arXiv:2303.10715v1 [math.NT] 19 Mar 2023

源于算术动力学的局部-整体共轭问题

VEFA GOKSEL

摘要。作者在早期工作中提出了一个群论问题，该问题源于对后临界有限二次多项式的迭代伽罗瓦群的研究。本文证明了关于这一问题的首批非平凡结果。

1. 引言

设 K 为一个域，$f \in K[x]$ 为一个二次多项式。我们通过以下方式归纳定义 f 的 n 次迭代：对 $n \geq 1$，令 $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$；其中约定 $f^0(x) = x$。假设 f 的所有迭代在 K 上均可分。那么，0 的 f^n 个原像构成如下的完全二叉根树：对于 f^{n-1} 的 α 的每个根，我们从 α 向 f^n 的两个根 β_1、β_2 画边，其中 $f(\beta_1) = f(\beta_2) = \alpha$。我们将 f 的这个原像树记作 T。此外，令 T_n 为 T 的前 n 层子树。绝对伽罗瓦群自然地作用于 T 上，由此得到一个连续同态

$$\rho : \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K) \to \mathrm{Aut}(T).$$

在二元根树上的这一作用，是伽罗瓦群作用于椭圆曲线上ℓ-幂扭点的动力学类比。因此，ρ 被称为树状伽罗瓦表示。这一术语由 Boston 和 Jones 于 2007年 引入（[6]）。

若令 $G_n(f)$ 表示 f^n 在 K 上的伽罗瓦群，则这些伽罗瓦群通过自然满射 $G_{n+1}(f) \twoheadrightarrow G_n(f)$ 构成一个逆系统。令 $G(f) := \varprojlim G_n(f)$，则有 $\mathrm{im}(\rho) = G(f)$。如何将这个像描述为 $\mathrm{Aut}(T)$ 的一个子群，是算术动力学中的一个重要未解问题。近年来关于这一课题有大量研究，例如参见
[1, 6, 5, 3, 4, 7, 10, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 24, 25, 26, 27, 28] 所列的部分文献。根据已有结果，人们相信，对于大多数二次多项式 f，$G(f)$ 在 $\mathrm{Aut}(T)$ 中应具有有限指标。关于这一方向的精确猜想，参见 [19, 猜想 3.11]。然而，正如具有复乘的椭圆曲线不属于Serre著名的开像定理所涵盖的情形一样，也存在一些众所周知的特殊族 f，对于这些情形，$G(f)$ 在 $\mathrm{Aut}(T)$ 中具有无限指标。其中一个特殊情形是f 后临界有限（定义见下文）。

如果多项式 f 的所有临界点在 f 的迭代作用下都具有有限轨道，则称 f 为后临界有限（简称 PCF）。一般而言，当 f 为 PCF 时，仿有限群 $G(f)$ 作为 $\mathrm{Aut}(T)$ 的子群，其精确描述仍然是个谜；目前只有一些特殊情形的部分结果已知。有关这一主题的例子，可参见 [1, 5, 6, 2, 4] 。在 [11]，中，对于某些 PCF 二次多项式 f，作者利用马尔可夫模型构造了 $\mathrm{Aut}(T)$ 的特殊仿有限子群 $M(f)$，并推测它们包含 $G(f)$。如果能够

2010年数学主题分类。主要分类号：11R32、12E05、20E08、37P15。关键词和短语：有根二叉树的自同构群、局部共轭、整体共轭、迭代花环积。

证实这一包含关系，作者认为，群 $M(f)$ 可以成为椭圆曲线伽罗瓦表示经典理论中 Mumford-Tate 群的一个良好动力学类比。作者提出了一些证据，表明对某个纯群论问题的特定特殊情形作出肯定回答，将能推出这一包含关系。本文将证明关于该问题的首批非平凡结果。

在介绍上述群论问题之前，我们先简要给出一些符号和定义：群 $\mathrm{Aut}(T_n)$ 通过自然满射 $\pi_n : \mathrm{Aut}(T_n) \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}(T_{n-1})$ 构成一个逆系统。我们令 $K_n = \mathrm{Ker}(\pi_n)$。众所周知，$K_n$ 是秩为 2^{n-1} 的初等阿贝尔 2-群，即我们有 $K_n \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2^{n-1}}$。

定义 1.1. 设 $H, G \leq \mathrm{Aut}(T_n)$ 是 $\mathrm{Aut}(T_n)$ 的两个子群。若 H 中的每个元素都可以通过 K_n 中的某个元素共轭到 G 中，我们称 H 可逐元素 K_n-共轭到 G 中。若 H 可以通过 K_n 中的某个元素共轭到 G 中，我们称 H 可整体 K_n-共轭到 G 中。

定义 1.2. 设 $H, G \leq \mathrm{Aut}(T_n)$ 是 $\mathrm{Aut}(T_n)$ 的两个子群。我们称 $\mathcal{P}(H, G)$ 成立，如果有

$$H \text{ 是逐元素 } K_n\text{-共轭到 } G \iff H \text{ 中，是全局 } K_n\text{-共轭到 } G \text{.中}$$

定义 1.2 自然地引出了我们将要研究的问题：

Ques题 1.3。设 $n \geq 1$。对于哪些子群 H、$G \leq \mathrm{Aut}(T_n)$，$\mathcal{P}(H, G)$成立? ?

问题1.3 一般而言似乎很难回答。值得注意的是，李群领域中已有类似问题的研究，这些研究也在数论中有所应用，尤其与朗兰兹全局函子性猜想有关。例如，参见 [8, 21, 22, 29, 30, 31]。具体而言，请比较 [8, 第99] 页中的问题与问题。

注意到 $\mathcal{P}(H,\ G)$ 在 H 是 $\mathrm{Aut}(T_n)$的一个循环子群时，显然成立。现在我们陈述关于问题1.3的第一个非平凡结果。

定理 1.4. 设 $n \geq 1$ 和 $H, G \leq \mathrm{Aut}(T_n)$。假设 $|H| = |G|$ 和 $H \cap K_n = \{\mathrm{id}\}$。那么 $\mathcal{P}(H, G)$ 成立。

定理 1.4 的证明需要利用 $\mathrm{Aut}(T_n)$的迭代花环积结构。

本文结构如下：第 2 节将介绍问题 1.3 的背景和动机。第 3 节将介绍群论的一些预备知识。第 4 节将证明若干辅助引理，它们对于定理 1.4 的证明至关重要。我们将在第 5 节证明定理 1.4。最后，我们将在第 6 节提出一个猜想。

