arXiv:2303.10750v1 [math.LO] 19 Mar 2023

论命题逻辑语言的真值赋值定理

提交给明尼苏达大学数学学院教师的毕业专题项目

Tianyi Sun

作为满足数学文学学士学位要求的一部分

卡雷尔·普日克里

2021年7月13日

©Tianyi Sun 2021 版权所有

目录

1 引言 2

2 构造序列 2

3 递归 12

4 结论 16 参考文献 17

1 引言

本项目分为两章。第二章有两节。第一节使用构造序列定义命题逻辑语言的良构公式。第二节使用命题逻辑语言证明真值指派。第三章有两节。第一节定义递归定理。第二节使用递归定理的一般表述证明真值指派。

2 构造序列

我们将逐步讲解真值赋值定理的证明。该定理是 [1], 中的定理 12A；我们还将讨论一些相关结果。
我们将首先使用构造序列，严格定义命题逻辑语言（LSL）的良构公式（或简称公式、良构公式），正如 [1] 第 17 页和第 35 页所述。

首先，我们定义运算 $\varepsilon_{\neg}$、 $\varepsilon_{\wedge}$、 $\varepsilon_{\vee}$、 $\varepsilon_{\rightarrow}$ 和 $\varepsilon_{\leftrightarrow}$，它们是 LSL 表达式上的运算，即任意 LSL 表达式；具体步骤完全按照 [1] 第 17 页页首的说明进行：如果 α 和 β 是 LSL 中任意的表达式（符号的有限序列，即不一定是良构公式），那么

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\neg}(\alpha) &= (\neg\alpha),\\
\varepsilon_{\wedge}(\alpha,\beta) &= (\alpha \wedge \beta),\\
\varepsilon_{\vee}(\alpha,\beta) &= (\alpha \vee \beta),\\
\varepsilon_{\rightarrow}(\alpha,\beta) &= (\alpha \rightarrow \beta),\\
\varepsilon_{\leftrightarrow}(\alpha,\beta) &= (\alpha \leftrightarrow \beta).
\end{aligned}$$

构造序列。构造序列的定义见 [1] 第 17 页和第 18 页。构造序列是表达式 $\langle\varepsilon_1$、ε_2、.....、$\varepsilon_n\rangle$ 组成的有限序列，满足对于每个 $i \leq n$， ε_i 要么是一个句子符号，要么存在某个 $j < i$ 使得 $\varepsilon_i = \varepsilon_{\neg}(\varepsilon_j)$，要么存在 $j < i$ 和 $k < i$ 使得 $\varepsilon_i = \varepsilon_{\square}(\varepsilon_j$、 $\varepsilon_k)$，其中 $\square$ 是 $\wedge$、 $\vee$、 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 之一。

现在我们如下定义良构公式。

良构公式（wffs）。表达式 α 是良构公式，当且仅当存在一个构造序列 $\langle\varepsilon_1, \varepsilon_2$,..., $\varepsilon_n\rangle$，使得 $\alpha = \varepsilon_n$。
如 [1], 若 S 是句子符号的任意集合，则 $\overline{S}$ 是所有良构公式 α 的集合，其中每个出现在 α 中的句子符号都属于 S。此外，当且仅当 α 有一个构造序列 $\langle\varepsilon_1$, ε_2, ..., $\varepsilon_n\rangle$，且 $\varepsilon_n = \alpha$，并且属于该构造序列的每个句子符号都属于 S时，$\alpha \in \overline{S}$。（另见 [1],第 20 页，条件 0 上方的段落。）我们将此类构造序列称为基于 S 的。

现在我们来考虑任意一个真值赋值

$$v : S \to \{T, F\}$$

并且我们将为每个基于 S 的构造序列 $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n \rangle$ 定义一个与之对应的真值序列 $\langle \tau_1, \tau_2, ..., \tau_n \rangle$。我们将对正整数 $i \preceq n$ 使用归纳法。因此，对于 $i = 1$， ε_1 必须是属于 S 的句子符号，并且我们将设定 $\tau_1 = v(\varepsilon_1)$。

现在假设 $i \preceq n$，并且对每个 $j \prec i$ 都已定义 τ_j。现在我们考虑构造序列定义中的所有情况：如果 ε_i 是属于 S 的句子符号，我们就设定 $\tau_i = v(\varepsilon_i)$，这与 $i = 1$ 时完全相同，遵循 [1] 第 20 页底部的条件 0.。如果对于某个 $j \prec i$，$\varepsilon_i = (\neg\varepsilon_j)$ （即 $\varepsilon_\neg(\varepsilon_j)$），我们就设定

$$\tau_i = \begin{cases} F & \text{if } \tau_j = T, \\ T & \text{if } \tau_j = F. \end{cases}$$

如果存在 $j \prec i$ 和 $k \prec i$，使得 $\varepsilon_i = \varepsilon_\square(\varepsilon_j, \varepsilon_k)$，其中 $\square \in \{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$，那么 τ_i 就是根据 [1] 第 21 页顶部条件 2.- 5. 中相应的条件，由 τ_j, τ_k 得到的。例如，如果 $\square = \to$，那么遵循条件 4.，我们设定

$$\tau_i = \begin{cases} F & \text{if } \tau_j = T \text{ and } \tau_k = F, \\ T & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，归纳法使我们可以得出结论： τ_i 对所有$i \preceq n$都有定义。另请参见下面的例子。

例子。设构造序列为 $\langle A_1, A_2, A_3, (\neg A_2), (A_3 \vee (\neg A_2)), ((A_3 \vee (\neg A_2)) \leftrightarrow A_1) \rangle$。设 v: $\{A_1, A_2, A_3\} \to \{F, T, F\}$ 为 $v(A_1) = F, v(A_2) = T, v(A_3) = F$。那么，相应的真值序列为 $\tau_1 = F, \tau_2 = T, \tau_3 = F$。于是 $\tau_4 = F, \tau_5 = F, \tau_6 = T$。因此，$\langle \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6 \rangle = \langle F, T, F, F, F, T \rangle$。

主引理。设 $\alpha \in \overline{S}$ 和 $\langle \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m \rangle$ 和 $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n \rangle$ 是 α 的基于 S 的构造序列，即 $\alpha = \delta_m = \varepsilon_n$。此外，设 $\langle \tau_1, \tau_2, ..., \tau_m \rangle$ 和 $\langle \tau'_1, \tau'_2, ..., \tau'_n \rangle$ 是相应的真值序列。那么 $\tau_m = \tau'_n$。

该证明使用了归纳原理（第 18 页，在 [1] 中），也使用了 MATH5165 课堂笔记中陈述的唯一可读性定理，以及 [1] 第 40 页中的相关内容。

唯一可读性定理。设 α 是命题逻辑语言中的一个良构公式。那么，以下六种可能性中恰有一种成立：

1. 存在唯一的自然数 n，使得 α 是句子符号 A_n；

2. 存在唯一的良构公式 β，使得 α 是 $(\neg\beta)$；

3. 存在唯一的良构公式 β、γ，使得 α 是 $(\beta \wedge \gamma)$;
4. 存在唯一的良构公式 β、γ，使得 α 是 $(\beta \vee \gamma)$;
5. 存在唯一的良构公式 β、γ，使得 α 是 $(\beta \to \gamma)$;
6. 存在唯一的良构公式 β、γ，使得 α 是 $(\beta \leftrightarrow \gamma)$。

注释。唯一可读性定理等价于这样一种说法：每个良构公式都能通过匹配适当的左右括号，得到唯一的句法分析。或者，采用《教材》中的方法，每个良构公式都有唯一的祖先树。不过，就精确的数学表述而言，我们仍将采用上文给出的唯一可读性定理的表述。原因是，否则我们就需要对句法分析给出更精确的定义。

主引理的证明。

我们要将归纳原理表述为稍强的形式，以满足证明上述引理和定理 12A 的需要。也就是说，我们不能只处理所有良构公式构成的集合，而需要针对集合 $\overline{S}$ 来表述归纳原理，其中 S 是任意的句子符号集合。

因此， S 的归纳原理如下:

设 S 是任意的句子符号集合，且 $\mathscr{S} \subseteq \overline{S}$ 满足

1. $S \subseteq \mathscr{S}$，且 2. $\mathscr{S}$ 对五种公式构造运算封闭。那么 $\mathscr{S} = \overline{S}$。

