arXiv:2303.10744v1 [math.RA] 19 Mar 2023

Leavitt路径代数的乘法群

BuiXuan Hai[1](1) *University of Science, Ho Chi Minh City, Vietnam*(2)*Vietnam National University, Ho Chi Minh City, Vietnam*e-mail: bxhai@hcmus.edu.vn

and

Huynh VietKhanh*Department of Mathematics and Informatics, HCMC University of Education,280 An Duong Vuong Str., Dist. 5, Ho Chi Minh City, Vietnam*e-mail: khanhhv@hcmue.edu.vn

Abstract. 本文证明，若 K 是非绝对域，则含幺非交换 Leavitt 路径代数 L_K(*E*)和 Cohn路径代数 C_K(*E*)的乘法群包含一个非循环自由子群。我们还根据图 E 描述了自由子群的生成元。最后，我们确定了若干特殊类型的 Leavitt 路径代数的乘法群。

1. Introduction and preliminaries

Leavitt 路径代数最早于 [2] 中引入，并得到深入研究。尽管许多数学家对 Leavitt 路径代数的各个方面进行了广泛研究，但含幺 Leavitt 路径代数的乘法群似乎相对鲜少受到关注。本文的主要目的是尝试探讨这一问题。更确切地说，我们主要关注非交换含幺 Leavitt 路径代数的乘法群中是否存在非循环自由子群。我们将证明，只要基域不是绝对域，非交换含幺 Leavitt 路径代数就总是包含一个非循环自由子群。我们还根据基图描述这类自由子群的生成元。粗略地说，这些生成元可以由汇点、无限发射点或无限路径确定。

本文所用的基本符号和约定均为标准用法，取自 Gene Arbrams、Pere Ara 和 Mercedes Siles Molina 的著作 [3]。特别地，有向图 $E = (E^0, E^1, r, s)$ 由两个集合 E^0 和 E^1 以及映射 $r, s: E^1 \to E^0$ 构成。E^0 的元素称为顶点，E^1 的元素称为边。为方便起见，下面概述本文将大量用到的一些概念和符号。

若顶点 v 不发出任何边，则称其为汇点；若发出无限多条边，则称其为无限发射点。若顶点 v 既不是汇点也不是无限发射点，则称其为正则顶点。图 E 中所有正则顶点组成的集合记为 Reg(*E*)。对于每个 $e \in E^1$，定义幽灵边 e^*，令 $r(e^*) := s(e)$ 且 $s(e^*) := r(e)$。所有幽灵边组成的集合记为 $(E^1)^*$。长度为 $\ell(\mu) := n \geq 1$ 的有限路径 μ，是由边 $\mu = e_1 e_2 \dots e_n$ 构成的有限序列，满足 $r(e_i) = s(e_{i+1})$

Key words and phrases. Leavitt路径代数；Cohn路径代数；自由子群；单模。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 16S88；20F19。[1]通讯作者

对所有 $1 \leq i \leq n-1$ 均成立。令 $s(\mu) := s(e_1)$ 且 $r(\mu) := r(e_n)$。E 中所有有限路径组成的集合记为 Path(E)。设 $\mu = e_1 \dots e_n \in$ Path(E)。若 $v = s(\mu) = r(\mu)$，则称 μ 为以 v 为基点的闭路径。若此外，对每个$j > 1$，均有 $s(e_j) \neq v$，则称 μ 为以 v 为基点的简单闭路径。若 μ 是以 v 为基点的闭路径，且对每个 $i \neq j$ 均有 $s(e_i) \neq s(e_j)$，则称 μ 为以 v 为基点的圈。假设$\mu = e_1 \dots e_n$ 是以顶点 v 为基点的圈。那么，对每个 $1 \leq i \leq n$，路径$e_i e_{i+1} \dots e_n e_1 \dots e_{i-1}$ 都是以 $s(e_i)$ 为基点的圈。我们将以 $s(e_i)$ 为基点的圈的集合 $\{\mu_i\}$ 称为 μ 的圈。圈 c 是由路径集合构成的集合，其中包含某个以顶点 v 为基点的圈 μ 的圈 μ。圈 c 的长度是其中任意路径 c 的长度。特别地，长度为 1 的圈称为环。

此外，$\mu^* = e_n^* \dots e_2^* e_1^*$ 是路径 $\mu = e_1 \dots e_n$对应的幽灵路径。路径 μ 上所有顶点的集合记为 μ^0。

路径 $\mu = e_1 \dots e_n$ 的一个出口是指一条边 e，使得对于某些 i和 $e \neq e_i$，有 $s(e) = s(e_i)$。如果图 E 中的每个圈都有出口，则称该图满足条件 (L)。

对于 u、$v \in E^0$，如果存在一条从 u 到 v的路径，则记作 $u \geq v$。若子集S 相对于集合 C具有可数分离性质，则称其具有可数分离性质：如果 C 是一个可数的 E^0 集合，并且对每个 $u \in S$，都存在一个 $v \in C$，使得 $u \geq v$。

对于每个 $v \in E^0$ 以及每条无限路径 p，我们定义

$$M(v) = \{w \in E^0 \mid w \geq v\} \text{ and } M(p) = \{w \in E^0 \mid w \geq v \text{ for some } v \in p^0\}.$$

设 H 是 E^0的一个子集。若对于某个顶点 v，只要 $u \in H$ 且$u \geq v$，就有 $v \in H$，则称 H 是遗传的；若对于任意正则顶点v，$r(s^{-1}(v)) \subseteq H$ 蕴含 $v \in H$，则称 H 是饱和的。

接下来的两个定义引自 [17]。

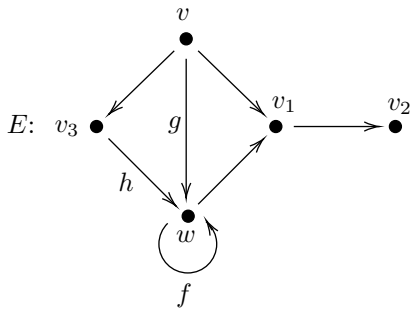
定义1.1. 假设 H 是 E^0的一个遗传饱和子集。若顶点w 是一个无限发射点，且满足 $w \in E^0 \backslash H$，则称其为 H 的破裂顶点

$$1 \leq |s^{-1}(w) \cap r^{-1}(E^0 \backslash H)| < \infty.$$

H 的所有破裂顶点组成的集合记为 B_H。对于每个 $w \in B_H$，定义

$$w^H = w - \sum_{\substack{s(e)=w, \\ r(e) \notin H}} ee^*.$$

例1. 考虑如下图：



我们看到，$H = \{v_1, v_2\}$ 是 E^0的遗传饱和子集。此外，H 的所有破裂顶点构成的集合为 $B_H = \{v, w\}$。

定义 1.2. 给定 E^0 的遗传饱和子集 H 和子集$S \subseteq B_H$，我们称（H， S）为一个可容许对，并用 I（H， S）表示由集合 $H \cup \{v^H : v \in S\}$生成的L_K（E）的理想。对于每个可容许对（H， S），相应的商图 $E\backslash$（H， S）定义如下:

$$(E\backslash(H,S))^0 = (E^0\backslash H) \cup \{v' : v \in B_H\backslash S\},$$
$$(E\backslash(H,S))^1 = \{e \in E^1 : r(e) \notin H\} \cup \{e' : e \in E^1, r(e) \in B_H\backslash S\},$$

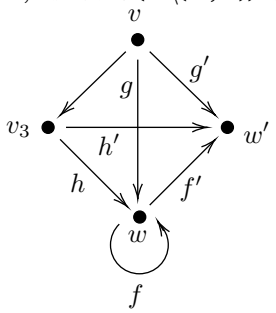
并且 r 和 s 通过设定 $s(e') = s(e)$ 和 $r(e') = r(e)'$，扩展到 $(E\backslash(H,S))^0$ 。

例 2. 考虑例1中的图 E，并令 $S = \{v\} \subseteq B_H$。那么，$B_H\backslash S = \{w\}$，以 w 为终点的边为 f、 g、 h。因此，与可容许对 (H, S) 对应的商图 $E\backslash(H, S)$ 可详细描述如下:

$$(E\backslash(H,S))^0 = (E^0\backslash H) \cup \{w'\},$$
$$(E\backslash(H,S))^1 = \{e \in E^1 : r(e) \notin H\} \cup \{f', g', h'\},$$

并且 r 和 s 通过设定 $s(f') = s(f) = v_3$、 $s(g') = s(g) = v$、 $s(h) = s(h') = v_3$，以及 $r(f') = r(g') = r(h') = w'$，扩展到 $(E\backslash(H, S))^0$。

$F\backslash(H, S)$:



定义 1.3（Leavitt路径代数）。设 E 为一个有向图， K 为一个域。我们定义集合 $\left(E^1\right)^*$，它由形如 $\{e^* | e \in E^1\}$ 的符号组成。 E 在系数域 K 上的 Leavitt路径代数记为 $L_K(E)$，它是由 $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ 生成的自由结合 K-代数，并满足以下关系:

（V）$vv' = \delta_{v,v'}v$ 对所有 $v, v' \in E^0$ 均成立，（E1） $s(e)e = e$ 对所有 $e \in E^1$ 均成立，（E2） $r(e)e = e$ 对所有 $e \in E^1$ 均成立，（CK1） $e^* = e^*s(e) = e^*$ 对所有 $e \in E^1$ 均成立，（CK2） $e^*f = \delta_{e,f}r(e)$ 对所有 $e, f \in E^1$ 均成立，以及（CK2） $v = \sum_{\{e \in E^1 | s(e)=v\}} ee^*$ 对每个 $v \in \mathrm{Reg}(E)$ 均成立。

以下定义引自 [3, 定义1.5.1]。

定义1.4（Cohn路径代数）。设 E 为任意图， K 为任意域。 E 上系数取自 K的Cohn路径代数记为 $C_K(E)$，它是由集合 $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$生成的自由结合 K代数，并满足定义1.3中的关系（V）、（E1）、（E2）和（CK1）。

一般而言，Leavitt路径代数 $L_K(E)$没有单位元。然而，当且仅当顶点集 E^0 有限时，它才有单位元（见 [3, 引理1.2.12（iv）]）。以下结果可从 [17, 定理5.7] 中的一部分推得。为方便使用，我们在此将其重述为一个引理。

引理 1.5（参见 [17, 定理 5.7]）。设 E 为一个图， K 为一个域。

（1）对于图 E 中给定的可容许对（H, S），映射

$$\varphi : L_K(E) \to L_K(E\backslash(H,S))$$

定义为

$$\varphi(v) = \begin{cases} v + v' & \text{if } v \notin H \text{ and } v \in B_H\backslash S \\ v & \text{if } v \notin H \text{ and } v \notin B_H\backslash S \\ 0 & \text{if } v \in H \end{cases},$$

$$\varphi(e) = \begin{cases} e + e' & \text{if } r(e) \notin H \text{ and } r(e) \in B_H\backslash S \\ e & \text{if } r(e) \notin H \text{ and } r(e) \notin B_H\backslash S \\ 0 & \text{if } r(e) \in H \end{cases},$$

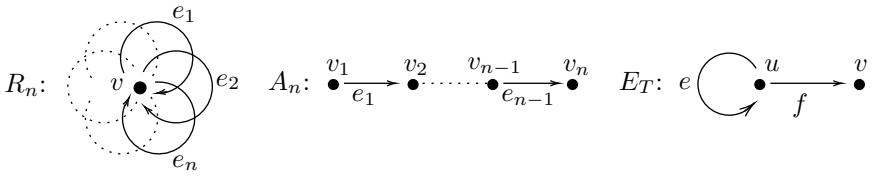
$$\varphi(e^*) = \begin{cases} e^* + (e')^* & \text{if if } r(e) \notin H \text{ and } r(e) \in B_H\backslash S \\ e^* & \text{if } r(e) \notin H \text{ and } r(e) \notin B_H\backslash S \\ 0 & \text{if } r(e) \in H \end{cases}$$

是一个满同态，其核为 $\varphi = I(H, S)$。

(2) $L_K(E)$ 的分次理想恰好是形如 $I(H, S)$ 的理想，其中 H 是某个遗传饱和子集，$S \subseteq B_H$ 是某个子集。此外，

$$I(H,S) \cap E^0 = H \text{ and } \{v \in B_H : v^H \in I\} = S.$$

图的 Leavitt 路径代数提供了丰富的知名代数结构实例。例如，经典的 Leavitt K-代数 $L_K(1, n)$（其中 $n \geq 2$）、全矩阵代数 $\mathrm{M}_n(K)$，以及 Toeplitz K-代数 $\mathscr{T}_K$，分别是“带有 n 个花瓣的玫瑰图” R_n ($n \geq 2$)、具有 n 个顶点的有向线图 A_n，以及 Toeplitz 图 E_T 的 Leavitt 路径代数，它们如下图所示：



本文组织如下。第 2 节研究 Leavitt路径代数上的几类简单模，为后续内容做准备。第 3 节给出本文的主要结果。在本节中，我们将在定理 3.6 中证明：当 K 是非绝对域时，非交换 Leavitt 路径代数 $L_K(E)$ 总是包含非循环自由子群。作为该定理的推论，我们证明 Cohn路径代数$C_K(E)$ 也满足同样的结论（推论 3.8）。接下来的三节，即第 4、5 和 6 节，将根据基图 E描述 $L_K(E)$ 中非循环自由子群的生成元。这些描述是通过考察 $L_K(E)$ 中三类本原理想而得到的。最后，在第 7 节中，我们将确定某些特殊类型 Leavitt 路径代数的乘法群，包括交换、阿廷的、诺特 Leavitt 路径代数以及 Toeplitz K-代数 $\mathscr{T}_K$。