2. 背景与动机

设 $f \in \mathbb{Z}[x]$ 是一个首一的后临界有限二次多项式。众所周知（且易于证明），所有这类多项式都是 x^2、$x^2 - 1$ 或 $x^2 - 2$ 在 $a \in \mathbb{Z}$ 条件下经线性映射 $x \to x + a$ 共轭得到的。令 $G_n(f)$ 表示 $\mathbb{Q}(i)$ 的第 n 次迭代的伽罗瓦群。出于技术原因，我们将基域选为 $\mathbb{Q}(i)$，详情见 [11, 第 2] 节。在 [11], 中，作者利用 f 在有限域上的迭代的因式分解数据，结合马尔可夫过程，构造了马尔可夫群 $M_n(f)$，并猜想对于

$n \geq 1$此外，作者还将问题 1.3 与这一猜想联系起来。具体而言，作者给出了一种论证，表明 $G_n(f)$ 对所有元素而言，均可经 K_n-共轭嵌入到$M_n(f)$中，只要 n。如果这成立，那么证明对所有 $\mathcal{P}(G_n(f)\ M_n(f))$，便可确立上述猜想。注意，群 $M_n(f)$ 是明确已知的，因此这属于问题1.3的一个相当特殊的情形。

举例说明群 $M_n(f)$，令 $f := (x+a)^2 - a - 1$，其中 $a \in \mathbb{Z}$。这个族尤其有趣，因为它并非来自代数群的自同态。回顾一下，对于 $n \geq 1$，置换 $a_1 = (1, 2)$、$a_2 = (1, 3)(2, 4)$、……、$a_n = (1, 2^{n-1}+1)(2, 2^{n-1}+2)\cdots(2^{n-1}, 2^n)$ 是 Aut(T_n) 的标准生成元。于是，$x_n := a_1 a_2 \cdots a_n \in$ Aut(T_n) 在树 [11, 的第 n 层上传递地作用（引理 3.3]）。利用自然嵌入 Aut$(T_i) \hookrightarrow$Aut(T_n)，也可以将 x_i（其中 $i < n$）视为 Aut(T_n) 的一个元素。最后，定义 $m_1 := \mathrm{id} \in$ Aut(T_1)，并令 $m_{n+1} := x_n^2 m_n x_n^{-1}$（其中 $n \geq 1$）。那么，若$a \neq \pm b^2$对任意 $b \in \mathbb{Z}$ 都成立，则有 $M_1(f) = \langle (1, 2)\rangle$，$M_2(f) = \langle (1, 3, 2, 4), (1, 2)\rangle$，而 $M_n(f)$ 由下式给出

$$M_n(f) = \langle x_n, m_n, x_{n-1}^2, x_{n-2}^2, \ldots, x_2^2 \rangle \tag{1}$$

对于 $n \geq 3$。如果 $a = \pm b^2$ 对于某个 $b \in \mathbb{Z}$成立，那么 $M_n(f)$ 是式（1）中给出的群的一个显式指数为 2 的子群（参见 [11, 推论 6.28]）。对于 $n \geq 1$，作者通过引入所谓的马尔可夫映射，归纳地构造了群$M_n(f)$。该映射可应用于 $M_n(f)$ 的上述生成元，从而得到 $M_{n+1}(f)$ 的生成元。更多详情请参见 [11, 第 6] 节。

作者在 [11] 中的工作也表明，上文使用的参数 a 可以取自 $\mathbb{Q}$，而 [11] 的主要结果仍然成立。作者猜想，对于任意数域上的任意后临界有限二次多项式，群$M_n(f)$（即所谓的马尔可夫群）都存在，并且对于每个 n，$G_n(f)$ 总是包含于 $M_n(f)$ 中。这一猜想基于大量的 Magma 计算以及 [11], 中给出的理论依据，也是作者目前正在进行的研究项目。作者认为，这些马尔可夫群背后可能蕴藏着丰富的理论，最终或许会导向 Mumford-Tate 群的动力学类比，正如上一节所提到的。

3. 预备知识

本节将回顾一些群论中的标准事实，这些事实将在定理 1.4 的证明中用到。为简便起见，我们记 $W_n = \mathrm{Aut}(T_n)$，本文将始终使用这一记法。众所周知，W_n 同构于 C_2（2阶循环群）的n重迭代 wreath 积，它可以通过 $W_1 \cong C_2$ 和 $W_n \cong W_{n-1} \wr C_2$ 对 $n \geq 2$ 归纳定义。根据定义，这使我们能够将 W_n 与半直积 $\mathbb{F}_2^{2^{n-1}} \rtimes W_{n-1}$ 等同，其中 $\mathbb{F}_2^{2^{n-1}}$ 表示定义在 $\mathbb{F}_2$（含 2 个元素的有限域）上的 2^{n-1} 维向量空间。在这个半直积中，W_{n-1} 通过置换坐标来作用于 $\mathbb{F}_2^{2^{n-1}}$。具体而言，对于 $v = (v_1, \ldots, v_{2^{n-1}}) \in \mathbb{F}_2^{2^{n-1}}$ 和 $\sigma \in W_{n-1}$，我们有

$$\sigma(v) = (v_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, v_{\sigma^{-1}(2^{n-1})}).$$

因此，在本文中，我们始终将 W_n 的元素视为有序对 (v, s)，$v \in \mathbb{F}_2^{2^{n-1}}, s \in W_{n-1}$。采用这一记号，若 $\sigma_1 = (v, s)$ $\sigma_2 = (w, t) \in W_n$ 是 W_n 中的两个元素，则它们的乘积为

$$\sigma_1\sigma_2 = (v + s(w), st). \tag{2}$$

若 $G := \{g_1, \ldots, g_k\} \leq W_n$，其中 $g_i = (v_i, s_i)$，对 $i = 1, \ldots, k$，我们也常使用如下对应关系

$$\pi_n(G) = \{s_1, \ldots, s_k\} \leq W_{n-1}. \tag{3}$$

根据 W_n 的迭代花环积定义，立即可知对于所有 $n \geq 1$，每个 W_n 都是 2-群，因此其所有子群也都是 2-群。事实上，众所周知，对于所有 $n \geq 1$，W_n 同构于 Sym(2^n) 的 Sylow 2-子群，其中 Sym(2^n) 表示 2^n 次对称群。

