1})(1+\gamma_t)^{-1/2}
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\gamma_t &= \frac{||\mathbf{A}_0 r_t\boldsymbol{u}_t + \mathbf{A}_1 r_{t-1}\boldsymbol{u}_{t-1}||^2}{r_t^2 p^{-1}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0)} - 1 \\
&= \frac{r_t^2\boldsymbol{u}_t^\top\boldsymbol{\Sigma}_0\boldsymbol{u}_t + 2r_t r_{t-1}\boldsymbol{u}_t^\top\boldsymbol{\Sigma}_{01}\boldsymbol{u}_{t-1} + r_{t-1}^2\boldsymbol{u}_{t-1}^\top\boldsymbol{\Sigma}_1\boldsymbol{u}_{t-1}}{r_t^2 p^{-1}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0)} - 1 \\
&= \left(\frac{\boldsymbol{u}_t^\top\boldsymbol{\Sigma}_0\boldsymbol{u}_t}{p^{-1}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0)} - 1\right) + \frac{2r_{t-1}\boldsymbol{u}_t^\top\boldsymbol{\Sigma}_{01}\boldsymbol{u}_{t-1}}{r_t p^{-1}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0)} + \frac{r_{t-1}^2\boldsymbol{u}_{t-1}^\top\boldsymbol{\Sigma}_1\boldsymbol{u}_{t-1}}{r_t^2 p^{-1}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0)} \\
&= G_1 + G_2 + G_3.
\end{aligned}$$

根据 Zou 等人（2014）的引理4和条件（C3），我们有 $E(G_1^2) = O(\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0^2)/p^2) = O(p^{-1})$ $E(G_2^2) = O(\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0\boldsymbol{\Sigma}_1)/p^2) = O(p^{-1}n^{-1})$，并且 $E(G_3^2) = O(p^{-2}(\mathrm{tr}^2(\boldsymbol{\Sigma}_1) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_1^2))) =$

$O(n^{-1}p^{-1}+n^{-2})$。因此 $\gamma_t = O_p(p^{-1/2})$。于是，采用与 Zhao 等人（2022）定理 1 的证明相同的步骤，我们有

$$\begin{aligned}
T_S =& \frac{1}{n-1}\sum_{2\le s<t\le n} \boldsymbol{U}_{s-1}^\top \boldsymbol{U}_{t-1}\boldsymbol{U}_s^\top \boldsymbol{U}_t \\
=& \frac{1}{n-1}\sum_{2\le s<t\le n} (\mathbf{A}_0 p^{-1/2}\mathrm{tr}^{1/2}(\boldsymbol{\Sigma}_0)\boldsymbol{u}_{s-1} + \mathbf{A}_1 r_{s-2}r_{s-1}^{-1}p^{-1/2}\mathrm{tr}^{1/2}(\boldsymbol{\Sigma}_0)\boldsymbol{u}_{s-2})^\top \\
&\times (\mathbf{A}_0 p^{-1/2}\mathrm{tr}^{1/2}(\boldsymbol{\Sigma}_0)\boldsymbol{u}_{t-1} + \mathbf{A}_1 r_{t-2}r_{t-1}^{-1}p^{-1/2}\mathrm{tr}^{1/2}(\boldsymbol{\Sigma}_0)\boldsymbol{u}_{t-2}) \\
&\times (\mathbf{A}_0 p^{-1/2}\mathrm{tr}^{1/2}(\boldsymbol{\Sigma}_0)\boldsymbol{u}_{s} + \mathbf{A}_1 r_{s-1}r_{s}^{-1}p^{-1/2}\mathrm{tr}^{1/2}(\boldsymbol{\Sigma}_0)\boldsymbol{u}_{s-1})^\top \\
&\times (\mathbf{A}_0 p^{-1/2}\mathrm{tr}^{1/2}(\boldsymbol{\Sigma}_0)\boldsymbol{u}_{t} + \mathbf{A}_1 r_{t-1}r_{t}^{-1}p^{-1/2}\mathrm{tr}^{1/2}(\boldsymbol{\Sigma}_0)\boldsymbol{u}_{t-1}) + o_p(p^{-1})
\end{aligned}$$