最后，设 R 是一个含单位元的环或代数。那么，符号 $R^\times$ 表示 R的乘法群。对于域 K，我们用 $\mathrm{M}_n(K)$ 表示

K上的全矩阵代数，并用 $\{f_{ij} \mid 1 \leq i,j \leq n\}$ 表示 $\mathbf{M}_n(K)$ 中的标准矩阵单位。

2. Simple modules over Leavitt path algebras

在开始本文的主要研究之前，我们需要考察 Chen 和 Rangaswamy 引入的 Leavitt 路径代数上的若干类简单模。

(A)：由无限路径 p 定义的 Chen 模 $V_{[p]}$：设 $p = e_1e_2\ldots e_n\ldots$ 为一条无限路径，$n \geq 1$ 为一个整数。在 [7], 中，Chen 定义了 $\tau_{\leq n}(p) := e_1\ldots e_n$ 和 $\tau_{>n}(p) := e_{n+1}e_{n+2}\ldots$。此外，我们令 $\tau_{\leq 0}(p) := s(p)$ 和 $\tau_{>0}(p) := p$。若存在正整数 m、$n \geq 1$，使得 $\tau_{>m}(p) = \tau_{>n}(q)$，则称两条无限路径 p 和 q 尾等价。容易验证，这是一个等价关系。对于一条无限路径 p，符号 $[p]$ 表示所有与 p 尾等价的路径所构成的等价类。若 $p = g^\infty := ggg\ldots$，其中 g 是某条闭路径，则称 p 是有理的。按照 Rangaswamy[5], 的说法，若一条无限路径 p 与有理路径 c^∞ 尾等价，其中 c 是 E 中的一条圈，则称 p 以一个圈结尾。此外，若圈 c 上没有任何顶点是另一条圈的基点（以该顶点为基点的 c 的循环置换除外），则称 c 为独占环。

对于无限路径 p，Chen 定义

$$V_{[p]} = \bigoplus_{q\in[p]} Kq,$$

一个 K-向量空间，其 K-基为 $\{q : q \in [p]\}$。Chen 在 [7]中证明，以下规则使 $V_{[p]}$ 成为一个简单左 $L_K(E)$-模。

根据 $v = s(q)$ 是否成立，取 $v \cdot q = q$ 或 0；根据 $r(e) = s(q)$ 是否成立，取 $e \cdot q = eq$ 或 0；根据 $q = eq'$ 是否成立，取 $e^* \cdot q = \tau_{>1}(q)$ 或 0。

(B)：由汇点 w 定义的 Chen 模 $\mathbf{N}_w$：设 w 是图 E 中的一个汇点。按照 Chen 的记法，我们用 $\mathbf{N}_w$ 表示 K-向量空间，其基由所有终止于 w 的有限路径组成；也就是说，

$$\mathbf{N}_w = \bigoplus_{\substack{q\in \mathrm{Path}(E),\\ r(q)=w}} Kq.$$

然后，通过以与我们对 $V_{[p]}$ 相同的方式定义其基元素上的作用（并且对所有 $e \in E^1$，$e^* \cdot w = 0$），$\mathbf{N}_w$ 成为一个简单左 $L_K(E)$-模。由 [7, 定理3.3(1) 和定理 3.7(1)], ，我们可以得出以下结果。

引理 2.1. 设 p 是一条无限路径，w 是 E 中的一个汇点。设 $V_{[p]}$ 和 $\mathbf{N}_w$ 是上文定义的 $L_K(E)$-模。那么，

$$\mathrm{End}_{L_K(E)}(V_{[p]}) \cong K \ \textit{and} \ \ \mathrm{End}_{L_K(E)}(\mathbf{N}_w) \cong K.$$

(C)：Rangaswamy 的扭曲模 $V^f_{[p]}$：设 A 是一个代数，M 是一个 A-模。给定 A 的一个自同构 σ，我们可以如下定义扭曲的 A-模 M^σ。

$M^\sigma = M$ 作为 A 上的向量空间，
$a \cdot m^\sigma = (\sigma(a)m)^\sigma$。

（这里，对于元素 $m \in M$，符号 m^σ 表示 M^σ 中对应的元素。）容易验证，$\mathrm{End}_A(M) = \mathrm{End}_A(M^\sigma)$。此外，扭曲模 M^σ 是单模，当且仅当 M 是单模。在 [7], 中，Chen 深入研究了 $V_{[p]}$ 和 N_w 的扭模 $V_{[p]}^{\mathbf{a}}$ 和 $\mathrm{N}_w^{\mathbf{a}}$，其中 a 是 $L_K(E)$ 的一个适当自同构。

作为对 Chen 构造的一种修改， [14], Rangaswamy 引入了新的简单 $L_K(E)$-模 $V_{[p]}^f$，其简要描述如下。设$f(x) = 1 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $n \geq 1$是 $K[x]$ 中的一个不可约多项式，并设$c = e_1e_2 \ldots e_m$是 E中的一个独占环。令 $p = c^\infty$。设 $K' = K[x]/(f(x))$，它是 K的一个域扩张。然后，我们可以在域 K'上构造 Leavitt路径代数 $L_{K'}(E)$。令 $\bar{x}$ 为 x 在 K'中的像。显然， $\bar{x} \neq 0$ 属于 K'，因此$\bar{x}$ 在 K'中可逆。因此，我们可以定义一个映射 $\sigma : L_{K'}(E) \to L_{K'}(E)$，它将

$$\begin{aligned} &v \to v \text{ for } v \in E^0, \\ &e \to e \text{ and } e^* \to e^* \text{ for } e \in E^1 \text{ with } e \neq e_1, \\ &e_1 \to \bar{x}e_1 \text{ and } e_1^* \to \bar{x}^{-1}e_1^*. \end{aligned}$$

容易验证， σ 是 $L_{K'}(E)$的一个自同构，因此我们可以定义 $L_{K'}(E)$-模 $V_{[p]}$的扭曲 $L_{K'}(E)$-模 $V_{[p]}^\sigma$。在 [5], 中，Ran- gaswamy 将通过把 $V_{[p]}$上的标量限制从 $L_{K'}(E)$ 限制到 $L_K(E)$而得到的 $L_K(E)$-模记为 $V_{[p]}^f$。此外，已证明 $V_{[p]}^f$ 是一个简单的 $L_K(E)$-模。现在，为了后续使用，我们需要计算 $\mathrm{End}_{L_K(E)}(V_{[p]}^f)$。

引理 2.2. 设 $c = e_1e_2 \ldots e_m$是图 E中的一个独占环，且 $p = c^\infty$。设 $f(x) = 1 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $n \geq 1$是 $K[x]$ 中的一个不可约多项式，并设 $K' = K[x]/(f(x))$。考虑简单的 $L_K(E)$-模 $V_{[p]}^f$。那么，

$$\mathrm{End}_{L_K(E)}(V_{[p]}^f) \cong K'.$$

证明。为简便起见，我们令 $R = L_K(E)$ 和 $R' = L_{K'}(E)$。考虑由无限路径 p 定义的简单 R'-模 $V_{[p]}$。根据引理 2.1，我们得出 $\mathrm{End}_{R'}(V_{[p]}) \cong K'$. 令 σ 为如上所定义的 R' 的自同构。则 $\mathrm{End}_{R'}(V_{[p]}^\sigma) \cong K'$. 由 $R \subseteq R'$ 可知，$\mathrm{End}_{R'}(V_{[p]}^\sigma) \subseteq \mathrm{End}_R(V_{[p]}^f)$。为证明反向包含，取 $\varphi \in \mathrm{End}_R(V_{[p]}^f)$，并写为

$$K' = K \oplus \bar{x} \oplus \cdots \oplus K\bar{x}^{n-1},$$

其中 $\bar{x}$ 是 x 在 K'中的像。于是，通过将 $V_{[p]}^\sigma$ 上的标量从 R 扩张到 R'，并令 $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$，可将 φ 视为 $\mathrm{End}_{R'}(V_{[p]}^\sigma)$ 的一个元素。因此，$\mathrm{End}_R(V_{[p]}^f) \subseteq \mathrm{End}_{R'}(V_{[p]}^\sigma)$。所以，$\mathrm{End}_R(V_{[p]}^f) = \mathrm{End}_{R'}(V_{[p]}^\sigma) \cong K'$。□

(D)：由无限发射点 v 定义的 Rangaswamy 模 $\mathrm{S}_{v\infty}$ ： 设 v 是 E 中的一个无限发射点。在 [13], 中，Rangaswamy 将 $\mathrm{S}_{v\infty}$ 定义为 K-向量空间，其基为集合 $B = \{p : p$ 是 E 中满足 $r(p) = v\}$ 的路径；也就是说，

$$\mathbf{S}_{v\infty} = \bigoplus_{\substack{p \in \mathrm{Path}(E), \\ r(p) = v}} Kp.$$

对于 E 中的每个顶点 u 和每条边 e，他按如下方式定义 $S_{v\infty}$ 上的线性变换 P_u、S_e 和 S_{e^*}。对于任意 $p \in B$，令

$$P_u(p) = \begin{cases} p & \text{if } u = s(p) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \qquad S_e(p) = \begin{cases} ep & \text{if } r(e) = s(p) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

$$S_{e^*}(p) = \begin{cases} p' & \text{if } p = ep' \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \qquad S_{e^*}(v) = 0.$$

映射 $\phi\colon L_K(E) \to \mathrm{End}_K(S_{v\infty})$ 将 u 映至 P_u、e 映至 S_e，并将 e^* 映至 S_{e^*}，是一个代数同态。因此，$S_{v\infty}$ 可通过 ϕ视为 $L_K(E)$ 上的左模。在 [13], 中，Rangaswamy 证明了 $S_{v\infty}$ 是一个简单的 $L_K(E)$-模。为了后续使用，我们需要计算 $\mathrm{End}_K(S_{v\infty})$。

引理 2.3. 若 v 是图 E中的一个无限发射点，则 $\mathrm{End}_{L_K(E)}(S_{v\infty}) \cong K$.

证明. 假设 $p,q \in B$。不难验证 $p^*q = \delta_{pq}v$。考虑一个非零元素 $\varphi \in \mathrm{End}_{L_K(E)}(S_{v\infty})$。那么，$\varphi$ 是一个自同构，因为 $S_{v\infty}$是一个简单的 $L_K(E)$-模。任取 $p \in B$，令

$$\varphi(p) = \sum_{i=1}^{\ell} k_i q_i.$$

如果对所有 i 都有 $q_i \neq p$，则

$$0 \neq \varphi(v) = \varphi(p^*p) = p^*\varphi(p) = p^*\varphi(p) = p^*\Big(\sum_{i=1}^{\ell} k_i q_i\Big) = 0,$$

矛盾。因此，$\varphi(p) = kp$ 对某个 $k \in K$ 成立。我们声称，k 只取决于 φ，而与 p 无关。事实上，假设 $q \in B$、$q \neq p$。那么，$\varphi(q) = k'q$ 对某个 $k' \in K$ 成立。由于 $r(p) = r(q) = v$，我们有

$$kp = \varphi(p) = \varphi(pv) = \varphi(pq^*q) = pq^*\varphi(q) = pq^*(k'q) = k'p(q^*q) = k'p,$$

由此可得 $k = k'$。断言得证。因此，我们得出：对于每个非零元素 $\varphi \in \mathrm{End}_{L_K(E)}(S_{v\infty})$，存在唯一的元素，记为 $\lambda_\varphi \in K$，使得对所有 $p \in B$ 都有 $\varphi(p) = \lambda_\varphi p$。若再令 $\lambda_0 = 0$，则显然，映射 $\varphi \mapsto \lambda_\varphi$ 在 $\mathrm{End}_{L_K(E)}(S_{v\infty})$ 与 K 之间定义了一个同构。□

命题 2.4. 设 E 为任意图，K 为任意域，且 P 为 $L_K(E)$ 的任一本原理想。那么，存在一个简单左模 V，其类型为 $V_{[p]}$、N_w、$V_{[p]}^f$ 和 $S_{v\infty}$ 中的一种，使得 $\mathrm{Ann}_{L_k(E)}(V) = P$，且 $\mathrm{End}_{L_K(E)}V$ 是一个包含 K 的域。

证明。V的存在性由 [13, 命题2.6和2.7] 以及 [5, 定理3.9]得出。对于第二个断言，根据引理2.1、2.2和2.3，我们得出 $\mathrm{End}_{L_K(E)}V$同构于 K 或 $K[x]/(p(x))$，其中 $p(x)$ 是 $K[x]$中的一个不可约多项式。□

3. Non-cyclic free subgroups in Leavitt path algebras

对于图 E 和任意域 K，回忆一下，Leavitt路径代数$L_K(E)$是含幺的，当且仅当顶点集 E^0 是有限的 [2, 引理1.2.12 (iv)]。本节的主要目标是证明：若 K 不是局部有限域且 E^0有限，那么当 $L_K(E)$非交换时，Leavitt路径代数 $L_K(E)$的乘法群包含一个非循环自由子群。回忆一下，若域K 的每个有限子集在素子域上的生成域都是有限域，则称K 为局部有限域（或绝对域）。显然，若域 K 的素子域为 $\mathbb{P}$，则 K 是局部有限域，当且仅当 $\mathbb{P}$ 是有限的且 K 在 $\mathbb{P}$上是代数的。本文中，我们更倾向于使用“绝对域”这一术语，而不是“局部有限域”。零特征域是非绝对域的平凡例子。其他此类例子还包括不可数域（参见 [15, 推论B-2.41，第 343]页）。为确保 $L_K(E)$中存在单位元，在本文余下部分，我们始终假设 E 有有限个顶点；也就是说， E^0 是有限集。下面的引理相当基础（因此省略其证明），但在解决本节的问题时起着重要作用。

引理 3.1. 设 R 和 S 为含幺环，且 $\varphi : R \to S$ 是一个满同态。假设 $\langle x, y\rangle$ 是由 x 和 y 生成的 $S^\times$ 的非循环自由子群。如果 $a \in \varphi^{-1}(x)$ 和 $b \in \varphi^{-1}(y)$ 满足 $a, b \in R^\times$，那么 $\langle a, b\rangle$ 是 $R^\times$ 的非循环自由子群，且 $\langle a, b\rangle \cong \langle x, y\rangle$。

命题 3.2. 设 E 为一个图， K 为任意域。如果 $L_K(E)$ 是非交换的，那么存在 $L_K(E)$ 的一个本原理想 P，使得 $L_K(E)/P$ 是一个（含幺）非交换本原环。

证明。回顾一下，对于任意图 E 和任意域 K，Leavitt路径代数$L_K(E)$ 是半本原的 [2, 命题 2.3.2]。设 $\{P_i \mid i \in I\}$ 为 $L_K(E)$ 中所有本原理想构成的集合。那么， $\bigcap_{i\in I} P_i = 0$，并且存在一个单射环同态

$$\varepsilon : L_K(E) \longrightarrow \prod_{i\in I}(L_K(E)/P_i).$$

由于 $L_K(E)$是非交换的，所以$\prod_{i\in I}(L_K(E)/P_i)$也是非交换的。因此，存在 $i_0 \in I$ 使得 $L_K(E)/P_{i_0}$ 是非交换的。令 $P = P_{i_0}$，引理的证明至此完成。□