回顾一下，对于群 X，X 的 Frattini 子群记作 $\Phi(X)$，定义为 X 的所有极大子群的交。众所周知，对于 2-群 X，$\Phi(X)$ 由平方元和交换子生成，即有

$$\Phi(X) = X^2[X, X]. \tag{4}$$

最后，我们引入以下记号，这在全文的计算中将非常方便。

定义 3.1. 设 $\sigma \in W_n$，其中某个 $n \geq 1$。我们将集合 Fix(σ) 定义为

$$\text{Fix}(\sigma) = \{v \in \mathbb{F}_2^{2^n} \mid \sigma(v) = v\}.$$

4. 辅助引理

在本节中，我们将证明若干辅助引理，这些引理将在定理1.4的证明中用到。

引理 4.1. 对于 $n \geq 1$，设 H、$G \leq W_n$ 是 W_n 的两个子群。假设 H 中的每个元素都可 K_n-共轭到 G 中，且 $|H| = |G|$ 和 $H \cap K_n = \{\text{id}\}$。那么 $G \cap K_n = \{\text{id}\}$。

证明. 设 $|H| = |G| = k$。若 H 由 ℓ 生成，令 $H = \langle x_1、x_2、\ldots\ldots、x_\ell\rangle$。于是可写为 $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$，其中 $h_i = w_i(x_1、x_2、\ldots\ldots、x_\ell)$，这里某个词 w_i 属于 $x_1、x_2、\ldots\ldots、x_\ell$，对应于 $i = 1、\ldots\ldots、k$。由于 H 中的每个元素都可 K_n-共轭到 G 中，因此 $x_1^{a_1}、x_2^{a_2}、\ldots\ldots、x_\ell^{a_\ell} \in G$ 对某些 $a_1、a_2、\ldots a_\ell \in K_n$ 成立。注意，$\pi_n(w_i(x_1、x_2、\ldots\ldots、x_\ell)) = \pi_n(w_i(x_1^{a_1}、x_2^{a_2}、\ldots\ldots、x_\ell^{a_\ell}))$，因为 $a_1、\ldots\ldots、a_\ell \in K_n =$ 属于 Ker(π_n)；因此，对 $i \neq j$，有 $\pi_n(w_i(x_1^{a_1}、x_2^{a_2}、\ldots\ldots、x_\ell^{a_\ell})) \neq \pi_n(w_j(x_1^{a_1}、x_2^{a_2}、\ldots\ldots、x_\ell^{a_\ell}))$，因为 $H \cap K_n = \{\text{id}\}$。这表明 $|G| \geq |\pi_n(G)| \geq k = |G|$，因此 $|\pi_n(G)| = |G|$，从而如所求得证 $G \cap K_n = \{\text{id}\}$。□

引理 4.2. 对于 $n \geq 1$，设 $H, G \leq W_n$ 是 W_n 的两个子群。假设 H 逐元素 K_n-共轭到 G 中，且 $|H| = |G|$ 和 $H \cap K_n = \{\text{id}\}$。那么对于任意 $H_1 \leq H$，存在 $G_1 \leq G$，使得 $|H_1| = |G_1|$，并且 H_1 逐元素 K_n-共轭到 G_1 中。

证明. 设 $H_1 = \{h_1, \ldots, h_k\} \leq H$。由于 H 逐元素 K_n-共轭到 G 中，存在 $a_1, \ldots, a_k \in K_n$，使得对 $i = 1, \ldots, k$ 有 $h_i^{a_i} \in G$。令 $G_1 = \langle h_1^{a_1}, \ldots, h_k^{a_k}\rangle$。显然，$H_1$ 共轭到 G_1 中。我们还断言 $|H_1| = |G_1|$。为此，注意到由引理 4.1，$G \cap K_n = \{\text{id}\}$，因此 $G_1 \cap K_n = \{\text{id}\}$。由于 $a_1, \ldots, a_k \in K_n$，我们有$\pi_n(H_1) = \pi_n(G_1)$。由于 $H_1 \cap K_n = G_1 \cap K_n = \{\text{id}\}$，这立即推出$|H_1| = |G_1|$，如所需。□

引理 4.3. 对于 $n \geq 1$，设 H、$G \leq W_n$ 是 W_n 的两个非循环子群，使得 $H \cap K_n = \{\text{id}\}$, $|H| = |G|$，且 H 中的每个元素都可 K_n-共轭到 G 中。对于两个不同的极大子群 H_1、$H_2 \trianglelefteq H$，设存在某个 a、$b \in K_n$，使得 $H_1^a, H_2^b \leq G$。那么 $G = \langle H_1^a, H_2^b\rangle$。

证明。由于 H_1 和 H_2 是 H 的两个不同极大子群，显然有 $H = \langle H_1, H_2\rangle$。注意，由于 $a, b \in K_n$，我们有 $\pi_n(H) = \pi_n(\langle H_1, H_2\rangle) = \pi_n(\langle H_1^a, H_2^b\rangle) \leq \pi_n(G)$。由于 $H \cap K_n = \{\mathrm{id}\}$ 且 $G \cap K_n = \{\mathrm{id}\}$（由引理 4.1），因此得到

$$|H| = |\pi_n(H)| = |\pi_n(\langle H_1, H_2\rangle)| = |\pi_n(\langle H_1^a, H_2^b\rangle)| \leq |\pi_n(G)| = |G|,$$

由于 $|H| = |G|$，这意味着所有量都必须相等，尤其是

$$|\pi_n(\langle H_1^a, H_2^b\rangle)| = |\pi_n(G)|.$$

回想 $G \cap K_n = \{\mathrm{id}\}$（因此 $\langle H_1^a, H_2^b\rangle \cap K_n = \{\mathrm{id}\}$），可得 $\langle H_1^a, H_2^b\rangle = G$，正如所需。□

在下面的引理以及本文余下部分中，对于 W_n 的任意子群 $H \leq W_n$，$C_{K_n}(H)$ 表示 K_n 中与 H 的每个元素交换的元素所成的群。

引理 4.4. 对于 $n \geq 1$，设 $H, G \leq W_n$ 是 W_n 的两个非循环子群，满足 $H \cap K_n = \{\mathrm{id}\}, |H| = |G|$，且 H 中的每个元素都共轭于 G 中的某个元素，其中共轭元属于 K_n。对于两个不同的极大子群 H_1，$H_2 \trianglelefteq H$，假设存在某个 $a \in K_n$ 使得 $G = \langle H_1, H_2^a\rangle$。那么，$H$ 可以整体共轭于 G 中的某个元素，其中共轭元属于 K_n，当且仅当存在某个 $x \in H_2 \setminus H_1$ 使得 $a \in C_{K_n}(H_1)C_{K_n}(x)$。