我们通过定义 $\mathscr{S}$ 为满足引理陈述的那些良构公式 $\alpha \in \overline{S}$ 所组成的集合，来运用归纳原理构造证明。因此，我们需要证明:

1. $S \subseteq \mathscr{S}$，并且
2. $\mathscr{S}$ 在五种公式构造运算下封闭。

于是，归纳原理使我们可以得出结论： $\mathscr{S} = \overline{S}$。因此，正如预期的那样，引理陈述对每个 $\alpha \in \overline{S}$都成立。

证明。1. 的证明。设 $\langle \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m \rangle$和 $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n \rangle$是句子符号 $A_j \in S$ 的构造序列。因此 $\delta_m = \varepsilon_n = A_j$。但根据相关构造序列的定义，我们得到 $\tau_m = v(A_j)$和 $\tau_n' = v(A_j)$，故有 $\tau_m = \tau_n'$。

2 的证明。我们首先考虑 下的定义域。因此，设 $\alpha \in \mathscr{S}$。我们要证明 $(\neg\alpha) \in \mathscr{S}$。于是，设 $\langle \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m \rangle$ 和 $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n \rangle$ 是构造

序列，适用于 $(\neg\alpha)$。于是 $\delta_m = \varepsilon_n = (\neg\alpha)$，并且存在 $j<m$ 和 $k<n$，使得 $\delta_j = \alpha$ 和 $\varepsilon_k = \alpha$。因此，$\langle\delta_1, \delta_2, ..., \delta_j\rangle$ 和 $\langle\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_k\rangle$ 都是适用于 α 的构造序列，而 $\langle\tau_1, \tau_2, ..., \tau_j\rangle$ 和 $\langle\tau_1', \tau_2', ..., \tau_k'\rangle$ 是相应的真值序列。因此，由于 $\alpha \in \mathscr{S}$，我们得到 $\tau_j = \tau_k'$。但是 $\delta_m = (\neg\delta_j)$ 和 $\varepsilon_n = (\neg\varepsilon_k)$。因此，如果 $\tau_j = \tau_k' = T$，我们得到 $\tau_m = \tau_n' = F$；对 $\tau_j = \tau_k' = F$ 也同样如此。于是，$\tau_m = \tau_n'$。因此，$(\neg\delta) \in \mathscr{S}$。
还需证明，$\mathscr{S}$ 在对应于二元命题联结词的公式构造运算下是封闭的。我们将详细讨论 $\wedge$ 的情形。其余三种情形类似，因此略去。

因此，设 α、β 都属于 $\mathscr{S}$。我们要证明 $(\alpha \wedge \beta)$ 属于 $\mathscr{S}$。于是，设 $\langle\delta_1$、δ_2、...、$\delta_m\rangle$ 和 $\langle\varepsilon_1$、ε_2、...、$\varepsilon_n\rangle$ 是 $(\alpha \wedge \beta)$ 的构造序列。因此，$\delta_m = \varepsilon_n = (\alpha \wedge \beta)$，并且存在 $i < m$ 和 $j < m$，以及 $k < n$ 和 $l < n$，使得 $\delta_i = \alpha$ 和 $\delta_j = \beta$，并且 $\varepsilon_k = \alpha$ 和 $\varepsilon_l = \beta$。但是，类似于 的情形，我们可以得出 $\tau_i = \tau_k'$ 和 $\tau_j = \tau_l'$，因为 α 和 β 都属于 $\mathscr{S}$。但是，$\tau_m = \tau_n'$，因为 τ_m 是由 τ_i 和 τ_j 得到的，使得 [1] 中第 21 页顶部的条件 3 成立，而 τ_n' 则以类似方式由 τ_k' 和 τ_l' 得到。因此，$(\alpha \wedge \beta) \in \mathscr{S}$。
因此，正如证明开头已指出的，我们得出 $\mathscr{S} = \overline{S}$，引理得证。

□

接下来进入定理 12A 证明的下一阶段，我们定义一个有序对集合 $\mathscr{P}$，$\langle\alpha,\ V\rangle$，其中 $\alpha \in \overline{S}$ 且 $V \in \{F,\ T\}$，如下：$\langle\alpha,\ V\rangle$ 属于 $\mathscr{P}$，当且仅当存在一个针对 α 的基于 S 的构造序列 $\langle\delta_1,\ \delta_2,\ .....,\ \delta_m\rangle$，使得相应的真值序列 $\langle\tau_1,\ .....,\ \tau_m\rangle$ 具有 $\tau_m = V$。

注。因此，例如，如果 α 是 $((A_3 \vee (\neg A_2)) \leftrightarrow A_1)$，那么主引理陈述之前的例子表明，$\langle\alpha,\ T\rangle \in \mathscr{P}$，其中 $\alpha = ((A_3 \vee (\neg A_2)) \leftrightarrow A_1)$，因为相应真值序列的最后一项 τ_6 是 T。

唯一性引理。对于每个属于 $\overline{S}$ 的 α，恰好存在一个 $V \in \{F,\ T\}$，使得 $\langle\alpha,\ V\rangle \in \mathscr{P}$。

证明。任取属于 $\overline{S}$ 的 α。因此，根据良构公式的定义，α 有一个构造序列，设为 $\langle\delta_1$、δ_2、.....、$\delta_m\rangle$，并且我们可以假设这个构造序列是基于 S 的。令 $\langle\tau_1$、τ_2、.....、$\tau_m\rangle$ 为相应的真值序列。因此 $\langle\alpha$、$V\rangle$，其中 $V = \tau_m$ 属于 $\mathscr{P}$。此外，假设 $\langle\alpha$、$V\rangle$ 和 $\langle\alpha$、$V'\rangle$ 都属于 $\mathscr{P}$。因此，存在基于 S 的构造序列 $\langle\delta_1$、δ_2、.....、$\delta_m\rangle$ 和 $\langle\varepsilon_1$、ε_2、.....、$\varepsilon_n\rangle$，分别对应于 α；并且存在相应的真值序列 $\langle\tau_1$、τ_2、.....、$\tau_m\rangle$ 和 $\langle\tau_1'$、τ_2'、.....、$\tau_n'\rangle$，使得 $\tau_m = V$ 且 $\tau_n' = V'$。但由主引理可得 $V = V'$。因此，引理得证。

□

唯一性引理表明，集合 $\mathscr{P}$ 满足定义一个以 $\overline{S}$ 为定义域、以 $\{T$ 为陪域的函数所需的条件；或者，严格地说，由于它是 $\overline{S} \times \{T$、$F\}$ 的子集，它本身已经是这样的函数。不过，为了清楚起见，我们将写出这个函数的定义，并将其称为 h。因此，对于 $\overline{S}$ 中任意的 α，以及 $V \in \{T$、$F\}$，我们定义

$$h(\alpha) = V,$$

当且仅当 $\langle \alpha, V \rangle \in \mathscr{P}$。

因此显然，唯一性引理恰好满足了使 h 成为一个定义域为 $\overline{S}$、陪域为 $\{T$的函数所需的条件，$F\}$。

现在我们将证明，函数 h 满足《 [1], 》第 20 和 21 页中对 $\overline{v}$所要求的条件 0.-5.。因此，存在一个满足对 $\overline{v}$所要求的条件 0.-5. 的函数，我们可以令 $\overline{v} = h$。因此，为了完成真值赋值定理的存在性部分证明，即《 [1], 》中的定理 12A，还需证明条件 0.-5. 对 h成立。现在我们着手证明这一点。

证明。条件 0. 假设 α 是属于 S的句子符号，即 $\alpha = A_n \in S$。于是，令 $\varepsilon_1 = A_n$，我们得到 $\alpha = A_n$的构造序列 $\langle \varepsilon_1 \rangle = \langle A_n \rangle$，其对应的真值序列为 $\langle \tau_1 \rangle = \langle v(A_n) \rangle$。因此，$\langle \varepsilon_1, \tau_1 \rangle = \langle A_n, v(A_n) \rangle$ 属于 $\mathscr{P}$。所以 $h(A_n) = v(A_n)$，这表明条件 0. 对 h成立。

条件 1。设 $\alpha \in \overline{S}$。我们需要证明

$$h((\neg\alpha)) = \begin{cases} T & \text{if } h(\alpha) = F \\ F & \text{if } h(\alpha) = T. \end{cases}$$

