arXiv:2303.10764v1 [math.CV] 19 Mar 2023

具有许多代数结构的复曲面

Anna Abasheva，Rodion D´eev

摘要

我们发现了新的例子：某些复曲面具有可数多个彼此不同构的代数结构。以下是一个这样的例子：取椭圆曲线 E in $\mathbb{P}^2$，并在 E 上选取九个一般位置的点进行爆破。那么，爆破后 M 去掉 E 的严格变换所得的补集具有可数多个代数结构。此外，每个代数结构都来自将 M 嵌入 $\mathbb{P}^2$ 在椭圆曲线 $F \not\simeq E$ 上九个点处的爆破中。我们利用 Hopf 变换对 M 上的代数结构进行分类：这种变换通过挖去一条椭圆曲线并粘贴上另一条椭圆曲线来构造新的曲面。接下来，我们引入簇的解析 K 理论这一概念。对上述例子的处理使我们证明，在这一 K 理论中，所有椭圆曲线的类都相同。换句话说，在双全纯簇上取值相同的复代数簇上的所有动机测度，都无法区分椭圆曲线。

目录

1 引言 **2**

2 Hopf 变换 **4**

2.1 解析紧化.4 2.2 霍普夫曲面.4 2.3 次级霍普夫曲面.8 2.4 Hopf 对偶与解析配边.8 2.5 Hopf 变换.10

3 含自交数为零的椭圆曲线的曲面 13

3.1 Kodaira 维数.13 3.2 有理曲面.14 3.3 VII 类曲面.15

4 解析 Grothendieck 群 **16**

1 引言

紧致复解析簇 X^{an} 至多具有一种代数结构；也就是说，至多存在一个满足 $Y^{an} \cong X^{an}$ 的代数簇 Y。然而，在非紧情形下并非如此。我们没有一般性的方法来描述非紧复解析簇上的代数结构集合。现有结果表明，一个簇可以具有无穷多种代数结构。我们简要回顾二维情形中的例子。

- 设 C 是一条正亏格仿射曲线。那么 $C^{an} \times \mathbb{C}$ 具有不可数多个两两不同构的仿射结构 [Jel15]。事实上， C 上的每个线丛在解析意义下都是平凡的，因此其全空间与 $C^{an} \times \mathbb{C}$ 双全纯。

- 曲面 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 与任意椭圆曲线 [上唯一的非平凡秩一零度仿射丛双全纯 12]Nee89, Thm. 6.12]。因此，它具有不可数多个两两不同构的代数结构。

- 设 C 是一条光滑射影曲线，且 $p\colon X \to C$ 是一个代数椭圆曲面。取一个光滑纤维 $E = p^{-1}(x)$。对于每个 $n > 0$，我们都可以找到一个椭圆纤维化 $p_n\colon X_n \to C$，称为对 p 的对数变换；它在 x 上方有一个重数为 n 的纤维，并且与 $C - \{x\}$ 上方的 p 双全纯。除非满足 $X \simeq E \times C$ [FM13, Ch. I, Thm. 6.12]，否则新曲面 X_n 都是代数的。因此，曲面 $X - E$ 至少具有可数多个代数结构。

- 我们可以利用 Shafarevich–Tate 扭曲，在前一个例子中的曲面 $X - E$ 上构造更多代数结构。更多细节请参阅 [FM13, Ch. I, Sections 1.5.1, 1.5.3] 。

我们用下面这个精彩的例子来补充这份列表。

定理 A（定理 3.2.6，推论 3.2.3）。1. 在 $\mathbb{P}^2$ 中选取九个处于充分一般位置的点。令 X 为在这些点处对 $\mathbb{P}^2$ 作爆破所得的曲面，令 E 为经过这些点的唯一椭圆曲线的严格变换。那么， X 中 E 的补集具有可数多个代数结构。

2. 更一般地，设 X 是一张包含平方零椭圆曲线 E 的紧有理曲面。假设 X 中 E 的法丛处于充分一般位置。那么，曲面 $X - E$ 具有可数多个代数结构。

此外，在情形 1 中， $X - E$ 上的每一种代数结构都来自于到某个由其他九个点处爆破 $\mathbb{P}^2$ 得到的曲面 Y 中的全纯嵌入。 Y 中 $X - E$ 的补集是一条椭圆曲线 F，令人惊讶的是，它与 E 不同构，甚至不同源。在代数几何范畴中，这种情况只有奇异曲线才可能出现（[BPvS23] 及其中的参考文献）。事实上，若 S 和 S' 是分别包含光滑曲线 C 和 C' 的光滑代数曲面，那么 $S - C$ 与 $S' - C'$ 之间的代数同构蕴含 C 与 C' 同构。

我们在定理 A 中的构造与上述列表中的构造有根本不同。我们开发了一种方法，可以从含有一条

自交数为零的椭圆曲线的曲面中制造出新的曲面，我们称之为 Hopf 变换（定义 2.5.6）。它在非椭圆曲面的情形下，是对数变换的对应形式。

我们可以将霍普夫变换概括如下：在曲面上取一条椭圆曲线，将其切除，再粘贴上另一条椭圆曲线。得益于 Arnold 和 Ueda 的一个定理（定理 2.5.3），其法丛 L 足够一般的自交数为零的椭圆曲线 $E \subset S$ 具有全纯管状邻域。也就是说， S 沿着 E局部双全纯于全空间 Tot(L)。我们将在定义 2.5.2 中阐明 “ 足够一般 ” 的含义；目前只需指出，所有 “ 足够一般 ” 的线丛都是非挠的。利用霍普夫曲面，即形如 $\mathbb{C}^2 - \{0\}/\operatorname{diag}(\lambda, \mu)$的非 K¨ahler 曲面及其有限商，我们证明，对于不同的椭圆曲线 F，存在可数多个零度线丛 $L' \to F$，使得 Tot(L)$^{an} - E \cong$ Tot(L')$^{an} - F$。我们称这样的线丛 L 和L' 解析协边（定义 2.4.2）。霍普夫变换可解释为将曲面与适当的霍普夫曲面粘合，它将椭圆曲线 $E \subset S$替换为 F。此外，我们可以从 F的可数多个候选项中自由选择。我们将这一手术应用于 $\mathbb{P}^2$ 上九个点的爆破，并证明所得曲面仍是沿其他九个点对$\mathbb{P}^2$ 进行的爆破。由此得到定理 3.2.6。

我们的 Hopf 变换概念受到 Koike 和 Uehara 在[KU19]中的构造启发。他们运用上文提到的 Arnold 和 Ueda 定理，将两个不同的 $\mathbb{P}^2$ 九点爆破所得曲面的开子集粘合起来，构造出一个 K3 曲面。

我们应用定理 A 研究 K_0^{an}簇的解析格罗滕迪克群（定义 4.1.2）。它是复代数簇[1] 的 Grothendieck 群 $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ 对形如以下关系施加额外关系后得到的商

$$[X] = [Y] \quad \text{if} \quad X^{an} \simeq Y^{an}.$$

尽管 $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$已受到相当多的关注（参见 [Bit04、KT19、NS19]等众多文献），但据我们所知， K_0^{an}这一概念是新的。如下文定理所示，群 K_0^{an}与其代数对应物截然不同。