证明。我们首先假设，对于某个 $x \in H_2 \setminus H_1$，$a \in C_{K_n}(H_1)C_{K_n}(x)$。记 $a = bc$为 $b \in C_{K_n}(H_1)$，$c \in C_{K_n}(x)$。由于 H_1 在 H中的指数为 2，因此我们有 $H = \langle H_1, x\rangle$。由于$\pi_n(x^a) = \pi_n(x)$，这就得到 $\pi_n(H) = \pi_n(\langle H_1, x^a\rangle)$。由于 $H \cap K_n = G \cap K_n = \{\mathrm{id}\}$（由引理 4.1），这立刻推出 $G = \langle H_1, x^a\rangle$。我们有

$$H^b = \langle H_1^b, x^b\rangle = \langle H_1, x^{ac}\rangle = \langle H_1, x^a\rangle = G,$$

其中在第二和第三个等式中，我们用到了 K_n 是初等阿贝尔 2-群这一事实。至此，一个方向的证明完成。

现在假设 H 在全局意义下 K_n-共轭到 G中，即存在 $b \in K_n$ 使得 $H^b = G$（因为 $|H| = |G|$）。任取一个元素 $x \in H_2 \setminus H_1$。注意到$H = \langle H_1, H_2\rangle$。由于 $G \cap K_n = \{\mathrm{id}\}$（由引理 4.1），我们立即得到 $H_1^b = H_1$ 和$H_2^b = H_2^a$；又由于 $H_1 \cap K_n = H_2 \cap K_n = \{\mathrm{id}\}$ 且 $a, b \in K_n$，这意味着 $b \in C_{K_n}(H_1)$和 $ab \in C_{K_n}(H_2)$。因此得到 $a = b(ab) \in C_{K_n}(H_1)C_{K_n}(H_2) \leq C_{K_n}(H_1)C_{K_n}(x)$，证毕。□

引理 4.5. 对于 $n \geq 1$，设 $H, G \leq W_n$ 是 W_n 的两个非循环子群，使得 $H \cap K_n = \{\mathrm{id}\}, |H| = |G|$，且 H 中每个元素都与 G 中的某个元素 K_n-共轭。对于两个不同的极大子群 $H_1, H_2 \trianglelefteq H$，假设对某个 $a \in K_n$ 有 $G = \langle H_1, H_2^a\rangle$。那么 $a \in C_{K_n}(\Phi(H))$。

证明。取 $\alpha \in \Phi(H)$。由于 $\alpha \in H_1 \cap H_2$，我们必有 α，$\alpha^a \in G$。注意 $\pi_n(\alpha) = \pi_n(\alpha^a)$。由于 $G \cap K_n = \{\mathrm{id}\}$ 由引理 4.1可知，这立即推出 $\alpha = \alpha^a$，证毕。□

引理 4.6. 设 $n \geq 1$。对于 $a \in K_n$, $x \in W_n$，记 $a = (u, 1)$，$x = (v, s)$，其中 $u, v \in \mathbb{F}_2^{2^{n-1}}$, $s \in W_{n-1}$。那么 $a \in C_{K_n}(x) \iff u \in$ 不动点集(s)。

证明。如果我们利用（$x^a = x$ 2）重写等式，就得到

$$(u, 1)(v, s)(u, 1) = (v, s) \iff (u + v + s(u), s) = (v, s).$$

这立即得到 $s(u) = u$，正如所需。□

引理 4.7. 对于 $n \geq 1$，设 $H \leq W_n$ 是 W_n 的一个子群。假设 $H \cap K_n = \{\mathrm{id}\}$。那么 $\pi_n(\Phi(H)) = \Phi(\pi_n(H))$。

证明。对于任意有限群 G，令 $m(G)$ 表示 G 的最小生成集的大小。注意，由于假设 $H \cap K_n = \{\mathrm{id}\}$， $m(H) = m(\pi_n(H))$，因为 H 和 $\pi_n(H)$ 同构。

对于任意有限 2-群 G，根据 Burnside基定理，我们有

$$|G/\Phi(G)| = \frac{|G|}{|\Phi(G)|} = 2^{m(G)}.$$

因此，由上述内容可得 $\frac{|H|}{|\Phi\ H\ ()|} = \frac{|\pi_n}{|\Phi\ \pi_n\ H}(\ \ H\ |\ )(())|$。由于 $|H| = |\pi_n(H)|$ 根据假设 $H \cap K_n = \{\mathrm{id}\}$，因此有

$$|\Phi(\pi_n(H))| = |\Phi(H)| = |\pi_n(\Phi(H))|, \tag{5}$$

其中，最后一个等式用到了 $\Phi(H) \cap K_n = \{\mathrm{id}\}$ 这一事实。另一方面，考虑满射 $\pi_n : H \twoheadrightarrow \pi_n(H)$，这是一个众所周知（且简单）的练习，可以证明

$$\pi_n(\Phi(H)) \leq \Phi(\pi_n(H)). \tag{6}$$

现在，我们可以结合（5）和（6），得出 $\pi_n(\Phi(H)) = \Phi(\pi_n(H))$，证毕。 □

引理 4.8. 设 $x, y \in W_n, a, b \in K_n$。假设 x, y, a, b 满足等式

$$xy^a = (xy)^b.$$

令 $x = (v, s)$、 $y = (w, t)$、 $a = (u, 1)$ 和 $b = (z, 1)$，则有

$$s(u) + st(u) = z + st(z).$$

证明。 通过直接计算（2），可得

$$\begin{aligned} xy^a &= (v, s)(u + w + t(u), t) \\ &= (v + s(u) + s(w) + st(u), st). \end{aligned}$$

类似地，我们有

$$(xy)^b = (z + v + s(w) + st(z), st)$$

令 xy^a 和 $(xy)^b$ 的表达式相等，立即可得

$$s(u) + st(u) = z + st(z),$$

如所求。 □

5. 定理 1.4 的证明

我们将从以下命题开始，它将是定理 1.4证明中归纳步骤的关键要素。

命题 5.1. 设 $X \leq W_n$ 是 W_n 的子群。取 $\alpha \in W_n \setminus X$，并令 $Y = \langle X, \alpha \rangle \leq W_n$。假设向量 $v = (v_1, \ldots, v_{2^n}) \in \mathbb{F}_2^{2^n}$ 满足以下三个性质：