根据命题3.2，我们知道，如果 $L_K(E)$是非交换的 Leavitt路径代数，那么总存在一个本原理想 P，使得 $L_K(E)/P$ 是非交换的。我们希望知道 P 属于哪种类型。根据 [14, 定理 4.3]，，Leavitt路径代数 $L_K(E)$中的非零本原理想恰有三种类型。为便于本文使用，我们在下面的定理中重述这一结果。

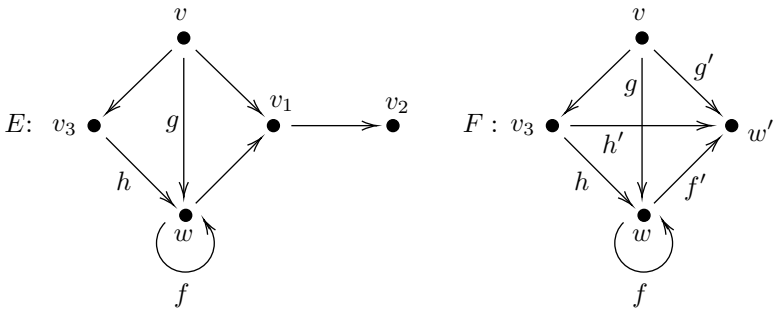
定理3.3. 设 E 是一个图， K 是一个域。对于 $L_K(E)$的给定理想 P，令$H = P \cap E^0$。那么， P是本原的，当且仅当 P属于以下类型之一：

I: P是形如 $I(H, B_H\backslash\{w\})$的分次理想，且必定非零，其中 $w \in B_H$ 和 $M(w) = E^0\backslash H$。II: P是形如 $I(H, B_H)$的分次理想，可能为零，并且$E\backslash(H, B_H)$是向下有向的，满足条件 (L)和可数分离性质。

III: $P = I(H, B_H, f(c))$，且必定非零，其中 c是以顶点 u为基点的排他圈，$E^0\backslash H = M(u)$，并且 $f(x)$是 $K[x, x^{-1}]$中的不可约多项式。

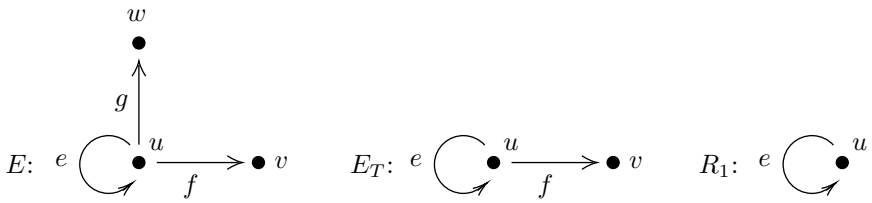
以下示例表明，我们总能找到一个适当的图 E，使得 $L_K(E)$ 包含一个本原理想 P，其类型为定理3.3中给出的任一种，且 $L_{K(E)}/P$ 是非交换的。

例 3. 再次考虑例1中给出的图。集合 $H = \{v_1, v_2\}$ 是 E^0 和 $B_H = \{v, w\}$ 的遗传饱和子集。显然， $M(w)$ $=E^0\backslash H$，这表明 P:= $I(H, B_H\backslash\{w\})$ 是 $L_K(E)$ 的一个 I 型本原分次理想。此外，若设 F:= $E\backslash(H, B_H\backslash\{w\})$，则 F 恰好是图$E\backslash(H, S)$，如例 2 中所述，其中 $S = \{v\}$。



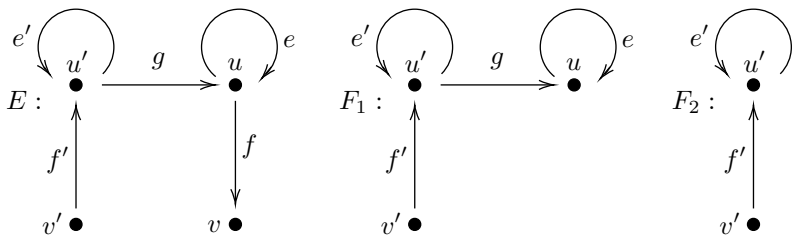
根据引理 1.5，我们有 $L_K(E)/P \cong L_K(F)$，这显然是非交换的。

例 4。考虑以下图:



若设定 $H_1 = \{w\}$ 和 $H_2 = \{v, w\}$，则 H_1 和 H_2 是 E^0 的遗传饱和子集。显然， $B_{H_1} = B_{H_2} = \varnothing$。此外，容易看出， P_1 :=$I(H_1)$ 和 P_2 := $I(H_2)$ 是 II型本原理想。我们还有 $E\backslash H_1 = E_T$ 和 $E\backslash H_2 = R_1$，这意味着 $L_K(E)/P_1 \cong L_K($ $E_T) = \mathscr{T}_K$，且 $L_K(E)/P_2 \cong L_K(R_1) \cong K[x, x^{-1}]$。由此可知， $L_K(E)/P_1$ 是非交换的，而 $L_K(E)/P_2$ 是交换环。

例 5。考虑以下图:



在图 E 中，集合 $H_1 = \{v\}$ 是 E^0 的遗传饱和子集，因此对于商图 $F_1 = E\backslash H$，有 $L_K(E)/I(H) \cong L_K(F_1)$。由于 $E^0\backslash H_1 = M(u)$，根据定理3.3，对于每个不可约多项式 $f(x) \in K[x, x^{-1}]$，理想 $P = I(H_1, f(e))$ 是 $L_K(E)$ 的 III 型非分次本原理想。若设定 $H_2 = \{u, v\}$，则 H_2 也是 E^0 的遗传饱和子集，并设 $F_2 = E\backslash H_2$。显然，

$$I(H_2) = I(u, v) = I(u, v, f(e)) = I(H_1, u),$$

因此 $P \subseteq I(H_2)$。由于 $L_K(E)/I(H_2) \cong L_K(F_2)$ 显然是非交换的，我们推得 $L_K(E)/P$ 也是非交换的。

为便于后续使用，我们重述 $[9, (11.9)]$ 中的以下结果。

定理 3.4（左本原环结构定理）。设 R 是一个左本原环，V 是一个忠实单左 R-模。设 $k = \mathrm{End}_R(V)$。那么，k 是一个除环，且 R 同构于作用在 V_k 上的稠密线性变换环。此外：

(1) 若 R 是左阿廷的，则 $n := \dim_k(V)$ 有限，且 $R \cong \mathrm{M}_n(k)$。(2) 若 R 不是左阿廷的，则 $\dim_k(V)$ 无限；并且对于任意正整数 n，存在 R 的一个子环 Λ_n，它存在一个满射环同态到 $\mathrm{M}_n(k)$。

以下引理可由 [16, 引理2.8（第30页）及练习2.2和2.3（第31页）]推出。

引理3.5. 设 K 为非绝对域。则 $\mathrm{GL}_2(K)$ 含有一个非循环自由子群，其生成元如下。考虑 $\mathrm{M}_2(K)$ 中的下列矩阵：

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2 + \alpha f_{21}, \\
B &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2 + \alpha f_{12}, \\
C &= \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \alpha & \beta^{-1} \end{pmatrix} = A + (\beta - 1)f_{11} + (\beta^{-1} - 1)f_{22}, \\
D &= \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix} = B + (\beta - 1)f_{11} + (\beta^{-1} - 1)f_{22}.
\end{aligned}$$

(1) 若 $\mathrm{char}K = 0$ 为 2，或 α 在素子域$\mathbb{Q}$上超越，则 A 和 B 生成 $\mathrm{GL}_2(K)$ 的一个非循环自由子群。(2) 若 $\mathrm{char}K = t > 0$，且 α、β 在素子域 $\mathbb{F}_t$上代数无关，则 C 和 D 生成 $\mathrm{GL}_2(K)$ 的一个非循环自由子群。

现在我们可以证明以下定理，它是本节的主要结果。

定理 3.6. 设 E 为一个图，K 为非绝对域。若 $L_K(E)$ 非交换，则 $L_K(E)^\times$ 含有一个非循环自由子群。

证明. 根据命题 3.2，存在 $L_K(E)$ 的一个本原理想 P，使得 $L_K(E)/P$ 是非交换的。此外，命题 2.4 蕴含存在一个左单 $L_K(E)$-模 V，使得 $P = \mathrm{Ann}_{L_K(E)}(V)$，且 $k := \mathrm{End}_{L_K(E)}(V)$ 是一个包含 K 的域。令 $\varphi\colon L_K(E) \to L_K(E)/P$ 为自然满同态。

于是，通过 φ， V 成为 $L_K(E)/P$-模。经过常规检验可知， V 是一个左忠实单 $L_K(E)/P$-模，并且 $\mathrm{End}_{L_K(E)/P}(V) = \mathrm{End}_{L_K(E)}(V) = k$。根据定理 3.4，有两种可能的情况：

情况 1： $L_K(E)/P$是阿廷的。若令 $n = \dim_k V$，则 $L_K(E)/P \cong \mathrm{M}_n(k)$。由于 $L_K(E)/P$ 是非交换的，我们必有 $n > 1$。由于 $K \subseteq k$，且 K不是绝对的，因此 k 也不是绝对的。因为 $\mathrm{GL}_n(k)$包含 $\mathrm{GL}_2(k)$的一个副本，根据引理3.5，我们得出 $\mathrm{GL}_n(k)$也包含一个以 x、 y为生成元的非循环自由子群。可以证明，我们可以选取某个$a \in \varphi^{-1}(x)$ $b \in \varphi^{-1}(y)$，使得 $a, b \in L_K(E)^\times$。（在接下来的三节中，我们将根据基图 E详细给出这类元素 a 和 b，从而证明这一事实。）因此，我们可以应用引理 3.1，得出 $\langle a, b\rangle$ 是 $L_K(E)^\times$的一个非循环自由子群。

情形 2： $L_K(E)/P$ 不是阿廷的。再次根据定理 3.4，对于每个$n > 1$，都存在 $L_K(E)/P$ 的一个子环 Λ_n，以及一个满环同态f： $\Lambda_n \to \mathrm{M}_n(k)$。设 x、 y 是引理3.5中给出的 $\mathrm{GL}_n(k)$的一个自由子群的生成元。由于 φ 和 f 是满射，存在 a、 $b \in L_K(E)^\times$ 使得$\varphi(f(a)) = x$ 且 $\varphi(f(b)) = y$。我们可以选取 a 和 b，使得 a、 $b \in L_K(E)^\times$。（同样，这一事实将在接下来的三节中证明。）最后，由引理 3.1 可知， $\langle a$、 $b\rangle$ 是 $L_K(E)^\times$的一个非循环自由子群。□

接下来，我们将考察 Cohn路径代数 $C_K(E)$中非循环自由子群的存在性。作为上述定理的推论，我们将证明非交换的 Cohn路径代数总是包含一个非循环自由子群。在进行这项工作之前，我们需要记下以下辅助引理。

引理 3.7. 设 E 是一个图， K 是一个域。那么，Cohn路径代数 $C_K(E)$ 是交换的，当且仅当 Leavitt路径代数 $L_K(E)$ 也是交换的。

证明. 为证明“仅当”部分，假设 $L_K(E)$ 是交换的。对于每条边 $\in E^1$，有 $e = s(e)e r(e) = s(e)r(e)e$，这意味着 $s(e) = r(e)$。这说明 E 只包含孤立顶点或孤立图 R_n(参见引言末尾的图示)。 $L_K(E)$ 的交换性保证了$n = 1$。因此， E 只由孤立顶点或孤立图 R_1构成。这意味着 $C_K(E)$ 也是交换的。反向结论以类似方式立即可得。□

推论 3.8. 设 E 是一个图， K 是一个非绝对域。若 $C_K(E)$ 非交换，则 $C_K(E)^\times$ 包含一个非循环自由子群。

证明。设 I 为由集合生成的 $C_K(E)$ 的理想

$$\left\{ v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* \mid v \in \mathrm{Reg}(E) \right\}.$$

由 [3, 推论 1.5.5] 可知 $C_K(E)/I \cong L_K(E)$，根据引理 3.7，它是非交换的。结合定理 3.6，我们得出 $L_K(E)^\times$ 含有一个非循环自由子群。根据引理 3.1， $C_K(E)^\times$ 也含有一个非循环自由子群。□

推论 3.9. 设 E 是一个图， K 是一个非绝对域。若 Leavitt路径代数 $L_K(E)$ 是非交换的，则它含有一个非交换自由 K-子代数。

证明。设 x 和 y 是 $L_K(E)$中非循环自由子群的生成元。那么，由 x 和 y 在 K 上生成的 $L_K(E)$的 K-子代数 $K\langle x, y\rangle$ 显然是一个自由代数。□

推论 3.10。设 E 是一个图， K 是一个非绝对域。若 $(L_K(E))^\times$ 是一个局部可解群，则 $L_K(E)$ 是交换的。
证明。 $L_K(E)^\times$ 的局部可解性意味着它不含非循环自由子群。由定理 3.6可知， $L_K(E)$ 是交换的。□

文献中有许多研究半素环乘法群的工作（例如参见 [10], [11] 及其中的参考文献）。例如，在 [10] 和 [11], 中，C. Lanski深入考察了这类群的代数结构；更一般地，他还研究了半素环乘法群的可解正规子群。现在，设 R 是一个含有非中心幂等元的半素环， S 是由所有平方为零的元素生成的加法子群。那么，正如 Lanski 在 [10, 第 1 点，第 313],R 页所指出的， S 含有一个非中心李理想 L ，使得 $L \subseteq S$。因此， [10]中的定理 9 可改述如下。

定理 3.11. 设 R 是一个含有非中心幂等元的半素环， S 是由所有平方为零的元素生成的 R 的加法子群。那么， R 含有一个非中心李理想 L ，使得 $L \subseteq S$。此外，若 R是 6-挠无的（也就是说，对每个 $x \in R$，若 $6x = 0$ ，则 $x = 0$），那么 $R^\times$ 的每个可解正规子群 G 都与 L逐元素交换。特别地， G包含于 R的中心中。

作为该定理的推论，我们有：

推论 3.12. 设 E 是一个图， K 是一个域。假设 $L_K(E)$是一个 6-挠无的 Leavitt 路径代数。若 G 是 $L_K(E)^\times$的可解正规子群，则 G 包含于 $L_K(E)$的中心中。