定理 B（定理 4.1.3）。所有椭圆曲线在 K_0^{an}中都有相同的类。

相比之下，非同构曲线在 $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$中有不同的类 4.1.4。

本文结构如下。第 2 节证明，椭圆曲线上的非挠零度线丛的全空间有可数多个由不同椭圆曲线给出的紧化（定理 2.3.2）。随后，我们介绍 Hopf 对偶和解析配边的概念（定义 2.4.2），并给出 Hopf 变换的定义（定义 2.5.6）。第 3 节对适用 Hopf 变换的曲面进行部分分类，也就是说，对具有自交数为零且法丛非挠的椭圆曲线的曲面进行部分分类。基于这一分类，我们证明本文的主要结果——定理 A。最后，第 4 节介绍解析格罗滕迪克群并证明定理 B。在文末，我们针对解析格罗滕迪克群提出若干引人深思的问题。

[1] $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ 是由 $\mathbb{C}$ 上代数簇的类生成的阿贝尔群，并对切割关系取商：$[X] - [Y] = [X - Y]$，其中 Y 是 X 的闭子簇。

2 霍普夫变换

2.1 解析紧化

定义 2.1.1. 设 M 是一个非紧复曲面。由光滑紧复曲面 S 和（可能奇异的）曲线 $C \subset S$ 组成的有序对 (S, C) 称为 M 的解析紧化，或简称紧化，如果 $S - C$ 与 M 双全纯。若 C 的支撑中的曲线均非例外曲线，则称该紧化为极小紧化。

以下分类定理归功于 Enoki [Eno82，定理 C-I$_0$]。

定理 2.1.2. 设 Tot(L) 是椭圆曲线 E 上一个零度线丛 L 的全空间。那么 M 的每个极小紧化 (S, C) 都具有以下形式：

1. $S \cong \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$ 是椭圆曲线上的 $\mathbb{P}^1$-丛； C 是其截面，且 $(C)^2 = 0$。
2. S 是一个霍普夫曲面（定义 2.2.1），而 C 是一条椭圆曲线。

如果 L 是非挠的，那么使全空间 Tot(L) 紧化的 Hopf 曲面构成可数集，这一点我们将在定理 2.3.2 中看到。目前请注意，所有这类紧化都至少包含两条椭圆曲线。

2.2 霍普夫曲面

定义 2.2.1. [Kod66，第 10] 节。霍普夫曲面是万有覆盖为 $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ 的紧复曲面。若一个霍普夫曲面的基本群为 $\mathbb{Z}$，则称其为初级；否则称为次级。

2.2.2. 所有霍普夫曲面都不是 K¨ahler。根据 [Kod66，第 10 节，第 695] 页，每个初级霍普夫曲面 X 都双全纯于一个商 $\mathbb{C}^2 - \{0\}/\Gamma$，其中 Γ 或为线性对角算子，或具有以下形式：

$$\Gamma(x, y) = (\alpha^n x + y^n, \alpha y).$$

在第二种情形下，霍普夫曲面只有一条不可约曲线： x 轴的像。因此，这类曲面不能作为全空间 Tot(L) 的紧化。

2.2.3. 现在研究 $\Gamma = \mathrm{diag}(\lambda, \mu)$ 的情形。要使 $\mathbb{C}^2 - \{0\}/\Gamma$ 紧致，特征值的绝对值必须同时大于 1 或同时小于 1。如有必要，将 Γ 替换为 Γ^{-1} 后，我们可以假设后一种情况成立。

定义 2.2.4. 对角Hopf曲面是指 $\mathbb{C}^2 - \{0\}/\mathrm{diag}(\lambda, \mu)$，其中 $|\lambda| < 1$, $|\mu| < 1$。我们将其记为 $H(\lambda, \mu)$

2.2.5. 可以证明，两个霍普夫曲面 $H(\lambda, \mu)$ 和 $H(\lambda', \mu')$ 同构，当且仅当 $\lambda = \lambda'$ 和 $\mu = \mu'$（相差一个置换）。 $H(\lambda, \mu)$ 的所有自同构都由 $\mathbb{C}^2$ 的线性对角自同构诱导。

2.2.6. 若 $\lambda^n = \mu^m$，其中 n 和 m 是非零整数，则 $H(\lambda,\mu)$ 是一个椭圆曲面，其纤维光滑但可能非约化 [BHPVdV15, 第 V 章，命题 18.2]。X 中的所有椭圆曲线都是纤维，因此其法丛是挠的。这样的曲面不能是非挠线丛 L 的全空间 L 的紧化。

当 $\lambda^n \neq \mu^m$ 为任意一对非零整数时，曲面 $H(\lambda,\mu)$ 恰好包含两条不可约曲线 [BHPVdV15, Ch. V, Prop. 18.2]。它们是坐标轴在商映射下的像，并且同构于 $E_\lambda := \mathbb{C}^*/\lambda$ 和 $E_\mu := \mathbb{C}^*/\mu$。它们的自交数均为零。

$H(\lambda,\mu)$ 中 E_μ 的补集为 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}/\operatorname{diag}(\lambda,\mu)$。它是一个在线丛 E_λ 上的全空间，而到 E_λ 的映射是向第一坐标的投影。

2.2.7. 每条椭圆曲线都可以写成 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$，其中 $\operatorname{Im}(\tau) > 0$。参数 τ 在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-作用下定义到模。映射 $x \mapsto e^{2\pi i x}$ 诱导一个同构

$$\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^*/q^\tau.$$

这里我们用简写 q^τ 表示 $e^{2\pi i\tau}$。每个定义在 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$ 上的零度线丛的全空间都具有如下形式

$$\mathrm{L}(\tau,A,B) = \mathbb{C}^2/\sim: \quad (x,y)\sim(x+1,Ay);\ (x,y)\sim(x+\tau,By), \tag{1}$$

其中 $A, B \in U(1)$。一旦固定 τ，这些数便唯一确定。类似地，$E_\lambda = \mathbb{C}^*/\lambda$ 上的零度线丛的全空间可写为

$$\mathcal{L}(\lambda,\mu) = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}/\operatorname{diag}(\lambda,\mu), \tag{2}$$

其中 $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$。

2.2.8. $\mathcal{L}(\lambda,\mu)$ 在 $\mathrm{Pic}^0(E_\lambda) \simeq E_\lambda$ 中的类为 μ (模 $\lambda^{\mathbb{Z}}$) [Kod66，第 10 节，第 696] 页。特别地，线丛 $\mathcal{L}(\lambda,\mu)$ 与 $\mathcal{L}(\lambda,\mu')$ 同构，当且仅当 $\mu' = \mu\lambda^n$。

2.2.9. 椭圆曲线上的线丛可表示为 $\mathrm{L}(\tau,A,B)$ 或 $\mathcal{L}(\lambda,\mu)$。下面来看看如何在这两种描述之间转换。记 $A = q^u$ 为一个数 $u \in \mathbb{R}$。于是我们有一个线丛的线性同构

$$\alpha_{\tau,u,B}\colon \mathrm{L}(\tau,q^u,B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(q^\tau, q^{-u\tau}B)$$

由.....给出

$$\alpha_{\tau,u,B}(x,y) = (q^x, q^{-ux}y). \tag{3}$$

注意，如果将 u 选为负数，则 $|q^\tau| < 1$ 和 $|q^{-u\tau}B| < 1$。给定一个线丛 $\mathcal{L}(q^\tau,\mu)$，我们可以找到相应的 u 和 B。事实上，设 $\mu = q^\sigma$ 和 $B = q^v$。方程

$$\sigma = u\tau + v$$

由于 u 和 v 是实数，因此可以唯一确定 u 和 v。对 σ 的不同选择不会改变 $B = q^v$。

2.2.10. 同构 (3) 仅取决于对 τ 和 u 的选择，且满足 $q^u = A$。让我们看看改变 τ 后会发生什么。存在线丛之间的线性同构

$$\beta_\Gamma \colon \mathrm{L}(\tau, q^u, q^v) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}\left(\frac{k\tau+l}{m\tau+n}, q^{mv+nu}, q^{kv+lu}\right)$$