(a) 对任意 $\beta \in X$ 和 $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$， $v_i + v_{\alpha(i)} = v_{\beta(i)} + v_{\beta\alpha(i)}$。(b) 若对某些 $\beta \in X$ 和 i， $j \in \{1, \ldots, 2^n\}$，则 $v_i = v_j$，其中 $\mathrm{Orb}_\alpha(i) = \mathrm{Orb}_\alpha(j)$ 且 $\mathrm{Orb}_\beta(i) = \mathrm{Orb}_\beta(j)$。(c) $v \in \mathrm{Fix}(\Phi(Y))$。

那么 $v \in$ 不动点集$(\alpha) +$ 不动点集(X)。

证明。我们先注意到，由于 $v \in$ 不动点集$(\Phi(Y))$，在整个证明过程中，我们可以任意使用$v_{\sigma(i)}$代替 $v_{\sigma^{-1}(i)}$，对任意 $\sigma \in Y$，因为 $\sigma(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma^2 \in \Phi(Y)$ 由（4）得出。

若 Y 是循环群，则必有 $Y = \langle\alpha\rangle$，因为 $\alpha \notin X$。在这种情况下，由于 $X \leq \langle\alpha\rangle$，条件 (b) 变为“若 Orb$_\alpha(i)$ = Orb$_\alpha(j)$，则$v_i = v_j$”，并且我们还得到 Fix(α) + Fix(X) =Fix(X)。由于任何满足 (b) 的 v 显然都属于 Fix(α) $\subseteq$ Fix(X)，故结论成立。

现在可以假设 Y 是非循环群。取一个满足全部三个条件的向量$v \in \mathbb{F}_2^{2^n}$。考虑任意一个 $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$及其在 Y的作用下的轨道 $O(i) := O_Y(i)$。根据定义，对于任意 j，$j' \in O(i)$，都存在 σ，$\sigma' \in Y$使得 $j = \sigma(i)$，$j' = \sigma'(i)$。对于任意 $y \in Y$，令 $\bar{y}$ 表示 y 在商映射 $Y \twoheadrightarrow Y/\Phi(Y)$下的像。由于 v满足条件 (c)，若 $\bar{\sigma} = \sigma'$，则 $v_j = v_{j'}$。假设群 Y由某个 $\ell \geq 1$个元素生成。由于 $\alpha \notin X$，我们可以写成 $Y = \langle\beta_1, \ldots\ldots, \beta_\ell, \alpha\rangle$，其中 $\beta_1, \ldots\ldots, \beta_\ell \in X$满足 $X = \langle\beta_1, \ldots\ldots, \beta_\ell\rangle$。根据 Burnside基定理，$Y$是 $2^{\ell+1}$ 个互不相同的$\Phi(Y)$陪集的并。更具体地说，我们可以将 Y写成不交并

$$Y = (\bigcup_{i=1}^{2^\ell} A_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{2^\ell} \alpha A_i),$$

其中每个 A_i（因此 αA_i）都是 $\Phi(Y)$ 的陪集，且 $X = \bigcup A_i$。取 Y 作用下 $\{1, \ldots, 2^n\}$ 的不同轨道的代表元$i_1, \ldots\ldots, i_k$，即

$$\bigcup_{j=1}^{k} O(i_j) = \{1, \ldots, 2^n\}.$$

定义 5.2. 设 $v \in \mathbb{F}_2^{2^n}$。如果 $\mathcal{P}_Y(v)$ 满足以下条件，我们就称其成立：v

- 对于任意 σ、$\sigma' \in Y$ 和 $j \in \{1, \ldots, k\}$，$v_{\sigma(i_j)} = v_{\sigma'(i_j)} = a_{(t)\,i_j}$，存在某个 $a_{(t)\,i_j} \in \{0, 1\}$，使得若$\sigma \in A_t$，则 $\sigma' \in \alpha A_t$，其中存在某个 $1 \leq t \leq 2^\ell$。

我们将子空间$V_Y \subseteq \mathbb{F}_2^{2^n}$ 定义为

$$V_Y = \{u \in \mathbb{F}_2^{2^n} \mid \mathcal{P}_Y(u) \text{ holds.}\}. \tag{7}$$

命题 5.1 的证明将由下面的断言推出。

断言 5.3。存在 $v' \in V_Y$，使得 $v' \in$ Fix(α) 且 $v - v' \in$ Fix(X)。

断言 *5.3*的证明。中的任意向量 V_Y已经属于 Fix(α) 根据定义。因此，为了完成证明，我们需要找到 $v' \in V_Y$使得 $v - v' \in$ Fix(X)。

对于任意 σ_1、$\sigma_2 \in Y$，有

$$\sigma_1(\sigma_2)^{-1} \in \Phi(Y) \iff \sigma_1, \sigma_2 \in A_t \text{ or } \sigma_1, \sigma_2 \in \alpha A_t \text{ for some } t \in \{1, \ldots, 2^\ell\}.$$

因此，根据定义，任意 $v' \in V_Y$都属于 Fix($\Phi(Y)$)。由于根据假设，$v \in$ Fix($\Phi(Y)$)，我们得出 $v - v' \in$ Fix($\Phi(Y)$)。

另请注意，由于 $X = \bigcup A_i$，对于任意 σ_1、$\sigma_2 \in Y$，有

$$\sigma_1{\sigma_2}^{-1} \in X \iff \sigma_1 \in A_t,\ \sigma_2 \in A_{t'} \text{ 或 } \sigma_1 \in \alpha A_t,\ \sigma_2 \in \alpha A_{t'},\ \text{其中 } t、\ t' \in \{1, \ldots, 2^\ell\}.$$

因此，对于任意 $v' \in V_Y$，当且仅当以下两个条件对 $j = 1, \ldots, k$ 成立时，我们有 $v - v' \in$ 不动点集(X)：

(1) $(v-v')_{\sigma_1(i_j)} = (v-v')_{\sigma_2(i_j)}$ 若 $\sigma_1 \in A_i, \sigma_2 \in A_{i'}$，则存在某些 $i, i' \in \{1, \dots, 2^\ell\}$。(2) $(v-v')_{\sigma_3(i_j)} = (v-v')_{\sigma_4(i_j)}$ 若 $\sigma_3 \in \alpha A_i, \sigma_4 \in \alpha A_{i'}$，则存在某些 $i, i' \in \{1, \dots, 2^\ell\}$。

现在我们将证明，确实存在满足这两个条件的向量 $v' \in V_Y$。

条件 (1)：按照定义 5.2中的记号，条件 (1) 等价于等式 ty

$$v_{\sigma_1(i_j)} + v_{\sigma_2(i_j)} = a_{i_j}^{(i)} + a_{i_j}^{(i')} \tag{8}$$

