arXiv:2303.10759v1 [math.LO] 19 Mar 2023

$\mathbf{L}^1_\kappa$ 的刻画

¨ ˇSIIRI KIVIMAKI 和 BOBAN VELICKOVIC

摘要。Shelah 在 [3] 中引入了逻辑 $\mathbf{L}^1_\kappa$ 。在 [4], 中，他证明，对于强紧致基数 κ, 该逻辑具有如下代数刻画：两个结构当且仅当它们经由 κ-完备超滤子得到的迭代超幂同构时，才是 $\mathbf{L}^1_\kappa$-等价的。我们介绍了逻辑 $\mathbf{L}^1_\kappa$ ，并给出了这一结果一个简化且略作修改的证明。

1. 逻辑 $\mathbf{L}^1_\kappa$

逻辑 $\mathbf{L}^1_\kappa$ 是通过一种 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈的变体来定义的。该博弈的状态 是三元组（α， f， π），其中 α 是一个序数， π 是一个部分同构，而 f 是一个划分函数，它将 π 的域的某个子集划分为可数多个部分。

定义 （博弈 G^β_θ ）。 设 A 和 B 是具有相同签名的结构， β 是一个序数， θ 是一个基数。该博弈

$$\mathsf{G}^\beta_\theta(\mathcal{A},\mathcal{B})$$

按如下方式进行。

初始状态： 初始状态为 $(\beta,\varnothing,\varnothing)$。

后续状态： 假设博弈处于状态 (α,f,π)。

- 玩家 I 选择一个序数 $\alpha\prime<\alpha$ 以及某个集合 $X\in \mathrm{A}^{\leqslant\theta}\cup\mathrm{B}^{\leqslant\theta}$。
- 玩家 II 选择一个部分划分函数 $f\prime\colon \mathrm{A}\cup\mathrm{B}\to\omega$，使得 $\mathrm{dom}(f)$ $X\subseteq\mathrm{dom}(f\prime)$，且对于所有 $a\in\mathrm{dom}(f)$,

$$f'(a)\coloneqq f(a)\dot{-}1.$$

然后她选择一个部分同构 $\pi'\supseteq\pi$ ，使得

$$f'^{-1}\{0\}\subseteq\mathsf{fld}(\pi').$$

下一个状态是（α'， f'， π'）。

第一个违反规则的玩家输。

日期：2023年3月。

令 $\equiv^\beta_\theta$ 为该关系的传递闭包

玩家 II 在博弈 G^β_θ(A,B).中有获胜策略

逻辑 是一个类函数，它将每个签名 τ 关联到一组句子及一个满足关系，并满足某些正则性，参见 [1]。

定义 （逻辑 L^1_κ）. 设 τ 为一个签名。

(1) L^1_κ 中的一个 τ-句子 是一个 τ_0-结构的类，对于某个 $\tau_0 \in [\tau]^{<\kappa}$ 和某个 β, $\theta < \kappa$，该类在关系 $\equiv^\beta_\theta$ 下封闭。(2) L^1_κ 的满足关系定义为

$$\mathcal{M} \models \varphi \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathcal{M} \restriction \tau_0 \in \varphi,$$

其中 τ_0 是使得 φ 由 τ_0-结构构成的签名。

事实。 对于形如 $\kappa = \beth_\kappa$ 的基数，逻辑 $\mathcal{L}^1_\kappa$ 是一种正则逻辑，严格介于逻辑 $\mathcal{L}_{\kappa\omega}$ 和 $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$ 之间。

证明。 参见 [3]。 □

注意，对于任意 τ-结构 A 和 B,

$$\mathcal{A} \equiv_{\mathcal{L}^1_\kappa} \mathcal{B} \iff \forall \tau_0 \in [\tau]^{<\kappa} \quad \forall \beta, \theta < \kappa \quad \mathcal{A} \restriction \tau_0 \equiv^\beta_\theta \mathcal{B} \restriction \tau_0.$$