对于 $\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$。映射 (3) 将 $\mathrm{L}(\tau, q^u, q^v)$ 与 $\mathcal{L}(\lambda', \mu')$ 等同，其中

$$\lambda' = q^{\frac{k\tau+l}{m\tau+n}},$$
$$\mu' = q^{-(mv+nu+r)\frac{k\tau+l}{m\tau+n}+kv+lu},$$

以及 $r \in \mathbb{Z}$。利用 $nk - ml = 1$，我们可以将 μ' 中的指数改写为

$$-(mv+nu+r)\frac{k\tau+l}{m\tau+n} + kv + lu = \frac{v - u\tau + r(k\tau+l)}{m\tau+n}.$$

$H(\lambda', \mu')$ 中全空间 $\mathrm{Tot}(L)$ 的补集内的椭圆曲线为

$$E_{\mu'} \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \left(\frac{v - u\tau + r(k\tau+l)}{m\tau+n}\right)$$

若 L 是一般的，则 $\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$ 和 r 的不同选择会得到不同的椭圆曲线 $E_{\mu'}$。

2.2.11. 考虑曲线 $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ 上的平移 $t_s \colon x \mapsto x + s$。线丛 $\mathrm{L}(\tau, A, B)$ 的度为零，因此它与沿该平移的拉回同构。这个同构可以显式写为

$$t_s^* \colon \mathrm{L}(\tau, A, B) \to \mathrm{L}(\tau, A, B)$$
$$(x, y) \mapsto (x + s, y).$$

如 2.2.9 中所示，将 $\mathrm{L}(\tau, A, B)$ 写成 $\mathcal{L}(q^\tau, q^{-u\tau}B)$ 时，该平移变为映射

$$t_s^* \colon \mathcal{L}(q^\tau, q^{-u\tau}B) \to \mathcal{L}(q^\tau, q^{-u\tau}B)$$
$$(x, y) \mapsto (q^s, q^{-us}).$$

此映射可延拓为霍普夫曲面 $H(q^\tau, q^{-u\tau}B$ 上的自同构 $\mathrm{diag}(q^s, q^{-us})$).

2.2.12. 考虑将 x 映至 $-x$ 的 E 上的自同构 f。线丛 $f^*\mathrm{L}(\tau, A, B)$ 与 $\mathrm{L}(\tau, A^{-1}, B^{-1})$ 同构。一般而言，固定 0 的 E 上的自同构 f 诱导出一个线性双全纯映射

$$f^* \colon \mathrm{L}(\tau, A, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}(\tau, A'', B''),$$

其中这对数 (A'', B'') 不一定与 (A, B) 相同。

2.2.13. 作为线丛， $\mathcal{L}(\lambda,\mu)$ 的每个自同构都是由常数 c 给出的纤维逐点乘法。它延拓为霍普夫曲面 $H(\lambda,\mu)$ 的自同构 $\mathrm{diag}(1,c)$。

命题 2.2.14. 设 L 是椭圆曲线 E 上的零度非挠线丛。那么，映入主霍普夫曲面的 $\mathrm{Tot}(L)\xrightarrow{\iota} H$ 的开嵌入的等价类集合是可数的。这里，若存在 $\mathrm{Tot}(L)$ 的自同构 g 和双全纯映射 $h\colon H\to H'$，使下图可交换，则称两个嵌入 $\iota\colon \mathrm{Tot}(L)\to H$ 和 $\iota'\colon \mathrm{Tot}(L)\to H'$ 等价：

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Tot}(L) & \xhookrightarrow{\iota} & H\\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h}\\ \mathrm{Tot}(L) & \xhookrightarrow{\iota'} & H'\end{array}$$

证明：设 $E=X/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$ 和 L 满足 $\mathrm{Tot}(L)=\mathrm{L}(\tau,A,B)$。考虑一个开嵌入 $\iota\colon \mathrm{L}(\tau,A,V)\to H$。由 2.2.2 和 2.2.6 可知，曲面 H 必须具有$H(\lambda,\mu)$ 的形式，而 $\mathrm{L}(\tau,A,B)$ 被映到 $H(\lambda,\mu)-E_\mu\simeq\mathcal{L}(\lambda,\mu)$ 上。我们在 2.2.9 中看到，存在一个双全纯映射

$$\alpha_{\tau',u',B'}\colon \mathrm{L}(\tau',A',B')\xrightarrow{\sim}\mathcal{L}(\lambda,\mu)$$

对于某个 $\tau'\in\mathbb{C}$，使得 $\mathrm{Im}\ \tau'>0$，且 $A',B'\in U(1)$。

椭圆曲线 $E=\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$ 和 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau'$ 必须同构，因此，对于矩阵 $\Gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$，有 $\tau=\Gamma\cdot\tau'$。特别地，可能的 τ' 集合是可数的。对于某些 $A'',B''\in U(1)$，线丛 $\mathrm{L}(\tau',A',B')$ 与 $\mathrm{L}(\tau,A'',B'')$ 线性同构（2.2.10）。因此，嵌入 $\mathrm{L}(\tau,A,B)\xrightarrow{\iota}H(\lambda,\mu)$ 是以下映射的复合：

$$\mathrm{L}(\tau,A,B)\xrightarrow{\varphi}\mathrm{L}(\tau,A'',B'')\xrightarrow{\beta_\Gamma}\mathrm{L}(\tau,A',B')\xrightarrow{\alpha_{\tau',u',B'}}\mathcal{L}(\lambda,\mu)\hookrightarrow H(\lambda,\mu),$$

其中，$\mathrm{L}(\tau,A,B)\xrightarrow{\varphi}\mathrm{L}(\tau,A'',B'')$ 是某个双全纯映射。

接下来需要对 $\mathrm{L}(\tau,A,B)\xrightarrow{\varphi}\mathrm{L}(\tau,A'',B'')$ 的双全纯映射按等价关系进行分类。令 f 为 φ 在零截面 $E\subset\mathrm{L}(\tau,A,B)$ 上的限制。它是一个平移与一个保零自同构的复合。相差一个平移的两个双全纯映射 $\mathrm{L}(\tau,A,B)\to\mathrm{L}(\tau,A'',B'')$ 是等价的，因为平移可扩张为 $H(\lambda,\mu)$ 的一个自同构（2.2.11）。因此，我们不妨假设 $f\colon E\to E$ 保零。我们有一个线丛同构 $\mathrm{L}(\tau,A,B)\simeq f^*\mathrm{L}(\tau,A'',B'')$，如 2.2.12 所示。固定零点的自同构只有有限多个，因此，使得 $\mathrm{L}(\tau,A,B)$ 与 $\mathrm{L}(\tau,A'',B'')$ 同构的有序对 (A'',B'') 也只有有限多个。由此可知，每个嵌入 $\mathrm{L}(\tau,A,B)\xrightarrow{\iota}H(\lambda,\mu)$ 都等价于以下复合：

$$L(\tau,A,B)\xrightarrow{\psi}\mathrm{L}(\tau,A,B)\xrightarrow{f^*}\mathrm{L}(\tau,A'',B'')\xrightarrow{\beta_\Gamma}\mathrm{L}(\tau,A',B')\xrightarrow{\alpha_{\tau',u',B'}}H(\lambda,\mu),$$

