arXiv:2303.10749v1 [math.QA] 19 Mar 2023

关于量子矩阵代数中的对称化算子

Dmitry Gurevich*信息传输问题研究所，大卡列特内巷19号，莫斯科127051，俄罗斯联邦

Pavel Saponov†俄罗斯国家研究型大学高等经济学院，米亚斯尼茨卡娅街20号，莫斯科101000，俄罗斯联邦；以及高能物理研究所、库尔恰托夫国家研究中心，普罗特维诺142281，俄罗斯联邦

Vladimir Sokolov‡信息传输问题研究所，大卡列特内巷19号，莫斯科127051，俄罗斯联邦

2023年3月21日

1. 本文讨论一类特殊的二次代数，称为量子矩阵代数。回顾一下，二次代数是指商代数$A = T(V)/\langle J\rangle$，其中 V是一个向量空间（维数为$V = N < \infty$），$T(V) = \bigoplus_{k\geq 0} V^{\otimes k}$是由 V生成的自由张量代数，而 $\langle J\rangle$ 是由子空间 $J \subset V^{\otimes 2}$生成的理想。数学文献中对这类代数及其非齐次对应代数的代数性质已有大量讨论（例如参见 [PP]）。本文考虑如何在这类代数的齐次分量中构造一些投影算子，它们是通常对称化算子的类似物。在经典情形下，这类对称化算子通过翻转算子 P定义。下文中，所谓海克对称性将起到 P 的作用。回顾一下，若算子 $R: V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ 满足编织关系，则称其为编织算子:

$$R_{12}\, R_{23}\, R_{12} = R_{23}\, R_{12}\, R_{23}, \quad R_{12} = R \otimes I,\ R_{23} = I \otimes R.$$

此后，I 是 V（或其他向量空间）中的恒等算子，而 $q \in \mathbb{K}$ 是一个参数。假定基域 $\mathbb{K}$ 的特征为0。

若编织 R 满足互补关系（$R - q\,I$）（$R + q^{-1}\,I$）$= 0$，则称 R 为 Hecke 对称。最著名的 Hecke 对称性来自量子群U_q（sl（N））或其超类比，但也存在一些 Hecke 对称性，它们既不是翻转算子也不是超翻转算子的变形（参见 [G]）。此外，本文还为 R-对称代数和空间 V的 R-反对称代数构造了对称化算子。

2. 其他与编织 R 相关的二次代数包括 RTT代数和反射方程

*gurevich@ihes.fr
†Pavel.Saponov@ihep.ru
‡sokolov@itp.ac.ru

（RE）代数。前者由以下系统定义

$$R\,T_1\,T_2 = T_1\,T_2\,R, \qquad T_1 = T \otimes I, \quad T_2 = I \otimes T, \tag{1}$$

wh在此处，$T = \|t_i^j\|_{1\le i,\ j\le N}$ 是一个 $N \times N$ 矩阵，其元素生成 RTT 代数。

通过使用第二种编织 F，并使其在某种意义上与 R 相容，也可以定义更一般的量子矩阵代数（参见 [IOP]）。

本文的主要目标是介绍一种方法，希望借此能够在 RTT 代数的齐次分量中构造对称化算子，并通过两个低维例子加以说明。本文最后讨论了如何将此方法推广到其他量子矩阵代数。

注意，定义系统 (1) 可以写成如下形式：

$$T_1\,T_2 = \mathcal{R}(T_1\,T_2), \quad \text{where} \quad \mathcal{R}(T_1\,T_2) = R^{-1}\,T_1\,T_2\,R.$$

如果编织 R 是 Hecke 对称，那么算子 $\mathcal{R}$：$W^{\otimes 2} \to W^{\otimes 2}$，其中 W = 张成 span(t_i^j)，具有三个特征值 1、$-q^2$ 和 $-q^{-2}$。因此，算子

$$\mathcal{S} = 2_q^{-2}(\mathcal{R} + q^2\,I)(\mathcal{R} + q^{-2}\,I), \quad \text{where} \quad k_q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}}, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z},$$

是一个幂等算子，称为对称化算子。它将空间 $W^{\otimes 2}$ 映射到其对称元素子空间，也就是说，这些元素满足 $\mathcal{S}(z) = z$。因此，二次代数 $A = T(W)/\langle J\rangle$ 的第二齐次分量 $A^{(2)}$ 中的每个元素 z，模去理想 $\langle J\rangle$ 后，都等于其对称化形式 $\mathcal{S}(z)$，其中 $J = \mathrm{Im}(\mathcal{R} - I)$。

在 [GPS] 中，代数 A的三次齐次分量 $A^{(3)}$ 中构造了一个类似的对称化子 $\mathcal{S}^{(3)}$： $W^{\otimes 3} \to W^{\otimes 3}$。其显式形式为

$$\mathcal{S}^{(3)} := \alpha\mathcal{S}_{12}\,\mathcal{S}_{23}\,\mathcal{S}_{12}\,\mathcal{S}_{23}\,\mathcal{S}_{12} + \beta\mathcal{S}_{12}\,\mathcal{S}_{23}\,\mathcal{S}_{12} + \gamma\mathcal{S}_{12} = \alpha\mathcal{S}_{23}\,\mathcal{S}_{12}\,\mathcal{S}_{23}\,\mathcal{S}_{12}\,\mathcal{S}_{23} + \beta\mathcal{S}_{23}\,\mathcal{S}_{12}\,\mathcal{S}_{23} + \gamma\mathcal{S}_{23}, \tag{2}$$