令 $\omega = p^{-1/2}\mathrm{tr}^{1/2}(\boldsymbol{\Sigma}_0)$ $\delta_t = r_{t-1}r_t^{-1}$。我们可以将 T_S 分解为

$$\begin{aligned}
T_S =& \frac{\omega^4}{n-1}\sum_{2\le s<t\le n} \boldsymbol{u}_s^\top \mathbf{A}_0^\top \mathbf{A}_0 \boldsymbol{u}_t \boldsymbol{u}_{t-1}^\top \mathbf{A}_0^\top \mathbf{A}_0 \boldsymbol{u}_{s-1} + \frac{\omega^4}{n-1}\sum_{2\le s<t\le n} \delta_{t-1}\delta_{s-1}\boldsymbol{u}_{s-1}^\top \mathbf{A}_1^\top \mathbf{A}_1 \boldsymbol{u}_{t-1}\boldsymbol{u}_{t-1}^\top \mathbf{A}_0^\top \mathbf{A}_0 \boldsymbol{u}_{s-1} \\
&+ D_1 + D_2 + D_3 + o_p(p^{-1})
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
D_1 =& \frac{\omega^4}{n-1}\sum_{2\le s<t\le n} \left(\delta_{s-1}\delta_{s-2}\delta_{t-1}\delta_{t-2}\boldsymbol{u}_{s-1}^\top \mathbf{A}_1^\top \mathbf{A}_1 \boldsymbol{u}_{t-1}\boldsymbol{u}_{t-2}^\top \mathbf{A}_1^\top \mathbf{A}_1 \boldsymbol{u}_{s-2} + \delta_{s-2}\delta_{t-2}\boldsymbol{u}_s^\top \mathbf{A}_0^\top \mathbf{A}_0 \boldsymbol{u}_t \boldsymbol{u}_{t-2}^\top \mathbf{A}_1^\top \mathbf{A}_1 \boldsymbol{u}_{s-2}\right) \\
D_2 =& \frac{\omega^4}{n-1}\sum_{2\le s<t\le n} \big(\delta_{t-1}\boldsymbol{u}_s^\top \mathbf{A}_0^\top \mathbf{A}_1 \boldsymbol{u}_{t-1}\boldsymbol{u}_{t-1}^\top \mathbf{A}_0^\top \mathbf{A}_0 \boldsymbol{u}_{s-1} + \delta_{s-1}\boldsymbol{u}_{s-1}^\top \mathbf{A}_1^\top \mathbf{A}_0 \boldsymbol{u}_t \boldsymbol{u}_{t-1}^\top \mathbf{A}_0^\top \mathbf{A}_0 \boldsymbol{u}_{s-1} \\
&+ \delta_{s-1}\delta_{t-1}\boldsymbol{u}_{s-1}^\top \mathbf{A}_1^\top \mathbf{A}_1 \boldsymbol{u}_{t-1}\boldsymbol{u}_{t-1}^\top \mathbf{A}_0^\top \mathbf{A}_1 \boldsymbol{u}_{s-2} + \delta_{s-1}\delta_{t-1}\delta_{t-2}\boldsymbol{u}_{s-1}^\top \mathbf{A}_1^\top \mathbf{A}_1 \boldsymbol{u}_{t-1}\boldsymbol{u}_{t-2}^\top \mathbf{A}_1^\top \mathbf{A}_0 \boldsymbol{u}_{s-1} \\