其中，ψ是 $\mathrm{L}(\tau,A,B)$ 的一个双全纯映射，且在 E 上恒等。我们稍后将在引理 2.5.9 中看到，每个这样的双全纯映射都是乘以一个常数。根据 2.2.13，它可延拓为 $H(\lambda,\mu)$ 的一个自同构。因此，每个嵌入都等价于态射的复合

$$\mathrm{L}(\tau, A, B) \xrightarrow{f^*} \mathrm{L}(\tau, A'', B'') \xrightarrow{\beta_\Gamma} \mathrm{L}(\tau, A', B') \overset{\alpha_{\tau', u', B'}}{\hookrightarrow} H(\lambda, \mu)$$

这样的嵌入只取决于以下选择：一个使零点不变的自同构 $f\colon E \to E$（有限种选择）、$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-轨道中的 τ'（可数种选择），以及满足 $A' = q^{u'}$ 的 $u' < 0$（可数种选择）。我们的断言由此得证。 □

2.3 次级霍普夫曲面

2.3.1. 我们刚刚对作为全空间 L 的紧化而出现的初级霍普夫曲面进行了分类。本小节将重点讨论作为次级霍普夫曲面紧化的情形。每个次级霍普夫曲面都是某个初级霍普夫曲面对有限群 [的自由作用所得的商（Kod66，第 10 节，第 695] 页）。假设 S 是一个包含椭圆曲线且其法丛非挠的次级霍普夫曲面。那么 S 是对角 Hopf 曲面 $H(\lambda, \mu)$ 对算子 $\mathrm{diag}(q^{1/n}, q^{r/n})$ 取商所得，其中 $q^{1/n}$ 和 $q^{r/n}$ 是本原 n 次单位根（Kod66，第 10 节，定理 32]）。

定理 2.3.2. 设 L 是椭圆曲线 E 上的零度非挠线丛。那么，全空间 $\mathrm{Tot}(L)$ 到霍普夫曲面（初级或次级）中的开嵌入 $\mathrm{Tot}(L) \xrightarrow{\iota} H$ 的等价类集合是可数的。

证明：对于嵌入到初级霍普夫曲面中的情形，我们已知该结论（命题 2.2.14），因此只需假设 H 是一个次级霍普夫曲面。根据 2.3.1，将 $\mathrm{Tot}(L)$紧化的每个次级霍普夫曲面都必须具有形式 $H/\mathrm{diag}(q^{1/n}, q^{r/n})$，其中 $(r, n) = 1$，而 H是一个对角Hopf曲面。给定 $\mathrm{Tot}(L)$ 到 $H/\mathrm{diag}(q^{1/n}, q^{r/n})$ 的一个嵌入，我们可以构造 $\mathrm{Tot}(f^*L)$ 到 H 的一个嵌入，其中 $f\colon E' \to E$ 是 E'的一个由n-挠元素取商得到的商。可能的 f 集合是可数的，而 $\mathrm{Tot}(f^*L)$ 到初级霍普夫曲面的嵌入的等价类集合也是可数的，因此结论成立。 □

2.4 霍普夫对偶与解析配边

2.4.1. 设 $L \to E$ 是一个非平凡零度线丛。有理曲面 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_E \oplus L)$包含两个截面： $\mathbb{P}(\mathcal{O})$ 和 $\mathbb{P}(L)$。映射 $\mathrm{Tot}(L) \to \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$，$v \mapsto [1 : v]$ 在 $\mathrm{Tot}(L)$ 与 $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L) - \mathbb{P}(L)$ 之间定义了一个双全纯映射。同理， $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L) - \mathbb{P}(\mathcal{O})$ 与 $\mathrm{Tot}(L^{-1})$ 双全纯。因此，曲面 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_E \oplus L)$ 是对偶线丛全空间的一个紧化：$\mathrm{Tot}(L)$ 和 $\mathrm{Tot}(L^{-1})$。对角初级霍普夫曲面的类似性质启发了以下定义。

定义 2.4.2. 设 $L \to E$ 和 $L' \to E'$ 是椭圆曲线上的两个零次线丛。若它们被称为

- 霍普夫对偶，如果存在一个霍普夫曲面 H，其上有两条椭圆曲线 E_λ 和 E_μ，使得 $H - E_\mu \simeq$ 全空间(L) 和 $H - E_\lambda \simeq$ 全空间(L');
- 解析协边，如果 $L^{-1} \to E$ 和 $L' \to E'$ 要么是霍普夫对偶，要么是 $E = E'$和 $L = L'$。

根据命题 2.2.14，任意非挠线丛都存在可数多个与之 Hopf 对偶且解析协边的线丛。解析协边线丛的基曲线通常不同构 (2.2.10)。

2.4.3. 设 $L \to E$和 $L' \to E'$是 Hopf 对偶线丛。则全空间 Tot(L)-0_L和全空间 Tot(L') $-0_{L'}$双全纯，其中 $0_\Xi \subset$ Tot(Ξ)表示零截面。事实上，这两个空间都与 $H(\lambda,\mu) - (E_\lambda \cup E_\mu)$双全纯。该双全纯映射将一个空间中零截面的邻域映到另一个空间中无穷远截面的邻域，反之亦然。同样，设 $L \to E$ 和 $L' \to E'$ 是解析协边线丛。则全空间 Tot(L)-0_L和全空间 Tot(L')$-0_{L'}$双全纯，且其中一个空间中零截面的邻域映到另一个空间中零截面的邻域。

2.4.4. 当然，如果 $E \ncong E'$，双全纯映射 Tot(L) $- 0_L \simeq$ Tot(L') $- 0_{L'}$ 无法延拓到零截面。为了深入理解这一点，让我们考察在该双全纯映射下线丛纤维的行为。设 $H = H(\lambda,\mu)$ 为一个霍普夫曲面。$H - E_\mu = \mathcal{L}(\lambda,\mu) \to E_\lambda$ 的纤维是垂直直线。将 $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ 投影到 $H(\mu,\lambda)$ 时，我们将垂直直线 $x = c, x = ac, x = a^2c$ 等识别起来。因此， $H(\mu,\lambda)$ 中一条垂直直线的像是一个非闭的角状子空间，其闭包包含曲线 E_μ。

命题 2.4.5. 设 $L \to E$ 和 $L' \to E'$ 是椭圆曲线上的两个线丛。那么

1. L 和 L' 是霍普夫对偶，当且仅当存在一个双全纯映射 Tot(L) $- 0_L$ 与 Tot(L') $- 0_{L'}$，将 0_L 的一个邻域映到 Tot(L')中无穷远点的一个邻域。
2. L 和 L' 是解析协边的，当且仅当存在一个双全纯映射 Tot(L)-0_L与 Tot(L') $- 0_{L'}$，将 0_L 的一个邻域映到 $0_{L'}$ 的一个邻域。

证明：第二个陈述由第一个陈述立即推出，因此我们只证明第一个陈述。我们在 (2.4.3) 中看到，霍普夫对偶线丛满足定理的条件。反过来，假设存在一个如命题所述的双全纯映射 Tot(L) $- 0_L$ 与 Tot(L') $- 0_{L'}$。我们用这个同构粘合 Tot(L) 和 Tot(L')。所得结果是一个紧 Hausdorff 曲面，它是 Tot(L) 的紧化。根据 Enoki 定理，它要么是一个几何有理曲面，要么是一个霍普夫曲面，因此结论成立。 □

2.4.6. 根据命题 2.4.5，解析配边是集合中二元组 (E, L) 上的等价关系，其中 E 是一条椭圆曲线， L 是 E 上的一个线丛。然而，如果 L 和 L' 通过初级霍普夫曲面解析协边，且 L'' 也如此，那么 L' 和 L'' 可以通过一个次级霍普夫曲面解析协边。