其中有一些系数 α、β、γ，使得 $\alpha + \beta + \gamma = 1$。下标表示算子所在的位置。

由于公式（2）定义的算子具有如下性质：

$$\mathcal{S}^{(3)} = \mathcal{S}_{12}\,\mathcal{S}^{(3)} = \mathcal{S}^{(3)}\,\mathcal{S}_{12} = \mathcal{S}_{23}\,\mathcal{S}^{(3)} = \mathcal{S}^{(3)}\,\mathcal{S}_{23},$$

it 可以写成形式 $\mathcal{S}^{(3)} = p(\mathcal{S}_{12}\,\mathcal{S}_{23}) = p(\mathcal{S}_{23}\,\mathcal{S}_{12})$，其中 p 是一个三次多项式。我们求出了算子 $\mathcal{S}_{12}\,\mathcal{S}_{23}$的最小多项式。它等于

$$m_3(x) = x(x-1)\Big(x - \frac{1}{2_q^2}\Big)\Big(x - \frac{(2_q^2-2)^2}{2_q^4}\Big). \tag{3}$$

因此，算子$\frac{1}{\kappa}\,p(\mathcal{S}_{12}\,\mathcal{S}_{23})$，其中 $p(x) = m(x)(x-1)^{-1}$且 $\kappa = p(1)$，是空间 $W^{\otimes 3}$ 到其对应特征值 1 的子空间上的投影算子。注意，公式（3）可以用来计算（2）中的所有系数。

3. 接下来我们的目标是构造对称化子 $\mathcal{S}^{(4)}$：$W^{\otimes 4} \to W^{\otimes 4}$。与前一种情况类似，我们计算算子的最小多项式 $m_4(x)$

$$\mathcal{S}^{(3)}_{123}\,\mathcal{S}^{(3)}_{243}:\ W^{\otimes 4} \to W^{\otimes 4}.$$

这是 $m_4(x) = x(x-1)(x-\nu_1)(x-\nu_2)(x-\nu_3)$，其中

$$\nu_1 = \frac{1}{3_q^2}, \quad \nu_2 = \frac{(2_q^2-2)^2}{4\cdot 3_q^2}, \quad \nu_3 = \frac{(3_q^2-3)^2}{4\cdot 3_q^4}.$$

然后，将乘积 $\mathcal{S}^{(3)}_{123}\,\mathcal{S}^{(3)}_{234}$ 代入多项式 $p_4(x) = m_4(x)(x-1)^{-1}$，经过适当归一化后，我们得到所需的对称化子 $S^{(4)}$。经验证，交换该乘积中的因子会得到相同的结果。

希望类似过程能够使我们找到更高阶的对称化算子。假设已知$\mathcal{S}^{(n)}$，我们按如下方式定义 $\mathcal{S}^{(n+1)}$

$$S^{(n+1)}_{1,2,\dots,n+1} = \frac{1}{\kappa_n}\, p_n\Big(S^{(n)}_{1,2,\dots,n} S^{(n)}_{2,3,\dots,n+1}\Big), \qquad p_n(x) = \frac{m_n(x)}{(x-1)},$$

其中 $m_n(x)$是算子 $S^{(n)}_{1\,2\;,,\dots,n} S^{(n)}_{2\,3\;,,\dots,n+1}$ 的最小多项式，而 $\kappa_n = p_n(1)$是归一化因子。此过程基于这样的猜想：对于任意 n，多项式 $m_n(x)$的根1都是单根。推测对于一般的q，多项式 $m_n(x)$的次数为 $n+1$，但在极限 $q=1$处，其次数变为3。

我们在 $n=5$的情形下所做的计算也印证了这一猜想。在这种情形下，多项式 $m_5(x)$的根为0、1以及以下这些根

$$\nu_1 = \frac{1}{4_q^2}, \quad \nu_2 = \frac{(2\cdot 2_q^2-5)^2}{9\cdot 2_q^4}, \quad \nu_3 = \frac{(2\cdot 2_q^2-5)^2}{9\cdot 4_q^2}, \quad \nu_4 = \frac{(4_q^2-4)^2}{9\cdot 4_q^4}.$$

若能在多项式 $m_n(x)$的序列中找到一种规律模式，将会很有意思。

请注意，对称化子 $S^{(n)}$ 的存在意味着以下结论：如果 Hecke 对称$R=R(q)$在 $q=1$的某个邻域内是解析矩阵函数，那么在 $q=1$ 的某个邻域内，齐次分量 $A^{(n)}$ 的维数等于与 $q=1$相对应的维数。

总之，我们想强调，上述所有构造对于其他量子矩阵代数同样成立，尤其是对于 RE 代数。对于后者，只需将乘积 $T_1\,T_2$ 等替换为 $L_1\,R\,L_1\,R^{-1}$ 等。详情请参见 [GPS]。对于其他量子矩阵代数，我们也以类似方式进行，但将矩阵 L_1 移至更高位置时，应使用第二种编织 F，而不是 R（参见 [IOP]）。

参考文献

[G] Gurevich D.，《杨–巴克斯特方程的代数方面》，列宁格勒数学杂志 2 (1991) 801 – 828。[GPS] Gurevich D., Pyatov P., Saponov P.，《$GL(m|n)$ 型（修正）反射方程代数的表示理论》，St. Petersburg 数学杂志 20 (2009) 213–253。[IOP] Isaev A., Ogievetski O., Pyatov P.，《关于满足 Cayley–Hamilton–Newton 恒等式的量子矩阵代数》，《物理学杂志 A》32 (1999) L115–L121。[PP] Polishchuk A., Positselski L.，二次代数，AMS，罗得岛州普罗维登斯，2005。