命题 1.1 （$\mathcal{L}^1_\kappa$ 的并引理）。 设 $\kappa = \beth_\kappa$。设 $\bar{\mathcal{A}} = \{\mathcal{A}_n\}_{n\in\omega}$ 是一个由结构组成的 $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$-初等链。那么，对于每个 n,

$$\mathcal{A}_n \equiv_{\mathcal{L}^1_\kappa} \bigcup \bar{\mathcal{A}}.$$

证明。 参见 [3]。 □

2. 超幂与 L^1_κ-理论

若 U 是集合 I 上的超滤子，而 A 是一个结构，则超幂 A^I/U 将记作 $A^{\mathcal{U}}$。若 $U = (U_n)_n$ 是定义在某些集合上的超滤子序列，而 A 是一个结构，则沿这些超滤子 $(U_n)_n$ 对 A 进行的迭代超幂将记作 $A^{\bar{\ }\mathcal{U}}$。换言之，$A^{\bar{\ }\mathcal{U}}$ 是该系统的直极限

$$(\mathcal{A}_n, j_{m,n})_{m<n<\omega},$$

其中

$$\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}$$
$$\mathcal{A}_{n+1} := \mathcal{A}_n^{\mathcal{U}_n},$$

而映射 $j_{m,n} : A_m \to A_n$ 是超幂嵌入的复合。如果这些超滤子是 κ-完备的，则有：

定理 (洛斯)。 若$\mathcal{U}$ 是集合 I 上的 κ-完备超滤子，且$\mathcal{A}$ 是一个结构，则超幂嵌入

$$\mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\mathcal{U}}, \quad a \mapsto [(a)_{i\in I}]_{\mathcal{U}}$$

是 $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$-初等的。

因此，由洛斯定理可知，如果超滤子 U_n 是 κ-完备的，那么映射 $j_{m,n}:A_m \to A_n$ 是 $L_{\kappa\kappa}$-初等的。

直极限 $A^{\bar{\mathcal{U}}}$ 连同嵌入一起构成

$$j_{n,\omega}:\mathcal{A}_n \to \mathcal{A}^{\bar{\mathcal{U}}},$$

这些嵌入是一阶初等的，但一般不具备更强的性质。特别是，极限嵌入可能不是 $L_{\kappa\kappa}$-初等的，即使超滤子是 κ-完备的。在这种情况下，它们甚至可能不是 L^1_κ-初等的，但根据命题 1.1，它们仍保留 L^1_κ-理论。

例如，良基模型在 κ-完备超滤子下的任何超幂仍然是良基的，因为良基性可以用逻辑 $L_{\omega_1\omega_1}$ 表达，因此在 $L_{\kappa\kappa}$-初等嵌入下得以保留（当 κ 不可数时）。然而，通过多次迭代超幂构造，很容易从一个良基模型构造出一个非良基模型；在 L^1_κ 刻画的证明中就会这样做。

强紧致基数。对于基数 $\lambda \geqslant \kappa$，记

$$\mathscr{P}_\kappa(\lambda) := \{x \subseteq \lambda : |x| < \kappa\}.$$

集合 $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$ 上的超滤子 U 若满足：它是 κ-完备的，并且对于每个 $x \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$，都包含锥

$$C_x := \{y \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda) : x \subseteq y\}.$$

若存在集合 $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$ 上的细超滤子，则基数 κ 称为 λ-紧致的。若基数 κ对每个 $\lambda \geqslant \kappa$都是 λ-紧致的，则称其为强紧致的。 λ-紧致基数具有如下覆盖性质：