证明. 我们知道，对于图 E 和域 K，Leavitt路径代数 $L_K(E)$总是半素的（例如参见 [2, 命题 2.3.1]）。显然，我们可以假设$L_K(E)$是非交换的。若 E 含有一个非中心顶点，则该顶点是 $L_K(E)$的非中心幂等元。假设 E 的所有顶点都是中心的。对于任意 $e \in E^1$，由于 $s(e)$和 $r(e)$是中心的，我们得出 $s(e) = r(e)$，因此 e 是一个环。这意味着 E 中的所有边都是环。若 E 仅包含孤立顶点或孤立环，则 $L_K(E)$是交换的，这与假设矛盾。因此， E 至少含有一个孤立图 R_n（见引言末尾的图），即具有 $n \geq 2$ 个花瓣的玫瑰图。

现在，很容易验证每个 $e_i e_i^*$ 都是一个非中心幂等元。无论如何，在 $L_K(E)$ 中总存在一个非中心幂等元。最后，由定理 3.11 可得该结果。□

鉴于定理 3.6 和推论 3.12，提出以下猜想是合理的。

猜想 3.1. 设 E 是一个图， K 是一个非绝对域。那么， $L_K(E)^\times$ 的每个非中心正规子群都包含一个非循环自由子群。

虽然我们知道，非交换 Leavitt 路径代数的乘法群总是包含一个非循环自由子群，但要描述这个自由子群的生成元相当困难。现在，我们将本文剩余的大部分篇幅用于考察这个问题。首先，我们记录一个较简单的情形:

命题3.13. 设 A_n 是具有 n 个顶点和 $n-1$ 条边的有向 n-直线图（见引言末尾的图）， $n \geq 2$，且 K 是一个非绝对域。

若我们令

$$a = 1_{L_K(E)} + \alpha e_i e_{i+1} \dots e_j, \quad b = 1_{L_K(E)} + \alpha e_j^* \dots e_{i+1}^* e_i^*,$$

$$c = a + (\beta - 1)v_i + (\beta^{-1} - 1)v_j, \quad d = b + (\beta - 1)v_i + (\beta^{-1} - 1)v_j,$$

其中 α、 $\beta \in K$ 和 $1 \leq i \lneq j \leq n,$ ，则以下结论成立:

(1) 如果 char$K = 0$ ，且 α 等于 2 或者是关于素子域$\mathbb{Q}$的超越元，那么 $\langle \alpha$、$\beta \rangle$ 是 $L_K(A_n)^\times$ 的非循环自由子群。(2) 如果 char$K = t > 0$ ，且 α、β 关于素子域 $\mathbb{F}_t$ 代数无关，那么 $\langle c$、$d \rangle$ 是 $L_K(A_n)^\times$ 的非循环自由子群。

证明。命题1.3中已证明，映射

$$\varphi : L_K(A_n) \longrightarrow \mathrm{M}_n(K),$$

其定义为 $\varphi(v_i) = f_{ii}$, $\varphi(e_i) = f_{i(i+1)}$ 和 $\varphi(e_i^*) = f_{(i+1)i}$，是一个同构。由于 $f_{ij} = f_{i(i+1)} \cdots f_{j-1,\ j}$，直接验证可得

$$\varphi(a) = \mathrm{I}_n + x f_{ij},$$

$$\varphi(b) = \mathrm{I}_n + y f_{ji},$$

$$\varphi(c) = \mathrm{I}_n + x f_{ij} + (y-1) f_{ii} + (y^{-1} - 1) f_{jj},$$

$$\varphi(d) = \mathrm{I}_n + x f_{ji} + (y-1) f_{ii} + (y^{-1} - 1) f_{jj}.$$

容易看出， $\varphi(a)$、 $\varphi(b)$、 $\varphi(c)$、 $\varphi(d)$分别是引理3.5中矩阵 A、 B、 C、D 的副本。因此，结论得证。□

根据命题 3.2，非交换 Leavitt 路径代数 $L_K(E)$ 总是包含一个本原理想 P ，使得 $L_K(E)/P$ 是非交换的。此外，定理 3.6 的证明表明，我们可以按如下方式在 $L_K(E)$ 中构造一个非循环自由子群。首先，在 $L_K(E)/P$ 中构造一个非循环自由子群 G ，然后， G 在自然同态φ: $L_K(E) \to L_K(E)/P$ 下的逆像 $\varphi^{-1}(G)$ 是 $L_K(E)$ 中的一个非循环自由子群。根据定理 3.3， $L_K(E)$ 中恰有三种本原理想类型，我们将其命名为 I、II 和 III。因此， $L_K(E)$ 中的非循环自由子群可由这些本原理想的类型确定。接下来，我们将以这种方式在 $L_K(E)$ 中构造自由子群。

4. Free subgroups determined by the primitive ideals of type I

首先，我们需要确定 $L_K(E)$ 的一个 K-基。

引理 4.1（[3, 推论 1.5.12]）。设 E 是一个图， K 是一个域。

(1) 单项式集合

$$\mathscr{A} = \{\lambda\nu^* : r(\lambda) = r(\nu)\}$$

是 Cohn路径代数 $C_K(E)$ 的一个 K-基。

(2) 对于每个 $v \in \mathrm{Reg}(E)$，设 $\{e_1^v, \ldots, e_{n_v}^v\}$ 为 $s^{-1}(v)$ 中元素的一个枚举。则，Leavitt路径代数 $L_K(E)$ 的一个 a K-基由以下族给出

$$\mathscr{B} = \mathscr{A}\backslash\{\lambda e_{n_v}^v (e_{n_v}^v)^*\nu^* : r(\lambda) = r(\nu) = v \in \mathrm{Reg}(E)\}.$$

下面的引理表明， $L_K(E)$ 中的一个非循环自由子群可以由 E 中的一个汇点确定。

引理4.2. 设 E 为一个图， K 为一个非绝对域。假设存在一个汇点 w 和一条边 f，使得 $r(f) = w$。那么，以下断言成立。

(i) 若 char $K = 0$ 且 α 等于 2 或者是关于素子域 $\mathbb{Q}$的超越元，则

$$a := 1_{L_K(E)} + \alpha f^*, \qquad b := 1_{L_K(E)} + \alpha f$$

生成 $L_K(E)$ 中的一个非循环自由子群。

(ii) 若 char $K = t > 0$ 且 α、β 在素子域 $\mathbb{F}_t$上代数无关，则

$$c := a + (\beta - 1)s(f) + (\beta^{-1} - 1)r(f),$$
$$d := b + (\beta - 1)s(f) + (\beta^{-1} - 1)r(f)$$

在 $L_K(E)$ 中生成一个非循环自由子群。

证明。若令 $V = Kw \oplus Kf$，则这是一个非零的 K-空间，具有一个 K-基$\{w, f\}$且 $\dim_K V = 2$。令

$$R = \{r \in L_K(E) : rV \subseteq V\} \text{ and } I = \{r \in L_K(E) : rV = 0\},$$

那么 R 是 $L_K(E)$ 的子环，而 I 是 R 的理想，因此 R/I 可视为一个 K-空间。现在，我们将为 R/I 寻找一个 K-基。取满足 $r(\gamma) = r(\lambda)$ 的 $\gamma\lambda^*$，并且 $v = a_1w + a_2f \in V$，其中 a_1、$a_2 \in K$。我们先进行如下计算

$$a_1\gamma\lambda^*w = \begin{cases} a_1\gamma & \text{if } \lambda = w, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$a_2\gamma\lambda^*f = \begin{cases} a_2\gamma f & \text{if } \lambda = s(f), \\ a_2\gamma & \text{if } \lambda = f, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由此可得

$$\gamma\lambda^*v = a_1\gamma\lambda^*w + a_2\gamma\lambda^*f = \begin{cases} a_1\gamma & \text{if } \lambda = w, \\ a_2\gamma f & \text{if } \lambda = s(f), \\ a_2\gamma & \text{if } \lambda = f, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1}$$

现在，取 $r \in L_K(E)$ 并写出

$$r = k_1\gamma_1\lambda_1^* + k_2\gamma_1\lambda_2^* + \cdots + k_n\gamma_n\lambda_n^*,$$

其中 $k_i \in K$ 和 $\gamma_i, \lambda_i \in \mathrm{Path}(E)$，且对所有 $1 \le i \le n$，均有 $r(\gamma_i) = r(\lambda_i)$。根据 (1)，$r \in R$ 当且仅当 $rv = 0$，或 $\lambda_i \in \{s(f)\ w, f\}$ 且 $\gamma_i \in \{s(f)\ w, f\}$。等价地，$r \in R$当且仅当 $rv = 0$或 $\gamma_i\lambda_i^* \in \{s(f)\ w, f, f^*, ff^*\}$。由于$ff^*v = ff^*($ $a_1w + a_2f) = a_2f$，我们得出 $ff^* + I = a_2f + I$。这意味着

$$R/I = \{k_1s(f) + k_2w + k_3f + k_4f^* + I \mid k_1, k_2, k_3, k_4 \in K\}.$$

由此可知，$s(f) + I, r(f) + I, f + I, f^* + I$作为 K-空间张成 R/I。此外，根据引理 4.1，很容易验证这些元素在 K 上线性无关。因此，集合 $\{s(f) + I, r(f) + I,$ $f + I, f^* + I\}$是 R/I 的一个 K-基。相应地，映射 $\varphi\colon R \to \mathrm{M}_2(K)$ 定义为

$$\begin{aligned} \varphi(s(f)) &= f_{11}, & \varphi(r(f)) &= f_{22}, \\ \varphi(f) &= f_{12}, & \varphi(f^*) &= f_{21} \end{aligned}$$

是一个满环同态，且 $\ker\varphi = I$。考虑 $\mathrm{M}_2(K)$ 中的以下矩阵:

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{I}_2 + \alpha f_{21}, \\ B &= \mathrm{I}_2 + \alpha f_{12}, \\ C &= A + (\beta - 1)f_{11} + (\beta^{-1} - 1)f_{22}, \\ D &= B + (\beta - 1)f_{11} + (\beta^{-1} - 1)f_{22}. \end{aligned}$$

容易看出

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \varphi\left(1_{L_K(E)} + \alpha f^*\right) = A, \\ \varphi(b) &= \varphi\left(1_{L_K(E)} + \alpha f\right) = B, \\ \varphi(c) &= \varphi\left(a + (\beta - 1)s(f) + (\beta^{-1} - 1)r(f)\right) = C, \\ \varphi(d) &= \varphi\left(b + (\beta - 1)s(f) + (\beta^{-1} - 1)r(f)\right) = D. \end{aligned}$$

为证明 (i)，我们假设 $\mathrm{char}K = 0$，且 α 要么等于 2，要么是相对于素子域 $\mathbb{Q}$ 超越的。根据引理3.5，A 和 B 生成 $\mathrm{GL}_2(K)$ 的一个非循环自由子群。简单计算可知，a、b、c、d 在 $L_K(E)$ 中可逆，且

$$\begin{aligned} a^{-1} &= 1_{L_K(E)} - \alpha f^*, \\ b^{-1} &= 1_{L_K(E)} - \alpha f, \\ c^{-1} &= a^{-1} + (\beta^{-1} - 1)s(f) + (\beta - 1)r(f), \\ d^{-1} &= b^{-1} + (\beta^{-1} - 1)s(f) + (\beta - 1)r(f). \end{aligned}$$

由于 $\varphi\colon R \to \mathrm{M}_2(K)$ 是满的，我们可以应用引理 3.1，得出$\langle a, b\rangle$ 是 $R^\times \subseteq L_K(E)^\times$ 的一个非循环自由子群，从而证明 (i)。最后，(ii) 的证明类似。□

引理4.3。设 E 是一个图，K 是一个域。设 (H, S) 是图 E 中的一个可容许对，$F = E\backslash(H, S)$ 是一个商图，并且 $\varphi\colon L_K(E) \to L_K(E\backslash(H, S))$ 是

引理 1.5 中给出的满同态。假设 $f \in E^1$ 与 $w = r(f) \in B_H \backslash S$。那么我们有

$$\varphi(s(f)) = s(f'),\ \varphi(w^H) = w',\ \varphi(fw^H) = f',\ \varphi(w^H f^*) = f'^*,$$

其中， w' 和 f' 分别是定义 1.2 中给出的 w 和 f 的 F 中的相应顶点和边。

证明。定义 1.2 确认了 $s(f') = s(f)$，因此由引理 1.5 可得$\varphi(s(f)) = s(f')$。为证明剩下的关系，我们回顾

$$w^H = w - \sum_{s(e)=w,\ r(e)\notin H} ee^*.$$

为简便起见，令$A = \sum_{s(e)=w,\ r(e)\notin H} ee^*$。首先，我们断言$\varphi(A) = w \in F$。设 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ 是集合$\{e \in E^1 | s(e) = w,\ r(e) \notin H\}$中元素的一个枚举。（注意，由于 w 是 H的一个破裂顶点，该集合非空且有限。）若对所有 $1 \leq i \leq n$都有 $r(e_i) \notin B_H \backslash S$，则由引理 1.5 可得，对所有 i都有 $\varphi(e_i) = e_i$ 以及 $\varphi(e_i^*) = e_i^*$。在这种情况下， F中所有以 w为共同源点的边构成集合 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$。因此， F中的关系 (CK2) 表明 $\varphi(A) = \sum_{i=1}^n e_i e_i^* = w \in F$。现在，假设某些 $r(e_i)$属于 $B_H \backslash S$，而其余的并不属于。一般性不失，设 $r(e_1) \ldots, r(e_m) \in B_H \backslash S$，且 $r(e_{m+1}) \ldots, r(e_n) \notin B_H \backslash S$，其中 $1 \leq m \leq n$。由引理 1.5 可得，对于 $1 \leq i \leq m$，有 $\varphi(e_i) = e_i + e_i'$，$\varphi(e_i^*) = e_i^* + e_i'^*$；对于 $m+1 \leq i \leq n$，有 $\varphi(e_i) = e_i$，$\varphi(e_i^*) = e_i^*$。因此，我们得到

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^{m} (e_i + e_i')(e_i^* + e_i'^*) + \sum_{i=m+1}^{n} ee_i^*.$$