因此，假设 $h(\alpha) = F$。于是 $\langle \alpha$、$F \rangle \in \mathscr{P}$，因此存在一个构造序列 $\langle \delta_1$、δ_2、...、$\delta_m \rangle$，对应于 α，以及与之相关的真值序列 $\langle \tau_1$、τ_2、...、$\tau_m \rangle$，并具有性质 $\delta_m = \alpha$ 和 $\tau_m = F$。但是，$\langle \delta_1$、δ_2、...、δ_m、$(\neg\alpha) \rangle$ 是 $(\neg\alpha)$ 的一个构造序列，其相关的真值序列为 $\langle \tau_1$、τ_2、...、τ_m、$T \rangle$，因为 $\tau_m = F$。因此，根据 $\mathscr{P}$ 的定义，我们得到 $\langle (\neg\alpha)$、$T \rangle \in \mathscr{P}$。因此，

$$h((\neg\alpha)) = T,$$

如所要求的。

我们同样可以证明，若 $h(\alpha) = T$，则 $h((\neg\alpha)) = F$。

因此，条件 1 对 h 成立。

条件 2。假设 α 和 β 都属于 $\overline{S}$。我们需要证明

$$h((\alpha \wedge \beta)) = \begin{cases} T & \text{if } h(\alpha) = h(\beta) = T \\ F & \text{otherwise .} \end{cases}$$

我们首先假设 $h(\alpha) = h(\beta) = T$。我们需要证明

$$h((\alpha \wedge \beta)) = T.$$

因此，$\langle\alpha、\ T\rangle$ 和 $\langle\beta、\ T\rangle$ 均属于 $\mathscr{P}$，所以存在一个用于 α 的构造序列 $\langle\delta_1、\ \delta_2、\ .....、\ \delta_m\rangle$，以及与之相关的真值序列 $\langle\tau_1、\ \tau_2、\ .....、\ \tau_m\rangle$，它们具有性质 $\delta_m = \alpha$ 和 $\tau_m = T$。此外，还存在另一个用于 β 的构造序列 $\langle\varepsilon_1、\ \varepsilon_2、\ .....、\ \varepsilon_n\rangle$，以及与之相关的真值序列 $\langle\tau_1^{'}、\ \tau_2^{'}、\ .....、\ \tau_n^{'}\rangle$，它们具有性质 $\varepsilon_n = \beta$ 和 $\tau_n^{'} = T$。因此，$\langle\delta_1、\ \delta_2、\ .....、\ \delta_m、\ \varepsilon_1、\ \varepsilon_2、\ .....、\ \varepsilon_n、\ (\alpha \wedge \beta)\rangle$ 是 $(\alpha \wedge \beta)$ 的一个构造序列。由于相关的真值序列满足条件 2，与 $\langle\delta_1、\ \delta_2、\ .....、\ \delta_m、\ \varepsilon_1、\ \varepsilon_2、\ ...\ ...、\ \varepsilon_n、\ (\alpha \wedge \beta)\rangle$ 相关的真值序列为 $\langle\tau_1、\ \tau_2、\ .....、\ T、\ \tau_1^{'}、\ \tau_2^{'}、\ .....、\ T、\ T\rangle$，因为 $\tau_m = T$ 且 $\tau_n^{'} = T$。因此，根据 $\mathscr{P}$ 的定义，我们得到 $\langle(\alpha \wedge \beta)、\ T\rangle \in \mathscr{P}$。所以 $h((\alpha \wedge \beta)) = T$，证毕。

我们再假设 $h(\alpha) = T$ 和 $h(\beta) = F$。我们需要证明

$$h((\alpha \wedge \beta)) = F.$$

因此，$\langle\alpha、\ T\rangle$ 和 $\langle\beta、\ F\rangle$ 都属于 $\mathscr{P}$，所以存在一个针对 α 的构造序列 $\langle\delta_1、\ \delta_2、\ ...、\ \delta_m\rangle$，以及与之对应的真值序列 $\langle\tau_1、\ \tau_2、\ ...、\ \tau_m\rangle$，满足性质 $\delta_m = \alpha$ 和 $\tau_m = T$。此外，还存在另一个针对 β 的构造序列 $\langle\varepsilon_1、\ \varepsilon_2、\ ...、\ \varepsilon_n\rangle$，以及与之对应的真值序列 $\langle\tau_1^{'}、\ \tau_2^{'}、\ ...、\ \tau_n^{'}\rangle$，满足性质 $\varepsilon_n = \beta$ 和 $\tau_n^{'} = F$。因此，$\langle\delta_1、\ \delta_2、\ ...、\ \delta_m、\ \varepsilon_1、\ \varepsilon_2、\ ...、\ \varepsilon_n、\ (\alpha \wedge \beta)\rangle$ 是针对 $(\alpha \wedge \beta)$ 的一个构造序列。由于对应的真值序列满足条件 2，$\langle\delta_1、\ \delta_2、\ ...、\ \delta_m、\ \varepsilon_1、\ \varepsilon_2、\ ...、\ \varepsilon_n、\ (\alpha \wedge \beta)\rangle$ 对应的真值序列是 $\langle\tau_1、\ \tau_2、\ ...、\ T、\ \tau_1^{'}、\ \tau_2^{'}、\ ...、\ F、\ F\rangle$，因为 $\tau_m = T$ 和 $\tau_n^{'} = F$。因此，根据 $\mathscr{P}$ 的定义，我们得到 $\langle(\alpha \wedge \beta)、\ F\rangle \in \mathscr{P}$。因此，$h((\alpha \wedge \beta)) = F$，证毕。

类似地，我们证明，若 $h(\alpha) = F$ 和 $h(\beta) = T$，则

$$h((\alpha \wedge \beta)) = F.$$

第三，我们假设 $h(\alpha) = F$ 和 $h(\beta) = F$。我们需要证明

$$h((\alpha \wedge \beta)) = F.$$

因此，$\langle\alpha, F\rangle$ 和 $\langle\beta, F\rangle$ 都属于 $\mathscr{P}$，所以存在一个以 $\langle\delta_1, \delta_2, ..., \delta_m\rangle$ 为项、对应于 α 的构造序列，以及与之关联的真值序列 $\langle\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m\rangle$，它们具有性质 $\delta_m = \alpha$ 和 $\tau_m = F$。此外，还存在另一个以 $\langle\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\rangle$ 为项、对应于 β 的构造序列，以及与之关联的真值序列 $\langle\tau_1^{'}, \tau_2^{'}, ..., \tau_n^{'}\rangle$，它们具有性质 $\varepsilon_n = \beta$ 和 $\tau_n^{'} = F$。因此，$\langle\delta_1, \delta_2, ..., \delta_m, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, (\alpha \wedge \beta)\rangle$ 是 $(\alpha \wedge \beta)$ 的一个构造序列。由于相应的真值序列满足条件 2，与 $\langle\delta_1, \delta_2, ..., \delta_m, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, (\alpha \wedge \beta)\rangle$ 关联的真值序列为 $\langle\tau_1, \tau_2, ..., F, \tau_1^{'}, \tau_2^{'}, ..., F, F\rangle$，因为 $\tau_m = F$ 和 $\tau_n^{'} = F$。因此，根据 $\mathscr{P}$ 的定义，我们得到 $\langle(\alpha \wedge \beta), F\rangle \in \mathscr{P}$。由此可得 $h((\alpha \wedge \beta)) = F$，证毕。

因此，h 满足条件 2。

条件 3。假设 α 和 β 都属于 $\overline{S}$。我们需要证明

$$h((\alpha \vee \beta)) = \begin{cases} T & \text{if } h(\alpha) = T \text{ or } h(\beta) = T \text{ (or both)} \\ F & \text{otherwise .} \end{cases}$$