&+ \delta_{t-2}\boldsymbol{u}_s^\top \mathbf{A}_0^\top \mathbf{A}_0 \boldsymbol{u}_t \boldsymbol{u}_{t-2}^\top \mathbf{A}_1^\top \mathbf{A}_0 \boldsymbol{u}_{s-1} + \delta_{s-2}\boldsymbol{u}_s^\top \mathbf{A}_0^\top \mathbf{A}_0 \boldsymbol{u}_t \boldsymbol{u}_{t-1}^\top \mathbf{A}_0^\top \mathbf{A}_1 \boldsymbol{u}_{s-2} \\
&+ \delta_{t-1}\delta_{t-2}\delta_{s-2}\boldsymbol{u}_s^\top \mathbf{A}_0^\top \mathbf{A}_1 \boldsymbol{u}_{t-1}\boldsymbol{u}_{t-2}^\top \mathbf{A}_1^\top \mathbf{A}_1 \boldsymbol{u}_{s-2} + \delta_{s-1}\delta_{t-2}\delta_{s-2}\boldsymbol{u}_{s-1}^\top \mathbf{A}_1^\top \mathbf{A}_0 \boldsymbol{u}_t \boldsymbol{u}_{t-2}^\top \mathbf{A}_1^\top \mathbf{A}_1 \boldsymbol{u}_{s-2}\big) \\
D_3 =& \frac{\omega^4}{n-1}\sum_{2\le s<t\le n} \big(\delta_{t-1}\delta_{s-2}\boldsymbol{u}_s^\top \mathbf{A}_0^\top \mathbf{A}_1 \boldsymbol{u}_{t-1}\boldsymbol{u}_{t-1}^\top \mathbf{A}_0^\top \mathbf{A}_1 \boldsymbol{u}_{s-2} + \delta_{s-1}\delta_{t-2}\boldsymbol{u}_{s-1}^\top \mathbf{A}_1^\top \mathbf{A}_0 \boldsymbol{u}_t \boldsymbol{u}_{t-2}^\top \mathbf{A}_1^\top \mathbf{A}_0 \boldsymbol{u}_{s-1} \\
&+ \delta_{t-1}\delta_{t-2}\boldsymbol{u}_s^\top \mathbf{A}_0^\top \mathbf{A}_1 \boldsymbol{u}_{t-1}\boldsymbol{u}_{t-2}^\top \mathbf{A}_1^\top \mathbf{A}_0 \boldsymbol{u}_{s-1} + \delta_{s-1}\delta_{s-2}\boldsymbol{u}_{s-1}^\top \mathbf{A}_1^\top \mathbf{A}_0 \boldsymbol{u}_t \boldsymbol{u}_{t-1}^\top \mathbf{A}_0^\top \mathbf{A}_1 \boldsymbol{u}_{s-2}\big)
\end{aligned}$$