引理 2.1。 假设 κ 是一个 λ-紧致基数，并且$\mathcal{U}$ 是集合$\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$上的细超滤子。假设$(H,\in)$ 是ZFC^- 的传递模型，并且对 $<\kappa$-序列封闭，满足 $\kappa,\lambda \in H$。对于任意大小至多为 λ 的集合 $Y \subseteq H^{\mathcal{U}}$，存在集合 $X \in H^{\mathcal{U}}$，使得

$$Y \subseteq X \quad and \quad H^{\mathcal{U}} \vDash |X| < j(\kappa),$$

其中 $j : H \to H^{\mathcal{U}}$ 是超幂嵌入。

证明。 设 $Y \subseteq H^{\mathcal{U}}$ 是一个大小至多为 λ的集合。我们找到一个集合 $X \in H^{\mathcal{U}}$，它覆盖 Y，并且满足

$$H^{\mathcal{U}} \vDash |X| < j(\kappa).$$

记 $Y = \{[f_i]_{\mathcal{U}} : i < \lambda\}$。定义函数 $F : \mathscr{P}_\kappa(\lambda) \to H$,

$$F(x) = \{f_i(x) : i \in x\}.$$

由于 H 对 $< \kappa$-序列封闭，这个函数 F 的值域确实包含于 H 中，因此 $[F]_{\mathcal{U}} \in H^{\mathcal{U}}$。令 $X := [F]_{\mathcal{U}}$。

由精细性可得 $Y \subseteq X$：对每个 $i < \lambda$,

$$C_{\{i\}} \subseteq \{x : f_i(x) \in F(x)\} \in \mathcal{U}.$$

此外，$H^{\mathcal{U}} \vDash |X| < e(\kappa)$：这是因为

$$\{x : |F(x)| < \kappa\} = \mathscr{P}_\kappa(\lambda) \in \mathcal{U}.$$

□

3. 刻画的证明

现在我们给出以下定理的证明。

定理 (Shelah，定理 1.5，见 [4])。 假设 κ 是一个强紧致基数。以下命题等价:

(1) $\mathcal{A} \equiv_{\mathcal{L}^1_\kappa} \mathcal{B}$. *(2)* 存在一个序列 $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_n)_{n<\omega}$，由 κ-完备超滤子组成，使得

$$\mathcal{A}^{\bar{\mathcal{U}}} \cong \mathcal{B}^{\bar{\mathcal{U}}}.$$

证明。

(1)⇒(2)：假设 $\mathcal{A} \equiv_{\mathcal{L}^1_\kappa} \mathcal{B}$。为简单起见，假设模型 A 和 B 的签名 τ 是关系型的，大小为 $< \kappa$，且 A 和 B 的定义域不相交。再为简单起见，假设对于所有 $\beta, \theta < \kappa$，玩家 II 在博弈中有获胜策略

$$G^\beta_\theta(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

我们将构造一个可数的超滤子序列 U，使得迭代超幂 $A^{\bar{\mathcal{U}}}$ 和 $B^{\bar{\mathcal{U}}}$ 同构。

令 μ 为一个足够大的正则基数，使得模型 A 和 B、κ以及所有获胜策略都属于 $H(\mu)$。对于所有 $\beta, \theta < \kappa$，固定玩家 II 在博弈 G^β_θ(A,B) 中的某个获胜策略 $\sigma_{\beta,\theta}$。选取新的单目谓词符号 A 和 B，以及一个新的二元函数符号 σ。定义结构

$$\mathcal{H} := (H(\mu), \in, A^{\mathcal{H}}, B^{\mathcal{H}}, \sigma^{\mathcal{H}}, R^{\mathcal{H}})_{R \in \tau}$$

其中

- $A_{\mathcal{H}}$ =dom(A)
- $B_{\mathcal{H}}$ =dom(B)

- $\sigma^{\mathcal{H}}(\beta,\theta) = \begin{cases}\sigma_{\beta,\theta}, & \text{if } \beta,\theta \in \kappa \\ \varnothing & \text{otherwise.}\end{cases}$