我们首先假设 $h(\alpha) = T$。我们需要证明，如果 $h(\beta) = T$ 或 $h(\beta) = F$，那么我们总有

$$h((\alpha \vee \beta)) = T.$$

因此，我们分情况证明这一点。

情况 1。假设 $h(\beta) = T$。因此，$\langle \alpha、\ T\rangle$ 和 $\langle \beta、\ T\rangle$ 都属于 $\mathscr{P}$，所以存在一个以 $\langle \delta_1、\ \delta_2、\ ...、\ \delta_m\rangle$ 为项的 α 构造序列，以及与之相关的真值序列 $\langle \tau_1、\ \tau_2、\ ...、\ \tau_m\rangle$，它们具有性质 $\delta_m = \alpha$ 和 $\tau_m = T$。此外，还存在另一个以 $\langle \varepsilon_1、\ \varepsilon_2、\ ...、\ \varepsilon_n\rangle$ 为项的 β 构造序列，以及与之相关的真值序列 $\langle \tau_1^{'}、\ \tau_2^{'}、\ ...、\ \tau_n^{'}\rangle$，它们具有性质 $\varepsilon_n = \beta$ 和 $\tau_n^{'} = T$。因此，$\langle \delta_1、\ \delta_2、\ ...、\ \delta_m、\ \varepsilon_1、\ \varepsilon_2、\ ...、\ \varepsilon_n、\ (\alpha \vee \beta)\rangle$ 是 $(\alpha \vee \beta)$ 的一个构造序列。由于相关真值序列满足条件 3，与 $\langle \delta_1、\ \delta_2、\ ...、\ \delta_m、\ \varepsilon_1、\ \varepsilon_2、\ ...、\ \varepsilon_n、\ (\alpha \vee \beta)\rangle$ 相关的真值序列为 $\langle \tau_1、\ \tau_2、\ ...、\ T、\ \tau_1^{'}、\ \tau_2^{'}、\ ...、\ T、\ T\rangle$，因为 $\tau_m = T$ 和 $\tau_n^{'} = T$。因此，根据 $\mathscr{P}$ 的定义，我们得到 $\langle (\alpha \vee \beta)、\ T\rangle \in \mathscr{P}$。

情形 2。假设 $h(\beta) = F$。因此，$\langle \alpha、\ T\rangle$ 和 $\langle \beta、\ F\rangle$ 都属于 $\mathscr{P}$，所以存在一个以 α 为对象的构造序列 $\langle \delta_1、\ \delta_2、\ ...、\ \delta_m\rangle$，以及与之关联的真值序列 $\langle \tau_1、\ \tau_2、\ ...、\ \tau_m\rangle$，并具有性质 $\delta_m = \alpha$ 和 $\tau_m = T$。此外，还存在另一个以 β 为对象的构造序列 $\langle \varepsilon_1、\ \varepsilon_2、\ ...、\ \varepsilon_n\rangle$，以及与之关联的真值序列 $\langle \tau_1^{'}、\ \tau_2^{'}、\ ...、\ \tau_n^{'}\rangle$，并具有性质 $\varepsilon_n = \beta$ 和 $\tau_n^{'} = F$。因此，$\langle \delta_1、\ \delta_2、\ ...、\ \delta_m、\ \varepsilon_1、\ \varepsilon_2、\ ...、\ \varepsilon_n、\ (\alpha \vee \beta)\rangle$ 是 $(\alpha \vee \beta)$ 的一个构造序列。由于条件 3 对关联的真值序列成立，$\langle \delta_1、\ \delta_2、\ ...、\ \delta_m、\ \varepsilon_1、\ \varepsilon_2、\ ...、\ \varepsilon_n、\ (\alpha \vee \beta)\rangle$ 所对应的真值序列就是 $\langle \tau_1、\ \tau_2、\ ...、\ T、\ \tau_1^{'}、\ \tau_2^{'}、\ ...、\ F、\ T\rangle$，因为 $\tau_m = T$ 和 $\tau_n^{'} = F$。因此，根据 $\mathscr{P}$ 的定义，我们得到 $\langle (\alpha \vee \beta)、\ T\rangle \in \mathscr{P}$。

因此 $h((\alpha \vee \beta)) = T$，得证。

我们类似地证明，若 $h(\beta) = T$ 且 $h(\alpha) = T$ 或 $h(\alpha) = F$，则

$$h((\alpha \vee \beta)) = T.$$

第三，假设 $h(\alpha) = F$ 且 $h(\beta) = F$。我们需要证明

$$h((\alpha \vee \beta)) = F.$$

因此，$\langle \alpha、\ F\rangle$ 和 $\langle \beta、\ F\rangle$ 都属于 $\mathscr{P}$，所以存在一个关于 α 的构造序列 $\langle \delta_1、\ \delta_2、\ ...、\ \delta_m\rangle$，以及与之关联的真值序列 $\langle \tau_1、\ \tau_2、\ ...、\ \tau_m\rangle$，它们具有性质 $\delta_m = \alpha$ 和 $\tau_m = F$。此外，还存在另一个关于 β 的构造序列 $\langle \varepsilon_1、\ \varepsilon_2、\ ...、\ \varepsilon_n\rangle$，以及与之关联的真值序列 $\langle \tau_1^{'}、\ \tau_2^{'}、\ ...、\ \tau_n^{'}\rangle$，它们具有性质 $\varepsilon_n = \beta$ 和 $\tau_n^{'} = F$。因此，$\langle \delta_1、\ \delta_2、\ ...、\ \delta_m、\ \varepsilon_1、\ \varepsilon_2、\ ...、\ \varepsilon_n、\ (\alpha \vee \beta)\rangle$ 是 $(\alpha \vee \beta)$ 的一个构造序列。由于相关真值序列满足条件 3，与 $\langle \delta_1、\ \delta_2、\ ...、\ \delta_m、\ \varepsilon_1、\ \varepsilon_2、\ ...、\ \varepsilon_n、\ (\alpha \vee \beta)\rangle$ 关联的真值序列为 $\langle \tau_1、\ \tau_2、\ ...、\ F、\ \tau_1^{'}、\ \tau_2^{'}、\ ...、\ F、\ F\rangle$，因为 $\tau_m = F$ 且 $\tau_n^{'} = F$。因此，根据 $\mathscr{P}$ 的定义，我们得到 $\langle (\alpha \vee \beta)、\ F\rangle \in \mathscr{P}$。因此 $h((\alpha \vee \beta)) = F$，得证。

因此，h满足条件 3。

条件 4。假设 α 和 β 都属于 $\overline{S}$。我们需要证明

$$h((\alpha \to \beta)) = \begin{cases} F & \text{if } h(\alpha) = T \text{ and } h(\beta) = F \\ T & \text{otherwise .} \end{cases}$$

我们首先假设 $h(\alpha) = T$ 和 $h(\beta) = F$。我们需要证明

$$h((\alpha \to \beta)) = F.$$

因此，$\langle \alpha, T \rangle$ 和 $\langle \beta, F \rangle$ 都属于 $\mathscr{P}$，所以存在一个针对 α 的构造序列 $\langle \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m \rangle$，以及与之关联的真值序列 $\langle \tau_1, \tau_2, ..., \tau_m \rangle$，它们具有性质 $\delta_m = \alpha$ 和 $\tau_m = T$。此外，还存在另一个针对 β 的构造序列 $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n \rangle$，以及与之关联的真值序列 $\langle \tau_1', \tau_2', ..., \tau_n' \rangle$，它们具有性质 $\varepsilon_n = \beta$ 和 $\tau_n' = F$。因此，$\langle \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, (\alpha \to \beta) \rangle$ 是针对 $(\alpha \to \beta)$ 的构造序列。由于相关真值序列满足条件 4，$\langle \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, (\alpha \to \beta) \rangle$ 所对应的真值序列为 $\langle \tau_1, \tau_2, ..., T, \tau_1', \tau_2', ..., F, F \rangle$，因为 $\tau_m = T$ 和 $\tau_n' = F$。因此，根据 $\mathscr{P}$ 的定义，我们得到 $\langle (\alpha \to \beta), F \rangle \in \mathscr{P}$。于是 $h((\alpha \to \beta)) = F$，证毕。

其次，假设 $h(\alpha) = T$ 和 $h(\beta) = T$。我们需要证明

$$h((\alpha \to \beta)) = T.$$

因此，$\langle \alpha, T \rangle$ 和 $\langle \beta, T \rangle$ 都属于 $\mathscr{P}$，所以存在一个关于 α 的构造序列 $\langle \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m \rangle$ 及其对应的真值序列 $\langle \tau_1, \tau_2, ..., \tau_m \rangle$，满足性质 $\delta_m = \alpha$ 和 $\tau_m = T$。此外，还存在另一个关于 β 的构造序列 $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n \rangle$ 及其对应的真值序列 $\langle \tau_1', \tau_2', ..., \tau_n' \rangle$，满足性质 $\varepsilon_n = \beta$ 和 $\tau_n' = T$。因此，$\langle \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, (\alpha \to \beta) \rangle$ 是 $(\alpha \to \beta)$ 的一个构造序列。由于对应的真值序列满足条件 4，对于 $\langle \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, (\alpha \to \beta) \rangle$，其对应的真值序列为 $\langle \tau_1, \tau_2, ..., T, \tau_1', \tau_2', ..., T, T \rangle$，因为 $\tau_m = T$ 和 $\tau_n' = T$。因此，根据 $\mathscr{P}$ 的定义，我们得到 $\langle (\alpha \to \beta), T \rangle \in \mathscr{P}$。因此，$h((\alpha \to \beta)) = T$，证毕。