对于 $1 \leq i \leq m$，在 F 中，我们有如下关系

$$(e_i + e_i')(e_i^* + e_i'^*) = e_i e_i^* + e_i e_i'^* + e_i' e_i^* + e_i' e_i'^*.$$

由于 $r(e')$ 是 F 中的汇点，我们有 $e_i e_i'^* = e_i' e_i^* = 0$，由此可得 $(e_i + e_i')(e_i^* + e_i'^*) = e_i e_i^* + e_i' e_i'^*$。这意味着

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^{m} e_i e_i^* + \sum_{i=1}^{m} e_i' e_i'^* + \sum_{i=m+1}^{n} ee_i^* = \sum_{i=1}^{n} e_i e_i^* + \sum_{i=1}^{m} e_i' e_i'^*.$$

注意， F 中所有以 w 为公共源点的边所构成的集合为

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \cup \{e_1', \ldots, e_m'\}.$$

再次， F 中的关系 (CK2) 意味着 $\varphi(A) = w \in F$，从而证明了该断言。利用 $\varphi(A) = w$ 这一事实，我们现在很容易进行如下计算：

$$\begin{aligned}
\varphi(w^H) &= \varphi(w) - \varphi(A) = w + w' - w = w'.\\
\varphi(fw^H) &= \varphi(f)\varphi(w) - \varphi(f)\varphi(A)\\
&= (f + f')(w + w') - (f + f')w = f + f' - f = f'.\\
\varphi(w^H f^*) &= \varphi(w)\varphi(f^*) - \varphi(A)\varphi(f^*) = (w + w')(f^* + f'^*) - w(f^* + f'^*)\\
&= f^* + f'^* - f^* = f'^*.
\end{aligned}$$

因此，证明至此完成。 □

以下定理是本节的主要结果。

定理4.4。设 E 为一个图， K 为一个非绝对域。假设 $L_K(E)$包含一个定理3.3中给出的I型本原理想 P ，使得 $L_K(E)/P$是非交换的。设 w 为确定 P的破裂顶点。那么，对于任意满足 $r(f) = w$的$f \in E^1$ ，以下断言成立：

(i) 如果 char $K = 0$ 和 $\alpha \in K$ 等于 2，或 $\alpha \in K$ 在素子域 $\mathbb{Q}$上超越，则这些元素

$$a := 1_{L_K(E)} + \alpha w^H f^* \text{ and } b := 1_{L_K(E)} + \alpha f w^H$$

在 $L_K(E)$ 中生成一个非循环自由子群。

(ii) 如果 char $K = t > 0$ 和 $\alpha, \beta \in K$ 在素子域 $\mathbb{F}_t$上代数无关，则

$$c := a + (\beta - 1)s(f) + (\beta^{-1} - 1)w^H,$$

$$d := b + (\beta - 1)s(f) + (\beta^{-1} - 1)w^H$$

在 $L_K(E)$ 中生成一个非循环自由子群。

证明。取定理3.3中的一个顶点 $w \in B_H$ ，即 $w \in B_H$ 是一个顶点，使得 $P = I(H, B_H \backslash \{w\})$ 且 $M(w) = E^0 \backslash H$。令 $F = E \backslash (H, B_H \backslash \{w\})$。根据引理1.5，存在一个满同态 φ: $L_K(E) \to L_K(F)$，其核为 $\varphi = P$。商图 F 描述如下：

$$F^0 = (E^0 \backslash H) \cup \{w'\};$$
$$F^1 = \{e \in E^1 : r(e) \notin H\} \cup \{f' : r(f) = w\},$$

并通过设定 $s(f') = s(f)$和 $r(f') = w'$，将 r、 s扩张到 F^0，对所有满足 $r(f) = w$的 $f \in E^1$均成立。令 $A = \{f \in E^1 | r(f) = w\}$。若 $A = \varnothing$，则 F^0将是单点 w' ，这意味着 $L_K(F)$是交换的，矛盾。这保证了 $A \neq \varnothing$。现在，取 $f \in A$ 并令 $f' = \varphi(f)$。那么， f' 是 F^1中的一条边，满足 $r(f') = w'$。由于 w'是 F中的汇点，我们得出$s(f') \neq r(f') = w'$。为证明(i)，假设char$F = 0$， α 要么等于2，要么在素子域 $\mathbb{Q}$上超越，并令

$$a' = 1_{L_K(F)} + \alpha f'^*, \quad b' = 1_{L_K(F)} + \alpha f'.$$

根据引理4.3， $\varphi(s(f)) = s(f')$， $\varphi(w^H) = w'$， $\varphi(f w^H) = f'$且$\varphi(w^H f^*) = f'^*$。这意味着

$$\varphi(a) = \varphi\left(1_{L_K(E)} + \alpha w^H f^*\right) = 1_{L_K(F)} + \alpha f'^* = a',$$
$$\varphi(b) = \varphi\left(1_{L_K(E)} + \alpha f w^H\right) = 1_{L_K(F)} + \alpha f' = b'.$$

由引理 4.2(i)可知， $\langle a', b' \rangle$ 是 $L_K(F)^\times$的非循环自由子群。此外，元素 a 和 b 在 $L_K(E)$中可逆，其逆元为

$$a^{-1} = 1_{L_K(E)} - \alpha w^H f^*,$$
$$b^{-1} = 1_{L_K(E)} - \alpha f w^H.$$

因此，由引理 3.1可知， $\langle a, b \rangle$ 是 $L_K(E)^\times$的非循环自由子群，从而证明了(i)。

为证明 (ii)，假设 char $K = t > 0$, $\alpha, \beta \in K$ 在素子域 $\mathbb{F}_t$ 上代数无关，并令

$$c' = a' + (\beta - 1)s(f') + (\beta^{-1} - 1)w' \text{ and } d' = b' + (\beta - 1)s(f') + (\beta^{-1} - 1)w'.$$

我们有

$$\begin{aligned}\varphi(c) &= \varphi\left(a + (\beta-1)s(f) + (\beta^{-1}-1)w^H\right)\\ &= a' + (\beta-1)s(f') + (\beta^{-1}-1)w' = c',\\ \varphi(d) &= \varphi\left(b + +(\beta-1)s(f) + (\beta^{-1}-1)w^H\right)\\ &= b' + (\beta-1)s(f') + (\beta^{-1}-1)w' = d'.\end{aligned}$$

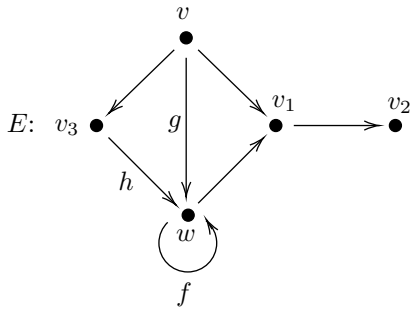
这两个元素 c 和 d在 $L_K(E)$中可逆，且

$$\begin{aligned}c^{-1} &= a^{-1} + (\beta^{-1}-1)s(f) + (\beta-1)w^H\\ d^{-1} &= b^{-1} + (\beta^{-1}-1)s(f) + (\beta-1)w^H.\end{aligned}$$

根据引理4.2(ii)，我们得出 $\langle c', d'\rangle$ 是 $L_K(F)^\times$的非循环自由子群。因此，引理3.1意味着 $\langle c, d\rangle$ 是$L_K(E)^\times$的非循环自由子群。证明至此完成。□

在下面的例子中，我们展示一种特定情形，并详细描述由一个 I 型本原理想确定的非循环自由子群的生成元。

例6。再次考虑例 3 中给出的图 E 。



如果 $H = \{v_1, v_2\}$，那么 $B_H = \{v, w\}$。正如我们在例 3 中指出的， P:=$I(H, B_H\backslash\{w\})$ 是 $L_K(E)$ 的一个 I 型本原分次理想。显然，$w^H = w - ff^*$。因此，若 K 是特征零的域，例如，并且 α 等于 2 或者在素子域 $\mathbb{Q}$ 上超越，那么以下元素将生成 $L_K(E)^\times$ 的一个非循环自由子群:

$$a = 1_{L_K(E)} + \alpha(w - ff^*)f^* \text{ and } b = 1_{L_K(E)} + \alpha f(w - ff^*).$$

5. Free subgroups determined by the primitive ideals of type II

本节中，我们研究由 II 型本原理想确定的 $L_K(E)$ 中的非循环自由子群。回顾一下，若 $L_K(E)$ 的本原理想 P 是形如 $I(H, B_H)$ 的分次理想，并且 $E\backslash(H, B_H)$ 向下有向，满足条件 (L) 和可数分离性质（见定理3.3），则称 P 为 II 型。在进一步讨论之前，我们先记录一个简单的引理。

引理 5.1. 设 E 是一个图， K 是一个域。若 E 含有两条不同的尾等价无限路径 p' 和 q'，则存在两条形如 p 和 fp 的无限路径，它们分别与 p' 和 q' 尾等价，其中 $f \in E^1$，且 $r(f) = s(p)$。

证明. 由于 p' 和 q' 是 E 中尾等价的无限路径，存在取值最小的 m、$n \geq 0$，使得 $\tau_{>m}(p') = \tau_{>n}(q')$。写作 $p' = s(p')e_1 \dots e_m\tau_{>m}(p')$ 和 $q' = s(q')f_1 \dots f_n\tau_{>n}(q')$，其中 e_i、$f_j \in E^1$。由于 $p' \neq q'$，我们有 $m \geq 1$ 或 $n \geq 1$。不失一般性，可假设 $n \geq 1$。显然，路径 $p = \tau_{>m}(p') = \tau_{>n}(q')$ 和 $q = f_np$ 是所需形式的无限路径。□

下面的引理可视为通过一条无限路径确定 $L_K(E)$ 中非循环自由子群的方法。

引理 5.2. 设 E 是一个图，K 是一个非绝对域。假设 E 含有一条无限路径 p 和一条边 f，使得 $s(f) \neq r(f) = s(p)$。那么，以下断言成立。

(i) 如果 char $K = 0$ 且 α 等于 2 或者在素子域 $\mathbb{Q}$上超越，则

$$a := 1_{L_K(E)} + \alpha f^*, \qquad b := 1_{L_K(E)} + \alpha f$$

在 $L_K(E)$ 中生成一个非循环自由子群。

(ii) 如果 char $K = t > 0$ 且 α、β 在素子域 $\mathbb{F}_t$上代数无关，则

$$c := a + (\beta - 1)s(f) + (\beta^{-1} - 1)r(f),$$
$$d := b + (\beta - 1)s(f) + (\beta^{-1} - 1)r(f)$$

在 $L_K(E)$ 中生成一个非循环自由子群。

证明。令 $V = Kp \oplus Kq$，其中 $q = fp$。那么，V是一个以 $\{p, q\}$ 为基的 K-空间，因此 $\dim_K V = 2$。令

$$R = \{r \in L_K(E) : rV \subseteq V\} \text{ and } I = \{r \in L_K(E) : rV = 0\}.$$

那么，R 是 $L_K(E)$ 的一个子环，且 I 是 R的一个理想。因此，显然可以将 R/I视为一个 K-空间。接下来，我们要为 R/I 找到一个 K-基。为此，取 $\gamma\lambda^*$，其中 γ，$\lambda \in \mathrm{Path}(E)$ 满足 $r(\gamma) = r(\lambda)$，并且 $v = a_1p + a_2q \in V$，其中 $a_1, a_2 \in K$。我们有

$$a_1\gamma\lambda^*p = \begin{cases} a_1\gamma\eta & \text{if } p = \lambda\eta, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$a_2\gamma\lambda^*q = \begin{cases} a_2\gamma\beta & \text{if } q = \lambda\beta, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由于 $s(p) \neq s(q)$，情形 $p = \lambda\eta$ 和 $q = \lambda\beta$ 不可能同时发生。这意味着

$$\gamma\lambda^*v = \gamma\lambda^*(a_1p + a_2q) = \begin{cases} a_1\gamma\eta & \text{if } p = \lambda\eta, \\ a_2\gamma\beta & \text{if } q = \lambda\beta, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2}$$

因此，$\gamma\lambda^*v \in V$ 当且仅当 $\gamma\lambda^*v = 0$ 或以下情形之一发生：

情形 1：$p = \lambda\eta$ 和 $\gamma\eta \in V$。但由 $\gamma\eta \in V$可知，$\gamma\eta = p$ 或 $\gamma\eta = q$成立。前一种情形意味着 $\gamma\lambda^* \in \{\tau_{\leq n}(p)\tau_{\leq n}(p)^* : n \geq 0\}$ 和 $\gamma\lambda^*v = a_1p$，而后一种情形意味着 $\gamma\lambda^* \in \{\tau_{\leq m}(p)\tau_{\leq n}(q)^* : m、n \geq 0\}$和 $\gamma\lambda^*v = a_1q$。

情形 2： $q = \lambda\beta$ 和 $\gamma\beta \in V$。由此可得， $\gamma\beta = p$ 或 $\gamma\beta = q$成立。相同的论证表明， $\gamma\lambda^*$ 属于以下两者之一： $\{\tau_{\leq m}(q)\tau_{\leq n}(p)^* : m、 n \geq 0\}$ 和$\gamma\lambda^* v = a_2 p$; 或者 $\{\tau_{\leq m}(q)\tau_{\leq m}(q)^* : m \geq 0\}$和 $\gamma\lambda^* v = a_2 q$。

刚才的计算使我们可以得出结论： $\gamma\lambda^* V \subseteq V$当且仅当$\gamma\lambda^* V = 0$ （即 $\gamma\lambda^* \in I$），否则 $\gamma\lambda^*$ 属于集合

$$S = \{\tau_{\leq n}(p)\tau_{\leq n}(p)^*, \tau_{\leq m}(q)\tau_{\leq m}(q)^*, \tau_{\leq m}(p)\tau_{\leq n}(q)^*, \tau_{\leq m}(q)\tau_{\leq n}(p)^*\},$$

其中 $m, n \geq 0$。这意味着

$$R/I = \left\{ \sum_i k_i\gamma_i\lambda_i^* + I \mid k_i \in K, \gamma_i\lambda_i^* \in S \text{ for all } 1 \leq i \leq l \right\}.$$

Set

$$S_1 = \{\tau_{\leq n}(p)\tau_{\leq n}(p)^*, n \geq 0\}, \quad S_2 = \{\tau_{\leq m}(q)\tau_{\leq m}(q)^*, m \geq 0\},$$

$$S_3 = \{\tau_{\leq m}(p)\tau_{\leq n}(q)^*, m, n \geq 0\}, \quad S_4 = \{\tau_{\leq m}(q)\tau_{\leq n}(p)^*, m, n \geq 0\},$$