2.4.7. 曲面 $M =$Tot(L) 带有一个全纯辛形式 σ，它在零截面处有一阶极点。事实上，

$$K_M = \pi^* K_E \otimes K_{M/E} = K_{M/E} = \pi^* L^*.$$

第二个同构成立，是因为 K_E 是平凡的。拉回 $\pi^* L$ 带有典范截面，该截面在 0_L 上消失；因此 $K_M = \pi^* L^*$ 带有一个处处非零截面，它沿着 0_L 有一阶极点。

2.4.8. 考虑非挠的解析协边线丛 L 和 L'。令 σ 和 σ'分别为 Tot(L) $- 0_L$ 和 Tot(L') $- 0_{L'}$ 上的全纯辛形式。在全纯同构 f: Tot(L) $- 0_L \to$ Tot(L') $- 0_{L'}$ 下， σ'的拉回等于 $c\sigma$，其中 c是非零常数。事实上， $f^*\sigma' = g\sigma$，其中 g 是 Tot(L) $- 0_L$上的全纯函数。根据 KU19 的引理 2.2], , Tot(L) $- 0_L$ 上的所有全纯函数都是常数。

2.5 Hopf 变换

2.5.1. 复子流形的管状邻域一般并不双全纯于其法丛零截面的某个邻域。例如，光滑三次曲线 $C \subset \mathbb{P}^2$可以变形为一条不同构的曲线，而 Tot($\nu_{C/\mathbb{P}^2}$)的零截面的所有变形都同构于 C。因此， C 在 $\mathbb{P}^2$ 中的邻域与其在 Tot($\nu_{C/\mathbb{P}^2}$)中的邻域不可能双全纯。然而，在某些情形下，已知管状邻域定理的类似结果。

定义 2.5.2. 设 $L \to E$ 是椭圆曲线上的一个零度线丛， d 是皮卡变种 Pic^0(E) 上的一个平移不变度量。假设

$$-\log d(\mathcal{O}_E, L^{\otimes n}) = O(\log n).$$

则称 L 为丢番图的。

丢番图性质与度量 d的选择无关。 E 上丢番图线丛的集合是 Pic^0(E) 中一个零测集的补集。

定理 2.5.3（阿诺德–上田定理 [Arn76, 4.3] [Ued82, 定理 3]）。设 S 是一个复曲面， $E \subset S$ 是一条椭圆曲线。若法丛 $\nu_{E/S}$ 是非挠且零度的，则 E 在 S 中的形式邻域与其在全空间 Tot($\nu_{E/S}$) 中的形式邻域同构。若 $\nu_{E/S}$ 是丢番图的，则此同构可扩张为 E 在 S 中的一个解析邻域与 E 在全空间 Tot($\nu_{E/S}$) 中的一个邻域之间的双全纯映射。

2.5.4. [Arn76, 4.3]中的显式描述表明，若 $L \to E$ 和 $L' \to E'$ 通过一个主霍普夫曲面解析协边，且 L 满足丢番图条件，那么 L'也满足丢番图条件。由此以及 2.3.1 可轻易得出，丢番图性质在任意解析协边下保持不变。

2.5.5. 阿诺德–上田定理在扭线丛的情形下不成立。一个反例是非等模椭圆纤维化的一个纤维 F。它的法丛全纯平凡，但其邻近曲线与 F不同构。

定义 2.5.6. 设 $E \subset S$ 是曲面 S 上的一条椭圆曲线， L 是它的法丛。假设 $\deg_E L = 0$ ，且 L 满足丢番图条件。设 $L' \to E'$ 是与 $L \to E$ 解析协边的线丛（定义 2.4.2）。按照定理 2.5.3，取 $E \subset S$的一个管状邻域，舍弃 E，并通过 Tot(L) $- 0_L$ 与 Tot(L') $- 0_{L'}$之间的全纯同构，将 $L' \to F$零截面的管状邻域粘合起来。所得曲面 S' 称为 S 在 E 中经 $L' \to E'$得到的 Hopf 变换。曲线 E' 在 Hopf 变换中的像称为嫁接曲线。

2.5.7. 新曲面 S' 可能不是代数曲面，甚至可能不是 K¨ahler 曲面，即使 S 是。例如，取 $S = \mathbb{P}(\mathcal{O}_E \oplus L)$，并将 E 嵌入为其中一个截面。于是 S' 是一个霍普夫曲面。

2.5.8. 根据定理 2.3.2，给定曲线中的给定曲面，其 Hopf 变换可以有可数多种互不同构的构造方式。尽管如此，Hopf 变换的结果只取决于所选择的解析协边线丛，而不取决于 E 在 S 中的邻域与在全空间(L)中的邻域之间的同构。证明依赖于下面的引理。

引理 2.5.9. 设 L 是椭圆曲线 E 上的非挠零度线丛。对于 $r>0$，用 W_r 表示 Tot(L) 中长度小于 r 的向量所组成的子集。考虑一个开嵌入 $j\colon W_r \to W_R$，它在 E 上恒等，其中 $r, R \in \mathbb{R}_{>0} \sqcup \infty$。那么 j 是由常数 $c \in \mathbb{C}^*$ 给出的纤维逐点乘法，使得 $|c| \leq R/r$。

证明：第一步。空间 W_r（分别为 W_R）同构于 $\mathbb{C}\times B_r/\Lambda$（分别为 $\mathbb{C}\times B_R/\Lambda$），其中 $\Lambda := \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\cdot\tau$ 的作用如下：

$$\gamma\cdot(x,y) = (x+\gamma, \rho(\gamma)y).$$

这里，B_r（分别为 B_R）是半径为 r（分别为 R）的开圆盘，而 $\rho\colon \Lambda \to U(1)$ 是单值化表示。根据万有覆盖的泛性质，我们可以将 j 提升为一个开嵌入 $J\colon \mathbb{C}\times B_r \to \mathbb{C}\times B_R$。映射 J 下降到商空间上，因此对每个 $\gamma\in\Lambda$，都存在 $\gamma'\in\Lambda$，使得 $J(\gamma\cdot(x,y)) = \gamma'\cdot J(x,y)$。当 $y=0$ 时，映射 J 是恒等映射，因此 $\gamma'=\gamma$。由此可知，J 是 Λ-等变的。

步骤 2。将 J写作 (f,g)，其中 $f\colon \mathbb{C}\times B_r\to\mathbb{C}$且 $g\colon \mathbb{C}\times B_r \to B_R$。我们将在这一步看到，对于某个常数 $c\in\mathbb{C}^*$，$g(x,y)=cy$。固定一个 $y\in B_r$，映射 g 是从 $\mathbb{C}$ 到 B_R的全纯函数，因此为常数。由此可得 $g=g(y)$。J的 Λ-等变性意味着 $g(\rho(\gamma)y) = \rho(\gamma)g(y)$。$\Lambda$ 在 $U(1)$ 中的像是稠密的，因为 L 是非挠的。因此，g 是 $U(1)$-等变的，我们的结论由此得证。

步骤 3。根据 J 的 Λ-等变性，我们有

$$f(x+\gamma,\rho(\gamma)y) = f(x,y)+\gamma. \tag{4}$$

将等式 (4) 关于 y求导 k 次。得到

$$\rho^k(\gamma)\frac{\partial^k f}{\partial y^k}(x+\gamma,\rho(\gamma)y) = \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(x,y)$$

令 $y=0$。函数 $\left|\frac{\partial^k f}{\partial y^k}(x,0)\right|$ 在按 $\gamma\in\Lambda$平移下保持不变，因此有界。由此可得 $\frac{\partial^k f}{\partial y^k}(x,0)$ 为常数。对每个 k，表示 ρ^k 都是非平凡的，因此 $\frac{\partial^k f}{\partial y^k}(x,0)$ 恒为零。由此可得 f不依赖于 y。因此，$f(x,y) = f(x,0) = x$。我们证明了 $J(x,y) = (x,cy)$，结论得证。