我们再假设 $h(\alpha) = F$ 和 $h(\beta) = T$。我们需要证明

$$h((\alpha \to \beta)) = T.$$

因此，$\langle \alpha、 F \rangle$ 和 $\langle \beta、 T \rangle$ 都属于 $\mathscr{P}$，所以存在一个针对 α 的构造序列 $\langle \delta_1、 \delta_2、 ...、 \delta_m \rangle$，以及与之对应的真值序列 $\langle \tau_1、 \tau_2、 ...、 \tau_m \rangle$，它们具有性质 $\delta_m = \alpha$ 和 $\tau_m = F$。此外，还存在另一个针对 β 的构造序列 $\langle \varepsilon_1、 \varepsilon_2、 ...、 \varepsilon_n \rangle$，以及与之对应的真值序列 $\langle \tau_1'、 \tau_2'、 ...、 \tau_n' \rangle$，它们具有性质 $\varepsilon_n = \beta$ 和 $\tau_n' = T$。因此，$\langle \delta_1、 \delta_2、 ...、 \delta_m、 \varepsilon_1、 \varepsilon_2、 ...、 \varepsilon_n、 (\alpha \to \beta) \rangle$ 是 $(\alpha \to \beta)$ 的一个构造序列。由于对应的真值序列满足条件 4，与 $\langle \delta_1、 \delta_2、 ...、 \delta_m、 \varepsilon_1、 \varepsilon_2、 ...、 \varepsilon_n、 (\alpha \to \beta) \rangle$ 对应的真值序列为 $\langle \tau_1、 \tau_2、 ...、 F、 \tau_1'、 \tau_2'、 ...、 T、 T \rangle$，因为 $\tau_m = F$ 且 $\tau_n' = T$。因此，根据 $\mathscr{P}$ 的定义，我们得到 $\langle (\alpha \to \beta)、 T \rangle \in \mathscr{P}$。故 $h((\alpha \to \beta)) = T$，证毕。

第四，我们假设 $h(\alpha) = F$ 和 $h(\beta) = F$。我们需要证明：

$$h((\alpha \to \beta)) = T.$$

因此，$\langle \alpha, F\rangle$和 $\langle \beta, F\rangle$都属于 $\mathscr{P}$，所以存在一个针对 α 的构造序列 $\langle \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m\rangle$，以及与之相关的真值序列 $\langle \tau_1, \tau_2, ..., \tau_m\rangle$，它们具有性质 $\delta_m = \alpha$和 $\tau_m = F$。并且还存在另一个针对 β 的构造序列 $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\rangle$，以及与之相关的真值序列 $\langle \tau_1', \tau_2', ..., \tau_n'\rangle$，它们具有性质 $\varepsilon_n = \beta$和 $\tau_n' = F$。因此，$\langle \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, (\alpha \to \beta)\rangle$ 是 $(\alpha \to \beta)$ 的一个构造序列。由于相关真值序列满足条件 4，因此，与 $\langle \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, (\alpha \to \beta)\rangle$相关的真值序列为 $\langle \tau_1, \tau_2, ..., F, \tau_1', \tau_2', ..., F, T\rangle$，因为 $\tau_m = F$和 $\tau_n' = F$。因此，根据 $\mathscr{P}$的定义，我们得到 $\langle (\alpha \to \beta), T\rangle \in \mathscr{P}$。因此，$h((\alpha \to \beta)) = T$，如所求。

因此，h满足条件 4。

条件 5。设 α 和 β 都属于 $\overline{S}$。我们需要证明

$$h((\alpha \leftrightarrow \beta)) = \begin{cases} T & \text{if } h(\alpha) = h(\beta) \\ F & \text{otherwise .} \end{cases}$$

我们先假设 $h(\alpha) = h(\beta)$。我们需要证明

$$h((\alpha \leftrightarrow \beta)) = T.$$

我们分两种情况讨论。

情况 1。假设 $h(\alpha) = h(\beta) = T$。因此，$\langle \alpha, T\rangle$和 $\langle \beta, T\rangle$都属于 $\mathscr{P}$，于是存在一个关于 α 的构造序列 $\langle \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m\rangle$，以及与之关联的真值序列 $\langle \tau_1, \tau_2, ..., \tau_m\rangle$，它们具有性质 $\delta_m = \alpha$和 $\tau_m = T$。此外，还存在另一个关于 β的构造序列 $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\rangle$，以及与之关联的真值序列 $\langle \tau_1', \tau_2', ..., \tau_n'\rangle$，它们具有性质 $\varepsilon_n = \beta$ 和 $\tau_n' = T$。因此，$\langle \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, (\alpha \leftrightarrow \beta)\rangle$ 是关于 $(\alpha \leftrightarrow \beta)$的一个构造序列。由于关联的真值序列满足条件 5，因此，与 $\langle \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, (\alpha \leftrightarrow \beta)\rangle$关联的真值序列为 $\langle \tau_1, \tau_2, ..., T, \tau_1', \tau_2', ..., T, T\rangle$，因为 $\tau_m = T$和 $\tau_n' = T$。因此，根据 $\mathscr{P}$的定义，我们得到 $\langle (\alpha \leftrightarrow \beta), T\rangle \in \mathscr{P}$。因此，$h((\alpha \leftrightarrow \beta)) = T$，证毕。

情形 2。假设 $h(\alpha) = h(\beta) = F$。因此 $\langle \alpha, F\rangle$ 和 $\langle \beta, F\rangle$ 都属于 $\mathscr{P}$，故存在一个关于 α 的构造序列 $\langle \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m\rangle$，以及与之关联的真值序列 $\langle \tau_1, \tau_2, ..., \tau_m\rangle$，满足性质 $\delta_m = \alpha$ 和 $\tau_m = F$。此外，还存在另一个关于 β 的构造序列 $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\rangle$，以及与之关联的真值序列 $\langle \tau_1', \tau_2', ..., \tau_n'\rangle$，满足性质 $\varepsilon_n = \beta$ 和 $\tau_n' = F$。因此，$\langle \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, (\alpha \leftrightarrow \beta)\rangle$ 是 $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ 的一个构造序列。由于关联的真值序列满足条件 5，与 $\langle \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, (\alpha \leftrightarrow \beta)\rangle$ 关联的真值序列为 $\langle \tau_1, \tau_2, ..., F, \tau_1', \tau_2', ..., F, T\rangle$，因为 $\tau_m = F$ 和 $\tau_n' = F$。因此，根据 $\mathscr{P}$ 的定义，我们得到 $\langle (\alpha \leftrightarrow \beta), T\rangle \in \mathscr{P}$。因此，$h((\alpha \leftrightarrow \beta)) = T$，得证。

我们再假设 $h(\alpha) \neq h(\beta)$。我们需要证明

$$h((\alpha \leftrightarrow \beta)) = F.$$

我们考虑两种情况。

情况 1。假设 $h(\alpha) = T$和 $h(\beta) = F$。因此 $\langle \alpha、 T\rangle$和 $\langle \beta、 F\rangle$都属于 $\mathscr{P}$，所以存在一个以 α 为对象的构造序列 $\langle \delta_1、 \delta_2、 ...、 \delta_m\rangle$，以及与之对应的真值序列 $\langle \tau_1、 \tau_2、 ...、 \tau_m\rangle$，它们具有性质 $\delta_m = \alpha$和 $\tau_m = T$。此外，还存在另一个以 β为对象的构造序列 $\langle \varepsilon_1、 \varepsilon_2、 ...、 \varepsilon_n\rangle$，以及与之对应的真值序列 $\langle \tau_1^{'}、 \tau_2^{'}、 ...、 \tau_n^{'}\rangle$，它们具有性质 $\varepsilon_n = \beta$和 $\tau_n^{'} = F$。因此，$\langle \delta_1、 \delta_2、 ...、 \delta_m、 \varepsilon_1、 \varepsilon_2、 ...、 \varepsilon_n、 (\alpha \leftrightarrow \beta)\rangle$是 $(\alpha \leftrightarrow \beta)$的一个构造序列。由于对应的真值序列满足条件 5，因此与 $\langle \delta_1、 \delta_2、 ...、 \delta_m、 \varepsilon_1、 \varepsilon_2、 ...、 \varepsilon_n、 (\alpha \leftrightarrow \beta)\rangle$ 对应的真值序列为 $\langle \tau_1、 \tau_2、 ...、 T、 \tau_1^{'}、 \tau_2^{'}、 ...、 F、 F\rangle$，因为 $\tau_m = T$且 $\tau_n^{'} = F$。因此，根据 $\mathscr{P}$的定义，我们得到 $\langle (\alpha \leftrightarrow \beta)、 F\rangle \in \mathscr{P}$。于是 $h((\alpha \leftrightarrow \beta)) = F$，证毕。