接下来，我们断言，对于每个元素 $\sum_{i=1}^{l} k_i\gamma_i\lambda_i^* \in L_K(E)$，以下结论成立：

(1) 如果对所有 $1 \leq i \leq n$都有 $\gamma_i\lambda_i^* \in S_1$，那么对于某个$k \in K$， $\sum_{i=1}^{l} k_i\gamma_i\lambda_i^* - kr(f) \in I$。（注意， $s(p) = r(f)$。）(2) 如果对所有 $1 \leq i \leq n$都有 $\gamma_i\lambda_i^* \in S_2$，那么对于某个$k \in K$， $\sum_{i=1}^{l} k_i\gamma_i\lambda_i^* - ks(f) \in I$。（注意， $s(q) = s(f)$。）(3) 如果对所有 $1 \leq i \leq n$都有 $\gamma_i\lambda_i^* \in S_3$，那么对于某个 $k \in K$， $\sum_{i=1}^{l} k_i\gamma_i\lambda_i^* - kf^* \in I$。(4) 如果对所有 $1 \leq i \leq n$都有 $\gamma_i\lambda_i^* \in S_4$，那么对于某个 $k \in K$， $\sum_{i=1}^{l} k_i\gamma_i\lambda_i^* - kf \in I$。

首先，我们证明 (1)。注意，正如我们在情形 1 中所证明的，对于每个$\gamma_i\lambda_i^* \in S_1$，都有 $\gamma_i\lambda_i^* v = a_1 p$。证明将对 k 采用归纳法。任取一个元素$v = a_1 p + a_2 q \in V$，其中 $a_1, a_2 \in K$。如果 $l = 1$，那么

$$(k_1\gamma_1\lambda_1^* - k_1 s(p))\, v = a_1 k_1 p - a_1 k_1 p = 0,$$

这意味着 $k_1\gamma_1\lambda_1^* - k_1 s(p) \in I$。现在，假设 $l > 1$，且对于长度小于 l的和，该结论成立。此时，存在 $k' \in K$ 使得$\sum_{i=1}^{l-1} k_i\gamma_i\lambda_i^* - k's(q) \in I$，这意味着 $\left(\sum_{i=1}^{l-1} k_i\gamma_i\lambda_i^*\right) = k's(q)v$。如果令$k = -k' - k_l$，那么

$$\left(\sum_{i=1}^{l} k_i\gamma_i\lambda_i^* - ks(q)\right) v = \left(\sum_{i=1}^{l-1} k_i\gamma_i\lambda_i^* + k_l\gamma_l\lambda_l^* - ks(q)\right) v$$

$$= k's(q)v + k_l\gamma_l\lambda_l^* v - ks(q)v = a_1 k' p + a_1 k_l p + a_1 k p = 0.$$

这表明 $\sum_{i=1}^{l} k_i\gamma_i\lambda_i^* - ks(q) \in I$。(2)、(3) 和 (4) 的证明同理可得。因此， R/I 的精确描述如下：

$$R/I = \{k_1 s(f) + k_2 r(f) + k_3 f + k_4 f^* + I \mid k_1, k_2, k_3, k_4 \in K\}.$$

根据引理 4.1，很容易验证 $\{s(f) + I, r(f) + I, f + I, f^* + I\}$是 K的一个基。因此，由下式给出的映射 φ: $R \to \mathbf{M}_2(K)$

$$\varphi(s(f)) = f_{11}, \qquad \varphi(r(f)) = f_{22},$$

$$\varphi(f) = f_{12}, \qquad \varphi(f^*) = f_{21}$$

是一个满环同态，其核为 $\ker\varphi = I$。考虑 $\mathrm{M}_2(K)$ 中的下列矩阵：

$$\begin{aligned}
A &= \mathrm{I}_2 + \alpha f_{21},\\
B &= \mathrm{I}_2 + \alpha f_{12},\\
C &= A + (\beta-1)f_{11} + (\beta^{-1}-1)f_{22},\\
D &= B + (\beta-1)f_{11} + (\beta^{-1}-1)f_{22}.
\end{aligned}$$

于是，很容易看出

$$\begin{aligned}
\varphi(a) &= \varphi\left(1_{L_K(E)} + \alpha f^*\right) = A,\\
\varphi(b) &= \varphi\left(1_{L_K(E)} + \alpha f\right) = B,\\
\varphi(c) &= \varphi\left(a + (\beta-1)s(f) + (\beta^{-1}-1)r(f)\right) = C,\\
\varphi(d) &= \varphi\left(b + (\beta-1)s(f) + (\beta^{-1}-1)r(f)\right) = D.
\end{aligned}$$

此外，元素 a、b、c、d 在 $L_K(E)$ 中可逆，其中

$$\begin{aligned}
a^{-1} &= 1_{L_K(E)} - \alpha f^*,\\
b^{-1} &= 1_{L_K(E)} - \alpha f,\\
c^{-1} &= a^{-1} + (\beta^{-1}-1)s(f) + (\beta-1)r(f)\\
d^{-1} &= b^{-1} + (\beta^{-1}-1)s(f) + (\beta-1)r(f).
\end{aligned}$$

为证明 (i)，我们假设 $\mathrm{char}K = 0$ 且 α 要么等于 2，要么在素子域 $\mathbb{Q}$ 上超越。根据引理3.5， A 和 B 生成 $\mathrm{GL}_2(K)$ 的一个非循环自由子群。由于 $\varphi : R \to \mathrm{M}_2(K)$ 是满射，我们可以应用引理 3.1，得出 $\langle a、b\rangle$ 是 $R^\times \subseteq L_K(E)^\times$ 的一个非循环自由子群，从而证明 (i)。最后，(ii) 的证明类似。□

现在正是介绍本节主要定理的好时机。

定理5.3. 设 E 是一个图， K 是一个非绝对域。假设 $L_K(E)$ 包含定理3.3中给出的一个 II型本原理想 P，使得 $L_K(E)/P$ 非交换，并令 $H = P \cap E^0$。那么 E 包含一个顶点 w，它是汇点或无限发射点，且满足 $E^0\backslash H = M(w)$；或者包含一条无限路径 p，且满足 $E^0\backslash H = M(p)$。此外，对于任意满足 $r(f) = w$ 或 $s(p)$ 的 $f \in E^1$，以下断言成立。

(i) 若 $K = 0$ 的特征为 2，或 α 在素子域 $\mathbb{Q}$ 上超越，则

$$a := 1_{L_K(E)} + \alpha f^*, \qquad b := 1_{L_K(E)} + \alpha f$$

在 $L_K(E)$ 中生成一个非循环自由子群。

(ii) 若 $K = t > 0$ 的特征为 α，且 β 在素子域 $\mathbb{F}_t$ 上代数无关，则

$$c := a + (\beta-1)s(f) + (\beta^{-1}-1)r(f),$$

$$d := b + (\beta-1)s(f) + (\beta^{-1}-1)r(f)$$

在 $L_K(E)$ 中生成一个非循环自由子群。

证明。若令 $F = E\backslash(H, B_H)$，则根据引理 1.4，存在一个满同态 φ：$L_K(E) \to L_K(F)$，其核为 $\varphi = P$。在这种情况下，商图 F 描述如下：

$$F^0 = E^0\backslash H \text{ and } F^1 = \{e \in E^1 : r(e) \notin H\}, \tag{1}$$

并且 r, s 被限制在 F^0 中。 [5, 定理 3.9] 的证明（见第 (ii) 部分）表明，有以下两种情况需要研究：

情况 1： F^0 包含唯一的汇点 w，使得 $F^0 = M(w)$。将 w 视为 E^1 中的一个顶点，我们看到 w 在 E 中要么是汇点，要么是无限发射点，使得$r(s^{-1}(w) \subseteq H$。令 $A = \{e \in E^1 | r(e) = w\}$。若 $A = \varnothing$，则 F 将是唯一的顶点 w，这说明 $L_K(F)$ 是交换的，矛盾。因此 $A \neq \varnothing$，我们可以取 $f \in F^1 \subseteq E^1$，使得 $s(f) = w$。为证明此情形下的 (i) 和 (ii)，令

$$\begin{aligned}
a' &= 1_{L_K(F)} + \alpha f^*, \\
b' &= 1_{L_K(F)} + \alpha f, \\
c' &= a' + (\beta - 1)s(f) + (\beta^{-1} - 1)w, \\
d' &= b' + (\beta - 1)s(f) + (\beta^{-1} - 1)w,
\end{aligned}$$

其中 $\alpha, \beta \in K$。假设 $\mathrm{char} F = 0$，且 α 要么等于 2，要么在素子域 $\mathbb{Q}$ 上超越。现在，根据引理 1.5，有 $\varphi(f) = f$ 和 $\varphi(w) = w$。由于 w 是 F 中的一个汇点，我们推得 $s(f) \neq r(f) = w$ 属于 F。因此，我们可以应用引理 4.2(i)，得出 $\langle a', b' \rangle$ 是 $(L_K(F))^\times$ 的一个非循环自由子群。容易验证， a, b, c, d 在 $L_K(E)$ 中可逆，且

$$\begin{aligned}
a^{-1} &= 1_{L_K(E)} - \alpha f^*, \\
b^{-1} &= 1_{L_K(E)} - \alpha f, \\
c^{-1} &= a^{-1} + (\beta^{-1} - 1)s(f) + (\beta - 1)r(f), \\
d^{-1} &= b^{-1} + (\beta^{-1} - 1)s(f) + (\beta - 1)r(f).
\end{aligned}$$

此外，由于 $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$, $\varphi(c) = c'$, $\varphi(d) = d'$ 且 φ 是满射，引理 3.1 蕴含 $\langle a, b \rangle$ 是 $(L_K(E))^\times$ 的一个非循环自由子群。因此，(i) 得证。(ii) 的证明与 (i) 的证明类似，故从略。

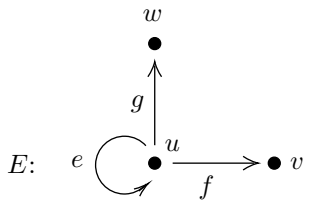
情形 2：在 F 中存在一条无限路径 p_0，使得 $F^0 = M(p_0)$：由于 F是 E 的一个子图，我们可以将 p_0 视为 E 中一条不以 E 中的独占环为终点的无限路径，且满足 $E^0 = M(p_0)$。令 $V_{[p_0]}$ 为由无限路径 p_0确定的忠实$L_K(F)$-单模；也就是说，

$$V_{[p_0]} = \bigoplus_{q \in [p_0]} Kq,$$

一个 K-向量空间，其基由所有与 p_0 尾等价的无限路径 q 组成。根据引理 2.1，我们得出 $\mathrm{End}_{L_K(F)}(V_{[p_0]}) \cong K$。若 $L_K(F)$ 是阿廷的，则由定理 3.4 可知 $L_K(F) \cong \mathbb{M}_n(K)$, 其中$n = \dim_K(V_{[p_0]})$ 是与 p_0 尾等价的 F 中无限路径的数量。由于 $L_K(F)$ 是非交换的，因此可得 $n \geq 2$。若 $L_K(F)$ 不是阿廷的，则 $\dim_K(V_{[p_0]}) = \infty$。无论哪种情况，都有 $\dim_K(V_{[p_0]}) \geq 2$，因此在 F 中存在两条不同的无限路径 p' 和 q'，它们与 p_0 尾等价。根据引理 5.1，我们得出存在两条无限路径 p 和 fp，其中

$f \in F^1 \subseteq E^1$满足 $s(f) \neq r(f) = s(p)$。此情形下 (i) 和 (ii) 的证明与前一种情形类似。□

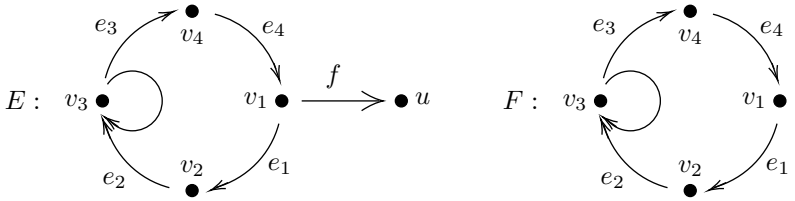
例7。考虑例 4 中给出的图 E 。



正如我们在例 4 中所说明的， $H = \{w\}$ 是 E^0 的遗传饱和子集，且 $P := I(H)$ 是一个 II型本原理想（注意 $B_H = \varnothing$）。此外，$E^0 \backslash H = \{u, v\} = M(v)$。根据定理5.3，如果 K 是特征零的域，且 α 等于 2 或者在素子域 $\mathbb{Q}$上超越，那么以下元素是 $L_K(E)^\times$的一个自由子群的生成元:

$$a = v + u + w + \alpha f^*, \quad b = v + u + w + \alpha f.$$

例8。设 K 是一个非绝对域。考虑下方给出的图 E 和 F :



那么 $H = \{u\}$是 E^0 和 $B_H = \varnothing$的遗传饱和子集。显然， $E\backslash H = F$ 是向下有向的，满足条件 (L)和可数分离性质。这意味着理想 $I(H)$ 是一个 II型本原理想，且 $L_K(E)/I(H) \cong L_K(F)$ 是非交换的。设 $c = e_1e_2e_3e_4$是 E 和 $p = c^\infty$中的一个圈。那么 p 是 E 中的一条无限路径，且 $E^0\backslash H = M(p)$。此外，边 e_4 满足条件 $v_4 = s(e_4) \neq r(e_4) = v_1 = s(p)$。因此，依据定理5.3，如果 $\mathrm{char} K = 0$ ，且 α 等于 2 或者在 $\mathbb{Q}$ 上超越，那么以下元素生成 $L_K(E)^\times$的一个非循环自由子群:

$$a = u + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \alpha e_4^*, \quad b = u + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \alpha e_4.$$

顺便指出，在 E 中有许多种无限路径可供选择，它们会产生不同的非循环自由子群。例如，我们可以选择 $q = e^\infty$ 以及满足 $s(e_2) \neq r(e_2) = s(q)$ 的边 e_2 。

正如 [5, 定理 3.10], 所证明的，Leavitt路径代数 $L_K(E)$ 是本原的，当且仅当 E 包含汇点 w ，或者包含一条无限路径 p ，该路径不以无出口圈结束，且满足 $E^0 = M(w)$ 或 $M(p)$。作为前一定理的推论，我们在下述推论中描述本原Leavitt路径代数中的自由子群。