□

推论 2.5.10. 设 $E\subset S$ 如定义 2.5.6 所述。固定一个与 $L\to E$ 解析协边的线丛 L'（定义 2.4.2）。那么 S 在 E 中经 L' 得到的 Hopf 变换是良定义的。具体而言，考虑两个双全纯映射 $\varphi_1\colon U_1 \xrightarrow{\sim} W_1$ 和 $\varphi_2\colon U_2 \xrightarrow{\sim} W_2$，它们分别在 S 中 E 的邻域 U_1 与 U_2 之间，以及在 Tot(L) 中 E 的邻域 W_1 与 W_2 之间。假设 $\varphi_1|_E = \varphi_2|_E$。那么，通过 φ_1 和 φ_2 分别得到的 S 的 Hopf 变换 S_1 和 S_2 是双全纯的。

证明：若缩小 U_i，Hopf 变换 $S_i, i = 1, 2$ 不会改变。因此我们可以假设，对于某些 $r, R \in \mathbb{R}_{>0}$，有 $U_1 \subset U_2$ 和 $\varphi_1(U_1) = W_r$, $\varphi_2(U_2) = W_R$。映射$j := \varphi_2|_{U_2} \circ \varphi_1^{-1}$是一个开嵌入 $W_r \to W_R$。引理 2.5.9 表明，j 是乘以某个常数 $c \in \mathbb{C}^\times$。将 Tot(L^{-1}) 嵌入霍普夫曲面 $H(\lambda, \mu)$，使得$H(\lambda, \mu) - E_\lambda \simeq$ Tot(L^{-1}) 且 $H(\lambda, \mu) - E_\mu \simeq$ Tot(L')。根据 2.2.13，双全纯映射 j可扩张为 $H(\lambda, \mu)$ 的自同构 diag(1, c)。这个 $H(\lambda, \mu)$ 的自同构诱导出一个双全纯映射 $S_1 \to S_2$。

□

2.5.11. 我们只对法丛满足丢番图条件的椭圆曲线定义 Hopf 变换。对于任何具有全纯管状邻域的平方零椭圆曲线，同样的定义也适用。

Enoki 定理（定理 2.1.2）的一个等价表述是：Tot(L) 的每一种紧化，都是无穷远截面上 $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$ 的 Hopf 变换。这个结论可以部分推广到其他复曲面。

定理 2.5.12. 假设 M 是一个复曲面，它可以实现为紧复曲面 S 中一条自交数为零的椭圆曲线 E 的补集，且该曲线的法丛 L 满足丢番图条件。那么，M 的每一种极小解析紧化都是 E 中 S 的 Hopf 变换。

证明：丢番图条件意味着，X 中无穷远处的邻域与 Tot(L) 中去掉零截面后的一个邻域双全纯等价（定理 2.5.3）。因此，Tot(L) $- 0_L$ 在零截面附近的每一种部分紧化都会产生 M 的一种紧化，反之亦然。根据定理 2.3.2 和 Enoki 定理，Tot(L) $- 0_L$ 的每一种部分紧化都是在 0_L 处进行的 Hopf 变换。

□

推论 2.5.13. 对嫁接曲线上的 Hopf 变换再作 Hopf 变换，所得结果要么是 Hopf 变换，要么是初始曲面。Hopf 变换的逆也是 Hopf 变换。

证明：S 在 E 上的 Hopf 变换的复合是 $S - E$的紧化，因此是 Hopf 变换（定理 2.5.12）。

□

推论 2.5.14. 设 S 是一个带有平方零椭圆曲线 E 的射影曲面，且该曲线的法丛是丢番图的。假设 S 在 E 上的每个 Hopf 变换都是射影的。那么 $M := S - E$ 上的代数结构集合是可数的。

证明：由定理 2.5.12，M 的每一种紧化都是 E中 S 的 Hopf 变换。因此，每一种紧化都会在 M上诱导出一种代数结构。反过来，每一种代数结构都由某种紧化诱导而来。因此，M 的紧化（S'，E'）的集合是可数的（定理 2.3.2）。此外，可能的 E' 的集合也是可数的。因此，只需证明两个紧化（S'，E'）和（S''，E''）在 $E' \not\simeq E''$ 时会在 M上诱导出不同的代数结构。φ之间的代数同构：$S' - E' \to S'' - E''$会诱导出一个双有理态射 φ：$S' \dashrightarrow S''$。光滑曲面之间的双有理映射不能收缩非有理曲线，因此 $E' \simeq \varphi(E') \simeq E''$，矛盾。

□

3 含有自交数为零的椭圆曲线的曲面

3.1 Kodaira 维数

3.1.1. 设 S 是一个包含平方零椭圆曲线 E的复曲面（不一定是射影的）。那么它的 Kodaira 维数 κ（S）至多为一。事实上，假设 κ（S） $=2$。那么由线性系 $|nK_S|$ 诱导的映射 φ： $S \to \mathbb{P}^N$ 在 n充分大时是到其像上的双有理映射。每条自交数为零的椭圆曲线 E 都满足 $K_S \cdot E = 0$。因此，映射φ 必定收缩 E。然而，曲面之间的双有理映射不能收缩平方零曲线。

命题 3.1.2. 设 S 是一个含有自交数为零的椭圆曲线 $E \subset S$ 的曲面，且其法丛 $\nu_{E/S}$ 是非挠的。那么 $\kappa(S) = -\infty$。

证明：注意到 $\nu_{E/S} \simeq \mathcal{O}_E(-K_S|_E)$。我们分两种情况讨论。

情况 1： $\kappa = 0$。每个满足 $\kappa = 0$ 的极小曲面都具有挠典范丛，因此这种情况下结论显然成立。若 S 不是极小的，则 $K_S = \sum E_i + D$，其中 E_i 是例外曲线，而 D 是一个挠除子。于是，对于每条曲线 $E \subset S$， $K_S|_E$ 要么是挠的，要么具有正次数。

情况 2： $\kappa = 1$。关于 $n \gg 0$ 的线性系 $|nK_S|$ 诱导出一个态射 φ: $S \to \mathbb{P}^N$，其像是一条曲线。这是一个椭圆纤维化。 φ 的纤维中的椭圆曲线具有挠法丛，因此我们只需考虑水平曲线。对于每条水平曲线C，有 $nK_S|_C = (\varphi|_C)^* H$，其中 H 是超平面截面。因此，$K_S \cdot C$ 是正的。 □

3.1.3. Kodaira 维数为负的曲面属于以下类型之一：

- 有理;
- 与某个有理曲面双有理等价;
- 属于 VII 类，即非 K¨ahler 曲面，且 $\kappa = -\infty$ 和 $b_1 = 1$。

如果某个有理曲面的爆破 S 含有一条椭圆曲线，那么 S 是以椭圆曲线为底的有理曲面。

命题 3.1.4. 设 $E \subset S$ 是一条反典范椭圆曲线，其法丛 $\nu_{E/S}$为零度且非挠。假设 $b_1(S) = 0$。那么 S 是对 $\mathbb{P}^2$中的一个长度为九的子概形进行爆破所得的曲面。