情形 2。假设 $h(\alpha) = F$和 $h(\beta) = T$。我们类似地证明 $h((\alpha \leftrightarrow \beta)) = F$。

因此，对于 h，条件 5. 成立。 □

至此，我们完成了证明：定理 12A 中满足条件 0.–5. 的函数 $\overline{v}$ 存在。接下来还需证明该定理的唯一性部分。

设 S是任意一个句子符号集合，并假设 v： $S \to \{F, T\}$ 是一个真值赋值。证明至多存在一个满足条件 0.–5. 的扩张 $\overline{v}$ 。

证明。我们用归纳原理证明该定理的唯一性部分。设 v 是一个真值赋值，且 $\overline{v_1}$、 $\overline{v_2}$ 是满足关于 $\overline{v}$的条件的两个函数。我们用归纳原理证明，对于所有良构公式 α，
$\overline{v_1}(\alpha) = \overline{v_2}(\alpha)$ 。

基础情形：如果 α 是属于 S 的句子符号，那么根据条件 0.，
$\overline{v_1}(\alpha) = v(\alpha) = \overline{v_2}(\alpha)$。

归纳情形：假设 $\overline{v_1}(\alpha) = \overline{v_2}(\alpha)$。我们需要证明 $\overline{v_1}((\neg\alpha)) = \overline{v_2}((\neg\alpha))$。假设 $\overline{v_1}(\alpha) = T$。那么，根据条件 1， $\overline{v_1}((\neg\alpha)) = F$ 。由于$\overline{v_1}(\alpha) = \overline{v_2}(\alpha)$，因此 $\overline{v_2}(\alpha) = T$。那么，根据条件 1， $\overline{v_2}((\neg\alpha)) = F$。因此，$\overline{v_1}((\neg\alpha)) = F = \overline{v_2}((\neg\alpha))$。 $\overline{v_1}(\alpha) = F$ 的情形类似。因此，$\overline{v_1}((\neg\alpha)) = \overline{v_2}((\neg\alpha))$ 已得到证明。

假设 $\overline{v_1}(\alpha) = \overline{v_2}(\alpha)$ 且 $\overline{v_1}(\beta) = \overline{v_2}(\beta)$。

首先，我们需要证明 $\overline{v_1}((\alpha \wedge \beta)) = \overline{v_2}((\alpha \wedge \beta))$。假设 $\overline{v_1}(\alpha) = T$ 且$\overline{v_1}(\beta) = T$。那么，根据条件 2， $\overline{v_1}((\alpha \wedge \beta)) = T$。由于 $\overline{v_1}(\alpha) = \overline{v_2}(\alpha)$ 且$\overline{v_1}(\beta) = \overline{v_2}(\beta)$，因此 $\overline{v_2}(\alpha) = T$ 且 $\overline{v_2}(\beta) = T$。那么，根据条件 2， $\overline{v_2}((\alpha \wedge \beta)) = T$。因此，$\overline{v_1}((\alpha \wedge \beta)) = T = \overline{v_2}((\alpha \wedge \beta))$。所以， $\overline{v_1}((\alpha \wedge \beta)) = \overline{v_2}((\alpha \wedge \beta))$。

接下来假设 $\overline{v_1}(\alpha) = T$ 和 $\overline{v_1}(\beta) = T$并非同时成立。因此，根据条件 2，
$\overline{v_1}((\alpha \wedge \beta)) = F$。此外， $\overline{v_2}(\alpha) = \overline{v_1}(\alpha)$ 和 $\overline{v_2}(\beta) = \overline{v_1}(\beta)$，因此二者并非同时成立

$\overline{v_2}(\alpha) = T$和 $\overline{v_2}(\beta) = T$。因此，根据条件 2，$\overline{v_2}((\alpha \wedge \beta)) = F$。由此，$\overline{v_1}((\alpha \wedge \beta)) = F = \overline{v_2}((\alpha \wedge \beta))$。因此，$\overline{v_1}((\alpha \wedge \beta)) = \overline{v_2}((\alpha \wedge \beta))$。
其次，我们考虑情形 $\vee$。假设 $\overline{v_1}(\alpha) = T$ 或 $\overline{v_1}(\beta) = T$（或两者皆有）。那么，根据条件 3，有 $\overline{v_1}((\alpha \vee \beta)) = T$。。由于 $\overline{v_1}(\alpha) = \overline{v_2}(\alpha)$ 且 $\overline{v_1}(\beta) = \overline{v_2}(\beta)$，因此 $\overline{v_2}(\alpha) = T$ 或 $\overline{v_2}(\beta) = T$（或两者皆有）。那么，根据条件 3，有 $\overline{v_2}((\alpha \vee \beta)) = T$。。由此，$\overline{v_1}((\alpha \vee \beta)) = T = \overline{v_2}((\alpha \vee \beta))$。因此，$\overline{v_1}((\alpha \vee \beta)) = \overline{v_2}((\alpha \vee \beta))$。
接下来，假设 $\overline{v_1}(\alpha) = F$ 且 $\overline{v_1}(\beta) = F$。那么，根据条件 3，有 $\overline{v_1}((\alpha \vee \beta)) = F$。。由于 $\overline{v_1}(\alpha) = \overline{v_2}(\alpha)$ 且 $\overline{v_1}(\beta) = \overline{v_2}(\beta)$，因此 $\overline{v_2}(\alpha) = F$ 且 $\overline{v_2}(\beta) = F$。那么，根据条件 3，有 $\overline{v_2}((\alpha \vee \beta)) = F$。。由此，$\overline{v_1}((\alpha \vee \beta)) = F = \overline{v_2}((\alpha \vee \beta))$。因此，$\overline{v_1}((\alpha \vee \beta)) = \overline{v_2}((\alpha \vee \beta))$。
第三，我们考虑情形 $\rightarrow$。假设 $\overline{v_1}(\alpha) = T$ 和 $\overline{v_1}(\beta) = F$。根据条件 4，$\overline{v_1}((\alpha \rightarrow \beta)) = F$。由于 $\overline{v_1}(\alpha) = \overline{v_2}(\alpha)$ 和 $\overline{v_1}(\beta) = \overline{v_2}(\beta)$，因此 $\overline{v_2}(\alpha) = T$ 和 $\overline{v_2}(\beta) = F$。根据条件 4，$\overline{v_2}((\alpha \rightarrow \beta)) = F$。由此，$\overline{v_1}((\alpha \rightarrow \beta)) = F = \overline{v_2}((\alpha \rightarrow \beta))$。因此，$\overline{v_1}((\alpha \rightarrow \beta)) = \overline{v_2}((\alpha \rightarrow \beta))$。
接下来，我们考虑 $\rightarrow$ 的其余三个假设，分别是 $\overline{v_1}(\alpha) = F$ 和 $\overline{v_1}(\beta) = T$、$\overline{v_1}(\alpha) = \overline{v_1}(\beta) = T$ 以及 $\overline{v_1}(\alpha) = \overline{v_1}(\beta) = F$。根据条件 4，$\overline{v_1}((\alpha \rightarrow \beta)) = T$ 满足这三个假设中的每一个。由于 $\overline{v_1}(\alpha) = \overline{v_2}(\alpha)$ 和 $\overline{v_1}(\beta) = \overline{v_2}(\beta)$，因此 $\overline{v_2}(\alpha)$ 和 $\overline{v_2}(\beta)$ 满足这三个假设中的一个，即 $\overline{v_2}(\alpha) = F$ 和 $\overline{v_2}(\beta) = T$、$\overline{v_2}(\alpha) = \overline{v_2}(\beta) = T$ 或 $\overline{v_2}(\alpha) = \overline{v_2}(\beta) = F$。根据条件 4，$\overline{v_2}((\alpha \rightarrow \beta)) = T$。由此，$\overline{v_1}((\alpha \rightarrow \beta)) = T = \overline{v_2}((\alpha \rightarrow \beta))$。因此，$\overline{v_1}((\alpha \rightarrow \beta)) = \overline{v_2}((\alpha \rightarrow \beta))$。
第四，我们考虑情形 $\leftrightarrow$。假设 $\overline{v_1}(\alpha) = \overline{v_1}(\beta)$。那么，根据条件 5，有 $\overline{v_1}((\alpha \leftrightarrow \beta)) = T$。。由于 $\overline{v_1}(\alpha) = \overline{v_2}(\alpha)$ 和 $\overline{v_1}(\beta) = \overline{v_2}(\beta)$，于是 $\overline{v_2}(\alpha) = \overline{v_2}(\beta)$。接着，根据条件 5，有 $\overline{v_2}((\alpha \leftrightarrow \beta)) = T$。。因此，$\overline{v_1}((\alpha \leftrightarrow \beta)) = T = \overline{v_2}((\alpha \leftrightarrow \beta))$。所以，$\overline{v_1}((\alpha \leftrightarrow \beta)) = \overline{v_2}((\alpha \leftrightarrow \beta))$。
接下来，假设 $\overline{v_1}(\alpha) \neq \overline{v_1}(\beta)$。那么，根据条件 5，有 $\overline{v_1}((\alpha \leftrightarrow \beta)) = F$。。由于 $\overline{v_1}(\alpha) = \overline{v_2}(\alpha)$ 和 $\overline{v_1}(\beta) = \overline{v_2}(\beta)$，于是 $\overline{v_2}(\alpha) \neq \overline{v_2}(\beta)$。接着，根据条件 5，有 $\overline{v_2}((\alpha \leftrightarrow \beta)) = F$。。因此，$\overline{v_1}((\alpha \leftrightarrow \beta)) = F = \overline{v_2}((\alpha \leftrightarrow \beta))$。所以，$\overline{v_1}((\alpha \leftrightarrow \beta)) = \overline{v_2}((\alpha \leftrightarrow \beta))$。
因此，我们证明了至多存在一个满足条件 0.–5. 的扩展 v。由此，我们证明了该定理的唯一性部分。