推论 5.4. 设 E 是一个图， K 是一个非绝对域。若 $L_K(E)$ 是一个非交换的本原 Leavitt路径代数，则 E 包含一个汇点 w ，或包含一条无限路径 p ，该路径不以无出口圈结束，并且满足 $E^0 = M(w)$ 或$M(p)$。此外，对于任意满足 $r(f) = w$或 $s(p)$ 的 $f \in E^1$，有如下结论:

(i) 若 char $K = 0$ 且 α 等于 2 或者在素子域 $\mathbb{Q}$上超越，则

$$a := 1_{L_K(E)} + \alpha f^*, \quad b := 1_{L_K(E)} + \alpha f$$

在 $L_K(E)$ 中生成一个非循环自由子群。

(ii) 如果 char $K = t > 0$ 且 α、β 在素子域 $\mathbb{F}_t$上代数无关，那么

$$c := a + (\beta - 1)s(f) + (\beta^{-1} - 1)r(f),$$
$$d := b + (\beta - 1)s(f) + (\beta^{-1} - 1)r(f)$$

在 $L_K(E)$ 中生成一个非循环自由子群。

证明。在前述定理的证明中，我们看到商图 F包含一个汇点或一条无限路径，即分别为 w 和 p，以及一条边f，满足 $r(f) = w$或 $s(p)$。在这些条件下，我们已经证明 $L_K(F)^\times$包含一个非循环自由子群。由于当前推论中的图 E 满足与上述图 F相同的所有条件，因此，在 $L_K(F)$ 中存在非循环自由子群的证明同样适用于 $L_K(E)$。因此，我们可以得出结论：该推论的证明完成。□

例 9. 考虑 Toeplitz 图的代数 Toeplitz K代数 $\mathscr{T}_K$。于是，我们有 $1_{\mathscr{T}_K} = u + v$。因此，若 K是特征为 $t > 0$的域，且 α、β在素子域 $\mathbb{F}_t$上代数无关，则以下元素将生成 $\mathscr{T}_K^\times$ 的一个非循环自由子群：

$$c = u + v + \alpha f^* + (\beta - 1)u + (\beta^{-1} - 1)v,$$
$$d = u + v + \alpha f + (\beta - 1)u + (\beta^{-1} - 1)v.$$

6. Free subgroups determined by the primitive ideals of type III

本节旨在通过一个 III 型本原理想，确定 $L_K(E)$ 的非循环自由子群。回忆一下，若 P 是 $L_K(E)$ 的理想，且 $P = I(H, B_H, f(c))$，其中 $H = P \cap E^0$, c是基于顶点u的独占环 $E^0 \backslash H = M(u)$，而 $f(x)$ 是 $K[x, x^{-1}]$中的不可约多项式，则称该理想为 III 型本原理想。

定理 6.1. 设 E 是一个图， K 是一个非绝对域。假设 $L_K(E)$ 含有定理3.3中给出的一个 III 型本原理想 P（也就是说，理想 P由 $P = I(H, B_H, f(c))$ 定义，其中 $H = P \cap E^0$ 和 c 是一个独占环），使得 $L_K(E)/P$ 是非交换的。那么 E 包含一条与 c 尾等价的无限路径 p，且满足 $E^0 \backslash H = M(p)$。此外，对任意满足$r(f) = s(p)$ 的 $f \in E^1$，以下断言均成立。

(i) 若 $K = 0$ 的特征为 2，或者 α 在素子域 $\mathbb{Q}$ 上是超越的，则

$$a := 1_{L_K(E)} + \alpha f^*, \quad b := 1_{L_K(E)} + \alpha f$$

在 $L_K(E)$ 中生成一个非循环自由子群。

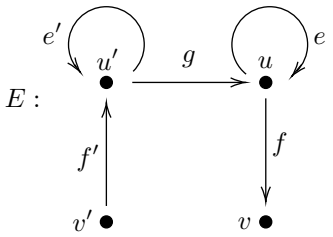
(ii) 若 $K = t > 0$ 的特征为 α，且 β 在素子域 $\mathbb{F}_t$ 上代数无关，则

$$c := a + (\beta - 1)s(f) + (\beta^{-1} - 1)r(f),$$
$$d := b + (\beta - 1)s(f) + (\beta^{-1} - 1)r(f)$$

在 $L_K(E)$ 中生成一个非循环自由子群。

证明。考虑商图 $F = E\backslash(H, B_H)$。由引理 1.5， $I(H, B_H)$ 是 $L_K(E)$ 的一个分次理想，并且存在一个满同态 $\varphi: L_K(E) \to L_K(F)$，其核为 $\varphi = I(H, B_H)$。显然，F包含一个以u为基点的独占环 c，且 $F^0 = M(u)$。令 $V_{[c]}$ 为由 c确定的忠实单 $L_K(F)$-单模。定理 5.3 中情形 2 所用的论证表明，$\dim_K(V_{[c]}) \geq 2$，因此 F 中存在两条不同的无限路径 p' 和 q'，它们与c尾等价。根据引理 5.1，我们得出存在两条无限路径 p 和fp，其中 $f \in F^1 \subseteq E^1$，且 $s(f) \neq r(f) = s(p)$。因此，由引理 5.2 可得结论。□

例 10。设 K 是一个非绝对域。考虑例 5 中给出的图 E 。



如我们所示，集合 $H = \{v\}$ 是遗传饱和的，并且对于每个不可约多项式 $f(x)$ $\in K[x, x^{-1}]$，理想 $P := I(H, f(e))$是 III 型原始的，$L_K(E)$，且 $L_K(E)/P$ 是非交换的。若令 $p = e^\infty$，则 p 是具有 $E^0\backslash H = M(p)$的无限路径。此外，显然，边 g 满足条件$u' = s(g) \neq r(g) = u = s(p)$。因此，若 $\mathrm{char}K = t > 0$ ，且 α, β 在素子域 $\mathbb{F}_t$上代数无关，则以下元素生成 $L_K(E)^\times$的一个非循环自由子群：

$$c = u + u' + v + v' + \alpha g^* + (\beta - 1)u' + (\beta^{-1} - 1)u,$$
$$d = u + u' + v + v' + \alpha g + (\beta - 1)u' + (\beta^{-1} - 1)u.$$

7. Multiplicative group of some Leavitt path algebras

在本节最后，我们将确定若干类 Leavitt 路径代数的乘法群：

单侧诺特 Leavitt 路径代数。我们先讨论单侧诺特 Leavitt 路径代数的乘法群。

命题 7.1. 设 E 是一个（任意的）图， K 是一个域。

(1) 如果 $L_K(E)$ 是左阿廷的，那么

$$(L_K(E))^\times \cong \prod_{i \in I} \mathrm{GL}_{n_i}(K),$$

其中， $|I|$ 是 E中的汇点数量；对于每个 $i \in I$， n_i 是 E 中终止于与 i对应的汇点的路径数量。

(2) *If* $L_K(E)$ *is left* 诺特h里,

$$(L_K(E))^\times \cong \prod_{i \in I} \mathrm{GL}_{n_j}(K) \times \prod_{j \in J} \mathrm{GL}_{m_j}(K[x, x^{-1}]),$$

其中， $|I|$ 同上， $|J|$ 是E中的（必然互不相交的）圈的数量；对于每个 $j \in J$， m_j 是终止于与 j对应的圈的路径数量。

证明。证明 (1) 时，我们应用 [3, 推论 4.2.13] ，得出 E 是一个有限图，并且

$$L_K(E) \cong \bigoplus_{i \in I} \mathrm{M}_{n_i}(K),$$

其中 I 是 E 中汇点的个数。因此， $L_K(E)^\times \cong \prod_{i\in I} \mathrm{GL}_{n_i}(K)$。类似地，(2) 的证明可由 [3, 推论 4.2.14] 立即得到。□

推论 7.2. 若 K 是一个绝对域，且 $L_K(E)$ 是左阿廷的，则 $(L_K(E))^\times$ 是一个局部有限群。

证明。首先证明，对于任意 $n \geq 1$，一般线性群 $\mathrm{GL}_n(K)$ 是一个局部有限群。事实上，取 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的一个有限子集 S，并令 L 为 K 的子域，它由 S 中各元素的所有条目在素子域 $\mathbb{F}_p$ 上生成。于是，由 S 生成的子群 $\langle S \rangle$，作为 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的子群，可视为 $\mathrm{GL}_n(L)$ 的子群。由于 K 是一个局部有限域，我们得出 L 是有限的，因此 $\langle S \rangle$ 也是有限的。因此，$\mathrm{GL}_n(K)$ 是一个局部有限群，证毕。根据命题 7.1，我们有

$$(L_K(E))^\times \cong \bigoplus_{i \in I} \mathrm{GL}_{n_i}(K).$$

由于每个 $\mathrm{GL}_{n_i}(K)$ 都是局部有限群，因此我们得出 $(L_K(E))^*$ 也是局部有限的。□

注 1. 这个推论表明，在定理 3.6 中， K 是非绝对域这一条件不能省略。

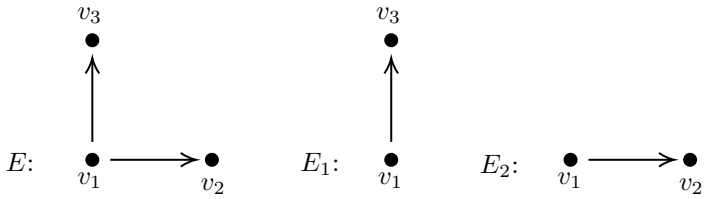
交换 Leavitt 路径代数。Gonzalo Aranda Pino 和 Kathi Crow 在 [12], 中引入了以下概念。

定义 7.3. 如果一个图 E 是由一族子图 $\{E\}_{i\in I}$ 组成的几乎不交并，且这些子图属于 E，我们将其记作$E = \coprod_{i\in I} E_i$，则称其满足以下条件：

(i) $E^0 = \bigcup_{i\in I} E_i^0$。(ii) 对每个 $i \neq j$， $r_E^{-1}(E_i^0 \cap E_j^0) = \varnothing$。(iii) 对每个 $i \neq j$，$E_i^0 \cap E_j^0 \subseteq s_E(E_i^1) \cap s_E(E_j^1)$。(iv) E_i^1 是 E^1的一个划分。

当然，如果 E^0 是有限的，那么所有 E_i^0也都是有限的。在这种情况下，$\sum_{i\in I} |E_i^0| \geq |E^0|$总是成立。然而，等式未必成立，正如我们将在下面的例子中看到的（参见 [12, 例 2.3]）。

例11。考虑图 E 及其两个子图 E_1 和 E_2:



不难看出， $E = E_1 \coprod E_2$，且 $|E_1^0| + |E_2^0| = 4$，而 $|E^0| = 3$。在下面的引理中，我们给出等式成立的一种情形。

引理 7.4。设 E 是一个图。假设 $E = \coprod_{i\in I} E_i$ 满足： I 是有限的，且对于每个 i，子图 E_i 要么是孤立顶点，要么是孤立环。那么$|I| = |E^0|$ ，并且 $E = \coprod_{i\in E^0} E_i$ 确实是 E 按其连通分支得到的分解。

证明。显然，每个 E_i 都是连通的。此外，每个 E_i的孤立性保证了这个并是互不相交的。又因为每个 E_i 都唯一对应于 E_0中的一个顶点，反之亦然，所以我们得出 $|I| = |E^0|$。□

定理 7.5。设 E 是一个图， K 是任意一个域。那么，以下陈述等价：

(1) $L_K(E)$ 是交换的。(2) E 是一个图，使得 r 和 s重合且为单射。(3) $E = \coprod_{i\in I} E_i$，其中 $|I|$ 是 E中的顶点数，并且每个子图E_i 要么是孤立顶点，要么是图 R_1。(4) $L_K(E) \cong \bigoplus_{i=0}^{n} K \oplus \bigoplus_{j=0}^{m} K[x, x^{-1}]$，且 $m+n$等于 E中的顶点数。(5) $(L_K(E))^\times \cong \prod_{i=0}^{n} K^\times \times \prod_{j=0}^{m} K^\times \langle x\rangle$，其中 $m+n$是 E中的顶点数，而 $\langle x\rangle$ 是由 x生成的 $K[x, x^{-1}]$ 的循环子群。(6) $(L_K(E))^\times$ 是一个阿贝尔群。

证明。由 [12, 命题 2.7] 和引理 7.4 可得 (1) ⇒(2) ⇒ (3)。由于 $K[x, x^{-1}]$ 中可逆元的集合是 $K^\times$ 与循环群 $\langle x\rangle$的乘积，因此有蕴含关系 (3) ⇒ (4)。(5) ⇒ (6) 的蕴含关系显然。为证明 (6) ⇒(1)，我们反设 $L_K(E)$ 是非交换的。由定理 3.6 可知，$(L_K(E))^\times$ 包含一个非循环自由子群，这就产生了矛盾。□

Jacobson 代数。设 V K 上的向量空间 $Kv_1 \oplus Kv_2 \oplus \cdots$ 具有一个（固定的）可数无限基 $\{v_i : \ i \geq 1\}$，其中 K 是一个域， $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ 是自然数集合。相对于该基，线性变换环 $E = \mathrm{End}_K(V)$ 可视为 V 上的线性变换，其对应的无限矩阵在每一列中都只有有限个非零元素；因此，恒等映射 $1_V \in E$ 可视为无限单位矩阵 I_∞。考虑 E 的子代数 E_0，它由每行和每列都只有有限个非零元素的矩阵组成。我们用 $\mathrm{M}_\infty(K)$ 表示仅有有限个非零元素的有限矩阵集合，用 $\mathrm{GL}_\infty(K)$ 表示 $\mathrm{I}_\infty + \mathrm{M}_\infty(K)$ 中可逆矩阵构成的群。显然，$\mathrm{M}_\infty(K)$ 是 E_0 的理想，而 $\mathrm{GL}_\infty(K)$ 是 $\mathrm{Aut}(V)$ 的子群。

对于每个自然数 $n \geq 1$， n 维矩阵代数 $\mathrm{M}_n(K)$ 可写为 $\mathrm{M}_n(K) = \bigoplus_{j=1}^{n} Kf_{ij}$，其中 f_{ij} 是矩阵单位。因此，以下等式显而易见

$$\mathrm{M}_\infty(K) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{M}_n(K) = \bigoplus_{i,j\in\mathbb{N}} Kf_{ij}.$$