● 对于每个符号 $R \in \tau$, $R^{\mathcal{H}} = R_{\mathcal{A}} \cup R_{\mathcal{B}}$。

现在我们将通过对 ω进行递归，构造结构 $(H_n)_n$、$(A_n)_n$、$(B_n)_n$、超滤子 $(U_n)_n$ 和集合 $(X_n)_n$。

步骤 0： 令 H_0 :=H、A_0 :=A 和 B_0 := B。

步骤 $n+1$**：** 假设对所有 $m \leqslant n$，H_m、A_m 和 B_m 均已定义。对每个$m \leqslant n$，记

$$\lambda_m := |\mathcal{A}_m| + |\mathcal{B}_m| + \kappa.$$

此外，假设对所有 $m < n$，我们都已定义（利用 κ是强紧的这一事实）

● 集合 $\mathscr{P}_\kappa$ 上的一个细超滤子 U_m （λ_m）。

● 它所对应的超幂嵌入

$$e_m : \mathcal{H}_m \to \mathcal{H}_m^{\mathcal{U}_m} =: \mathcal{H}_{m+1}.$$

● 一个集合 $X_m \in H_{m+1}$，使得逐点像 $e_m[A_m]$ 和 $e_m[B_m]$ 都是 X_m 的子集，并且

$$\mathcal{H}_{m+1} \vDash |X_m| < e_m(\kappa),$$

利用紧致基数的覆盖性质，如引理 2.1 所示。现在我们定义超滤子 U_n、模型 H_{n+1}、嵌入 e_n、集合 X_n，以及模型 A_{n+1} 和 B_{n+1}。

● 令 U_n 为 $\mathscr{P}_\kappa(\lambda_n)$ 上任意一个细超滤子。这是可行的，因为 κ 是强紧致的。

● 令 H_{n+1} :=$H^{\mathcal{U}_n}$.

● 令 e_n :$H_n \to H_{n+1}$ 为超幂嵌入。注意，此嵌入是 $L_{\kappa\kappa}$-初等的，其临界点为 κ。

● 令 $X_n \in H_{n+1}$ 为一个集合，使得

$e_n[A_n]$，$e_n[B_n] \subseteq X_n$ 且 $H_{n+1} \vDash |X_n| < e_n(\kappa)$。根据引理 2.1，这可由 λ_n-紧致基数的覆盖性质得到。

● 最后，令

$$\mathcal{A}_{n+1} := \mathcal{A}_n^{\mathcal{U}_n}$$
$$\mathcal{B}_{n+1} := \mathcal{B}_n^{\mathcal{U}_n}.$$

我们有如下有向系统

$$(\mathcal{H}_n, e_{m,n})_{m<n<\omega},$$

其中每个 $e_{m,\ n} : \mathrm{H}_m \to \mathrm{H}_n$ 都是一个 $\mathrm{L}_{\kappa\kappa}$-初等嵌入，由复合超幂嵌入得到。令 $\mathrm{H}^{\bar{\mathcal{U}}}$ 为该系统的直极限。

限制映射

$$e^{\mathcal{A}}_{m,n} := e_{m,n} \restriction \mathcal{A}_m : \mathcal{A}_m \to \mathcal{A}_n$$
$$e^{\mathcal{B}}_{m,n} := e_{m,n} \restriction \mathcal{B}_m : \mathcal{B}_m \to \mathcal{B}_n,$$

也是 $\mathrm{L}_{\kappa\kappa}$-初等的。我们得到有向系统

$$\left(\mathcal{A}_n, e^{\mathcal{A}}_{m,n}\right)_{m<n<\omega} \quad \text{and} \quad \left(\mathcal{B}_n, e^{\mathcal{B}}_{m,n}\right)_{m<n<\omega},$$

并且可以取这些系统的直极限，分别记为 $\mathrm{A}^{\bar{}}{}_{\mathcal{U}}$和 $\mathrm{B}^{\bar{}}{}_{\mathcal{U}}$。