□

3 递归

我们要考虑一种一般情形：给定一个集合 U，以及一族函数 $\mathscr{F}$，使得对于每个 $f \in \mathscr{F}$，f 的定义域都是某个 $n \geq 0$ 的 U^n，而 f 的陪域是 U，即 f: $U^n \rightarrow U$。这样的函数 f 称为 n 元函数。为清晰起见，当 $n = 0$ 时，我们将 f 视为 U 的一个元素，即 $f \in U$ 是一个常量。

此外，我们还给定了 U 的一个子集 B。现在我们给出如下定义。

定义 1. 如果满足以下三个条件，则称子集 $C \subseteq U$ 是由 $\mathscr{F}$ 从 B 生成的:

(a) $B \subseteq C$,
(b) 对于每个 n 元函数 $f \in \mathscr{F}$、 $f(C^n) \subseteq C$，以及
(c) 如果 C' 是 C 的真子集，且满足 $B \subseteq C'$，那么对于某个自然数 n，以及一个 n 元 $f \in \mathscr{F}$， $f((C')^n) \nsubseteq C'$。
评注。满足条件 (b) 的 U 的任意子集 C，称为 $\mathscr{F}$-闭的。因此，条件 (b) 和 (c) 合起来表明，C 是 $\mathscr{F}$-闭的，但不存在包含 B 的 C 的真子集是 $\mathscr{F}$-闭的。此外，如果 $B \subseteq C$，且 C 是 $\mathscr{F}$-闭的，那么 C 由 B 经由 $\mathscr{F}$ 生成；并且不存在包含 B 的 C 的真子集是 $\mathscr{F}$-闭的。

定理。在上述记号和定义下，存在唯一的 U 的子集 C，它由 B 经由 $\mathscr{F}$ 生成。

定义 2。使用上述引入的记号，我们称 U 的子集 C 是由 B 经由 $\mathscr{F}$ 自由生成的，当且仅当 C 由 B 经由 $\mathscr{F}$ 生成（见定义 1），并且满足以下三个条件:

- F1. 每个 f 在 $\mathscr{F}$ 中都是 C上的单射;
- F2. 对每个 f在 $\mathscr{F}$中， f在 C上的值域与 B不相交，即 $f(C) \cap B = \emptyset$; 并且
- F3. 对每个 f_1 和 f_2 在 $\mathscr{F}$中，若 $f_1 \neq f_2$，则 f_1 和 f_2 的值域在 C上不相交，即 $f_1(C) \cap f_2(C) = \emptyset$。

我们经常会遇到以下情形。给定一个函数 $h: B \to V$，其中 V是某个由“值”组成的集合；我们希望将 h 扩展为一个函数$\overline{h}: C \to V$，按照与 $\mathscr{F}$中的函数相关联的某些“规则”，为 C的所有元素赋予“值”。当 C 由 B 通过 $\mathscr{F}$自由生成时，这样的扩展 $\overline{h}$ 存在。下面的递归定理对上述非正式论述作了严格表述。

除了函数 $h: B \to V$ 之外，对于每个 $f \in \mathscr{F}$，我们还给定了一个相应的“规则” f，它具有这样的性质：如果 f 是 n 元的，那么 $f: V^n \to V$。

递归定理。假设 C 由 $\mathscr{F}$, $h: B \to V$ 从 B 自由生成，并且 $\mathscr{F}$ 中的每个 f 都有一个如上所述的关联 f。
那么存在唯一的函数 $\overline{h}: C \to V$，满足以下条件:
(i) For x in B, $\overline{h}(x) = h(x)$;
(ii) 对于每个 $f \in \mathscr{F}$，如果 f 是 n 元的，那么对于每个 $x_1, x_2, ..., x_n \in C$, $\overline{h}(f(x_1, x_2, ..., x_n)) = f(\overline{h}(x_1), \overline{h}(x_2), ..., \overline{h}(x_n))$。
现在我们将说明，如何根据递归定理推出真值赋值定理（定理 12 A，见[1]第 23 页）。我们首先指定应用递归定理时所需的参数。

我们令 U 为所有 LSL表达式组成的集合，并令 $\mathscr{F} = \{\varepsilon_\neg、\ \varepsilon_\wedge、\ \varepsilon_\vee、\ \varepsilon_\to、\ \varepsilon_\leftrightarrow\}$ 为论文开头第 2 页所述的公式构造运算。因此，$\varepsilon_\neg:\ U \to U$ 是一元的，其余四个 $\varepsilon_\wedge、\ \varepsilon_\vee、\ \varepsilon_\to、\ \varepsilon_\leftrightarrow$映射 $U^2 \to U$，是二元的。

我们还设定 $B = S$，其中 S 是一个任意的句子符号集合。
此外，我们设定 $V = \{T, F\}$ 为真值集合，并定义$\tilde{\varepsilon_\neg}:\ V \to V$，以及 $\tilde{\varepsilon_\wedge}, \tilde{\varepsilon_\vee}, \tilde{\varepsilon_\to}$, $\tilde{\varepsilon_\leftrightarrow}:\ V^2 \to V$，使其符合 [1], 第20、21页上的条件1至5，即 $\tilde{\varepsilon_\neg}(T) = F$, $\tilde{\varepsilon_\neg}(F) = T$; $\tilde{\varepsilon_\wedge}(T,T) = T, \tilde{\varepsilon_\wedge}(T,F) = \tilde{\varepsilon_\wedge}(F,T) = \tilde{\varepsilon_\wedge}(F,F) = F$; $\tilde{\varepsilon_\vee}(T, T) = \tilde{\varepsilon_\vee}(T,F) = \tilde{\varepsilon_\vee}(F,T) = T, \tilde{\varepsilon_\vee}(F,F) = F$; $\tilde{\varepsilon_\to}(T,T) = \tilde{\varepsilon_\to}(F,T) = \tilde{\varepsilon_\to}(F, F) = T, \tilde{\varepsilon_\to}(T,F) = F$; $\tilde{\varepsilon_\leftrightarrow}(T,T) = \tilde{\varepsilon_\leftrightarrow}(F,F) = T, \tilde{\varepsilon_\leftrightarrow}(T,F) = \tilde{\varepsilon_\leftrightarrow}(F,T) = F$.