证明： S 的典范类是反有效的，因此 S的所有多重属 $p_n := h^0(K_S^n)$都消失。由于 $b_1(S) = 0$，不规则度 $q = h^1(\mathcal{O}_Y)$也消失。卡斯特努沃定理推出 S 是有理的，特别是射影的 [BHPVdV15, VI (3.4)]。其极小模型要么是 $\mathbb{P}^2$，要么是希策布鲁赫曲面 $\mathbb{F}_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n))$。 E 在极小模型中的像是一条不可约反典范曲线：事实上， E 是反典范的，因此它与每条(-1)-曲线都横截于一点。由于 $K_S^2 = 0$， S 要么是$\mathbb{P}^2$ 中九个点的爆破，要么是 $\mathbb{F}_n$中八个点的爆破。

希策布鲁赫曲面 $\mathbb{F}_n$ 含有一个自交数为 $-n$ 的截面 C_n。由投影公式 $-K_{\mathbb{F}_n} \cdot C = 2 - n$，因此对于 $n > 2$，一条反典范曲线包含 C，且是可约的。

因此， S 的任意极小模型都是 $\mathbb{P}^2$、 $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 或 $\mathbb{F}_2$。$\mathbb{F}_2$ 中的一条反典范曲线与 C_2 不相交。在 C_2 之外一点处的爆破，同构于在 $\mathbb{P}^2$ 中一个长度为二的子概形处的爆破。在 $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上任意一点处的爆破，同构于在 $\mathbb{P}^2$ 中两点处的爆破。因此， S 是 $\mathbb{P}^2$ 的一次爆破。

□

3.2 有理曲面

我们先从以下引理开始。

引理 3.2.1. 设 S 为一个曲面， $C \subset S$ 为一条光滑曲线。那么自然映射$H_1(S-C,\mathbb{Q}) \to H_1(S,\mathbb{Q})$ 是满射。若 S是 K ¨ahler 的，则它也是单射。

证明：考察由分解$S = C \sqcup (S-C)$所关联的上同调长正合列：

$$\cdots \to H^2(S,\mathbb{Q}) \to H^2(C,\mathbb{Q}) \to H^3_c(S-C,\mathbb{Q}) \to H^3(S,\mathbb{Q}) \to H^3(C,\mathbb{Q}) = 0.$$

若 S是 K¨ahler 的，则 C在 $H_2(S)$ 中的类非平凡。因此映射 $H^2(S,\mathbb{Q}) \to H^2(C,\mathbb{Q})$ 是满射，并且 $H_1(S-C,\mathbb{Q}) \simeq H^3_c(S-C,\mathbb{Q}) \simeq H^3(S,\mathbb{Q}) \simeq H_1(S,\mathbb{Q})$。 □

下一个结论可由引理 3.2.1 轻易推出，我们略去其证明。

推论 ary 3.2.2. 1. 设 S 是有理曲面， $C \subset S$ 是一条光滑曲线。那么 $h_1(S-C) = 0$.

2. 设 S 是椭圆曲线上的有理曲面的爆破， $C \subset S$ 是一条光滑曲线。那么 $h_1(S-C) = 2$。

推论 3.2.3. 1. 有理曲面的霍普夫变换是有理的。

2. 与有理曲面双有理的曲面的霍普夫变换，要么与有理曲面双有理，要么与霍普夫曲面双有理。

证明：设 S 是有理曲面。引理 3.2.1 表明 $h_1(S-C) = 0$。考虑 S 在 C中的一个霍普夫变换（S'， C'）。空间 $S'-C'$ 与 $S-C$双全纯，因此$h_1(S'-C') = h_1(S-C)$。引理 3.2.1 表明 $h_1(S'-C') \geqslant h_1(S')$。因此，有理曲面的霍普夫变换满足 $h_1(S') = 0$。3.1.3 中的分类表明 S'是有理的。

根据前面的结论，对有理曲面进行爆破后再作 Hopf 变换，所得曲面不可能是有理的。由 3.1.3 可知，其 Hopf 变换要么是有理曲面的爆破，要么是霍普夫曲面。

□

3.2.4. 取 $\mathbb{P}^2$ 中的一条椭圆曲线 E 和九个点 $p_1,...p_9 \in E$ （允许这些点重合）。将 $\mathbb{P}^2$ 的超平面截面记为 H。假设线丛$\mathcal{O}_E(3H-p_1-...-p_9)$满足丢番图条件（定义 2.5.2）。此线丛与在 $p_1,...p_9$中对 X 进行爆破后， E 的严格变换的法丛同构。因此， X 在 E 中的 Hopf 变换 Y 有定义。

定理 3.2.5。任意的 Y 的 Hopf 变换 X 都是对 $\mathbb{P}^2$ 中一个长度为九的子概形 γ 进行爆破所得。嫁接曲线是 Y 中椭圆曲线 $F \subset \mathbb{P}^2$ 的严格原像，该曲线经过 γ。

证明：步骤 1。曲面 (X, E) 是对数卡拉比–丘，也就是说，$K_X + E = 0$。这意味着 X 上存在一个亚纯辛形式，它沿着 $E \subset X$ 有一阶极点。由 2.4.8 可知，Hopf 变换是沿全纯辛同胚进行的粘合，因此 Y 带有一个沿 $F \subset Y$ 有一阶极点的辛形式。于是 $K_Y + F = 0$。

步骤 2. 根据推论 3.2.3，Y是有理的。此外，它的反典范除子是有效的。根据命题 3.1.4，Y 是对 $\mathbb{P}^2$中的一个长度为九的子概形进行爆破所得，而 $F \subset Y$ 是唯一经过该子概形的平面三次曲线的严格变换。 □

下面的问题仍未解决：

问题 1. 确定九个点 q_1、$...q_9 \in \mathbb{P}^2$，使得 $Y \simeq \mathrm{Bl}_{q_1,\ ..q_9}(\mathbb{P}^2)$。

定理 3.2.6. 设 X 是对 $\mathbb{P}^2$ 中一个非常一般的长度为九的子概形 γ进行爆破所得，且$E \subset X$ 是经过 γ的平面三次曲线的严格变换。那么，$X - E$ 的解析化具有可数多个代数结构。

证明：根据推论2.5.14，该结论成立，因为 X 的每个 Hopf 变换都是射影的。

□

3.2.7. 存在含有一条非反典范、自交数为零的椭圆曲线的有理曲面。设 $Q \subset \mathbb{P}^2$ 是一条有两个节点的平面四次曲线。将这两个节点爆破；其严格变换 $\tilde{Q}$的自交数为 8。再对 Q上的另外八个点进行爆破，就得到一条位于在十个点处爆破的 $\mathbb{P}^2$ 上的自交数为零的椭圆曲线。注意，“在给定点处有一个节点”是一个余维三条件，因此，在 p、$q \in \mathbb{P}^2$ 处有两个节点的平面四次曲线构成一个八维空间。因此，含有两个指定点的一般十点元组唯一确定一条经过这些点且有两个节点的平面四次曲线。

3.2.8. 根据 [KU19，引理 2.2]，，具有非挠法丛的平方零椭圆曲线的穿孔邻域上不存在非常值函数。因此，定理 3.2.6 中的这些曲面$X - E$ 都不是施泰因曲面。

3.3 VII 类曲面

我们将在下文证明，所有包含一条法丛为非挠零度的椭圆曲线的 VII 类曲面都是 Hopf 曲面。

命题 3.3.1. 设 S 是一个 VII 类曲面，$E \subset S$ 是一条法丛为非挠零度的光滑椭圆曲线 $\nu_{E/S}$。那么，对于任意 n、$m \in \mathbb{Z}$，S 是一个主霍普夫曲面 H（λ，μ），且 $\lambda^n \neq \mu^m$；或者是 2.3.1 中的一个次级霍普夫曲面 H（λ，μ）$/\mu_n$；或者是该曲面在远离 E 处的爆破。