对于某个 $a_{i_j}^{(i)}$， $a^{(i')}{}_{i_j} \in \{0,1\}$。注意，如果变量 $a_{i_j}^{(i)}$， $a^{(i')}{}_{i_j} \in \{0,1\}$ 相互独立，那么我们可以对它们进行选择，使得 (8) 成立。如果它们不独立，则有以下四种情况：

(1) $\pi_1(i_j) = \pi_2(i_j)$ 对某些 $\pi_1 \in A_i, \pi_2 \in A_{i'}$ 成立。在这种情况下，根据定义 5.2, $a_{i_j}^{(i)} + a^{(i')}{}_{i_j} = 0$。回忆一下， $v \in$ 不动点集$(\Phi(Y))$，由于$v_{\sigma_1(i_j)} = v_{\pi_1(i_j)} = v_{\pi_2(i_j)} = v_{\sigma_2(i_j)}$，(8) 左边也为零；其中第一个和第三个等号用到了定义 5.2。因此，(8) 成立。

(2) 对某些 $\pi_1 \in A_i, \pi_2 \in A_{i'}$， $\pi_1(i_j) = \alpha\pi_2(i_j)$。此时，我们有 $\mathrm{Orb}_\alpha(\pi_1(i_j)) = \mathrm{Orb}_\alpha(\pi_2(i_j))$，且 $\mathrm{Orb}_{\pi_1(\pi_2)^{-1}}(\pi_1(i_j)) = \mathrm{Orb}_{\pi_1(\pi_2)^{-1}}(\pi_2(i_j))$。因此，由于 $\pi_1(\pi_2)^{-1} \in X$，命题 5.1 的条件 (2) 推出 $v_{\pi_1(i_j)} = v_{\pi_2(i_j)}$。回想起 $v \in \mathrm{Fix}(\Phi(Y))$，且 $\pi_1\sigma_1^{-1}, \pi_2\sigma_2^{-1} \in \Phi(Y)$，便立即得到 $v_{\sigma_1(i_j)} = v_{\sigma_2(i_j)}$，因为 $v_{\sigma_1(i_j)} = v_{\pi_1(i_j)}$ 且 $v_{\sigma_2(i_j)} = v_{\pi_2(i_j)}$。因此，要证明 (8) 成立，只需验证 $a_{i_j}^{(i)} + a_{i_j}^{(i')}$ 消失。但由定义 5.2 和条件 $\pi_1(i_j) = \alpha\pi_2(i_j)$，这显然成立，故证毕。

(3) 对某些 $\pi_1 \in A_i, \pi_2 \in A_{i'}$， $\alpha\pi_1(i_j) = \alpha\pi_2(i_j)$。对 $\alpha\pi_1(i_j) = \alpha\pi_2(i_j)$ 两边应用 α^{-1}，我们得到情形 (1)，因此结论由情形 (1) 得出。

(4) 对某些 $\pi_1 \in A_i, \pi_2 \in A_{i'}$， $\alpha\pi_1(i_j) = \pi_2(i_j)$。对 $\alpha\pi_1(i_j) = \pi_2(i_j)$ 两边应用 α^{-1}，我们得到 $\pi_1(i_j) = \alpha^{-1}\pi_2(i_j)$。根据 $A_{i'}$ 的定义，由于根据 (4)， $\alpha(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha^2 \in \Phi(Y)$，因此存在 $\pi_3 \in A_{i'}$ 使得 $\alpha^{-1}\pi_2(i_j) = \alpha\pi_3(i_j)$。由此得到 $\pi_1(i_j) = \alpha\pi_3(i_j)$，结论现由情形 (2) 得出。

条件 (2)：这个条件显然等价于条件

$$(v-v')_{\alpha\sigma_1(i_j)} = (v-v')_{\alpha\sigma_2(i_j)} \text{ if } \sigma_1 \in A_i, \sigma_2 \in A_{i'} \text{ for some } i, i' \in 1, \{\dots, 2^\ell\}. \tag{9}$$

将 α 应用于等式 (9两边，得到

$$(v-v')_{\sigma_1(i_j)} = (v-v')_{\sigma_2(i_j)},$$

这与条件 (1) 相同。因此，结论由第一部分的证明得出。我们已经涵盖了所有可能的情形，因此证明完毕。□

命题5.1 的证明现在由断言 5.3得出。 □

以下结果对于证明某些将在定理 1.4 的证明中出现的向量确实满足命题 5.1所给条件，从而满足命题5.1的结论，至关重要。

命题 5.4。设 $X \leq W_n$ 是 W_n 的一个子群。取 $\alpha \in W_n \setminus X$，并令 $Y = \langle X, \alpha\rangle \leq W_n$。假设向量 $v \in \mathbb{F}_2^{2^n}$ 满足以下条件：

(1) 对于任意 $\beta \in X$，存在 $u^{(\beta)} \in$ 不动点集$(\Phi(Y))$，使得 $\alpha(v) + \alpha\beta(v) = u^{(\beta)} + \alpha\beta(u^{(\beta)})$。(2) $v \in$ 不动点集$(\Phi(Y))$。

于是我们有 $v \in$ 不动点集(α) + 不动点集(X)。

证明。 为证明该命题，只需说明向量 v 满足命题5.1中的条件 (a) 和 (b)。注意，我们有等式

$$\alpha(v) + \alpha\beta(v) = u^{(\beta)} + \alpha\beta(u^{(\beta)}). \tag{10}$$

若将 $\alpha\beta$ 应用于 (10) 两边，由于 v， $u^{(\beta)} \in$ 不动点集($\Phi(Y)$) 以及 $(\alpha\beta)^2, (\alpha\beta\alpha)(\beta)^{-1} \in \Phi(Y)$，可得

$$v + \beta(v) = u^{(\beta)} + \alpha\beta(u^{(\beta)}). \tag{11}$$

将 (10) 与 (11) 相加，得到

$$v + \beta(v) = \alpha(v) + \alpha\beta(v) \tag{12}$$

比较 (12) 两边的坐标，可得

$$v_i + v_{\beta^{-1}(i)} = v_{\alpha^{-1}(i)} + v_{(\alpha\beta)^{-1}(i)}$$

对任意 $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$。回想一下， $v \in$ 不动点集($\Phi(Y)$)，这可以改写为

$$v_i + v_{\beta(i)} = v_{\alpha(i)} + v_{\alpha\beta(i)}$$

对于任意 $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$。由于这对任意 $\beta \in X$都成立，因此 v满足命题5.1的条件 (a)。