Jacobson 代数（记作 $\mathcal{R}$）定义为由两个不可交换的生成元 x 和 y 生成的结合 K-代数，并模去关系 $xy = 1$ ([4])。换言之，

$$\mathcal{R} = K\langle xy \mid xy = 1\rangle$$

显然， $\mathcal{R}$ 的一个 K-基是 $\{y^i x^j | i, j \geq 0\}$；也就是说， $\mathcal{R} = \bigoplus_{i,\ j\geq 0} Ky^i x^j$。Jacobson 最早研究了这类代数 [8]，此后许多其他作者也对其进行了深入研究。正如 Bavula 在 [6, 第 7], 页所指出的，Jacobson 代数包含理想 $F = \bigoplus_{i,\ j\in\mathbb{N}} Ke_{ij}$，其中

$$e_{ij} := y^{i-1}x^{j-1} - y^i x^j,\ \ i, j \geq 1. \tag{1}$$

理想 F 是一个（没有单位元 1 的）代数，它通过 $e_{ij} \to f_{ij}$ 与 $\mathrm{M}_\infty(K)$ 同构。此外，对所有 i、 $j \geq 1$，我们有

$$xf_{ij} = f_{i-1,j},\ \ yf_{ij} = f_{i+1,j}\ \ (f_{0,j} := 0). \tag{2}$$

$$\mathcal{R} = K \oplus xK[x] \oplus yK[y] \oplus F. \tag{3}$$

现在考虑 Toeplitz K-代数 $\mathscr{T}_K = L_K(E_T)$；也就是说，定义在 K 上的 Toeplitz 图 E_T 的 Leavitt路径代数（见引言末尾的图）。该代数是含幺的，其单位元为 $1_{\mathscr{T}_K} = u + v$。在 $\mathscr{T}_K$ 中，若令 $X = e^* + f^*$ 和 $Y = e + f$，则 $XY = 1$ 和 $YX = u \neq 1$。容易验证，由 $\varphi(x) = X$ 和 $\varphi(y) = Y$ 给出的映射 $\varphi : \mathcal{R} \to \mathscr{T}_K$ 是一个 K- 代数同构。这表明 $\{Y^i X^j \mid i, j \geq 0\}$ 是 $\mathscr{T}_K$ 的一个 K- 基，因此 $\mathscr{T}_K$ 同构于 E_0 的一个子代数，该子代数由每行和每列都只有有限个非零项的无限矩阵组成。根据 (1)， $\mathscr{T}_K$ 包含理想 $I = \bigoplus_{i,\ j\in\mathbb{N}} KF_{ij}$，其中

$$F_{ij} := Y^{i-1}X^{j-1} - Y^i X^j = (e + f)^{i-1} v (e^* + f^*)^{j-1},\ \ i, j \geq 1.$$

由此可知， I 通过 $F_{ij} \to f_{ij}$与 $\mathrm{M}_\infty(K)$ 同构。由（3），我们很容易得到以下计算:

$$F_{11} = v,\quad F_{21} = (e + f)v = f,\quad F_{12} = v(e^* + f^*) = f^*.$$

因此，我们可以分别将 v、 f、 f^* 视为 $\mathrm{M}_\infty(K)$ 中的矩阵 f_{11}、 f_{21}、 f_{12} 。因此，顶点 u 对应于矩阵 $\sum_{i\geq 2} f_{ii} \in E_0$。接下来，我们将求出 e 和 e^* 在 E_0 中对应的矩阵，记作 A 和 B 。由（2），我们有

$$(e^* + f^*)F_{ij} = F_{i-1,j},\ \ (e + f)F_{ij} = F_{i+1,j}\ \ (F_{0,j} := 0).$$

这意味着

$$(B + f_{12})f_{ij} = f_{i-1,j},\ \ (A + f_{21})f_{ij} = f_{i+1,j}\ \ (f_{0,j} := 0).$$

$$B + f_{12} = \sum_{i\geq 1} f_{i,i+1},\quad A + f_{21} = \sum_{i\geq 1} f_{i+1,i}.$$

由此可得 $A=\sum_{i\geq 2} f_{i+1,\ i}$ 且 $B=\sum_{i\geq 2} f_{i,\ i+1}$。由（3）式，我们还可得

$$\mathscr{T}_K = K\oplus (e^*+f^*)K[e^*+f^*]\oplus (e+f)K[e+f]\oplus I.$$

由此很容易看出，$\mathscr{T}_K$ 同构于由 A、B 和 $\mathrm{M}_\infty(K)$生成的 E_0 子代数。现在，我们在以下引理中总结上述讨论。

引理 7.6. 设 $\mathscr{T}_K$ 为 Toeplitz K代数，E_0 为 K 上的无限矩阵 K代数，其中每行和每列都只有有限个非零元素；$\mathrm{M}_\infty(K)$为有限支撑矩阵的集合。那么

$$\mathscr{T}_K \cong \left\langle \sum_{i\geq 2} f_{i+1,i}, \sum_{i\geq 2} f_{i,i+1}, \mathrm{M}_\infty(K)\right\rangle \subseteq E_0.$$

定理 7.7. 设 $\mathrm{GL}_\infty(K)$ 为 $\mathrm{I}_\infty+\mathrm{M}_\infty(K)$ 中可逆矩阵的集合。那么 $(\mathscr{T}_K)^\times \cong K^\times \rtimes \mathrm{GL}_\infty(K)$，即 $K^\times$ 与 $\mathrm{GL}_\infty(K)$的半直积。换言之，正合列 $1\to F^\times \to (\mathscr{T}_K)^\times \to \mathrm{GL}_\infty(K)\to 1$ 是分裂的。

证明。由引理 7.6 可知，$\mathscr{T}_K$ 可以与 $\langle E, E^*, \mathrm{M}_\infty(K)\rangle$等同。这意味着$(\mathscr{T}_K)^\times$ 包含一个与 $K^\times \rtimes \mathrm{GL}_\infty(K)$同构的子群。另一方面，对于任意 $r\in(\mathscr{T}_K)^\times$，左乘 L_r by r 是 $\mathrm{Aut}(\mathscr{T}_K)$中的一个元素。容易验证，赋值 $r\to L_r$定义了从$(\mathscr{T}_K)^\times$ 到 $\mathrm{Aut}(\mathscr{T}_K)$的单射群同态。因此，$(\mathscr{T}_K)^\times$ 可以嵌入 $K^\times \rtimes \mathrm{GL}_\infty(K)$。由 [1] 可知，$\mathrm{Aut}(\mathscr{T}_K)\cong K^\times \rtimes \mathrm{GL}_\infty(K)$。这意味着$(\mathscr{T}_K)^\times \cong K^\times \rtimes \mathrm{GL}_\infty(K)$。□

注 2。此时，值得注意的是，有两种不同的方法可以得到$(\mathscr{T}_K)^\times$的非循环自由子群。第一种方法是应用推论 5.4。事实上，若假设 $\mathrm{char}K=0$ 且 $\alpha\in K$等于 2，或是关于素子域 $\mathbb{Q}$超越的，那么推论 5.4(i)表明，$G=\langle u+v+\alpha f^*, u+v+\alpha f\rangle$ 是$(\mathscr{T}_K)^\times$的非循环自由子群。第二种方法来自定理 7.7。更确切地说，由该定理可知$(\mathscr{T}_K)^\times \cong K^\times \rtimes \mathrm{GL}_\infty(K)$，其中包含非循环自由子群$H=\langle \mathrm{I}_\infty+\alpha f_{21}, \mathrm{I}_\infty+\alpha f_{12}\rangle$。（注意，$H$是引理3.5中 $\mathrm{GL}_2(K)$的子群 $\langle A,B\rangle$ 的一个副本。）正如前文所指出的，f_{21}和 f_{12} 的原像分别是 f 和 f^*，因此我们可以得出结论：$H\cong G$。

推论 7.8. 如果 K 是绝对域，那么 $(\mathscr{T}_K)^\times$ 是一个局部有限群。

证明。设 S 是 $\mathrm{GL}_\infty(K)$ 的一个有限子集。设 L 是由 S 中所有矩阵的所有元素生成的 K 的子域。由于 K 是绝对域，子域 L 是有限的。因此，$\mathrm{M}_\infty(L)$ 是有限的，所以 $\mathrm{GL}_\infty(L)\subseteq \mathrm{I}_\infty+\mathrm{M}_\infty(L)$ 也是有限的。由于 $\mathrm{GL}_\infty(K)$ 中由 S 生成的子群包含于 $\mathrm{GL}_\infty(L)$ 中，我们得出该子群是有限的。这意味着 $\mathrm{GL}_\infty(K)$ 是一个局部有限群。也容易看出 $K^\times$ 是局部有限群。最后，我们得出 $(\mathscr{T}_K)^\times \cong K^\times \rtimes \mathrm{GL}_\infty(K)$ 是局部有限的。□

注 3. 关于 Jacobson 代数的乘法群的另一种处理方法，见 [6, 定理 4.6]。

在本文余下部分，我们将对 Toeplitz K代数 $\mathscr{T}_K$情形下的猜想 3.1 给出肯定的回答。为此，我们需要用到无限矩阵的全局行列式这一概念，该概念由 Bavula 在 [6, 第15] 页引入。

对于每个 $n \geq 1$，考虑通常的行列式 $\det_n = \det\colon \mathrm{I}_n + \mathrm{M}_n(K) \to K, u \mapsto \det(u)$。这些行列式确定了全局行列式

$$\det : \mathrm{I}_\infty + \mathrm{M}_\infty(K) \to K, u \mapsto \det(u),$$

其中，$\det(u)$ 是 $\det_n(u)$ 的所有行列式的共同值，$n \gg 1$。全局行列式具有行列式的通常性质，而且我们还有

$$\mathrm{GL}_\infty(K) = \{u \in \mathrm{I}_\infty + \mathrm{M}_\infty(K) \mid \det(u) \neq 0\}.$$

核

$$\mathrm{SL}_\infty(K) = \{u \in \mathrm{I}_\infty + \mathrm{GL}_\infty(K) \mid \det(u) = 1\}.$$

是 $\mathrm{GL}_\infty(K)$ 的一个正规子群。由此，我们得到以下结论：

命题 7.9。设 K 是一个不同于 $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$ 的域。那么，$\mathrm{GL}_\infty(K)$ 的一个非中心子群 N 是正规子群，当且仅当 $\mathrm{SL}_\infty(K) \subseteq N$。

证明。假设 N 是 $\mathrm{SL}_\infty(K)$ 的一个非中心正规子群。任取矩阵 $u \in \mathrm{SL}_\infty(K)$。那么，存在一个整数 $n \geq 2$，使得 u 可以视为 $\mathrm{SL}_n(K) \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ 的一个元素。由于 N 在 $\mathrm{GL}_\infty(K)$ 中不是中心的，因此可以将整数 n 取充分大，使得 $N \cap \mathrm{GL}_n(K)$ 是 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的一个非中心正规子群。我们知道，若 $K \neq \mathbb{F}_2$、$\mathbb{F}_3$ 和 $n \geq 2$，则 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的一个子群是正规子群，当且仅当它包含 $\mathrm{SL}_n(K)$，所以有 $u \in \mathrm{SL}_n(K) \subseteq N \cap \mathrm{GL}_n(K) \subseteq N$。因此 $\mathrm{SL}_\infty(K) \subseteq N$。反向显然成立。□

推论 7.10。设 K 是一个非绝对域。那么，$(\mathscr{T}_K)^\times$ 的每个非中心正规子群都包含一个非循环自由子群。

证明。设 N 是 $(\mathscr{T}_K)^\times$ 的非中心正规子群。由定理 7.7 的证明可知，$(\mathscr{T}_K)^\times \cong K^\times \rtimes \mathrm{GL}_\infty(K)$。根据命题 7.9，我们得出 N 含有一个 $\mathrm{SL}_\infty(K)$ 的副本。显然，N 包含注 2 中给出的群 H，结论得证。□

References

[1] A. Alahmedi, H. Alsulami, S. Jain, E. Zelmanov, 《多项式增长的 Leavitt 路径代数的结构》, 美国国家科学院院刊 110（2013年）15222–15224。[2] G. Abrams, G. Aranda Pino, 《图的 Leavitt 路径代数》, 《代数学杂志》293（2005年）319–334。[3] G. Abrams, P. Ara, and M. Siles Molina, 《Leavitt 路径代数》, 《数学讲义》丛书，第2191卷，施普林格出版社公司，2017年。[4] G. Abrams, F. Mantese, A. Tonolo, Jacobson 代数

$K\langle X\ Y|XY = 1\rangle$ 2020 1 17

上的内射模, 《加拿大数学通报》（ ）–。[5] P. Ara, K.M. Rangaswamy, Leavitt路径代数上的有限表示单模, 《代数学杂志》417（2014年）333–352。[6] V. V. Bavula, 多项式代数单侧逆代数的自同构群, M¨unster 数学杂志 6（2013年）1–51。[7] X. W. Chen, Leavitt 路径代数的不可约表示, Forum Math. 27（2015年）549–574。[8] N. Jacobson, 《关于单侧逆的一些评注》, 《美国数学会会刊》1（1950年）352–355。[9] T. Y. Lam, 《非交换环入门》, 《数学研究生教材》第131卷。施普林格出版社，纽约，第二版，2001年。[10] C. Lanski, 半素环中的子群与共轭元, 《数学年刊》192（1971年）313–327。[11] C. Lanski, 素环中的可解子群, 《美国数学会会刊》82（1981年）533–537。[12] G. Aranda Pino, K. Crow, Leavitt 路径代数的中心, 《伊比利亚美洲数学杂志》27(2)（2011年）621–644。

[13] K.M. Rangaswamy，Leavitt 路径代数上的单模，《代数学杂志》431（2015年）239–258。[14] K. M. Rangaswamy，任意图上 Leavitt 路径代数素理想理论，《代数学杂志》375（2013年）73–96。[15] J. J. Rotman，《高级现代代数》 I，第 3 版，《研究生数学丛书》第 15 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2015年。[16] B. A. F. Wehrfritz，《无限线性群》（1973年），柏林：施普林格出版社，柏林。[17] M. Tomforde，Leavitt 路径代数的唯一性定理与理想结构，《代数学杂志》318（2007年）270–299。