经过一些繁琐的代数运算，我们得到

$$E(D_1^2) = o(p^{-2}), E(D_2^2) = o(p^{-2}), E(D_3^2) = o(p^{-2})$$

根据条件（C3）。采用与定理 1 证明相同的步骤，我们可以证明

$$\frac{1}{(n-1)\sqrt{p^{-4}\mathrm{tr}^2(\boldsymbol{\Sigma}_0^2)/2}}\sum_{2\le s<t\le n} \boldsymbol{u}_s^\top \mathbf{A}_0^\top \mathbf{A}_0 \boldsymbol{u}_t \boldsymbol{u}_{t-1}^\top \mathbf{A}_0^\top \mathbf{A}_0 \boldsymbol{u}_{s-1} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

And

$$E\left(\frac{\omega^4}{n-1}\sum_{2\le s<t\le n} \delta_{t-1}\delta_{s-1}\boldsymbol{u}_{s-1}^\top \mathbf{A}_1^\top \mathbf{A}_1 \boldsymbol{u}_{t-1}\boldsymbol{u}_{t-1}^\top \mathbf{A}_0^\top \mathbf{A}_0 \boldsymbol{u}_{s-1}\right) = \frac{1}{2}c_1^2\omega^4 n p^{-2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0\boldsymbol{\Sigma}_1),$$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{\omega^4}{n-1}\sum_{2\le s<t\le n}\delta_{t-1}\delta_{s-1}\boldsymbol{u}_{s-1}^\top\mathbf{A}_1^\top\mathbf{A}_1\boldsymbol{u}_{t-1}\boldsymbol{u}_{t-1}^\top\mathbf{A}_0^\top\mathbf{A}_0\boldsymbol{u}_{s-1}\right)=c_1^2\omega^4np^{-2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0\boldsymbol{\Sigma}_1)=o(p^{-2}).$$

因此，我们有

$$\frac{T_S-\frac{1}{2}c_1^2\omega^4np^{-2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0\boldsymbol{\Sigma}_1)}{\sqrt{1/2}p^{-2}\omega^4\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0^2)}\xrightarrow{d}N(0,1).$$

□

参考文献

Chang, J., Yao, Q., and Zhou, W. (2017). 使用最大交叉相关检验高维白噪声。Biometrika, 104(1), 111–127. Chen, D., and Feng, L. (2022). 基于秩的高维白噪声检验。arXiv:2204.08402. Feng, L., and Liu, B. (2017). 高维球形性秩检验。Journal of Multi- variate Analysis, 155, 217–233. Feng, L., Liu, B., and Ma, Y. (2021). 针对高维数据位置参数的逆范数符号检验。Journal of Business and Economic Statistics, 39(3), 807-815. Feng, L., Liu, B., and Ma, Y. (2022). 高维白噪声检验。arXiv:2211.02964. Feng, L., and Sun, F. (2016). 基于空间符号的高维位置检验。《Electronic Journal of Statistics》, 10, 2420-2434. Feng, L, Zou.C. and Wang, Z. (2016). 基于多元符号的双样本位置问题高维检验。《Journal of the American Statistical Association》, 111, 721–735. Hall, P. G. and Hyde, C. C. (1980). 鞅中心极限定理及其应用。纽约：Academic Press. Hosking, J. R. M. (1980). 多元Portmanteau统计量。《Journal of the American Statistical Association》, 75(371), 602–608. Huang, X, Liu,B, Zhou, Q. and Feng L. (2022) 针对双样本位置问题的高维逆范数符号检验。《The Candian Journal of Statistics》， 在线发表。Li, W. K. (2004). 时间序列诊断检验。Chapman & Hall/CRC。

Li, W. K. and Mcleod, A. I. (1981). 多元 arma 时间序列模型中残差自相关的分布。《Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Method- ological)》, 43(2), 231–239. Li, Z., Lam, C., Yao, J., and Yao, Q. (2019). 高维白噪声检验。统计年刊, 47(6), 3382–3412. Liu, B., Feng, L. and Ma, Y. (2023). 重尾分布下线性因子定价模型的高维 alpha 检验。中华统计学志, 47(6), 3382–3412. L¨utkepohl, H. (2005). 多元时间序列分析新导论。Springer，柏林。Oja, H. (2010). 基于空间符号和秩的多元非参数方法：一种 R 方法。Springer。Paindaveine, D. and Verdebout, T. (2016). 高维符号检验。伯努利, 22(3), 1745–1769. Tsay, R. S. (2020). 基于极值理论检验高维时间序列中的序列相关。计量经济学杂志, 216(1), 106–117. Wang, L., Peng, B., and Li, R. (2015). 均值向量的高维非参数多元检验。《Journal of the American Statistical Association》, 110(512), 1658-1669. Zhao, P., Chen, D and Zi, X. (2022). 线性资产定价模型的高维非参数检验。Stat, 11(1), e490. Zhao, P.(2023). 条件时变因子模型的稳健高维 alpha 检验。Statistics, 在线发表。Zou, C., Peng, L., Feng, L. and Wang, Z. (2014). 基于多元符号的高维球形性检验。Biometrika, 101(1), 229-236。