现在只需证明向量 v 满足命题 5.1 的条件 (b)。为此，假设对于某个 $\beta \in X$，$\mathrm{Orb}_\alpha(i) = \mathrm{Orb}_\alpha(j)$，且 $\mathrm{Orb}_\beta(i) = \mathrm{Orb}_\beta(j)$，其中$i$、 $j \in \{1, \ldots, 2^n\}$。令 $\alpha^a(i) = \beta^b(i) = j$，其中 a、$b \in \mathbb{N}$。如果 a 或 b 中至少有一个是偶数，那么根据 (4)， α^a 或 β^b 中至少有一个属于 $\Phi(Y)$，由此立即可得 $v_i = v_j$，因为$v \in \mathrm{Fix}(\Phi(Y))$。因此，不失一般性地，我们可以假设 a 和 b 都是奇数。比较 (11) 两边的坐标，并利用 v、 $u^{(\beta)} \in \mathrm{Fix}(\Phi(Y))$这一事实，可得

$$v_i + v_{\beta(i)} = u_i^{(\beta)} + u_{\alpha\beta(i)}^{(\beta)}. \tag{13}$$

由于 $v \in$ 不动点集($\Phi(Y)$)，且 $\beta^{b-1} \in \Phi(Y)$ 由 (4) 可知（注意 b 为奇数），我们有 $v_{\beta(i)} = v_{\beta^b(i)} = v_j$，结合 (13) 可得

$$v_i + v_j = u_i^{(\beta)} + u_{\alpha\beta(i)}^{(\beta)}. \tag{14}$$

我们还有 $\alpha\beta(i) = \alpha\beta^{1-b}\beta^b(i) = \alpha\beta^{1-b}(j)$。注意到 $u^{(\beta)} \in$ 不动点集($\Phi(Y)$)，并且$1-a$ 和 $1-b$ 均为偶数，可得

$$u_{\alpha\beta(i)}^{(\beta)} = u_{\alpha\beta^{1-b}(j)}^{(\beta)} = u_{\alpha(j)}^{(\beta)} = u_{\alpha^{-a}(j)}^{(\beta)} = u_i^{(\beta)}.$$

最后，将其代入 (14)，得到 $v_i + v_j = u_i^{(\beta)} + u_i^{(\beta)} = 0$，因此 $v_i = v_j$，证毕。 □

现在我们终于可以证明定理 1.4。

定理 1.4 的证明。我们对 $|H|$ 进行归纳。注意，当 $|H| = 1$ 和 $|H| = 2$ 时，结论显然成立，因为在这些情况下 H 是循环群。现在假设结论对某个 $k \geq 1$ 的 $|H| = 2^k$ 成立。为完成归纳步骤，我们将证明结论对 $|H| = 2^{k+1}$ 成立。根据归纳假设和引理 4.2，任取一个极大理想 $H_1 \trianglelefteq H$，存在 $G_1 \trianglelefteq G$ 和 $a \in K_n$，使得 $H_1^a = G_1$. 因此，如有必要，用 a 共轭 G 后，不失一般性地假设 $H_1 \trianglelefteq G$。注意，这也意味着 $\Phi(H) \leq G$，因为 $\Phi(H)$ 包含于 H_1。如果 H 是循环群，结论已然成立，因此我们

可以不失一般性地假设 H 是非循环群，因此 H 有两个不同的极大子群 H_1、H_2，且 $H=\langle H_1、H_2\rangle$。根据归纳假设和引理 4.2，存在 $b\in K_n$，使得 $H_2^b \trianglelefteq G$。由引理 4.3，可得 $G=\langle H_1、H_2^b\rangle$。于是，由引理 4.5，我们得到 $b\in C_{K_n}(\Phi(H))$。为证明 H 和 G 在 K_n 下共轭，根据引理 4.4，我们需要证明对于某个 $x\in H_2\setminus H_1$，$b\in C_{K_n}(H_1)C_{K_n}(x)$。令 $b=(u,1)$，$x=(v,s)$，其中 $u、v\in\mathbb{F}_2^{2^{n-1}}$、$s\in W_{n-1}$。根据引理 4.6，这等价于证明

$$u\in \mathrm{Fix}(\pi_n(H_1))+\mathrm{Fix}(s), \tag{15}$$

其中我们在写 Fix 时使用了 (3) 中给出的对应关系$(\pi_n(H))$。

取定某个 $x\in H_2\setminus H_1$。对于每个 $h_i\in H_1$，若考虑包含 h_ix 的 H 的极大子群 $H^{(i)}\trianglelefteq H$，由归纳假设和引理 4.2，存在 $c_i\in K_n$，使得 $(H^{(i)})^{c_i}$ 是 G 的极大子群。由于 $G\cap K_n=\{\mathrm{id}\}$（由引理 4.1），$\Phi(H)\le H_1\le G$ 且 $\Phi(H)^{c_i}\le (H^{(i)})^{c_i}\le G$，这立即推出 $\Phi(H)=\Phi(H)^{c_i}$，即 $c_i\in C_{K_n}(\Phi(H))$。回忆 $H_2^b\le G$，因此 $x^b\in G$。由于 $(h_ix)^{c_i}$ 和 h_ix^b 都属于 G，$\pi_n(h_ix^b)=\pi_n((h_ix)^{c_i})$，且 $G\cap K_n=\{\mathrm{id}\}$，我们得到

$$h_ix^b=(h_ix)^{c_i} \tag{16}$$

对于 $i=1,\dots,|H_1|=2^k$。令 $h_i=(w_i,t_i)$，$c_i=(z_i,1)$ (并回忆 $x=(v,s)$,$b=(u,1)$)，利用引理 4.8，式（16）可得

$$t_i(u)+t_is(u)=z_i+t_is(z_i) \tag{17}$$

对于 $i=1,\dots 2^k$。回忆上文，$c_i\in C_{K_n}(\Phi(H))$，即由引理 4.6，z_i ∈不动点集$(\pi_n(\Phi(H)))$ =不动点集$(\Phi(\pi_n(H)))$，其中最后一个等号用到了引理 4.7。还记得证明第一部分中，$b\in C_{K_n}(\Phi(H))$，即由引理 4.6，$u\in$ 不动点集$(\Phi(\pi_n(H)))$。现在若在命题 5.4 中取 $X=\langle t_1,\dots,t_{2^k}\rangle$, $Y=\pi_n(H)$，$\alpha=s$，$v=u$，并回忆式（17），则向量 u 满足命题 5.4 中的两个条件。由此立即可得

$$u\in \mathrm{Fix}(\langle t_1,\dots,t_{2^k}\rangle)+\mathrm{Fix}(s)=\mathrm{Fix}(\pi_n(H_1))+\mathrm{Fix}(s),$$