我们有一阶初等极限嵌入：

$$e_{n,\omega} : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}^{\bar{\mathcal{U}}}$$
$$e^{\mathcal{A}}_{n,\omega} : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}^{\bar{\mathcal{U}}}$$
$$e^{\mathcal{B}}_{n,\omega} : \mathcal{B}_n \to \mathcal{B}^{\bar{\mathcal{U}}}.$$

断言。 模型 $\mathcal{A}^{\bar{\mathcal{U}}}$和 $\mathcal{B}^{\bar{}}{}_{\mathcal{U}}$同构。

断言的证明。 首先注意，对每个 n，A_n 和 B_n 的第 n 次迭代分别与结构 $A^{\mathcal{H}_n}$ 和 $B^{\mathcal{H}_n}$同构。因此也有

$$\mathcal{A}^{\bar{\mathcal{U}}} \cong A^{\mathcal{H}^{\bar{\mathcal{U}}}} \quad \text{and} \quad \mathcal{B}^{\bar{\mathcal{U}}} \cong B^{\mathcal{H}^{\bar{\mathcal{U}}}}.$$

因此，只需证明 $A^{\mathcal{H}^{\mathcal{U}}}$ 和 $B^{\mathcal{H}^{\mathcal{U}}}$ 同构。

根据映射$e_{0,\omega}$ 的一阶初等性，

$$\mathcal{H}^{\bar{\mathcal{U}}} \vDash \quad \text{“}\forall \beta, \theta < e_{0,\omega}(\kappa) \quad \sigma^{\mathcal{H}^{\bar{\mathcal{U}}}}(\beta, \theta) \textit{ is a winning strategy for the player } \mathrm{II} \textit{ in}$$
$$\textit{the game } \mathsf{G}^{\beta}_{\theta}(A^{\mathcal{H}^{\bar{\mathcal{U}}}}, B^{\mathcal{H}^{\bar{\mathcal{U}}}})\text{”}.$$

下面我们固定一些低于 $e_{0,\omega}(\kappa)$ 的参数 β和 θ，以便考虑在 $\mathrm{H}^{\bar{}}{}_{\mathcal{U}}$ 中计算的博弈 $\mathsf{G}^{\beta}_{\theta}(A^{\mathcal{H}^{\bar{}}{}_{\mathcal{U}}}, B^{\mathcal{H}^{\bar{}}{}_{\mathcal{U}}})$。

令 $\beta := e_{1,\omega}(\kappa)$，并对每个 n，记

$$\beta_n := e_{n+2,\omega}(\kappa).$$

序列 $(\beta_n)_n$ 是 $\mathrm{H}^{\bar{\mathcal{U}}}$ 中低于 β 的一个递降序列，其元素为序数。

对于每个 n，记作

$$\bar{X}_n := e_{n+1,\omega}(X_n).$$

根据构造，集合 $(\bar{X}_n)_n$ 覆盖模型 $\mathrm{A}^{\bar{}}{}_{\mathcal{U}}$和 $\mathrm{B}^{\bar{}}{}_{\mathcal{U}}$的定义域。令

$$\theta := \max\{|\bar{X}_n|^{\mathcal{H}^{\bar{\mathcal{U}}}}, \beta\}.$$

β和 θ都小于$e_{0,\,\omega}(\kappa)$，并且每个 $\bar{X}_n$在 $H^{\bar{}}_{\mathcal{U}}$中的大小为 $\leqslant\theta$。

接下来，我们描述玩家 I 在博弈 $G^{\beta}_{\theta}(A^{\bar{}}_{\mathcal{U}},\ B^{\bar{}}_{\mathcal{U}})$ 中的一次对局：

● 在第 $(2n+1)$ 步，他选择序数 β_{2n+1} 和集合 $A^{\bar{}}_{\mathcal{U}}\cap\bar{X}_{2n+1}$。● 在第 $(2n+2)$ 步，他选择序数 β_{2n+2} 和集合 $B^{\bar{}}_{\mathcal{U}}\cap\bar{X}_{2n+2}$。