证明：光滑的非 K¨ahler 曲面上的每条曲线的自交数均非正 [BHPVdV15, Ch. IV, Thm. 2. 14]。将这一事实应用于 S 的极小模型，可得自交数为零的曲线与例外曲线不相交。

如果 $E \subset S$ 是 VII 类极小曲面 S 上的一条非奇异零自交曲线，那么 S 是一个霍普夫曲面 [Eno81，命题 4.12]。含有一条法丛为非挠的椭圆曲线的 Hopf 曲面已在 2.2.6 和 2.3.1 中分类。

□

4 解析 Grothendieck 群

定义 4.1.1。复代数簇的 Grothendieck 群 $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ 是由 $\mathbb{C}$-簇的类生成，并满足切割关系的阿贝尔群：

$$[X - Y] = [X] - [Y],$$

其中 $Y \subset X$ 是一个闭代数子簇。[2]

我们引入这个群的一个有趣的商。

定义 4.1.2. 簇 K_0^{an} 的解析 Grothendieck 群是 $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ 对差 $[U] - [V]$ 取商所得，其中 U 和 V 是双全纯簇。

命题 4.1.3. K_0^{an} 中任意两条椭圆曲线的类相等。

证明：步骤 1. 假设 E、F 是两条椭圆曲线，且 $L \to E$、$L' \to F$ 是两个解析协边的丢番图线丛。那么 $[E] = [F] \in K_0^{an}$。事实上，设 X 是对 $\mathbb{P}^2$ 中九个点进行爆破所得的簇，使得经过这些点的三次曲线与 E 同构，且其严格变换的法丛与 L 同构。即使在 $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ 中，也有 $[X] = \mathbb{L}^2 + 10\mathbb{L} + [\mathrm{pt}],$，其中 $\mathbb{L}$ 是仿射直线的类。根据定理 3.2.5，X 在 E 中沿 $L' \to F$ 的 Hopf 变换 Y 也是对一个长度为九的子概形中的 $\mathbb{P}^2$ 进行爆破所得。因此 $[Y] = \mathbb{L}^2 + 10\mathbb{L} + 1 = [X]$。由关系 $[X] = [E] + [X - E]$ 和 $[Y] = [F] + [Y - F]$ 可得

$$[E]^{an} = [X]^{an} - [X - E]^{an} = [Y]^{an} - [Y - F]^{an} = [F]^{an} \in K_0^{an}.$$

步骤 2. 对任意一对椭圆曲线 E, F，都存在一个包含 E 和 F的主霍普夫曲面 $H = H_{E,\ F}$。固定 E后，使法丛 $\nu_{E/H_{E,\ F}}$ 不是丢番图的曲线 F 构成的集合，在椭圆曲线模空间中是稀疏集。因此，对于任意两条曲线 E, E'，相应稀疏集的补集有非空交集。令 F 为该交集中的任意一条曲线。由步骤 1 可知，$[E]^{an} = [F]^{an}$ 和 $[F]^{an} = [E']^{an}$，故得证。 □

4.1.4. 尽管 K_0^{an}中的椭圆曲线类彼此相同，但 $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ 中不同椭圆曲线的类彼此不同，这可由 Franziska Bittner 对 [Bit04] 中 $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ 的描述得出。她证明了 $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ 由光滑射影簇的类模关系生成

$$[X] - [Y] = [Bl_Y X] - [E], \tag{5}$$

其中，Y 是光滑射影簇 X 中的光滑子簇，$E \subset Bl_Y X$ 是将 X 在 Y中爆破所得的例外因子。这个结果非常强大，因为它使我们能够仅通过验证关系式 (5)，就构造动机测度（即从 $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$映射到阿贝尔群的映射）。例如，考虑这样一个定义在光滑射影簇上的泛函：将一个簇映射到其稳定双有理等价类。这个泛函可下降为一个动机测度

$$K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{Z}[\mathrm{SB}]$$

[2]实际上，这是一个带有乘法 $[U] \cdot [V] = [U \times_k V]$ 的环，但我们不使用它。

其取值属于由稳定双有理等价类生成的自由阿贝尔群。事实上， $Bl_Y X$与 X 双有理，且 E 与 Y 稳定双有理等价，因此关系 (5) 得以保留。我们看到，非稳定双有理等价的簇在 $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ 中有不同的类。两条曲线稳定双有理等价，当且仅当它们同构 [Har13, V Ex. 2.1]。特别地，非同构的椭圆曲线在 $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ 中有不同的类。

4.1.5. 拓扑欧拉示性数是一个同态 $K_0^{an} \to \mathbb{Z}$。然而，我们未能找到更有趣的解析动机测度。这引出了以下

问题 2. 椭圆曲线在 K_0^{an} 中的类是平凡的吗？如果是， K_0^{an} 与 $\mathbb{Z}$ 同构吗?

致谢。我们感谢 Piotr Achinger，他提出了第 4 节的构想。衷心感谢 Robert Friedman、Micha l Kapustka、Takayuki Koike、Aleksandr Petrov 和 Giulia Sacc`a 提供富有见地的讨论，也感谢 Nathan Chen、Andr´es Fern´andez Herrero 和 Morena Porzio 阅读论文的早期草稿。

参考文献

[Arn76] Vladimir I. Arnold. 微分方程不变流形的分岔及椭圆曲线邻域中的正规形。《函数分析及其应用》，10(4):249–259，1976。[BHPVdV15] Wolf Barth、Klaus Hulek、Chris Peters 和 Antonius Van de Ven。《紧复曲面》，第 4 卷。施普林格，2015。[Bit04] Franziska Bittner. 特征为零的簇的普适欧拉示性数。《数学汇编》，140(4):1011–1032，2004。[BPvS23] J´er´emy Blanc、Pierre-Marie Poloni 和 Immanuel van Santen. 射影空间中超曲面的补集。2023。arXiv:2301.13040。[Eno81] Ichiro Enoki. 带曲线的 VII_0 类曲面。《东北数学杂志》，33:453–492，1981。[Eno82] Ichiro Enoki. 关于可紧化复解析曲面。《数学新进展》，67:189–212，1982。[FM13] Robert Friedman 和 John W Morgan. 光滑四维流形与复曲面，第 27 卷。Springer Science & Business Media，2013。[Har13] Robin Hartshorne. 代数几何，第 52 卷。Springer Science & Business Media，2013。[Jel15] Zbigniew Jelonek. 具有无穷多个异质模型的仿射流形的简单例子。Adv. Math.，284:112–121，2015。[Kod66] Kunihiko Kodaira. 紧复解析曲面的结构，II。《美国数学杂志》，88(3):682–721，1966。

[KT19] 马克西姆·孔采维奇和尤里·奇肯克尔。双有理类型的特化。《数学新进展》，217:415–432，2019。[KU19] Takayuki Koike 和上原孝人。K3 曲面的粘合构造。2019。arXiv:1903.01444。[Nee89] 阿姆农·尼曼。上田理论：定理与问题，第 4 卷。美国数学会，1989。[NS19] 约翰内斯·尼凯斯和叶夫根尼·申德尔。动机近邻纤维与稳定有理性的退化。《数学新进展》，217:377–413，2019。[Ued82] 上田哲生。关于拓扑平凡法丛紧复曲线的邻域。《京都大学数学杂志》，22(4):583–607，1982。

Anna Abasheva
Columbia University,
Department of Mathematics,
2990 Broadway,New York, NY, USA
anabasheva(at)math.columbia.edu

Rodion Déev
Institute of Mathematics,
Polish Academy of Sciences,
Śniadeckich 8,
Warsaw, Poland
rdeev(at)impan.pl