这就通过 (15）.完成了定理 1.4 by(15). □

6. 一个猜想

我们以一个基于大量 Magma 计算的猜想作为本文的结尾。

猜想 6.1。对于 $n\ge 1$，设 $H\le W_n$ 是 W_n的一个子群。假设 H 包含一个置换 $\sigma\in W_n$，它在 $\{1,\dots,2^n\}$上具有传递作用。那么，对于任意子群 $G\le W_n$，$\mathcal{P}(H,G)$成立。

作者对猜想 6.1 的兴趣源于以下事实：它有望对第 2 节中提到的数论应用特别有用，因为对于大多数多项式 f，当 $n\ge 1$时，群 $G_n(f)$确实包含一个在 $\{1,\dots,2^n\}$上传递作用的元素。因此，在这种情况下，只要 $G_n(f)$逐元素 K_n-共轭到 $M_n(f)$中，猜想 6.1 就意味着 $G_n(f)$的一个共轭包含于 $M_n(f)$中。

致谢。作者谨向 Nigel Boston 致谢，感谢他就本文材料进行了许多有益的讨论。作者也感谢 Rafe Jones 就这项工作进行了一次有益的讨论。最后，作者感谢匿名审稿人提出的意见，这些意见帮助改进了本文的阐述。

参考文献

[1] F.Ahmad, R.L.Benedetto, J.Cain, G.Carroll, and L.Fang. 算术巴西利卡：二次 PCF 树状伽罗瓦群。预印本（2019）。http://arxiv.org/abs/1909.00039.[2] R.L.Benedetto, X.Faber, B.Hutz, J.Juul, and Y.Yasufuku. 一个三次后临界有限多项式的大树状伽罗瓦表示。《数论研究》（2017）3:29。[3] R.L.Benedetto and J.Juul. 数域上的 Odoni 猜想。《伦敦数学学会通报》51（2019），237–350。[4] R.L.Benedetto, J.Juul, D.Ghioca, and T.Tucker. PCF 二次多项式的树状伽罗瓦表示。准备中。[5] N. Boston and R. Jones. 树状伽罗瓦表示的像。《纯粹与应用数学季刊》5（2009）213–225。[6] N.Boston and R.Jones. 树状伽罗瓦表示。《几何奉献》124（2007），27–35。[7] A.Bridy and T.J.Tucker. 三次多项式迭代伽罗瓦群的有限指数定理。《数学年刊》373（2019），37–72。[8] G.Chenevier. Spin(7) 或 SO(7) 的子群，其中每个元素都与 G2 的某个元素共轭，以及其在自守形式中的应用。《数学文献》24（2019），95–161。[9] A.Ferraguti and G.Micheli. 树状伽罗瓦表示模 p 约化的一个等变同构定理。预印本（2019）。http://arxiv.org/abs/1905.00506.[10] A.Ferraguti, C.Pagano, and D.Casazza. 指数二的树状伽罗瓦表示逆问题。预印本（2019）。http://arxiv.org/abs/1907.08608.[11] V.Goksel. 马尔可夫过程与若干 PCF 二次多项式。《数论研究》（2019）5:29。[12] R.Gottesman and K.Tang. 具有正密度素因子的二次递推。《国际数论杂志》6（2010），1027–1045。[13] C. Gratton, K. Nguyen, and T. J. Tucker. ABC 猜想蕴含算术动力学中的本原素因子。《伦敦数学学会通报》45（2013），第6期，1194–1208。[14] S.Hamblen, R.Jones, and K.Madhu. $z^d + c$的轨道中的素数密度。《国际数学研究通知》IMRN，第7期，1924–1958，2015。[15] W.Hindes. 平均 Zsigmondy 集、动力伽罗瓦群与 Kodaira–Spencer 映射，《美国数学会汇刊》370（2018），6391–6410。[16] W.Hindes. 通过有理点分类低次迭代的伽罗瓦群，《国际数论杂志》14（2018），1403–1426。[17] P.Ingram. 树状伽罗瓦表示与多项式动力系统的一致化。《伦敦数学学会通报》45（2013），301–308。[18] R.Jones. 二次多项式算术动力学中的素因子密度。《伦敦数学学会杂志》（第2辑），78(2):523–544，2008。[19] R.Jones. 来自原像树的伽罗瓦表示：一篇树状表示综述。《贝桑松数学出版物：代数与数论》P辑，第107–136页，2013。[20] J.Juul, H.Krieger, N.Looper, M.Manes, B.Thompson, and L.Walton. 临界点较少的有理映射的树状表示。载于：Balakrishnan J., Folsom A., Lal´ın M., Manes M.（编），《数论研究方向》（2019）。女性数学家协会丛书，第19卷。施普林格，查姆。[21] M.Larsen. 关于元素共轭同态的共轭问题 I。《以色列数学杂志》，1994，88：253–277。[22] M.Larsen. 关于元素共轭同态的共轭问题 II。《数学季刊》，1996，47：73–85。[23] N.Looper. 三项式的动力伽罗瓦群与 Odoni 猜想。《伦敦数学学会通报》51（2019），278–292。[24] R.W.K.Odoni. 多项式迭代与复合的伽罗瓦理论。《伦敦数学学会会刊》（第3辑），51(3):385–414，1985。[25] R.W.K.Odoni. 关于数列 $w_n + 1 = 1 + w_1 w_n$ 的素因子。《伦敦数学学会杂志》（第2辑），32(1):1–11，1985。[26] R.W.K.Odoni. 将循环群的花环积实现为伽罗瓦群。《Mathematika》35(1):101–113，1988。

[27] R.Pink. 由二次多项式产生的有限生成迭代单值群。预印本（2013）。http://arxiv.org/abs/1307.5678。[28] M.Stoll. 关于 $\mathbb{Q}$ 的某些迭代多项式的伽罗瓦群。《巴塞尔数学档案》，59(3):239–244,1992。[29] S.Wang. 约化群的维数数据、局部与整体共轭。预印本（2017）。http://arxiv.org/abs/0707.0144。[30] S.Wang. 关于维数数据、局部与整体共轭。载于：第五届华人数学家大会，第一部分。AMS/IP 高等数学研究，第51卷。普罗维登斯：美国数学会，2012，365–382。[31] S.Wang. 关于局部与整体共轭。《代数杂志》，2015，439: 334–359。

数学与统计系，马萨诸塞大学阿默斯特分校，马萨诸塞州01003，美国 电子邮箱：goksel@math.umass.edu