现在我们注意到，集合 $\overline{S}$ 是由所有良构公式 α 构成的集合，其中在 α 中出现的每个句子符号都属于 S；它是所有 LSL 表达式的集合 U 的自由生成子集，生成元素的集合 B 为 S，生成函数的集合 $\mathscr{F}$ 为 $\{\varepsilon_\neg, \varepsilon_\wedge, \varepsilon_\vee, \varepsilon_\to, \varepsilon_\leftrightarrow\}$。这一事实就是 LSL 良构公式的唯一可读性定理。除了课堂笔记中提到这一点外，[1]，第 40 页也陈述了该定理；我们在本文前文主引理的证明中也依赖了这一定理。因此，为了将真值赋值定理作为递归定理的一个应用来获得，我们将设定 $C = \overline{S}$。最后，我们设定 $h:\ B \to V$ 是一个任意的真值赋值 $v: S \to \{T, F\}$。由前面的讨论可知，递归定理的所有假设均成立，因此存在唯一函数 $\overline{v} = \overline{h}:\ \overline{S} \to \{T, F\}$ 满足递归定理的条件 (i) 和 (ii)。

因此，接下来只需验证我们得到的条件函数 $\overline{v}$: $\overline{S} \to \{T, F\}$。与我们第一次证明定理 12A 时类似，接下来只需验证刚得到的函数 $\overline{v}$: $\overline{S} \to \{T, F\}$ 满足条件 0.-5.。

现在我们着手验证。
条件 0. 假设 α 是属于 S 的句子符号，即 $\alpha = A_n \in S$。但在应用递归定理时，我们设定了 $B = S$，因此根据递归定理陈述中的条件 (i)，可得$\overline{h}(\alpha) = h(\alpha)$，即 $\overline{v}(\alpha) = v(\alpha)$，其中已设定 $h = v$。因此条件 0. 成立。

条件 1. 设 $\alpha \in \overline{S}$。我们需要证明

$$\overline{v}((\neg\alpha)) = \begin{cases} T & \text{if } \overline{v}(\alpha) = F \\ F & \text{if } \overline{v}(\alpha) = T. \end{cases}$$

在应用递归定理时，我们令集合为 $C = \overline{S}$，并且有 $\varepsilon_\neg \in \mathscr{F}$，且定义 1 的条件 (b) 成立。因此，$\epsilon_\neg(\alpha) = (\neg\alpha) \in C = \overline{S}$。由此，根据递归定理的条件 (ii)，我们得到 $\overline{h}(\varepsilon_\neg(\alpha)) = \tilde{\varepsilon_\neg}(\overline{h}(\alpha))$，即

$$\overline{v}((\neg\alpha)) = \tilde{\varepsilon_{\neg}}(\overline{v}(\alpha)) = \begin{cases} T & \text{if } \overline{v}(\alpha) = F \\ F & \text{if } \overline{v}(\alpha) = T \end{cases}$$

这符合 $\tilde{\varepsilon_{\neg}}$ 的规定。因此，条件 1 成立。

条件 2. 设 α 和 β 都属于 $\overline{S}$。我们需要证明

$$\overline{v}((\alpha \wedge \beta)) = \begin{cases} T & \text{if } \overline{v}(\alpha) = \overline{v}(\beta) = T \\ F & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在应用递归定理时，我们设定了 $C = \overline{S}$，并且有$\varepsilon_{\wedge} \in \mathscr{F}$，且定义 1 的条件 (b) 成立。因此，$\varepsilon_{\wedge}(\alpha, \beta) = (\alpha \wedge \beta) \in C = \overline{S}$。于是，根据递归定理的条件 (ii)，我们得到$\overline{h}(\varepsilon_{\wedge}(\alpha, \beta)) = \tilde{\varepsilon_{\wedge}}(\overline{h}(\alpha), \overline{h}(\beta))$，即

$$\overline{v}((\alpha \wedge \beta)) = \tilde{\varepsilon_{\wedge}}(\overline{v}(\alpha), \overline{v}(\beta)) = \begin{cases} T & \text{if } \overline{v}(\alpha) = \overline{v}(\beta) = T \\ F & \text{otherwise} \end{cases}$$

符合 $\tilde{\varepsilon_{\wedge}}$ 的规定。因此，条件 2 成立。

条件 3. 设 α 和 β 都属于 $\overline{S}$。我们需要证明

$$\overline{v}((\alpha \vee \beta)) = \begin{cases} T & \text{if } \overline{v}(\alpha) = T \text{ or } \overline{v}(\beta) = T \text{ (or both)} \\ F & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在应用递归定理时，我们设定了 $C = \overline{S}$，并且有$\varepsilon_{\vee} \in \mathscr{F}$，且定义 1 的条件 (b) 成立。因此，$\varepsilon_{\vee}(\alpha, \beta) = (\alpha \vee \beta) \in C = \overline{S}$。于是，根据递归定理的条件 (ii)，我们得到$\overline{h}(\varepsilon_{\vee}(\alpha, \beta)) = \tilde{\varepsilon_{\vee}}(\overline{h}(\alpha), \overline{h}(\beta))$，即

$$\overline{v}((\alpha \vee \beta)) = \tilde{\varepsilon_{\vee}}(\overline{v}(\alpha), \overline{v}(\beta)) = \begin{cases} T & \text{if } \overline{v}(\alpha) = T \text{ or } \overline{v}(\beta) = T \text{ (or both)} \\ F & \text{otherwise} \end{cases}$$

符合 $\tilde{\varepsilon_{\vee}}$ 的规定。因此，条件 3 成立。

条件 4. 设 α 和 β 都属于 $\overline{S}$。我们需要证明

$$\overline{v}((\alpha \to \beta)) = \begin{cases} F & \text{if } \overline{v}(\alpha) = T \text{ and } \overline{v}(\beta) = F \\ T & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在应用递归定理时，我们令 $C = \overline{S}$，并且有 $\varepsilon_{\to} \in \mathscr{F}$，且定义 1 的条件 (b) 成立。因此，$\varepsilon_{\to}(\alpha, \beta) = (\alpha \to \beta) \in C = \overline{S}$。由递归定理的条件 (ii)，我们得到 $\overline{h}(\varepsilon_{\to}(\alpha, \beta)) = \tilde{\varepsilon_{\to}}(\overline{h}(\alpha), \overline{h}(\beta))$，即

$$\overline{v}((\alpha \to \beta)) = \tilde{\varepsilon_{\to}}(\overline{v}(\alpha), \overline{v}(\beta)) = \begin{cases} F & \text{if } \overline{v}(\alpha) = T \text{ and } \overline{v}(\beta) = F \\ T & \text{otherwise} \end{cases}$$

符合 $\tilde{\varepsilon_{\to}}$ 的规定。因此，条件 4 成立。

条件 5。设 α 和 β 均属于 $\overline{S}$。我们需要证明

$$\overline{v}((\alpha \leftrightarrow \beta)) = \begin{cases} T & \text{if } \overline{v}(\alpha) = \overline{v}(\beta) \\ F & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在应用递归定理时，我们有集合 $C = \overline{S}$，且有$\varepsilon_{\leftrightarrow} \in \mathscr{F}$，并且定义 1 的条件 (b) 成立。因此， $\varepsilon_{\leftrightarrow}(\alpha, \beta) = (\alpha \leftrightarrow \beta) \in C = \overline{S}$。于是，根据递归定理的条件 (ii)，我们得到$\overline{h}(\varepsilon_{\leftrightarrow}(\alpha, \beta)) = \tilde{\varepsilon_{\leftrightarrow}}(\overline{h}(\alpha), \overline{h}(\beta))$，即

$$\overline{v}((\alpha \leftrightarrow \beta)) = \tilde{\varepsilon_{\leftrightarrow}}(\overline{v}(\alpha), \overline{v}(\beta)) = \begin{cases} T & \text{if } \overline{v}(\alpha) = \overline{v}(\beta) \\ F & \text{otherwise} \end{cases}$$

符合 $\tilde{\varepsilon_{\leftrightarrow}}$ 的规定。因此，条件 5 成立。

4 结论

本文证明了命题逻辑语言的真值赋值定理。我们采用了两种不同的方法。第一种方法是“直接”证明该定理，也就是说，除了在证明中使用命题逻辑语言的唯一可读性定理而未加证明之外，我们给出了完整的证明。第二种方法则从递归定理的一般表述推导出真值赋值定理。同样，我们使用了唯一可读性定理而未加证明。

参考文献

[1] Herbert B. Enderton。《逻辑学数学导论》。Elsevier，2001年。