这次对局的每个有限初始段都是模型 $H^{\bar{}}_{\mathcal{U}}$ 中的一个元素。因此，玩家 II 必须能够应对这次对局并获胜；否则，就会存在玩家 I 的某次有限对局，使玩家 II 落败，这将与模型 $H^{\bar{}}_{\mathcal{U}}$ 中玩家 II 在博弈 $G^{\beta}_{\theta}(A^{\mathcal{H}^{\bar{}}_{\mathcal{U}}}\ B^{\mathcal{H}^{\bar{}}_{\mathcal{U}}})$ 中拥有获胜策略这一事实相矛盾。

因此她能够获胜，并且最终，经过 ω 多步之后，她将构造出一条部分同构链 $(\pi_n)_n$，满足

$$\bigcup_n \pi_n : A^{\mathcal{H}^{\bar{\mathcal{U}}}} \cong B^{\mathcal{H}^{\bar{\mathcal{U}}}}.$$

这就完成了断言的证明。

□

(2)⇒(1)：假设 $\mathcal{U}=(\mathcal{U}_n)_n$ 是 κ-完备超滤子，且每个 $\mathcal{U}_n$ 都定义在某个集合 I_n 上，并且 $A^{\bar{}}_{\mathcal{U}}\cong B^{\bar{}}_{\mathcal{U}}$。我们证明 $\mathcal{A}\equiv_{\mathcal{L}^1_\kappa}\mathcal{B}$。

记

$$\begin{cases}\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}\\ \mathcal{A}_{n+1} := \mathcal{A}_n^{\mathcal{U}_n}\end{cases}$$

and

$$\begin{cases}\mathcal{B}_0 := \mathcal{B}\\ \mathcal{B}_{n+1} := \mathcal{B}_n^{\mathcal{U}_n}.\end{cases}$$

不失一般性，我们可以将每个 $\mathcal{A}_n$ 与其在嵌入到直极限后的像等同，从而对每个 n,

$$\mathcal{A}_n \preccurlyeq_{\mathcal{L}_{\kappa\kappa}} \mathcal{A}_{n+1} \quad \text{and} \quad \mathcal{A}^{\bar{\mathcal{U}}} \cong \bigcup_n \mathcal{A}_n.$$

模型 $\mathcal{B}_n$ 也同样如此。因此，链 $(\mathcal{A}_n)_n$ 和 $(\mathcal{B}_n)_n$ 是 $L_{\kappa\kappa}$-初等的，并且根据并引理 1.1,

$$\mathcal{A}\equiv_{\mathcal{L}^1_\kappa}\mathcal{A}^{\bar{\mathcal{U}}}\cong\mathcal{B}^{\bar{\mathcal{U}}}\equiv_{\mathcal{L}^1_\kappa}\mathcal{B}.$$

这表明确实有 $\mathcal{A}\equiv_{\mathcal{L}^1_\kappa}\mathcal{B}$，正如所需。 □

参考文献

[1] J. Barwise 和 S. Feferman。模型论逻辑。剑桥大学出版社，1985年。[2] Akihiro Kanamori。《更高无穷：集合论中的大基数及其起源》。施普林格科学与商业媒体，2008年。[3] Saharon Shelah。良好的无穷逻辑。美国数学会会刊，25(2):395– 427，2012年。

[4] Saharon Shelah。无穷逻辑的同构极限超幂。《以色列数学杂志》，246(1):21–46，2021年。

(S. Kivim¨aki) 数学与统计学系，赫尔辛基大学，芬兰电子邮箱： siiri.kivimaki@helsinki.fi
(B. Veli˘ckovi´c)Jussieu-Paris Rive Gauche 数学研究所 (IMJ-PRG)，巴黎西岱大学，Sophie Germain 大楼，8 Place Aur´elie Nemours，75013 巴黎，法国电子邮箱：
boban@math.univ-paris-diderot.fr网址： http://www.logique.jussieu.fr/˜boban/